۲۴. یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، تاس می‌ریزیم. اگر «پشت» بیاید، دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۲۵. به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

۲۶. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۷. سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

۲۸. A و B و پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A)=۰/۴$ ، $P(B|A)=۰/۲۵$ و $P(B)=۰/۳$ باشد، $P(B|A')$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۹. یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۲) $\frac{۴۱}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۷۲}$

۳۰. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۳۶}$

۳۱. در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

۳۲. در دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(A\cap B)=۰/۱$ ، $P(A\cup B)=۰/۶$ و با فرض $P(B')>P(B)$ ، احتمال وقوع پیشامد B ، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

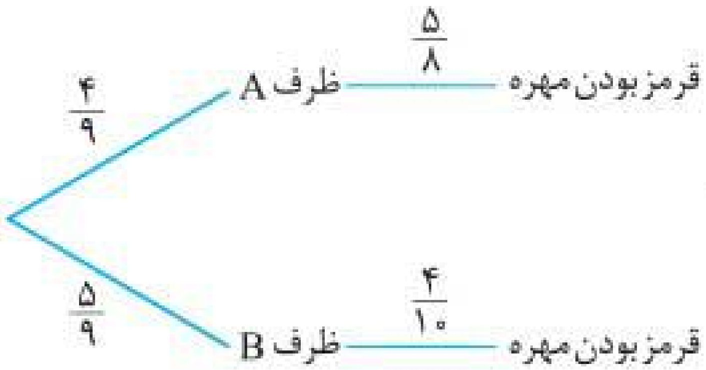
۱) $۰/۴$ ۲) $۰/۳$ ۳) $۰/۲$ ۴) $۰/۲۵$

با استفاده از اصل متمم می‌توانیم تعداد این پیشامدها را محاسبه کنیم:

$$\text{تعداد پیشامدهای شامل حداقل یک عدد اول}=\text{تعداد کل پیشامدها}-\text{تعداد پیشامدهای فاقد عدد اول}=2^6-2^3=64-8=56$$

۲۳. گزینهٔ «۱»

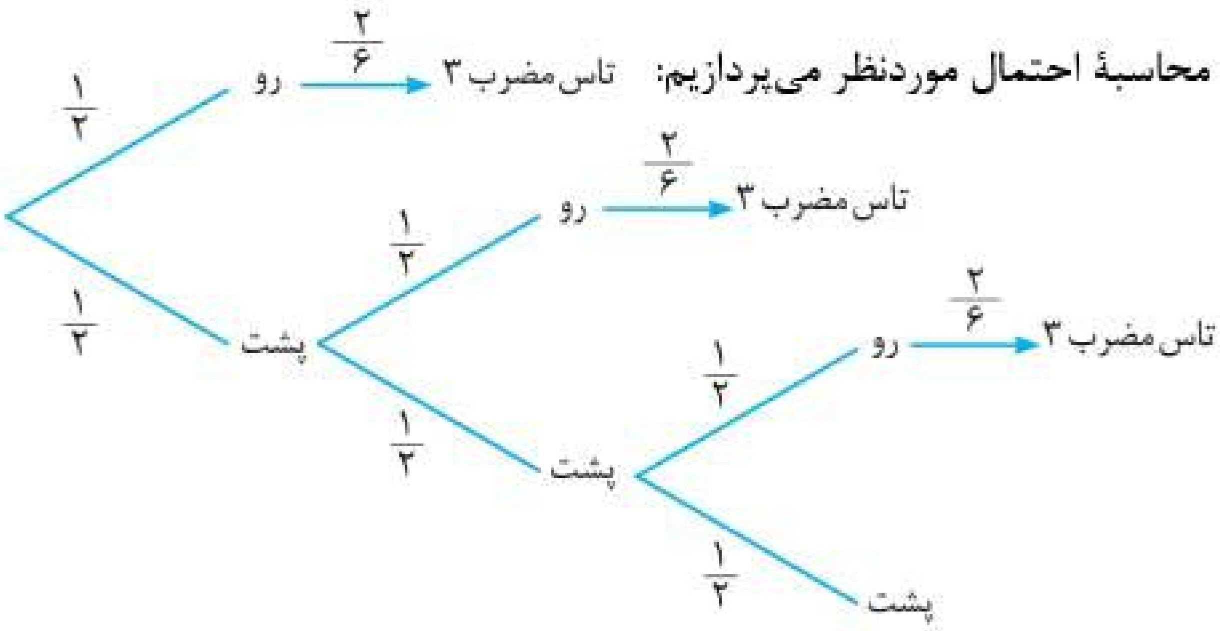
ابتدا بررسی می‌کنیم که مهرهٔ انتخابی از ظرف C با کدام احتمال متعلق به ظرف A و با کدام احتمال متعلق به ظرف B است. داریم:



$$\Rightarrow P=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{2}$$

۲۴. گزینهٔ «۲»

به کمک نمودار درختی، به محاسبهٔ احتمال موردنظر می‌پردازیم:



$$P=(\underset{\text{بار اول «رو»}}{\frac{1}{2}}\times\overset{\text{تاس مضرب ۳}}{\frac{2}{6}})+(\underset{\text{بار اول «پشت»}}{\frac{1}{2}}\times\overset{\text{بار دوم «رو»}}{\frac{1}{2}}\times\underset{\text{تاس مضرب ۳}}{\frac{2}{6}})+(\overbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}^{\text{اول و دوم «پشت»}}+\underset{\text{بار سوم «رو»}}{\frac{1}{2}}\times\overset{\text{تاس مضرب ۳}}{\frac{2}{6}})\Rightarrow P=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})\times\frac{2}{6}=\frac{7}{24}$$

۲۵. گزینهٔ «۳»

پیشامد A را مجموعهٔ مضارب ۳ دورقمی و پیشامد B را مجموعهٔ مضارب ۵ دورقمی در نظر می‌گیریم. $P(A\cup B)$ را می‌خواهیم. داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{30+18-6}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

۲۶. گزینهٔ «۱»

ابتدا با توجه به شرط داده شده، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای جدید را می‌یابیم:

تعداد حالت‌هایی که مجموع سه تاس فرد شود:

$$\underbrace{3^3}_{\text{هر سه فرد}}+\underbrace{\binom{3}{2}\times 3^3}_{\text{دو تاس زوج و یکی فرد}}=27+81=108$$

گسسته

استدلال و نظریهٔ اعداد

روش‌های استدلال در ریاضی

۱ اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)
۲ اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)
۳ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)
۴ اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)
۵ مثال نقض

۱- اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

روش نتیجه‌گیری با استفاده از مطالبی که درستی آن‌ها نشان داده شده است یا حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، «اثبات مستقیم» یا «استدلال استنتاجی» نام دارد.

۲- اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد آن را در نظر بگیریم. فرض کنید « a زوج است» را با p، « a فرد است» را با q و « $a(a+1)$ زوج است» را با r نشان دهیم. باید ثابت کنیم $(p\vee q)\Rightarrow r$ گزاره‌ای درست است. می‌توانیم با استفاده از هم‌ارزی زیر، گزارهٔ مورد نظر را ثابت کنیم.

$$(p\vee q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$$

در حالت کلی، اگر بخواهیم گزاره‌ای را به روش اشباع ثابت کنیم، باید n حالت مختلف در این اثبات بررسی شود، می‌توانیم با استفاده از هم‌ارزی زیر، گزارهٔ مورد نظر را ثابت کنیم.

$$(p_1\vee p_2\vee p_3\vee\ldots\vee p_n)\Rightarrow r\equiv(p_1\Rightarrow r)\wedge(p_2\Rightarrow r)\wedge\ldots\wedge(p_n\Rightarrow r)$$

تست در اثبات کدام گزاره، از روش اشباع استفاده نشده است؟

۱) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، آن‌گاه a^2+b^2 عددی زوج است.

۲) فرض کنید $S=\{1,2,3,4,5,6\}$، $A=\{3,4\}$ و $n\in S$، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، آن‌گاه $n\in A$.

۳) برای هر عدد طبیعی n، عدد n^2-5n+7 عددی فرد است.

۴) مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است.

پاسخ گزینهٔ «۴» اثبات گزاره‌ها، در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» به روش اشباع امکان‌پذیر است. به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: از آن‌جایی که ab عددی فرد می‌باشد، پس یک حالت وجود دارد و آن عبارت است از این‌که a عددی فرد و b نیز فرد است، بنابراین $a=2k+1$ و $b=2k'+1$، $k,k'\in\mathbb{Z}$ و داریم:

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1$$

$$=4k^2+4k+4k'^2+4k'+2=2(\underbrace{2k^2+2k+2k'^2+2k'+1}_{k''\in\mathbb{Z}})=2k''$$

پاسخ گزینهٔ «۴» هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $6q+1$ یا $6q-1$ نوشت. بنابراین داریم:

$$p=6q+1 \Rightarrow p^2-1=(6q+1)^2-1=36q^2+12q+1-1=12q(3q+1)$$

$$p=6q-1 \Rightarrow p^2-1=(6q-1)^2-1=36q^2-12q+1-1=12q(3q-1)$$

q و $3q\pm1$ از لحاظ زوج یا فرد بودن، مشابه هم نیستند (می‌توانیم امتحان کنیم) بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها همواره عددی زوج است، پس $q(3q\pm1)=2k$ و در نتیجه: $p^2-1=24k$

۳- اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه با استفاده از روش استدلال استنتاجی به یک تناقض می‌رسیم. از این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست بوده است و در نتیجه حکم اولیه درست است. این روش یک اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف است.
اساس اثبات به روش غیرمستقیم، هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ یا همان عکس نقیض گزارهٔ شرطی است.

