فهرست

فصل (۱)

آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی
- درس ۲: مجموعه ـ زیرمجموعه
- درس ۳: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

درس ۱

آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی در واقع «دستور زبان ریاضی» است که توسط آن می‌توان هر مطلب را دقیق بیان نمود، طوری که هیچ جای ابهامی باقی نماند. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. ابزارهای این دستور زبان عبارتند از گزاره، ارزش گزاره، گزاره‌نما، ترکیب گزاره‌ها و ...

تعریف گزاره

هر جملهٔ **خبری** را یک گزاره می‌نامند. به عنوان مثال جملهٔ «جک و برادرزاده‌اش به فضا رفته‌اند» حاوی یک خبر است، پس یک گزاره است. جملهٔ «هفت به اضافهٔ دو می‌شود دوازده.» نیز یک گزاره است؛ اما عبارت «آیا علی به مدرسه می‌رود؟» گزاره نیست، زیرا جمله‌ای پرسشی است و خبری نیست. هم‌چنین جملهٔ «عجب آدم شروری!» نیز یک گزاره نیست، زیرا جمله‌ای تعجبی است و نه خبری. و سرانجام جملهٔ «کتاب مرا بیارا!» نیز جمله‌ای امری است، پس گزاره نمی‌باشد.

◁**ارزش یک گزاره:** ارزش یک گزاره می‌تواند «درست» یا «نادرست» باشد. هر چند ارزش بعضی از گزاره‌ها برای ما معلوم نیستند ولی به هر حال می‌دانیم که یا فقط «درست» و یا فقط «نادرست» هستند. به عنوان مثال؛ درستی یا نادرستی گزارهٔ «در سیارات دیگر، موجودات زنده و هوشمند وجود دارند.» هنوز برای ما معلوم نیست، ولی به هر حال فقط می‌تواند درست یا نادرست باشد. گزارهٔ درست را با T یا «د» و گزارهٔ نادرست را با F یا «ن» نمایش می‌دهیم.

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

◁**جدول ارزش گزاره‌ها:** فرض کنید دو گزاره مانند p و q داشته باشیم. این دو گزاره نسبت به هم چهار حالت دارند که در جدول مقابل نمایش داده شده‌اند.
به سادگی می‌توان پی برد که اگر nتا گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها شامل ۲^n ردیف است، پس یک گزاره شامل $۲ = ۲^۱$ حالت، دو گزاره شامل $۴ = ۲^۲$ حالت، سه گزاره شامل $۸ = ۲^۳$ و به همین ترتیب n گزاره شامل ۲^n حالت خواهد بود.

تعریف گزاره‌نما

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد، گزاره‌نما می‌نامند.
اگر گزاره‌نمایی شامل یک متغیر باشد، آن را «یک‌متغیره» و در کل اگر گزاره‌نمایی شامل k متغیر باشد، آن را «kمتغیره» می‌نامند.
به عنوان مثال؛ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه عبارت $(x + y = ۹)$ یک گزاره‌نمای دومتغیره است.

◁**دامنهٔ متغیر گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ مقادیری که بتوان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

◁**مجموعهٔ جواب گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما، بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ متغیر که به ازای عضوهای آن، گزاره‌نما به گزاره‌ای **درست** تبدیل شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌نامند. واضح است که مجموعهٔ جواب، همیشه زیرمجموعهٔ دامنه است.

تست

کدام گزینه دربارهٔ گزاره‌نمای $(x^۲ + ۵x - ۳ = ۰)$ درست است؟

۱) دامنهٔ متغیر آن مجموعهٔ اعداد گویا می‌باشد و مجموعهٔ جواب آن دوعضوی است.

۲) دامنهٔ متغیر آن مجموعهٔ اعداد گویا است و مجموعهٔ جواب آن فقط یک عضو دارد.
۳) دامنهٔ متغیر آن مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد و مجموعهٔ جواب آن تهی است.
۴) دامنهٔ متغیر آن مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد و مجموعهٔ جواب آن دو عضو دارد.

