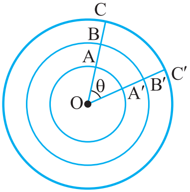
فهرست

درس ۱

رادیـــان

می‌دانیم اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت را یــک درجه می‌نامند. اگر زاویه‌ای مرکــزی (زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره باشــد) مقابل به ۱۲تا از این قسمت‌های مساوی باشد، آن‌گاه آن زاویــه را ۱۲درجه می‌گوینــد. در دایره‌های هم‌مرکز، اندازهٔ زاویه‌های مرکزی در تمام کمان‌ها برابرند.



در شکل مقابل اگر زاویهٔ مرکزی θ باشد، تمــام کمان‌هــای $\overset{\frown}{AA'}$، $\overset{\frown}{BB'}$ و $\overset{\frown}{CC'}$ از نظر درجه، برابر θ هستند، هرچند طول آن‌ها برابر نیستند.

می‌دانیــم اگر شــعاع دایره‌ای r باشــد، محیط آن $2\pi r$ اســت. حالا اگر بخواهیم طول کمانی که زاویهٔ مرکزی آن برحسب درجه (θ) است پیدا کنیم، تناسب زیر را در نظر می‌گیریم:

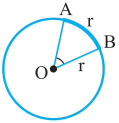
زاویه   طول کمان

$$\begin{array}{cc} 360^\circ & 2\pi r \\ \theta & \ell \end{array} \Rightarrow \frac{360}{\theta}=\frac{2\pi r}{\ell} \Rightarrow \boxed{\ell=\frac{\pi\theta}{180}r}$$

در امور فنی زاویه را برحســب واحد درجه اندازه‌گیری نمی‌کنند، زیرا در ادامهٔ مطالعهٔ ریاضیات (مثلاً محاســبهٔ حد توابع مثلثاتی، مشتق‌گرفتن، انتگرال‌گیری و ...) بهتر است واحدی به نام رادیان به کار برده شود.

تعریف رادیان

اگر طول کمانی از دایره‌ای به شعاع r، برابر r باشد، زاویهٔ مرکزی نظیر آن کمان را یک رادیان می‌نامند. در شکل صفحهٔ بعد، اگر طول کمان AB برابر با شعاع



دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ را یک رادیان می‌نامیم.

یک دایرهٔ کامل معادل ۲π رادیان است، زیرا محیط دایره $۲\pi \times r$ می‌باشد.

رابطهٔ بین رادیان و درجه

می‌دانیم یک دایرهٔ کامل معادل ۳۶۰° یا ۲π رادیان است، پس اگر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه تناسب زیر را داریم:

درجه	رادیان
۳۶۰°	۲π
D	R

$$\Rightarrow \frac{۳۶۰^\circ}{D} = \frac{۲\pi}{R} \Rightarrow \frac{۱۸۰}{D} = \frac{\pi}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\pi D}{۱۸۰}}$$

تذکرمهم دیدیم که اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی از دایره‌ای به شعاع r، برحسب درجه، برابر با θ باشد، طول کمان مقابل به آن $\ell = \frac{\pi\theta}{۱۸۰} r$ است. اما θ درجه، برحسب رادیان برابر $\theta^R = \frac{\pi\theta^\circ}{۱۸۰}$ یا $\theta^\circ = \frac{۱۸۰\theta^R}{\pi}$ است، پس اگر θ برحسب رادیان باشد، طول کمان نظیر آن به صورت مقابل است: $\ell = r\theta$

مثال

طول کمانی از دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی‌متر برابر ۶π سانتی‌متر است. زاویهٔ مرکزی نظیر این کمان، چند درجه است؟

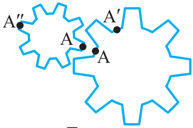
۱) ۹۰
۲) ۱۲۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

پاسخ گزینهٔ ۲

$$\ell = \frac{\pi\theta^\circ}{۱۸۰} r \Rightarrow ۶\pi = \frac{\pi\theta}{۱۸۰} \times ۹ \Rightarrow ۶\pi = \frac{\pi\theta}{۲۰} \Rightarrow \theta = \frac{۱۲۰\pi}{\pi} = ۱۲۰^\circ$$