تست **چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست نیست؟**

الف) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

پ) عکس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۱» برای بررسی گزاره‌ها از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر $r, r' \in Q$ و $x \notin Q$، در این صورت فرض خلف در این گزاره‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم، داریم:

الف) $r+x=r' \Rightarrow \underbrace{x}_{\notin Q}=\underbrace{r'-r}_{\in Q} \Rightarrow$ به تناقض می‌رسیم

ب) $r\times x=r' \Rightarrow \underbrace{x}_{\notin Q}=\underbrace{\frac{r'}{r}}_{\in Q} \Rightarrow$ به تناقض می‌رسیم

پ) $\frac{1}{x}=r \Rightarrow \underbrace{x}_{\notin Q}=\underbrace{\frac{1}{r}}_{\in Q} \Rightarrow$ به تناقض می‌رسیم

بنابراین همهٔ گزاره‌ها به روش برهان خلف اثبات شده و همواره درست هستند.

اگر a_1، a_2 و a_3 سه عدد صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد ولی با ترتیبی متفاوت باشند، در این صورت بزرگ‌ترین عددی که عبارت $(a_1+b_1)(2a_2+2b_2)(3a_3+3b_3)$ حتماً مضرب آن است، کدام عدد است؟

۱) ۶　　۲) ۱۲　　۳) ۲۴　　۴) ۱۸

پاسخ گزینهٔ «۲» اگر بخواهیم برای a_1، a_2 و a_3 مثالی بزنیم، می‌توانیم آن‌ها را به ترتیب ۱، ۲ و ۳ بگیریم و b_1، b_2 و b_3 هم می‌توان به صورت ۳، ۲ و ۱ در نظر گرفت. در این صورت عبارت داده‌شده برابر است با: $(a_1+b_1)(2a_2+2b_2)(3a_3+3b_3)=(1+3)(4+4)(9+3)=384$

که مضرب ۲۴، ۱۲ و ۶ است، پس فعلاً گزینهٔ «۴» رد می‌شود. حدس می‌زنیم احتمالاً باید همواره مضرب ۱۲ باشد و آن را به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم. ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(a_1+b_1)(2(a_2+b_2))(3(a_3+b_3))=6(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$$

بخش‌پذیری

عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است، یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ و یا b بر a بخش‌پذیر است، هرگاه عدد صحیحی چون q وجود داشته باشد به طوری که: $b=aq$

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم: $a \nmid b$

خواص بخش‌پذیری

۱) $a|a \ ; \ \forall a\in\mathbb{Z}$

۲) $\pm 1|a \ ; \ \forall a\in\mathbb{Z}$

۳) $a|0 \ ; \ \forall a\in\mathbb{Z}$

۴) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

۵) $a|b\wedge b|a \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$

۶) $a|b \begin{cases} \xleftrightarrow{m\in\mathbb{Z}} ma|mb \\ \xleftrightarrow[n\in\mathbb{N}]{} a^n|b^n \end{cases}$

۷) $a|b\wedge a|c \Rightarrow a|mb\pm nc \ ; \ (m,n\in\mathbb{Z})$

۸) $a|b \Rightarrow |a|\le|b| \ ; \ (b\neq 0)$

۹) $a|b\wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

تست اگر $a|9k+4$ و $a|5k+3$، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} \\ a|5k+3 \xrightarrow{\times 9} \end{cases} \begin{cases} a|45k+20 \\ a|45k+27 \end{cases} \Rightarrow a|(45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a|7 \Rightarrow a=1 \text{ یا } 7$$

اگر $k\in\mathbb{Z}$ و $5|4k+1$ باشند، در این صورت بزرگ‌ترین عددی که عبارت $16k^2+28k+6$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۵ ۴) ۵۰

پاسخ گزینهٔ «۴»

از رابطهٔ $5|4k+1$ نتیجه می‌گیریم $4k+1=5q$. حال عبارت $16k^2+28k+6$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$16k^2+28k+6=(16k^2+8k+1)+(20k+5)=(4k+1)^2+5(4k+1)$$

$$\xlongequal{4k+1=5q}(5q)^2+5(5q)=25q^2+25q=25\underbrace{q(q+1)}_{\text{همواره عددی زوج است}}=25\times 2q'=50q' \Rightarrow 50|16k^2+28k+6$$

هم‌چنین می‌توانیم به جای k، عدد ۱ را قرار دهیم تا به جواب موردنظر برسیم.

اگر n عددی زوج باشد، بزرگ‌ترین عددی که همواره n^3-4n را می‌شمارد، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۴۸

پاسخ گزینهٔ «۴» چون n زوج است پس $n=2k$ و داریم:

$$n^3-4n=n(n-2)(n+2)=2k(2k-2)(2k+2)=8(k-1)(k)(k+1)$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب $3!$ یعنی ۶ است پس این عبارت همواره بر $48=6\times 8$ بخش‌پذیر است.

عدد اول

عددی است طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز ۱ و خودش نداشته باشد.

۱. عدد ۲ تنها عدد اول زوج است.
۲. ۲ و ۳ تنها دو عدد اول متوالی هستند.
۳. تعداد اعداد اول، نامتناهی است.
۴. اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$، در این صورت $a=1$ یا $a=p$.
۵. تعداد عوامل عدد اول p در $n!$ برابر است با: (نماد [ ]، جزء صحیح می‌باشد.)

$$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots$$

تست چند عدد اول p وجود دارد به طوری که $168p+1$ مجذور یک عدد طبیعی باشند؟

(ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۲» می‌دانیم $168p+1$ عددی فرد است. پس اگر بخواهد مربع کامل باشد، مربع یک عدد فرد است یعنی:

$$168p+1=(2k+1)^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow 42p=k(k+1)$$

پس باید $42p$، حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد. حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱. $42, p \Rightarrow p=41, 43$
۲. $21, 2p \Rightarrow p=11$
۳. $14, 3p \Rightarrow p=5$
۴. $7, 6p \Rightarrow p=1$ غیرقابل‌قبول

پس ۴ مقدار $5, 11, 41, 43$ برای p وجود دارد تا $168p+1$ مربع کامل شود.

قضیهٔ تقسیم

اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، اعداد صحیح و منحصر به فرد r و q یافت می‌شوند به طوری که:

$$\underbrace{a}_{\text{مقسوم}}=\overbrace{b}^{\text{مقسوم‌علیه}}\underbrace{q}_{\text{خارج قسمت}}+\overbrace{r}^{\text{باقی‌مانده}} \quad ; \quad \underbrace{0 \le r < b}_{\text{شرط تقسیم}}$$

نکته: در قضیهٔ تقسیم داریم: $q=[\frac{a}{b}]$

تست خارج قسمت تقسیم $12!-1$ بر ۱۲ کدام است؟

۱) $11!$ ۲) $11!+1$ ۳) $11!-1$ ۴) $12!-10$

پاسخ گزینهٔ «۳»

با توجه به نکتهٔ قبل داریم:

$$q=[\frac{a}{b}]=[\frac{12!-1}{12}]=[11!-\frac{1}{12}]=11!+[-\frac{1}{12}]=11!-1$$

در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج قسمت، مجذور باقی‌مانده است. چند عدد برای b می‌توان یافت؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به داده‌های مسئله، قضیهٔ تقسیم را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$165=br^2+r \Rightarrow 165=r(br+1) \Rightarrow r(br+1)=1\times165=3\times55=5\times33=11\times15$$

۸. اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > 9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقیماندهٔ آن باشد، احتمال این‌که عدد $a - 9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{13}{22}$ ۲) $\frac{6}{11}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{11}$

۹. اگر $x \in [5]_{12}$ و $y \in [3]_8$ باشد، $x - y$ عضو کدام مجموعه است؟

۱) $[0]_4$ ۲) $[1]_4$ ۳) $[2]_4$ ۴) $[3]_4$

۱۰. به ازای چند عدد سه‌رقمی مانند a، رابطهٔ $13^a + 18 \overset{17}{\equiv} 0$ برقرار است؟

۱) ۲۲۴ ۲) ۲۲۵ ۳) ۲۲۶ ۴) ۲۲۷

۱۱. برای یک مجموعهٔ ۱۰۰نفری از شهروندان یک شهر یک کد شش رقمی به‌صورت زیر ساخته می‌شود: دو رقم سمت راست، سن شهروند (۰۱ تا ۸۵)، سه رقم بعدی تعداد افراد هم‌سن (۱۰۰–۰۰۰) و رقم ششم جنسیت (مرد ۱، زن۲) اختصاص می‌یابد. سپس کدهای به‌دست آمده را به‌ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می‌دهیم. سن مورد انتظار برای ده‌هزارمین عضو مجموعه، کدام است؟ (اگر چه ممکن است شهروندی به آن اختصاص نیابد.) (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۱۲. اگر دو عدد $6x^2$ و $x-1$ دارای رقم یکان یکسان باشند، x به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $[7]_{10}$ ۲) $[3]_{10}$ ۳) $[1]_{10}$ ۴) $[7]_{10} \cup [3]_{10}$

۱۳. مجموع باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال این‌که باقیماندهٔ تقسیم $a - 8$ بر ۳۶، برابر ۲۱ باشد، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{6}{13}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{4}{13}$ ۴) $\frac{3}{13}$