پاسخ | گزینهٔ ۴ واضح است که اگر به جای x، هر عدد حقیقی را بگذاریم، گزاره‌نما به یک گزاره تبدیل می‌شود، پس دامنهٔ متغیر این گزاره‌نما، می‌تواند مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. چون دلتای این معادله مثبت است، پس این معادله دارای دو جواب حقیقی است، در نتیجه فقط به ازای دو مقدار حقیقی این گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل خواهد شد. توجه داشته باشیم که می‌توان دامنهٔ متغیر را اعداد گویا در نظر گرفت ولی چون ریشه‌های آن $\frac{-۵\pm\sqrt{۳۷}}{۲}$ هستند و این دو ریشه عددهایی گویا نیستند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

نقیض یک گزاره: گزارهٔ «علی به مدرسه رفته است.» را در نظر بگیرید. حالا اگر در لحظه‌ای که این گزاره را می‌شنویم، ببینیم که علی در خانه خوابیده است، به طرف مقابل چه می‌گوییم؟ مرسوم است که می‌گوییم «چنین نیست که علی به مدرسه رفته است.» و اصطلاحاً می‌گوییم گزارهٔ اول را نقض کرده‌ایم.

نقیض گزارهٔ p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت‌های «چنین نیست که p.» یا به صورت «نه p» می‌خوانیم. ارزش نقیض یک گزاره عکس ارزش آن گزاره است. این مورد در جدول مقابل ارائه شده است.

$\sim p$	p
F	T
T	F

••• ترکیب گزاره‌ها •••

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، آن‌گاه عبارت «p یا q» را **ترکیب فصلی** این دو گزاره می‌نامند و با نماد $p \vee q$ نمایش می‌دهند. رابط منطقی « $\vee$ » را «فاصل» می‌نامند.

ترکیب فصلی دو گزاره همیشه درست است مگر زمانی که هر دو گزاره نادرست باشند. جدول مقابل، ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی را نمایش می‌دهد.

p	q	$p \vee q$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، آن‌گاه عبارت «p و q» را **ترکیب عطفی** این دو گزاره می‌نامند و با نماد $p \wedge q$ نمایش می‌دهند. رابط منطقی « $\wedge$ » را «عاطف» می‌نامند.

ترکیب عطفی دو گزاره فقط زمانی درست است که هر دو مولفهٔ آن درست باشند. جدول مقابل، ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی را نمایش می‌دهد.

p	q	$p \wedge q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

ترکیب شرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، آن‌گاه گزارهٔ «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی این دو گزاره می‌نامند و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهند. گزارهٔ p را **مقدمِ شرط** یا فرض و گزارهٔ q را **تالی شرط** یا حکم می‌نامند.

یک گزارهٔ شرطی همیشه درست است مگر زمانی که مقدم درست و تالی نادرست باشد. در جدول مقابل، ارزش گزارهٔ شرطی نمایش داده شده است.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

تست

کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(۲<۳)\vee(۴\times۳=۸)$

۲) اگر ۶ عددی فرد باشد، آن‌گاه ۸ مربع کامل است.

۳) اگر $x\in\{y\}$، آن‌گاه $x=y$

۴) $(۳+۲=۵)\wedge(۲۲\not\in\mathbb{Q})$

پاسخ | گزینهٔ ۴ یک ترکیب عطفی زمانی درست است که هر دو مولفهٔ آن درست باشند. هر چند $۳+۲=۵$ درست است ولی گزارهٔ $۲۲\not\in\mathbb{Q}$ نادرست است، پس ترکیب عطفی این دو نیز نادرست است.

در گزینهٔ (۱)؛ $۲<۳$ درست و $۴\times۳=۸$ نادرست است، در نتیجه ترکیب فصلی آن‌ها درست می‌باشد.