مثال

دو چرخدنده یکی به شــعاع $10\ cm$ و دیگری به شــعاع $2\ cm$ با یکدیگر درگیر هســتند. اگر چرخدندهٔ بزرگ‌تر به انــدازهٔ $\frac{\pi}{5}$ رادیان دوران کند، چرخدندهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) π

۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ گزینهٔ ۲ وقتی چرخدندهٔ بزرگ‌تر به اندازهٔ $\frac{\pi}{5}$ رادیان بچرخد، نقطهٔ A به نقطهٔ A' منتقل می‌شود. طول کمان $\overset{\frown}{AA'}$ برابر است با:

$$\ell = \overset{\frown}{AA'} = \theta_1 r_1 = \frac{\pi}{5}\times 10 = 2\pi\ cm$$

چون دو چرخدنده درگیر هستند، پس نقطهٔ A روی چرخدندهٔ کوچک‌تر نیز باید به اندازهٔ $2\pi\ cm$ انتقال یابد تا به نقطهٔ A'' برسد، یعنی طول کمان $\overset{\frown}{AA''}$ روی چرخدندهٔ کوچک‌تر نیز باید $2\pi\ cm$ باشد.

$$\ell = \overset{\frown}{AA''} = \theta_2 r_2 \Rightarrow 2\pi = \theta_2 \times 2 \Rightarrow \theta_2 = \pi$$

یعنی چرخدندهٔ کوچک‌تر به اندازهٔ π رادیان (نیم‌دایره) دوران می‌کند.

تذکر وقتی دو چرخدنده با هم درگیر باشند (یا دو قرقره که با تسمه‌ای به هم وصل شــده باشــند) شــعاع یکی r_1 و دیگری r_2 باشــد، چنان‌چه چرخدندهٔ اول (قرقــرهٔ اول) به اندازهٔ θ_1 و چرخدندهٔ دوم (قرقرهٔ دوم) به اندازهٔ θ_2 دوران کنند، آن‌گاه:

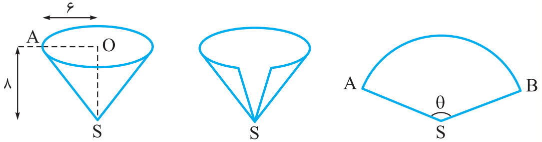
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

در مثال قبلی اگر از این رابطه استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{10}{2} = \frac{\theta_2}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow 5 = \frac{5\theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_2 = \pi$$

مثال

مخروطی قائم به شعاع قاعدهٔ $r = ۶\ cm$ و ارتفاع $h = ۸\ cm$ را از روی یک یال جانبی برش می‌دهیم و آن را تسطیح می‌کنیم. (روی یک سطح مسطح می‌گسترانیم.) زاویهٔ مرکزی نظیر این قطاع برحسب رادیان چه‌قدر است؟



پاسخ با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ AOS در شکل سمت چپ به سادگی معلوم می‌شود $AS = ۱۰\ cm$ است، پس شعاع قطاع حاصل پس از تسطیح مخروط، برابر با $۱۰\ cm$ است.

طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ از قطاع SAB برابر محیط قاعدهٔ مخروط است.

$$\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB} = \text{محیط قاعده} = ۲\pi r = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi\ cm$$

اکنون داریم:

$$\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB} = R\theta \Rightarrow ۱۲\pi = ۱۰\theta \Rightarrow \theta = ۱/۲\pi \text{ رادیان}$$

مثال

طول برف‌پاک‌کن اتومبیلی $۳۰\ cm$ است و کمانی را که طی می‌کند ۱۵۰° است. طول کمانی که نوک برف‌پاک‌کن می‌پیماید، چند سانتی‌متر است؟ $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

۱) $۶۹/۵$ ۲) $۸۷/۵$ ۳) $۹۶/۵$ ۴) $۷۸/۵$

پاسخ **گزینهٔ ۴** با توجه به رابطهٔ $R = \frac{\pi D}{۱۸۰}$، زاویهٔ ۱۵۰° برابر با $\frac{\pi \times ۱۵۰}{۱۸۰} = \frac{۵\pi}{۶}$ رادیان است.