۱۴. اگر m بزرگترین عدد طبیعی باشد که $(10 - m)! \overset{26}{\equiv} 36$، آنگاه باقیماندهٔ تقسیم m^{123} بر ۱۵، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵. اگر باقیماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقیمانده تقیسم این عدد بر ۶۶، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۲۹ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۱۶. به‌ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $\alpha \mid 11n + 3$، $\alpha \mid 5n + 4$ و $\alpha \neq 1$ آن‌گاه تعداد اعداد دو رقمی n در این حالت کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷. قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز، به‌ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا خریداری کرد؟ (ریاضی ۹۸)

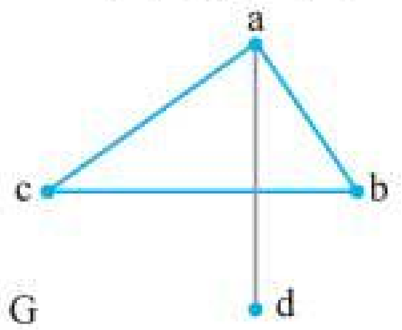
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

گسسته

گراف

گراف

مجموعه‌ای است متشکل از رئوس و یال‌هایی که این رئوس را به هم متصل می‌کنند. مجموعهٔ رئوس گراف G را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌های گراف G را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{ad,ab,ac,bc\} \end{cases}$$

مرتبه و اندازهٔ گراف

به تعداد رئوس یک گراف، مرتبهٔ یک گراف گفته می‌شود و با p نشان می‌دهیم. هم‌چنین به تعداد یال‌های یک گراف، اندازهٔ یک گراف گفته می‌شود و با q نشان می‌دهیم. ($p(G)$ و $q(G)$، مرتبه و اندازهٔ گراف G هستند.)

» **درجهٔ یک رأس:** درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند. درجهٔ رأس v را با $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد، آن را رأس فرد و اگر زوج باشد، آن را رأس زوج می‌نامیم. به عنوان مثال در گراف بالا داریم:

$$\deg(d)=۱\ ,\ \deg(a)=۳\ ,\ \deg(b)=۲\ ,\ \deg(c)=۲$$

هم‌چنین بزرگ‌ترین عدد در بین درجهٔ رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم. در گراف بالا $\Delta(G)=۳$ و $\delta(G)=۱$ است. به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد، یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (ایزوله) می‌گوییم.

نکات درجهٔ رئوس گراف

۱ در گراف مرتبهٔ p: $\quad ۰ \le \deg(v_i) \le p-۱$

۲ مجموع درجه‌های رئوس یک گراف دو برابر اندازهٔ آن است. $\quad \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i)=۲q$

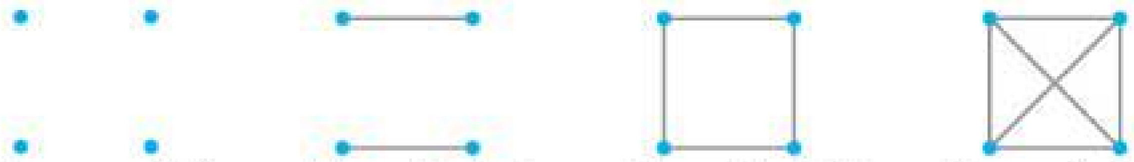
۳ تعداد رئوس فرد یک گراف زوج است. تعداد رئوس زوج یک گراف، از نظر زوج یا فرد بودن، مشابه مرتبهٔ گراف (p) است.

۴ در هر گراف با بیش از یک رأس، رئوس با درجهٔ تکراری وجود دارند.

۵ اگر تعداد m رأس از گرافی از درجهٔ غیر صفر باشند، داریم: $\quad ۰ \le \deg(v_i) \le m-۱$

۶ چنانچه تعداد m رأس گرافی از درجهٔ غیر صفر باشند، k رأس از درجهٔ $\Delta = m-۱$ داشته باشد، آنگاه داریم: $\quad \delta \ge k$

گراف k ـ منتظم: گرافی که درجهٔ همهٔ رئوس آن با هم برابر و مساوی با k است را گراف k ـ منتظم می‌نامند.



گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۴ — گراف ۲ ـ منتظم مرتبهٔ ۴ — گراف ۱ ـ منتظم مرتبهٔ ۴ — گراف ۰ ـ منتظم مرتبهٔ ۴

نکته‌ها:

۱) گراف G، k ـ منتظم است اگر و تنها اگر: $\Delta(G) = \delta(G) = k$

۲) در گراف k ـ منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q داریم: $p \cdot k = 2q$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که p و k همزمان نمی‌توانند فرد باشند.

تست کدام گزینه می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱) در یک گروه ۷ نفری، هر شخص دقیقاً ۳ نفر در آن گروه را می‌شناسد.

۲) در یک جمع ۱۳ نفری، همهٔ افراد ۵ دوست در آن جمع داشته باشند. (دوستی را رابطه‌ای دو طرفه در نظر می‌گیریم یعنی یا هر دو نفر با هم دوست هستند و یا هیچ‌کدام با دیگری دوست نیست.)

۳) از ۱۵ نفر شرکت‌کننده در یک مهمانی، ۱۴ نفر دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند و نفر پانزدهم دقیقاً با ۳ نفر دست داده است.

۴) ۱۰ نفر در ۱۰ شهر مختلف ساکن هستند و قرار است هر کدام با ۳ نفر دیگر نامه‌نگاری کنند. (نامه‌نگاری رابطه‌ای دوطرفه است.)

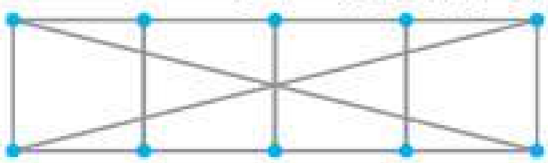
پاسخ گزینهٔ «۴» بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: هر نفر را با یک رأس نشان می‌دهیم. هر دو نفر که یکدیگر را می‌شناسند، توسط یالی به هم وصل می‌شوند. چون هر شخص دقیقاً ۳ نفر را می‌شناسد، پس درجهٔ هر رأس برابر ۳ است. پس یک گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۷ داریم و می‌دانیم چنین گرافی وجود ندارد زیرا p (مرتبه) و k (درجه) در گراف‌های منتظم نمی‌توانند هر دو فرد باشند.

گزینهٔ ۲: درست مشابه گزینهٔ ۱، یک گراف ۵ ـ منتظم مرتبهٔ ۱۳ داریم که با توجه به این‌که p و k هر دو فرد هستند، این اتفاق غیر ممکن است.

گزینهٔ ۳: در این‌جا اگر هر فرد را یک رأس در نظر بگیریم، ۱۴ رأس از درجهٔ ۲ و ۱ رأس از درجهٔ ۳ داریم. حتماً به خاطر دارید که تعداد رئوس فرد گراف، همواره زوج است اما در این‌جا فقط یک رأس فرد (رأس درجهٔ ۳) داریم. پس چنین گرافی وجود ندارد.

گزینهٔ ۴: در این‌جا یک گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۱۰ داریم و می‌دانیم چنین گرافی می‌تواند وجود داشته باشد.



گراف تهی: گراف فاقد یال را گراف تهی می‌نامیم. گراف تهی از مرتبهٔ p را با نماد $\overline{K}_p$ نشان می‌دهیم.

با توجه به نکتهٔ مربوط به گراف مکمل داریم:

$$۳ \le ۳+\gamma(\overline{G}) \le ۸+۱ \Rightarrow ۰ \le \gamma(\overline{G}) \le ۶$$

$$۲ \le ۳\times\gamma(\overline{G}) \le ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \le \gamma(\overline{G}) \le \frac{۸}{۳}$$

با توجه به روابط بالا، $\gamma(\overline{G})=۱$ یا $\gamma(\overline{G})=۲$ است. می‌دانیم زمانی $\gamma(G)=۱$ است که گراف مکمل G یعنی $\overline{G}$، حداقل یک رأس فول (درجهٔ ۷) داشته باشد. با توجه به این‌که گراف G، ۲ـ منتظم مرتبهٔ ۸ است، پس $\overline{G}$، ۵ـ منتظم مرتبهٔ ۸ بوده و رأس درجهٔ ۷ ندارد، پس $\gamma(\overline{G})=۲$ می‌شود.

نکته:

در گراف G از مرتبهٔ n، اگر رأس تنها (ایزوله) وجود نداشته باشد، آن‌گاه: $\gamma(G) \le \frac{n}{۲}$

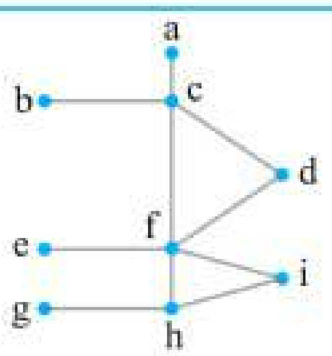
مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رئوس دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

نکته:

هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G، همواره یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف G نیز می‌باشد. اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست، یعنی هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف G، لزوماً یک γـ مجموعه نیست.