در گزینهٔ (۲)؛ یک ترکیب شرطی است، مقدم شرط نادرست است (عدد ۶ فرد نیست). در نتیجه ترکیب شرطی به انتفای مقدم، درست می‌باشد.

گزینهٔ (۳)؛ یک ترکیب دوشرطی است و می‌دانیم اگر $x\in\{y\}$، چون مجموعهٔ مورد نظر، یک‌عضوی است، پس باید $x=y$ باشد و عکس آن نیز درست است.

تذکرمهم با توجه به جدول ارزش گزارهٔ ترکیب شرطی، مشاهده می‌شود که اگر مقدمِ یک ترکیب شرطی، **نادرست** باشد، صرف نظر از ارزش تالی آن، ارزش آن ترکیب شرطی درست است. اصطلاحاً می‌گوییم «ترکیب شرطی، به انتفای مقدم درست است» توجه داشته باشید که عبارت «انتفای مقدم»؛ یعنی مقدم، نفی شود.

هم‌چنین اگر تالی یک ترکیب شرطی **درست** باشد، صرف نظر از ارزش مقدم، ارزش آن ترکیب شرطی درست است. اصطلاحاً می‌گوییم «ترکیب شرطی به اثبات تالی، درست است». توجه داشته باشید که عبارت «اثبات تالی»؛ یعنی تالی درست باشد.

تعریف دو گزارهٔ هم‌ارز: دو گزاره را هم‌ارز می‌نامند هرگاه جدول ارزش آن‌ها کاملاً شبیه یکدیگر باشند. اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارز باشند، آن را با نماد $p \equiv q$ نمایش می‌دهند.

مثال

با تشکیل جدول، نشان دهید گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز هستند.

پاسخ چون فقط دو گزاره داریم، پس جدول ارزش شامل $۲^۲ = ۴$ سطر است. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ملاحظه می‌کنیم که در جدول ارزش فوق، ستون ارزش گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ یکسان هستند، پس هم‌ارز می‌باشند.

مثال

با تشکیل جدول، نشان دهید هم‌ارزی‌های $(p \Rightarrow p) \equiv T$ و $(p \wedge \sim p) \equiv F$ برقرار هستند.

پاسخ در این‌جا فقط یک گزارهٔ مستقل داریم، پس جدول ارزش فقط شامل $۲^۱ = ۲$ ردیف است.

p	$p \Rightarrow p$	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	T	F	F
F	T	T	F

با توجه به جدول، به سادگی نتیجه می‌شود:

$(p \Rightarrow p) \equiv T$ و $(p \wedge \sim p) \equiv F$

مثال

نشان دهید $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

پاسخ

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	**T**	F	F	**T**
T	F	**F**	T	F	**F**
F	T	**T**	F	T	**T**
F	F	**T**	T	T	**T**

ملاحظه می‌شود که ستون ارزش آن‌ها یکسان است، پس هم‌ارز می‌باشند.

تذکرمهم در مثال فوق دیدیم که $p \Rightarrow q$ با $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارز است و اصطلاحاً می‌گوییم «هر گزارهٔ شرطی با عکسِ نقیضِ خودش هم‌ارز است» و آن را اثبات **غیرمستقیم** یا اثبات به **روش برهان خلف** می‌نامیم.

ترکیب دوشرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهند و آن را ترکیب دوشرطی گزاره‌های p و q می‌نامند و به یکی از صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

۱ «اگر p، آن‌گاه q و برعکس»

۲ «p، شرط لازم و کافی برای q است.»

۳ «p، اگر و تنها اگر q».