تست کدام‌یک از مجموعه‌های داده شده، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و غیر مینیمم برای گراف مقابل است؟



۱) $\{c,f,h\}$

۲) $\{a,b,f,g\}$

۳) $\{a,f,b\}$

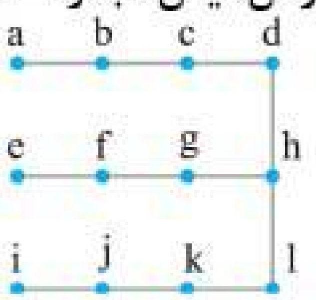
۴) $\{b,e,f,g\}$

پاسخ گزینهٔ «۲» گزینهٔ «۱»: یعنی مجموعهٔ $\{c,f,h\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و مینیمال است. مجموعهٔ گزینهٔ «۲»، یعنی $\{a,b,f,g\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، زیرا اگر رئوس a و b حذف شوند، خود a و b احاطه نمی‌شوند و اگر g حذف شود، خود g احاطه نمی‌شود و البته با حذف f، رئوسی مثل i احاطه نمی‌شود، پس جواب مسئله همین گزینه است، یعنی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است اما مینیمم نیست.
گزینه‌های «۳» و «۴» نیز احاطه‌گر نیستند، زیرا به ترتیب g و a را احاطه نمی‌کنند.

نکته:

اگر G گرافی فاقد رأس تنها باشد و A یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف G فرض شود، آن‌گاه مجموعهٔ $V(G)-A$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G است.

تست مجموعهٔ احاطه‌گر گراف زیر، حداکثر m عضوی است. با حذف چند رأس، این مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌شود؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. درجه رئوس یک گراف به صورت ۳,۳,۳,۳,۲,۱ است. چند مسیر متمایز بین دو رأس به درجه‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. در گراف کامل از مرتبهٔ ۵، یال ab حذف شده است. چند دور به طول ۴ در این گراف موجود است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳. طه، مسعود، سهیل، عرفان، حامد و امین در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هرکدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هرکدام از ۵ نفر دیگر باشد یا نباشد، اگر بدانیم طه و حامد فقط در فهرست دوستان مسعود قرار دارند، چند حالت مختلف ممکن است وجود داشته باشد؟

۱) 2^{30} ۲) 2^{22} ۳) 2^{26} ۴) 2^{36}

۴. در گرافی از مرتبهٔ ۷، می‌دانیم $\forall v_i \in V(G) ; |N_G[v_i]| = r , r > 1$ است. عدد احاطه‌گری چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵. در یک گراف از مرتبهٔ ۹، $\delta(G) = 2$ است. $\delta(\overline{G})$ چند مقدار مختلف می‌پذیرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶. می‌دانیم گراف G، ۳ـ منتظم و اندازهٔ مکمل آن ۱۶ است. مرتبهٔ گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷. در گراف G با مجموعهٔ رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$، اگر بدانیم $\forall i \in \{1,2,\dots,7\}$، $N_G[v_i] = V(G)$، تعداد دور به طول ۴ در این گراف کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۲۱۰ ۴) ۴۲۰

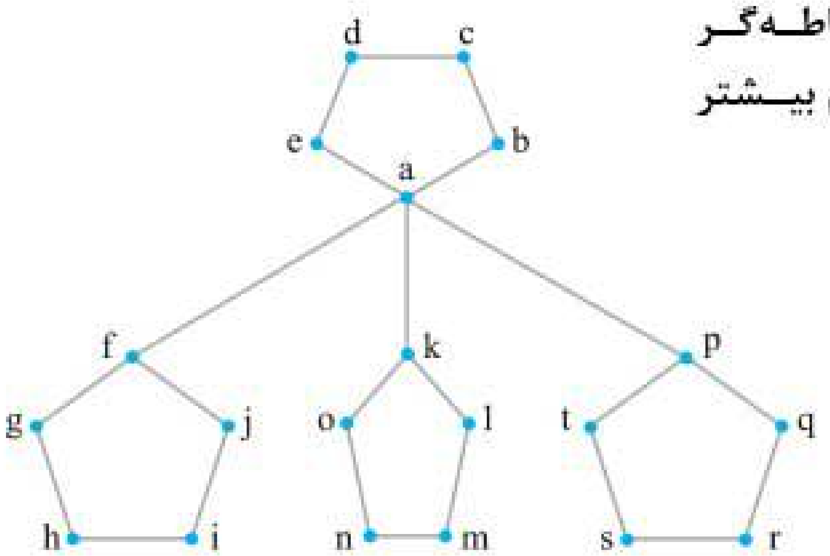
۸. حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ یک گراف کامل برابر ۱۴۷ است. این گراف، چند زیرگراف به صورت K_n دارد؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۷ ۴) ۶۳

۹. درجه‌های رئوس یک گراف، به صورت ۵,۵,۲,۲,۲,۲,۲,۲ است. اگر دو رأس با بیش‌ترین درجه، مجاور نباشند، آن‌گاه عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۰. در گراف مقابل، اندازهٔ بزرگ‌ترین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، چقدر از اندازهٔ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیشتر است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

گسسته

ترکیبیات

۱ اصل شمارش

جایگشت

اگر بخواهیم n شیء متمایز را کنار هم قرار دهیم، همیشه جایگاه اول n حالت، جایگاه دوم $(n-۱)$ حالت و... دارند. برای جایگاه آخر هم یک حالت می‌ماند. پس تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار هم که جایگشت نام دارد، برابر است با: $n\times(n-۱)\times\cdots\times۲\times۱=n!$

تست **در یک همایش، پنج نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده‌اند. این پنج نفر به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به‌طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر A و B از آن‌ها، فقط یک نفر سخنرانی کند؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

پاسخ **گزینهٔ«۳»** یک نفر را بین A و B قرار می‌دهیم و آن‌ها را یک بسته در نظر می‌گیریم، حال x می‌تواند یکی از سه نفر دیگر باشد و A و B به !۲ جابه‌جا می‌شوند و در ادامه داریم:

جابه‌جایی A و B

$\boxed{A\ x\ B}\ \boxed{y}\ \boxed{z} \Rightarrow ۳\times۲!\times۳!=۳۶$

x

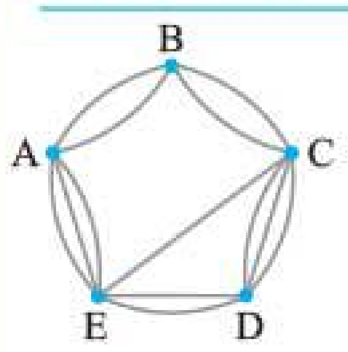
جایگشت y و z و $\boxed{A\,x\,B}$

چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز، بزرگ تراز ۳۰۰۰ وجود دارد؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

پاسخ **گزینهٔ«۳»** ارقام مورد نظر از مجموعهٔ $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ انتخاب می‌شوند، از طرفی با توجه به این که عدد چهار رقمی مطلوب بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ است، پس رقم هزارگان این عدد ۱ نمی‌تواند باشد. بنابراین با توجه به متمایز بودن ارقام و به کمک اصل ضرب داریم:

$\boxed{۴}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}=۹۶$



در شکل مقابل، چند راه از A به C وجود دارد؟

۱) ۷ ۲) ۲۲
۳) ۱۸ ۴) ۲۵

پاسخ **گزینهٔ«۴»** سه مسیر مختلف از A به C وجود دارد:

❶ $ABC\Rightarrow\begin{cases}A\to B & B\to C\\ ۲\ \times & ۲\ =۴\end{cases}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** متغیر x_1 دارای ضریب می‌باشد پس طبق نکتهٔ قبل، به آن مقدار می‌دهیم:

$$x_1=0 \Rightarrow x_2+x_3+x_4=10 \Rightarrow \binom{10+2}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

$$x_1=1 \Rightarrow x_2+x_3+x_4=7 \Rightarrow \binom{7+2}{3-1}=\binom{9}{2}=36$$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها $=66+36=102$

$$x_1=2 \Rightarrow x_2+x_3+x_4=-2 \quad \times$$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها $=66++36=102$

به چند طریق می‌توان ۴ سیب و ۳ پرتقال را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

سیب $x_1+x_2+x_3=4 \Rightarrow \binom{4+2}{3-1}=15$

پرتقال $y_1+y_2+y_3=3 \Rightarrow \binom{3+2}{3-1}=10$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها $=15\times10=150$

مربع لاتین

یک جدول مربعی از اعداد ۱ و ۲ و ... و n به شکل یک مربع $n\times n$ که سطرها و ستون‌های آن با عددهای ۱، ۲ و ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، را یک «مربع لاتین» می‌نامیم.

تست با توجه به مربع لاتین ۶×۶ روبه‌رو، مقدار میانگین عددهای w ، t ، z ، y و x کدام است؟

۶	x	۳	۲	۵	۴
۴	۶	۱	۳	۲	۵
y	۴	۶	۱	۳	۲
۲	t	۴	۶	۱	z
۳	۲	۵	۴	۶	۱
۱	۳	۲	۵	۴	w

۱) ۴ ۲) ۴/۵
۳) ۴/۲۵ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به تعریف مربع لاتین، می‌دانیم عددهای ۶، ...، ۲ و ۱ در هر سطر و ستون، فقط یک بار باید نوشته شوند.

با توجه به جدول داده شده، در سطر اول رقم ۱ وجود ندارد. پس $x=1$. در ردیف سوم عدد ۵ وجود ندارد پس $y=5$. در دومین ستون از سمت چپ فقط عدد ۵ وجود ندارد پس $t=5$. در ردیف چهارم عدد ۳ را نمی‌بینیم پس z برابر ۳ است و در آخر در ستون سمت راست عدد ۶ به چشم نمی‌خورد پس $w=6$. بنابراین داریم:

$$\frac{x+y+z+t+w}{5}=\frac{1+5+3+5+6}{5}=\frac{20}{5}=4$$

پاسخ گزینهٔ «۳» اعضای b,c را یک عضو در نظر می‌گیریم. در این حالت یک مجموعهٔ ۴ عضوی است و تعداد افرازهایش ۱۵ تا است. حال از بین این ۱۵ افراز، آن‌هایی که d,e در کنار هم هستند را نمی‌خواهیم. از مکمل استفاده می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم d,e با هم باشند و تعداد افرازها در این حالت را از ۱۵ کم می‌کنیم. پس تعداد افرازهایی که b,c کنار هم باشند و d,e کنار هم نباشند، برابر است با:

$$\{a,\boxed{b,c},d,e\} - \{a,\boxed{b,c},\boxed{d,e}\}$$

= (تعداد افرازهای ۴ عضوی) − (تعداد افرازهای ۳ عضوی)

= ۱۵ − ۵ = ۱۰

مسائل توزیع

۱) توزیع n شیء متمایز در k جعبهٔ یکسان: تعداد روش‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبهٔ یکسان که هیچ جعبه‌ای خالی نماند، برابر با تعداد افرازهای k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی است. اگر شرط خالی نماندن جعبه‌ها را نداشتیم، تعداد روش‌های توزیع برابر با تعداد کل افرازها است.

تست به چند طریق می‌توان ۵ نفر را به گروه‌هایی تقسیم کرد که فقط یک تیم تک‌نفره داشته باشیم؟ (مشابه ریاضی ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ «۴» تعداد حالت‌های تقسیم این ۵ نفر به‌طوری که فقط یک تیم تک نفره داشته باشیم، برابر تعداد افرازهای یک مجموعهٔ ۵ عضوی است، به‌طوری که فقط یک مجموعهٔ تک عضوی داشته باشیم. این تعداد برابر است با:

۱	۲	۲

$$\xrightarrow[\text{یک زیر مجموعهٔ ۱ عضوی}]{\text{۲ زیر مجموعهٔ ۲ عضوی}} \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۱۵ \Rightarrow ۱۵+۵=۲۰$$

۴	۱

$$\xrightarrow[\text{و یک زیر مجموعهٔ ۱ عضوی}]{\text{یک مجموعهٔ ۴ عضوی}} \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}=۵$$

۲) توزیع n شیء متمایز در k جعبهٔ متمایز: با توجه به این‌که یک شیء نمی‌تواند در دو جعبه قرار بگیرد و نیز یک جعبه می‌تواند چند شیء را در خود جای دهد، نتیجه می‌گیریم که تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با: k^n

تست یک اتوبوس در سه ایستگاه توقف می‌کند. ۷ مسافر این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۳۵ ۳) $۳^۷$ ۴) $۷^۳$

پاسخ گزینهٔ «۳» ۷ مسافر ۷ شیء متمایز و ۳ ایستگاه مشابه ۳ جعبه است. هر مسافر ۳ انتخاب برای پیدا شدن دارد، پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\underbrace{۳\times۳\times\cdots\times۳}_{\text{۷ مرتبه}}=۳^۷$$

به نام پروردگار مهربان

جمع‌بندی

یازدهم • دوازدهم

کنکور ۱۴۰۱

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت

• سیدمسعود طایفه

مهروماه

فهرست

مقدمه

بچه‌ها کتاب جمع‌بندی آمار واحتمال و گسسته را با این دیدگاه نوشتم که با مطالعهٔ مطالب و حل سؤال‌های آن، در کم‌ترین زمان، بیشترین بهره را برای‌تان داشته باشد. در کنکورهای قدیم، ۱۵ سؤال از آمار واحتمال و گسسته داشتیم ولی با توجه به اضافه و حذف شدن برخی از مباحث، تعداد سؤالات آمار واحتمال و گسسته در کنکور جدید بین ۱۷ تا ۱۸ سؤال برآورد می‌شود که به تفکیک در اول هر فصل برآورد ما از تعداد سؤال‌های هر فصل را براتون نوشتیم. لطف کنید همهٔ سؤال‌ها را حل کنید و از قلم نندازید تا همهٔ تیپ‌های سؤال‌های محتمل رو دیده باشید.

در نظام قدیم مباحثی مانند رابطه و ویژگی‌های آن، ارتباط ماتریس و رابطه و گراف باید تدریس می‌شدند که در نظام جدید این مباحث از کتاب‌ها حذف شده است. همچنین در مبحث استدلال، روش استقرای ریاضی تدریس می‌شد و معمولاً یک سال در میان در کنکور سؤال داشت که این بخش هم حذف شده است. در بحث احتمال، مبحث احتمال پیوسته هم حذف شده است. در نظام جدید درس‌های منطق ریاضی، مدل‌سازی به کمک گراف (احاطه‌گری) و مربع لاتین اضافه شده است. همین‌طور در گراف تعریف گراف‌های C_n و P_n جزء مباحث جدید است. البته در مبحثی مثل استدلال با توجه به مفاهیم منطق ریاضی با تغییر رویکرد در نوع سؤال‌ها مواجه شده‌ایم که توجه به این جزئیات در حل مسائل غیر قابل انکار است. در کل از مباحث حذف شده ۴ سؤال در کنکور مطرح می‌شد که قاعدتاً سهم این درس‌ها به مباحث اضافه شده می‌رسد.

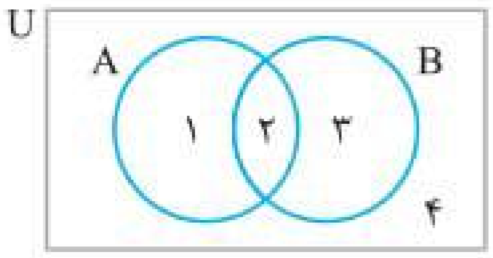
با توجه به تغییر مفاهیم در بعضی درس‌ها، سعی کردیم سؤال‌های کنکور سال‌های قبل را با کمی تغییر برای شما بنویسیم (در صورت لزوم البته) تا شما بیشتر با دیدگاه کتاب‌های جدید آشنا شوید.

براتون بهترین‌ها را آرزو دارم.

مسعود طایفه

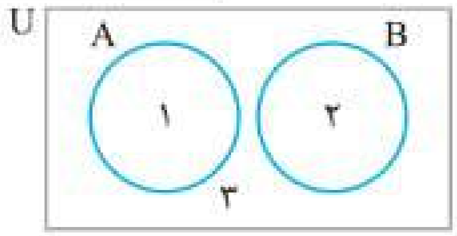
۴ استفاده از نمودار وِن در حل تست‌ها

در مسائلی که ۲ یا ۳ مجموعه داریم، برای حل از نمودار وِن استفاده می‌کنیم و به جای هر مجموعه، عدد ناحیهٔ آن مجموعه را به‌کار می‌بریم. به مثال زیر توجه کنید:

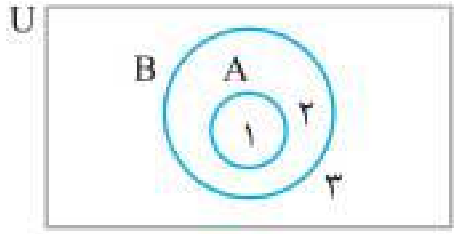


$A=\{۱,۲\}\,,\,A\bigcap B=\{۲\}\,,\,A'=\{۳,۴\}\,,\,B=\{۲,۳\}$

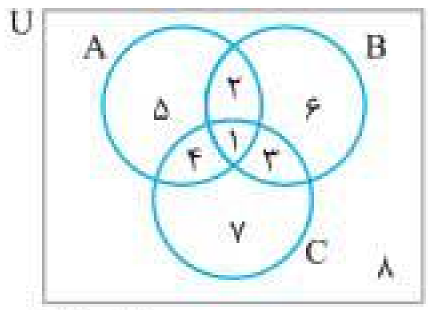
$B'=\{۱,۴\},\ A-B=\{۱\},\ B-A=\{۳\},\ A\bigcup B=\{۱,۲,۳\}$



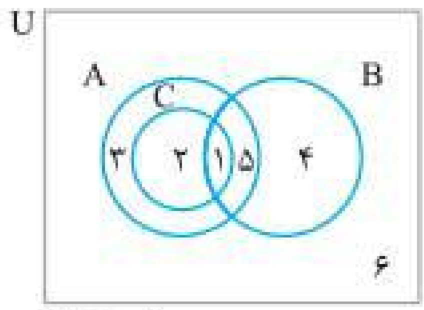
B,A دو مجموعهٔ جدا از هم



$A\subseteq B$



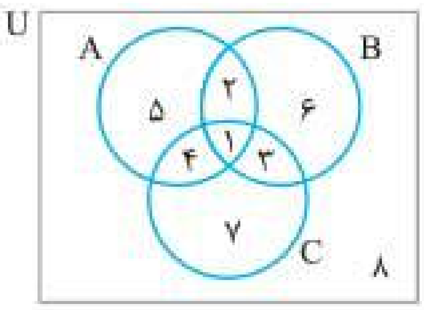
سه مجموعه در حالت کلی



سه مجموعه و $C\subseteq A$

شماره‌گذاری ناحیه‌ها کاملاً اختیاری است، نمودارهای بالا به عنوان یک پیشنهاد آورده شده است.