یک گزارهٔ دوشرطی فقط وقتی درست است که ارزش هر دو مؤلفهٔ آن یکسان باشد؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. (جدول مقابل را ببینید.)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**T**

ویژگی‌های گزاره‌های مرکب

ترکیب‌های عطفی و فصلی دارای ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری هستند، پس داریم:

۱ جابه‌جایی $\vee$ و $\wedge$

$$\begin{cases} p\vee q\equiv q\vee p \\ p\wedge q\equiv q\wedge p \end{cases}$$

۲ شرکت‌پذیری $\vee$ و $\wedge$

$$\begin{cases} p\vee (q\vee r)\equiv (p\vee q)\vee r \\ p\wedge (q\wedge r)\equiv (p\wedge q)\wedge r \end{cases}$$

۳ توزیع‌پذیری $\vee$ در $\wedge$ / توزیع‌پذیری $\wedge$ در $\vee$

$$\begin{cases} p\vee (q\wedge r)\equiv (p\vee q)\wedge (p\vee r) \\ p\wedge (q\vee r)\equiv (p\wedge q)\vee (p\wedge r) \end{cases}$$

قوانین جذب در جبر گزاره‌ها:

اگر p و q دو گزاره باشند، آن‌گاه:

۴

$$\begin{cases} p\vee (p\wedge q)\equiv p \\ p\wedge (p\vee q)\equiv p \end{cases}$$

نکته

۱ $p\vee p\equiv p$ ۲ $p\wedge p\equiv p$

۳ $p\vee T\equiv T$ ۴ $p\wedge T\equiv p$

۵ $p\vee \sim p\equiv T$ ۶ $p\wedge \sim p\equiv F$

۷ $(p\Rightarrow p)\equiv T$ ۸ $p\Rightarrow q\equiv \sim p\vee q$

مثال

اولین قانون جذب را ثابت کنید.

پاسخ با توجه به هم‌ارزی $p\wedge T\equiv p$، داریم:

$$\begin{aligned} p\vee (p\wedge q) &\equiv (p\wedge T)\vee (p\wedge q) \\ &\equiv p\wedge (T\vee q) && \text{عکس توزیع‌پذیری } \wedge \text{ در } \vee \\ &\equiv p\wedge T && \text{زیرا } T\vee q\equiv T \\ &\equiv p \end{aligned}$$

قوانین دمورگان در جبر گزاره‌ها: با تشکیل جدول، به سادگی می‌توان هم‌ارزی‌های مقابل را به اثبات رساند. این هم‌ارزی‌ها به قوانین دمورگان مشهور هستند:

$$\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

تست

گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

۱) $\sim p \wedge (q \Rightarrow r)$ ۲) $\sim q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ۴) $(p \vee q) \Rightarrow r$

پاسخ | گزینهٔ ۳ می‌دانیم: $(A \Rightarrow B) \equiv \sim A \vee B \quad (۱)$

اکنون داریم:

بنابر (۱) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow r)$

بنابر (۱) $\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$

شرکت‌پذیری $\vee$ $\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$

قانون دمورگان $\equiv \sim(p \wedge q) \vee r$

بنابر (۱) $\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

تست

کدام هم‌ارزی درست است؟

۱) $(p \vee q) \Rightarrow q \equiv F$ ۲) $(p \wedge q) \Rightarrow q \equiv T$

۳) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim p \wedge q$ ۴) $p \wedge (q \vee p) \equiv q$

پاسخ | گزینهٔ ۲ با توجه به هم‌ارزی $(A \Rightarrow B) \equiv \sim A \vee B$ داریم:

$(p \wedge q) \Rightarrow q \equiv \sim(p \wedge q) \vee q$

دمورگان $\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q$

شرکت‌پذیری $\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q)$

$\equiv \sim p \vee T$

بنابر تعریف ترکیب فصلی $\equiv T$

گزینهٔ (۱) نادرست است، زیرا اگر q درست باشد، آن‌گاه به اثبات تالی گزارهٔ شرطی $(p \vee q) \Rightarrow q$ درست است و نمی‌تواند هم‌ارز با F باشد.

گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گزینهٔ (۴) نادرست است؛ زیرا اگر q درست و p نادرست باشد، آن‌گاه $p \wedge (q \vee p)$ نادرست است و هم‌ارز با q نیست.

تست

گزارهٔ $\sim (p \Rightarrow q)$ با کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارزش است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\sim p \vee q$
۲) $p \vee \sim q$
۳) $\sim p \wedge q$
۴) $p \wedge \sim q$

پاسخ | گزینهٔ ۴ می‌دانیم گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ با $\sim p \vee q$ هم‌ارز است، پس داریم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

تست

گزارهٔ $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$، با کدام گزارهٔ زیر هم‌ارزش است؟

(سراسری خارج ریاضی)

۱) $p \vee (q \wedge r)$
۲) $p \wedge (q \vee r)$
۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$
۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

پاسخ | گزینهٔ ۲ با توجه به آن‌که $(A \Rightarrow B) \equiv (\sim A \vee B)$ داریم:

$$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge r)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

سورها

سورها عبارت‌هایی هستند که اگر در ابتدای هر گزاره‌نما قرار گیرند، آن را به گزاره‌ای با ارزش درست یا نادرست تبدیل می‌کنند.

سور عمومی

هرگاه بر سر گزاره‌نمایی، عبارتی مانند «هرچه باشد» یا «به ازای هر مقدار» یا «به ازای جمیع مقادیر» یا نظیر این‌ها قرار گیرد، آن‌گاه گزاره‌نما به گزاره‌ای با سور عمومی تبدیل می‌شود. بنابراین اگر $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد، آن‌گاه گزارهٔ «به ازای هر x، $p(x)$» یک گزاره با سور عمومی است و آن را با نماد مقابل نمایش می‌دهند: $\forall x : p(x)$

یک گزاره با سور عمومی زمانی درست است که مجموعهٔ جواب با دامنهٔ متغیر گزاره‌نما برابر باشد؛ به بیان دیگر عضوی از دامنهٔ متغیر وجود نداشته باشد که به ازای آن، گزاره نادرست باشد. اگر چنین عضوی وجود داشته باشد، گزارهٔ با سور عمومی نادرست خواهد بود و چنین عضوی را **مثال نقض** می‌نامند.

تست

کدام گزاره درست است؟

۱) مربع هر عدد حقیقی، عددی مثبت است.

۲) مجموع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوس آن عدد، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

۳) مربع هر عدد حقیقی و مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی با همان عدد است.

۴) توان چهارم هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است.

پاسخ **گزینهٔ ۴** اگر n عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $n^{۴} \geq ۰$ است؛ به بیان دیگر $n^{۴}$ همیشه نامنفی است.

توجه کنید که $n = ۰$، مثالی نقض برای گزینهٔ (۱) است.

اگر $x = -۲$ باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{x} = -\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $x + \frac{۱}{x} = \frac{-۵}{۲}$ و حاصل آن بزرگ‌تر یا مساوی ۲ نیست و این یک مثال نقض برای گزینهٔ (۲) است. اگر $x = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $x^۲ = \frac{۱}{۴}$ ولی $x^۲ < x$ و این مثال نقض برای گزینهٔ (۳) است.

سور وجودی

هرگاه بر سر گزاره‌نمایی، عبارتی مانند «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» یا نظیر این‌ها قرار گیرد، آن را به گزاره‌ای با سور وجودی تبدیل می‌کند. چنان‌چه $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد، آن‌گاه گزارهٔ «به ازای بعضی مقادیر x، $p(x)$» را با نماد مقابل نمایش می‌دهند: $\exists x : p(x)$

گزاره‌ای که با سور وجودی بیان شده باشد وقتی درست است که مجموعهٔ جواب گزاره‌نما **تهی نباشد**.

تست

کدام گزاره درست است؟ ($\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است.)