در برخی تست‌ها، تعدادی رابطه به عنوان فرض داریم و نتایجی خاص در گزینه‌ها آورده شده است. برای حل آن‌ها، نمودار وِن را در حالت کلی برای مجموعه‌ها رسم می‌کنیم. اگر در این حالت، ناحیه یا تعدادی از آن‌ها برابر تهی شود، آن را حذف کرده تا نمودار صحیح به‌دست آید، مثلاً فرض کنید در تستی داشته باشیم $B\bigcap C=\varnothing$ و $B\bigcup C\subseteq A$ و حاصل $(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$ را بخواهیم، داریم:

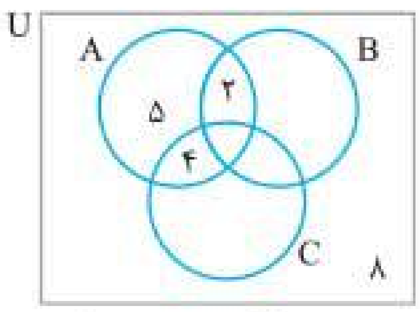


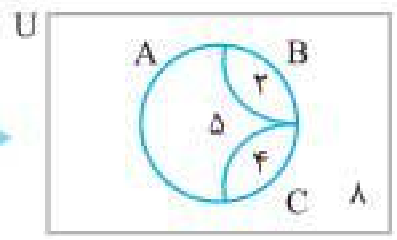
$B\bigcap C=\{۳,۱\}=\varnothing$

$(B\bigcup C=\{۱,۲,۳,۶,۴,۷\}\subseteq A=\{۱,۲,۴,۵\})$

$\Rightarrow\{۳,۶,۷\}=\varnothing$

با توجه به فرض‌ها، نمودار دقیق به صورت زیر است:





$A=\{۲,۴,۵\}$

$B=\{۲\},C=\{۴\}$

$(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)=(\{۲\})\Delta(\{۴\})=\{۲,۴\}=B\bigcup C$

در بیشتر تست‌ها از ترکیب روش‌های حل جبر مجموعه‌ها و نمودار وِن استفاده می‌کنیم. این کار، سرعت حل را به مراتب بالاتر می‌برد.

۶ افرازهای یک مجموعه و تعداد آن‌ها

افراز یک مجموعه

تقسیم آن به زیرمجموعه‌های غیرتهی است، به‌طوری‌که زیرمجموعه‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند و اجتماع همهٔ آن‌ها برابر با مجموعهٔ اولیه باشد. به بیان ریاضی مجموعهٔ غیرتهی A به زیرمجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

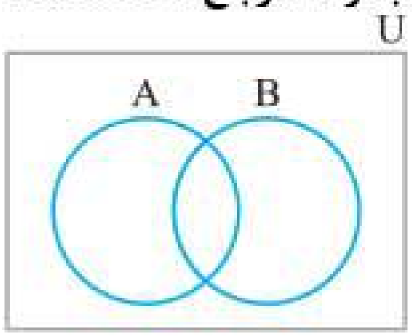
۱. $\forall i, ۱\leq i\leq n\, ; A_i \neq \varnothing \Rightarrow$ همهٔ قسمت‌ها غیرتهی هستند.

۲. $\forall i, j\,(i\neq j\, ; A_i \cap A_j = \varnothing) \Rightarrow$ قسمت‌ها دو به دو جدا از هم هستند.

۳. $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A \Rightarrow$ اجتماع همهٔ قسمت‌ها برابر مجموعهٔ اولیه است.

به طور مثال یکی از افرازهای مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ به‌صورت $\{\{a\},\{b,c\}\}$ است که ۳ شرط فوق را شامل می‌شود.

تست با توجه به شکل زیر، چه تعداد از مجموعه‌های زیر، افرازی از مجموعهٔ مرجع U هستند؟



الف) A, A' ب) B, B'

پ) A', B' ت) $(A-B), (B-A), A\cap B$

ث) $A, (B-A), (A\cup B)'$ ج) $(B'-A), (A\cup B)$

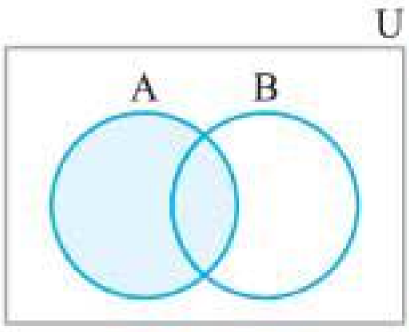
۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۵   ۴) ۶

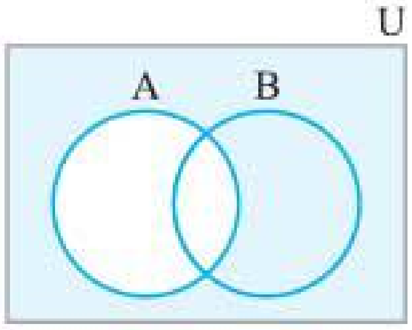
پاسخ گزینهٔ «۲»

۱. مجموعه‌های «الف» و «ب» افرازی از U هستند.

A, A' یا B, B'

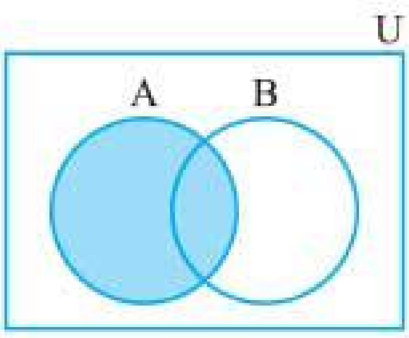


A

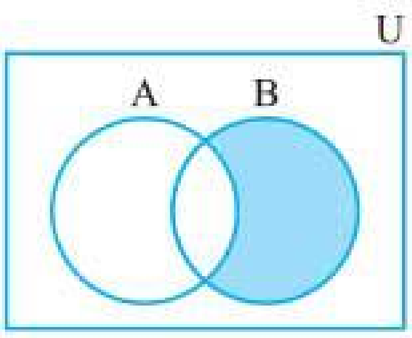


A′

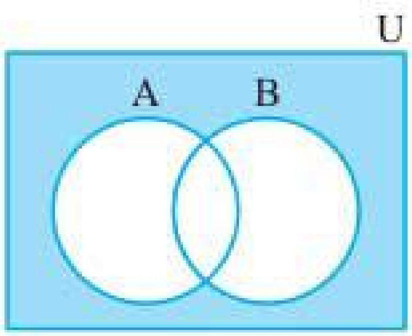
۲. مجموعه‌های «ث» هم‌افرازی از U هستند.



A

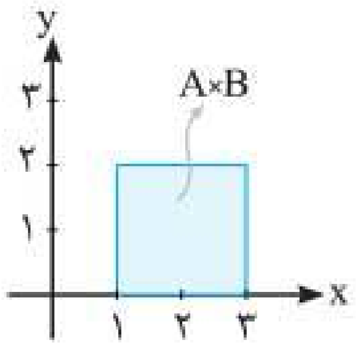


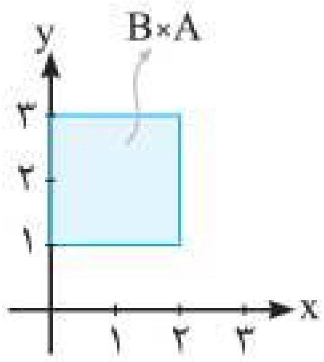
B–A

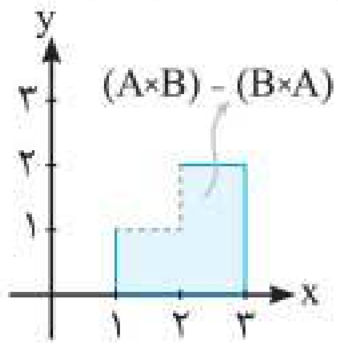


(A∪B)′

پاسخ **گزینهٔ «۱»** نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ را رسم می‌کنیم، سپس به کمک تعریف تفاضل دو مجموعه، به نمودار مورد نظر می‌رسیم:







نمودار $(A\times B)\bigcup(B\times A)$ محیط یک مربع است. اگر نمودار $A\times C$ دو خط عمودی باشد، در این صورت نمودار $C\times B$ به کدام صورت خواهد بود؟

۱) ۴ نقطه ۲) سطح ۳) دو پاره‌خط افقی ۴) دو پاره‌خط عمودی

پاسخ **گزینهٔ «۲»** نمودار $(A\times B)\bigcup(B\times A)$ زمانی محیط یک مربع (مستطیل) می‌شود که یکی از دو مجموعه پیوسته و دیگری گسسته باشد. هم‌چنین از نمودار $A\times C$ که دو خط عمودی است متوجه می‌شویم A گسسته و C پیوسته است پس B نیز پیوسته است و نمودار $C\times B$ به‌صورت سطح خواهد بود.

۸ عدد اصلی یا تعداد اعضای مجموعه

۱ تعداد اعضایی که در A نیستند. $n(A')=n(U)-n(A)$

۲ تعداد اعضایی که در حداقل یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند.

$$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$$

۳ تعداد اعضایی که در A هستند و در B نیستند. $n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$

۴ تعداد اعضایی که فقط در یکی از دو مجموعه هستند.

$$\begin{cases}n(A\Delta B)=n(A)+n(B)-۲\times n(A\bigcap B)\\ n(A\Delta B)=n(A\bigcup B)-n(A\bigcap B)=n(A-B)+n(B-A)\end{cases}$$

۵ تعداد اعضای $A\times B$: $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

در سؤالات این بخش، روابط به صورت ترکیبی از جبر مجموعه‌ها و ضرب دکارتی مطرح می‌شوند که برای حل سریع‌تر آن‌ها باید بر روابط بخش جبر مجموعه‌ها و ضرب دکارتی تسلط کافی داشته باشید. به عنوان مثال به روابط زیر توجه کنید:

الف) $n[(A\times B)\bigcap(B\times A)]=n(A^۲\bigcap B^۲)=[n(A\bigcap B)]^۲$

ب) $n[(A\times B)\Delta(B\times A)]=n(A\times B)+n(B\times A)-۲n[(A\times B)\bigcap(B\times A)]$

$=n(A)n(B)+n(B)n(A)-۲[n(A\bigcap B)]^۲=۲n(A)n(B)-۲[n(A\bigcap B)]^۲$

پ) $n(A^۲\Delta B^۲)=n(A^۲)+n(B^۲)-۲n(A^۲\bigcap B^۲)$

$=[n(A)]^۲+[n(B)]^۲-۲[n(A\bigcap B)]^۲$

۲۴. گر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A\subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $B\;\; A'=A$ ۲) $A\;\; B'=A$ ۳) $A\cap B'=\phi$ ۴) $B\cap A'=\phi$

۲۵. مجموعهٔ $(A-B)\cup((B\cap C)'\cap((B'\cup A)-B))$، با کدام مجموعه برابر است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $A\cup B'$ ۲) $A\cap B'$ ۳) A ۴) B'

۲۶. در مجموعه‌های چهارعضوی $A=\{x+۲,۱,۴,y\}$ و $B=\{۵,۷,z,t-۱\}$، فرض کنید $A\times B=B\times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به‌صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۷. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $A\subset B'$ ۲) $A-B'=\phi$

۳) $A\cap B'=A$ ۴) $(\overline{A\cup B})'=\phi$

۲۸. مجموعهٔ $(A-(A\cap B'))\cup(B\cap(A\cap B)')$ با کدام مجموعه، برابر است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) B'

۲۹. اگر $A=[۱,۴]$ و $B=[-۱,۳]$ باشند، مساحت نمودار $A\times A-B\times B$ در صفحهٔ مختصات، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۳»

با توجه به مجموعه‌های A، B و C، مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B و مجموعهٔ B عضو مجموعهٔ C است. در واقع مجموعهٔ $B=\{\varnothing,A\}$ و $C=\{B\}$ است. همچنین $A\subseteq B$ است، زیرا تنها عضو A یعنی $\varnothing$ عضو B نیز است. امّا $A\subseteq C$ نادرست است، زیرا $\varnothing$ عضو A بوده ولی عضو C نیست.

۲. گزینهٔ «۲»

با توجه به درستی گزارهٔ $(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$ نتیجه می‌گیریم $A=B$ و داریم:

$$\{a^۲,-۲a,b^۳\}=\{۴,-۸\}\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\\-۲a=۴\\b^۳=-۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\b=-۲\end{cases}\Rightarrow a^b=(-۲)^{(-۲)}=\frac{۱}{۴}$$

دقت داشته باشید که در سایر حالت‌هایی که از تساوی A و B به‌دست می‌آید مقادیر a و b قابل قبول نیستند. به عنوان مثال اگر $a^۲=۴$ و $-۲a=-۸$ و $b^۳=-۸$ را در نظر بگیریم برای a سه مقدار ۴ و ±۲ به‌دست می‌آید که قابل قبول نیست.

۳. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم $A-B\subseteq A$ است، بنابراین با توجه به نامتناهی بودن $A-B$، A نیز نامتناهی است از سوی دیگر برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم $A\subseteq A\cup B$، پس $A\cup B$ نیز نامتناهی است.

آمار و احتمال

احتمال

علم آمار و علم احتمال

شناخت **جامعهٔ نامعلوم** از روی **نمونهٔ معلوم**، در علم **آمار** و شناخت **نمونهٔ نامعلوم** از روی **جامعهٔ معلوم**، در علم **احتمال** انجام می‌گیرد.

تست **کدام سؤال در علم آمار مورد بررسی قرار می‌گیرد؟**

۱) می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند سیب از جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟

۲) درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟

۳) ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کم‌تر از ۱۵ نفر از آن‌ها به شنا علاقه‌مند باشند؟

۴) در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سوادکوه با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش‌از یک نفر منفی باشد؟

پاسخ **گزینهٔ «۲»** در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» اطلاعات جامعه را داریم و مشخصات نمونه برای ما مجهول است، پس بررسی آن‌ها مربوط به علم احتمال است. امّا در مورد گزینهٔ «۲»، برای بررسی درآمد کارمندان شهرداری باید حتماً از تعدادی به عنوان نمونه استفاده کنیم و از نتیجهٔ به دست آمده از نمونه، به شناخت جامعه بپردازیم که این مطالعه مربوط به علم آمار است.

تعاریف مقدماتی علم احتمال

اگر نتیجهٔ یک پدیده یا آزمایش را قبل از انجام آن بدانیم به آن **پدیده یا آزمایش قطعی** می‌گوییم. اما اگر نتیجهٔ یک آزمایش یا پدیده‌ای، پیش از انجام معلوم نباشد به آن **پدیدهٔ تصادفی** می‌گوییم. به مجموعهٔ همهٔ حالت‌هایی که در انجام یک آزمایش تصادفی ممکن است اتفاق بیفتد، **فضای نمونه** می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

به هر کدام از اعضای S، یک **برآمد** و به هر زیرمجموعهٔ S یک **پیشامد** گفته می‌شود. پس در پرتاب یک تاس، ۶ برآمد و $۶۴ = ۲^۶$ پیشامد داریم که در این بین پیشامد $\varnothing$ را **پیشامد غیرممکن** و پیشامد S را **پیشامد حتمی** می‌نامند.

فضاهای نمونهٔ مهم را ببینید:

فضای نمونه	تعداد اعضا	حالت کلی	نکتهٔ قابل توجه
پرتاب ۲ سکه	$۲^۲$	۲^n	دقت کنید که همیشه (رو، پشت) با (پشت، رو) فرق دارد.
خانوادهٔ ۳ فرزندی	$۲^۳$	۲^n	دقت کنید که همیشه (دختر، پسر) با (پسر، دختر) فرق دارد.
پرتاب ۲ تاس	$۶^۲$	۶^n	در پرتاب تاس‌ها، (۱,۲) و (۲,۱) با هم متفاوت است.
کیسه و مهره	-	(تعداد کل تعداد مورد نظر)	همیشه گوی‌ها را متفاوت از هم در نظر می‌گیریم.
جایگشت ۴ شیء	$۴!$	$n!$	سخنرانی، صفت ایستادن، در طبقات مختلف و ... از این نوع فضای نمونه هستند.
انتخاب ۴ شیء از بین ۵ شیء	$\binom{۵}{۴}$	$\binom{n}{k}$	-

نکته‌ها:

۱ اگر فضای نمونه، n عضوی باشد، ۲^n پیشامد در این آزمایش تصادفی وجود دارد.

۲ هرگاه نتیجهٔ آزمایش، یکی از اعضای پیشامد باشد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.

تست یک رانندهٔ ون با حداکثر ۱۰ مسافر در یک خط رفت و برگشت کار می‌کند. فضای نمونهٔ پدیدهٔ «تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت» چند عضو دارد، هرگاه بدانیم حداقل در یک مسیر، خالی حرکت نمی‌کند؟

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۹

پاسخ **گزینهٔ «۲»** فضای نمونهٔ مسیر رفت و برگشت $S_1 = S_2 = \{۰,۱,۲,...,۱۰\}$ و فضای نمونهٔ کل آزمایش $S_1 \times S_2$ است که ۱۲۱ عضو دارد. با توجه به این‌که حداقل در یک مسیر بدون مسافر حرکت نمی‌کند، پس حالتی که در هر دو مسیر خالی حرکت کند را باید حذف کنیم. بنابراین فضای نمونه ۱۲۰ عضو دارد.

اعمال روی پیشامدها

اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند.

اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. (به طور مشابه پیشامد $B - A$ هم تعریف می‌شود.)

پاسخ **گزینهٔ «۱»** جایگشت‌های ۶ شیء متمایز برابر است با $n(S)=۶!$. برای این‌که ۶ گوی به صورت یک درمیان، زوج و فرد خارج شوند، ابتدا باید ببینیم که عدد اول زوج یا فرد است و سپس براساس گوی اول، تعداد حالات مورد نظر را می‌شماریم. بنابراین داریم:

$$n(A)=\overset{\text{گوی اول زوج یا فرد باشد}}{۲}\times\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت فردها}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت زوج‌ها}}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۳!\times۳!}{۶!}=۰/۱$$

قضیه‌های احتمال

۱ $P(A)=۱-P(A')$ یا $P(A')=۱-P(A)$

۲ $\underbrace{P(A\cap B')=P(A-B)}_{\text{احتمال آن‌که A رخ دهد ولی B رخ ندهد}}=P(A)-P(A\cap B)$

۳ $\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{احتمال رخ دادن یکی از A یا B}}=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{احتمال رخ دادن A و B}}$

۴ $P(\underbrace{(A-B)\cup(B-A)}_{\text{احتمال رخ‌دادن فقط یکی از A یا B}})=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$

۵ $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$

۶ اگر A، B و C دوبه‌دو ناسازگار باشند، داریم: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

تست اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند به طوری که $P(A)=۰/۶$، $P(B)=۰/۷$ و $P(A\cap B')=۰/۲$، آن‌گاه $P(A'\cap B)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا رابطهٔ $P(A\cap B')$ را می‌نویسیم:

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۲=۰/۶-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴$$

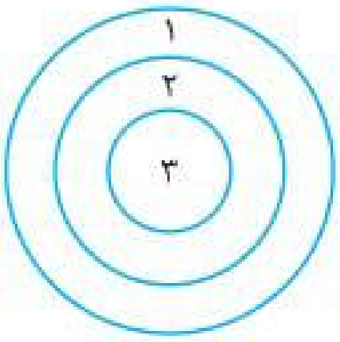
بنابراین داریم:

$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۷-۰/۴=۰/۳$$

از بین مجموعهٔ اعداد متوالی $\{۵۱,۵۲,...,۳۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد بر ۶ یا بر ۷ بخش‌پذیر باشد، ولی مضرب ۴۲ نباشد، چقدر است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۲۶ ۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۳۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** تعداد مضارب طبیعی عدد k در بین اعداد $۱,۲,...,n$ برابر با $[\frac{n}{k}]$ است. هم‌چنین برای به‌دست آوردن مضارب k، از عدد m تا n، از رابطه‌های $[\frac{n}{k}]-[\frac{m-۱}{k}]$ استفاده می‌کنیم.