۱) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$

۲) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x} = ۱$

۳) $\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ \leq ۰$

۴) $\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ > ۰$

پاسخ گزینهٔ ۳ اگر $x = ۰$، آن‌گاه $x^۲ = ۰$ است و در نتیجه گزارهٔ ترکیب فصلی « $x^۲ < ۰ \vee x^۲ = ۰$ » که معادل « $x^۲ \leq ۰$ » است، درست می‌باشد.

گزینهٔ (۱) نادرست است، زیرا هر دو جواب معادله که $x=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$ هستند ناگویا می‌باشند.

گزینهٔ (۲) نیز نادرست است، زیرا اگر $x=۰$، آن‌گاه عبارت $\frac{x}{x}$ تعریف نشده است. در نتیجه مجموعهٔ جواب، $\mathbb{R}-\{۰\}$ است که با دامنهٔ متغیر؛ یعنی با $\mathbb{R}$ برابر نیست.

گزینهٔ (۴) نیز نادرست است، زیرا اگر $x=۰$ باشد، آن‌گاه $x^۲=۰$.

نقیض گزاره‌های سوری

اگر فردی ادعا کند که «هر مسئله‌ای بدهی، آن را حل می‌کنم.» آن‌گاه برای ردکردن ادعای او کافی است مسئله‌ای به او بدهید که نتواند آن را حل کند و نشان دهید ادعایش باطل است؛ چنین امری را نقیض سور عمومی می‌نامند.

در مثال فوق، دیدیم که نقیض «هر مسئله‌ای بدهی، آن را حل می‌کنم» معادل با این است که بگوییم «مسئله‌ای وجود دارد، که نمی‌توانی آن را حل کنی». ملاحظه می‌کنید که برای نقض‌کردن گزاره‌ای که با سور عمومی بیان شده است کافی است آن را به سور وجودی تبدیل کنیم طوری که قسمت گزاره‌نمای آن نقیض شده باشد؛ به بیان دیگر داریم:

$$\sim(\forall x: p(x))\equiv \exists x;\sim p(x)$$

فرض کنید فردی ادعا کرده است که «خانه‌ای وجود دارد که نمی‌توانی آن را بخری»؛ برای نقض‌کردن آن می‌گویید «هر خانه‌ای که باشد می‌توانم آن را بخرم»؛ ملاحظه می‌کنید که نقیض سور وجودی، سور عمومی است به طوری که قسمت گزاره‌نمای آن نقیض شده باشد، به بیان دیگر داریم:

$$\sim(\exists x: p(x))\equiv \forall x;\sim p(x)$$

تست

گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : P(x,y)$ ، با کدام گزاره‌نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $y - x = ۶$ ۲) $x - y = ۶$ ۳) $x + y = ۶$ ۴) $xy = ۶$

پاسخ گزینهٔ ۱ عبارت $y - x = ۶$ معادل است با $y = x + ۶$، پس **هر** x طبیعی که در نظر بگیریم، آن‌گاه $y = x + ۶$ نیز عددی طبیعی است؛ یعنی به ازای هر x طبیعی، yای طبیعی وجود دارد که $y - x = ۶$. با مثال نقض سایر گزینه‌ها را رد می‌کنیم.

اگر $x = ۱$ ، آن‌گاه y طبیعی وجود ندارد که $۱ - y = ۶$ باشد، پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

اگر $x = ۷$ باشد، آن‌گاه y طبیعی وجود ندارد که $۷ + y = ۶$ باشد، پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

اگر $x = ۴$ باشد، آن‌گاه y طبیعی وجود ندارد که $۴y = ۶$ باشد، پس گزینهٔ (۴) نیز نادرست است.

تست

کدام گزارهٔ سوری زیر، دارای ارزش درست است؟ (سراسری خارج ریاضی)

۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ + ۲ > ۲x$ ۲) $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-۱}{x} = x$

۳) $\exists x \in \mathbb{R} : |x + \frac{۱}{x}| < ۲$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = x + ۲$

پاسخ گزینهٔ ۱ واضح است که:

$$x^۲ + ۲ > ۲x \Leftrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + ۱ > ۰ \Leftrightarrow (x-۱)^۲ + ۱ > ۰$$

و این نامساوی به ازای هر x حقیقی درست است، پس گزینهٔ (۱) درست می‌باشد.