صفحهٔ دارت به صورت شکل روبه‌رو است و شمارهٔ هر ناحیه، امتیاز آن را نشان می‌دهد. می‌دانیم احتمال عدم برخورد دارت به صفحه $۰/۲$ است. احتمال برخورد به ناحیهٔ kام برابر $\frac{a}{۲k-۱}$ است. احتمال این‌که در پرتاب دارت، حداقل دو امتیاز بگیریم چقدر است؟

۱) $\frac{۳۲}{۱۱۵}$ ۲) $\frac{۲۲}{۱۱۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۳}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱» می‌دانیم $k=۱,۲,۳$ می‌تواند باشد. با جای‌گذاری k مقادیر احتمال به‌دست می‌آید:

$$P(۱)=a\,,\,P(۲)=\frac{a}{۳}\,,\,P(۳)=\frac{a}{۵}$$

$$\text{جمع احتمال‌ها}=۱\Rightarrow ۰/۲+a+\frac{a}{۳}+\frac{a}{۵}=۱\Rightarrow\frac{۱۵a+۵a+۳a}{۱۵}=۰/۸\Rightarrow ۲۳a=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۲۳}$$

باید حداقل دو امتیاز یعنی ۲ یا ۳ امتیاز بگیریم؛ پس داریم:

$$P(\{۲,۳\})=P(۲)+P(۳)=\frac{۸a}{۱۵}=\frac{۸\times\frac{۱۲}{۲۳}}{۱۵}=\frac{۳۲}{۱۱۵}$$

احتمال شرطی

فرض کنید پیشامد A رخ داده است، حال اگر احتمال پیشامدی مثل B را با توجه به اینکه پیشامد A رخ داده است، بخواهیم، این احتمال را با $P(B|A)$ نشان داده و آن را «**احتمال B به شرط A**» می‌خوانیم.
رابطهٔ مربوط به این احتمال که احتمال شرطی نام دارد به صورت زیر است:

$$P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{n(\text{پیشامد جدید})}{n(\text{فضای نمونهٔ جدید})}$$

تذکر احتمال شرطی به معنای کاهش فضای نمونه است.

اگر فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس باشد و یا اطلاعات احتمال پیشامدها را داشته باشیم، باید از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کنیم: $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

تست تاسی همگن را با چشم بسته انداخته‌ایم و فقط می‌دانیم که برآمد عدد زوج است. احتمال این‌که شمارهٔ ۴ یا ۶ ظاهر شده باشد، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ گزینهٔ «۳» می‌دانیم عدد زوج آمده است. پس $S_{\text{جدید}}=\{۲,۴,۶\}$ و پیشامد مطلوب ما $A=\{۴,۶\}$ است؛ پس احتمال برابر است با:

$$P(A|S_{\text{جدید}})=\frac{n(A\cap S_{\text{جدید}})}{n(S_{\text{جدید}})}=\frac{۲}{۳}$$

پاسخ گزینهٔ «۱» در اینجا می‌خواهیم در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا شود. یعنی دو لامپ اول سالم و سومی معیوب باشد. طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

لامپ اول سالم باشد($P(A_1)$)

$$P=\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{28}$$

لامپ دوم سالم باشد اگر لامپ اول سالم بوده باشد.($P(A_2|A_1)$)

لامپ سوم معیوب باشد اگر لامپ‌های اول و دوم سالم باشند.($P(A_3|A_1\cap A_2)$)

قانون احتمال کل

اگر فضای نمونه شامل چند قسمت باشد، مثلاً زنان و مردان، کیسه‌های مختلف و حالت‌های متفاوت و... احتمال یک پیشامد در این فضا برابر است با:

فضای نمونه $\xrightarrow{P(A_1)}$ A_1 رخ داده باشد $\xrightarrow{P(B|A_1)}$ B رخ می‌دهد

فضای نمونه $\xrightarrow{P(A_2)}$ A_2 رخ داده باشد $\xrightarrow{P(B|A_2)}$ B رخ می‌دهد

فضای نمونه $\xrightarrow{P(A_k)}$ A_k رخ داده باشد $\xrightarrow{P(B|A_k)}$ B رخ می‌دهد

$$\Rightarrow P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_k)P(B|A_k)$$

تست در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟ (تجربی ۹۶)

۱) ۱۵/۲ ۲) ۱۵/۶ ۳) ۱۵/۸ ۴) ۱۶/۲

پاسخ گزینهٔ «۲» با استفاده از نمودار درختی داریم:

$\xrightarrow{0/6}$ مرد بودن $\xrightarrow{0/18}$ تحصیلات دانشگاهی داشتن

$\xrightarrow{0/4}$ زن بودن $\xrightarrow{0/12}$ تحصیلات دانشگاهی داشتن

$$\Rightarrow P=0/6\times 0/18+0/4\times 0/12=0/156$$

با ضرب احتمال در ۱۰۰، گزینهٔ «۲» به دست می‌آید.

در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. سپس از بین باقی‌ماندهٔ مهره‌ها، به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (ریاضی ۹۶ - تجربی ۹۳)

۱) $\frac{5}{14}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{9}{14}$

پاسخ گزینهٔ «۲» چون رنگ ۲ مهرهٔ اول را ندیده‌ایم، آگاهی ما در مورد فضای نمونه تغییری نکرده است. به بیان ساده‌تر نمی‌دانیم از کدام رنگ کم‌شده است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که دو مهرهٔ اول اصلاً خارج نشده است و مسئله را با این رویکرد حل می‌کنیم. بنابراین احتمال سفیدبودن مهرهٔ خروجی آخر برابر است با $\frac{3}{7}$.

قانون بیز

فرض کنیم فضای نمونه به زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ افراز شده باشد. طبق قانون احتمال کل می‌توانیم احتمال پیشامد B در این فضای نمونه را محاسبه کنیم. حال فرض کنید با مشاهده فهمیدیم که B رخ داده است و می‌خواهیم احتمال آن‌که مثلاً A_1 رخ داده را به دست آوریم. طبق قانون بیز داریم:

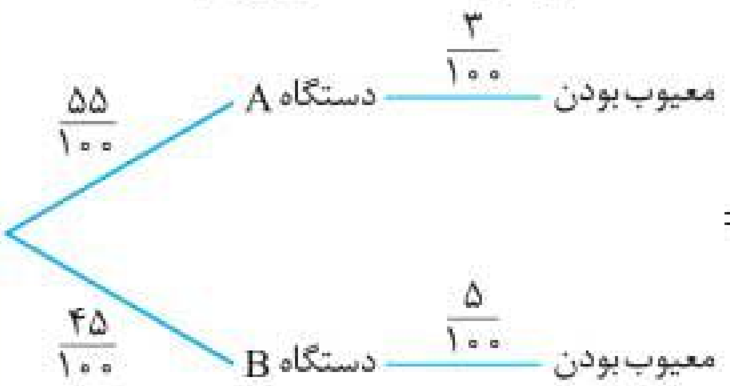
$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(B)}$$

برای محاسبهٔ $P(A_1 | B)$ کافی است احتمال کل را به صورت نمودار درختی محاسبه کنیم و در مخرج قرار دهیم. در مرحلهٔ بعد احتمال شاخهٔ مورد نظر (مثل A_1) را در صورت قرار می‌دهیم.

تست **در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A، با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول تولید دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟** (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ابتدا احتمال معیوب بودن کالا را به کمک احتمال کل به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow P(\text{معیوب}) = \frac{۵۵}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۴۵}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۳۹}{۱۰۰۰}$$

براساس قانون بیز احتمال این‌که کالای تولیدشده از A باشد، به شرطی که معیوب باشد برابر است با:

$$P(A | \text{معیوب}) = \frac{\frac{۵۵}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰}}{\frac{۳۹}{۱۰۰۰}} = \frac{\frac{۱۶۵}{۱۰۰۰۰}}{\frac{۳۹}{۱۰۰۰}} = \frac{۱۶۵}{۳۹۰} = \frac{۳۳}{۷۸} = \frac{۱۱}{۲۶}$$

دو دسته کارت در اختیار داریم. دستهٔ اول شامل ۵ کارت دو رو قرمز، ۲ کارت یک رو قرمز و یک رو سبز و دستهٔ دوم شامل ۴ کارت دو رو سبز و ۳ کارت یک رو قرمز و یک رو سبز است. یکی از دسته‌ها را به تصادف انتخاب کرده و کارتی را برمی‌داریم. مشاهده می‌کنیم یک روی آن سبز است. با کدام احتمال این کارت از دستهٔ اول انتخاب شده است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۲) $\frac{۲}{۱۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دقت کنید که در دستهٔ اول، کارت‌ها $۱۴ = ۲ \times ۷$ طرف دارند که ۲ روی آن‌ها سبز و مابقی قرمز است و در دستهٔ دوم کارت‌ها $۱۴ = ۲ \times ۷$، طرف دارند که ۱۱ روی آن‌ها سبز و بقیه قرمز است.