توجه کنیم که معادلهٔ $x = \frac{x-1}{x}$ با شرط $x \neq 0$، معادل با $x^2 = x - 1$ یا $x^2 - x + 1 = 0$ است و x حقیقی وجود ندارد که در این رابطه صدق کند، زیرا $\Delta < 0$ است، پس گزینهٔ (۲) درست نیست.

عبارت $|x + \frac{1}{x}|$ به ازای هر x حقیقی به‌جز صفر، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است و به ازای صفر نیز تعریف نشده است، پس x حقیقی وجود ندارد که $|x + \frac{1}{x}| < 2$ باشد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

عبارت $x + 2 = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ به ازای $x = 2$ تعریف نشده است، پس به ازای **هر** x حقیقی این رابطه برقرار نیست و در نتیجه گزینهٔ (۴) نیز نادرست است.

پرسش های تستی

۱- اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x-\frac{۳}{۲}|\le\frac{۵}{۲}\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $\exists x\in A: x+۵=۳$

۲) $\forall x\in A: x+۴<۸$

۳) $\exists x\in A: \frac{۱}{x}\in\mathbb{Z}$

۴) $\forall x\in A: x^{۲}>۰$

۲- نقیض گزارهٔ $(\forall x\in\mathbb{Q}; x^{۲}\ge x)\wedge(\exists x\in\mathbb{R}; x^{۲}=-۱)$ کدام است؟

۱) $(\forall x\in\mathbb{Q}: x^{۲}<x)\vee(\exists x\in\mathbb{R}: x^{۲}\ne-۱)$

۲) $(\exists x\in\mathbb{Q}: x^{۲}<x)\vee(\forall x\in\mathbb{R}: x^{۲}\ne-۱)$

۳) $(\exists x\in\mathbb{Q}: x^{۲}\ge x)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}: x^{۲}=-۱)$

۴) $(\exists x\in\mathbb{R}: x^{۲}<x)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}: x^{۲}\ne-۱)$

۳- گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز با کدام گزینه است؟

۱) $(p \vee q) \vee r$

۲) $(p \vee q) \wedge r$

۳) $(p \vee \sim q) \vee r$

۴) $(p \wedge q) \vee p$

پاسخ پرسش های تستی

۱- گزینهٔ «۳» ابتدا عضوهای مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$$|x-\frac{۳}{۲}|\le\frac{۵}{۲} \Rightarrow -\frac{۵}{۲}\le x-\frac{۳}{۲}\le\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow -۱\le x\le ۴ \Rightarrow A=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

با توجه به عضوهای مجموعهٔ A، هرگز $x+۵=۳$ نمی‌شود، پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگر $x=۴$، آن‌گاه $۸ \not< ۸$ $x+۴=۸$ پس گزینهٔ (۲) نیز نادرست است و اگر $x=۰$، آن‌گاه $x^۲ \not> ۰$، پس گزینهٔ (۴) نیز نادرست است. اما $-۱\in A$ و $\frac{۱}{-۱}\in\mathbb{Z}$، پس گزینهٔ (۳) درست است.

۲- گزینهٔ «۲» می‌دانیم نقیض $p\wedge q$ هم‌ارز $\sim p\vee\sim q$ است و نقیض سوری وجودی (عمومی) سور عمومی (وجودی) است که قسمت گزاره‌نمای آن نقیض شده باشد، پس گزینهٔ (۲) پاسخ تست است.

۳- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $A \Rightarrow B\equiv\sim A\vee B$، پس داریم:

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)\equiv\sim(\sim p)\vee(\sim q \Rightarrow r)$$

$$\equiv p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$$