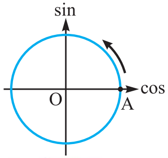
$$\text{طول کمان} = \ell = r\theta = ۳۰ \times \frac{۵\pi}{۶} = ۲۵\pi = ۲۵ \times ۳/۱۴ = ۷۸/۵\ cm$$

درس ۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

سال گذشته با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های صفر درجه، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° آشنا شدید که در جدول زیر گنجانده شده‌اند.

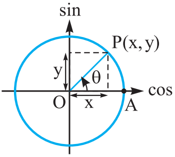
زاویه / نسبت مثلثاتی	۰ $\frac{\sqrt{۰}}{۲}$	$۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}$ $\frac{\sqrt{۱}}{۲}$	$۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$ $\frac{\sqrt{۴}}{۲}$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف‌نشده
cot	تعریف‌نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

عددهای سطر اول که زیر زاویه‌ها نوشته شده‌اند، سینوس زاویه‌ها هستند و اگر ترتیب آن‌ها را برعکس کنیم کسینوس زاویه‌ها به دست می‌آیند.



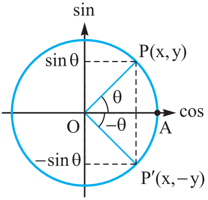
تعریف دایرهٔ مثلثاتی: دایره‌ای به شعاع واحد که دارای مبدأ (نقطهٔ A) و جهت مثبتی که پادساعتگرد است دایرهٔ مثلثاتی می‌نامند. محور افقی محور کسینوس‌ها و محور عمودی محور سینوس‌ها می‌باشد.

اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد و زاویهٔ $A\hat{O}P$ برابر θ باشد، آن‌گاه $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.



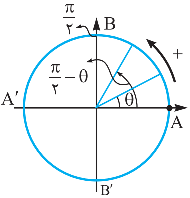
نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که $\cos(-\theta)=\cos\theta$ و $\sin(-\theta)=-\sin\theta$. چون $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ است، پس $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ و $\cot(-\theta)=-\cot\theta$ و به طور کلی عبارت‌های زیر را داریم:



$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(-\theta)=-\cot\theta$$

تذکرمهم توجه داشته باشید که اگر θ حاده باشد، $\frac{\pi}{2}-\theta$ در ربع اول است، زیرا $\frac{\pi}{2}$ یعنی کمان AB (شکل مقابل). چون باید θ از آن کم شود، پس باید در جهت عقربه‌های ساعت (خلاف جهت مثلثاتی) حرکت کنیم و در این صورت در ربع اول قرار می‌گیرد.



ولی $\pi+\theta$ در ربع سوم است، زیرا π یعنی کمان AA' (در جهت

مثبت) و باید θ به آن اضافه شود، پس باید در جهت مثلثاتی به اندازهٔ θ پیش برویم که در ربع سوم قرار می‌گیرد. به دلیل مشابه، زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}-\theta$ در ربع سوم است، زیرا $\frac{3\pi}{2}$ یعنی کمان ABB' و باید θ از آن کم شود، پس باید در خلاف جهت مثلثاتی برگردیم و در ربع سوم می‌افتد.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\frac{\pi}{2}\pm\theta$، $\pi\pm\theta$، $\frac{3\pi}{2}\pm\theta$ و $2\pi\pm\theta$

فرض کنید θ حاده باشد:

الف برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

گام۱ اگر کمان شامل $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\begin{aligned} \sin &\rightarrow \cos \\ \cos &\rightarrow \sin \\ \tan &\rightarrow \cot \\ \cot &\rightarrow \tan \end{aligned}$$

گام۲ با توجه به ربعی که زاویه در آن قرار دارد، علامت را مشخص می‌کنیم. به عنوان مثال برای محاسبهٔ $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$، چون $\frac{3\pi}{2}+\theta$ در ربع چهارم است و کسینوس در ربع چهارم مثبت است، حاصل آن مثبت می‌باشد و چون $\frac{3\pi}{2}$ دارد، کسینوس باید به سینوس تبدیل شود، پس $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$.

ب برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی π و ۲π مراحل زیر را طی می‌کنیم:

گام۱| اگر کمان شامل π یا ۲π باشد، نسبت‌های مثلثاتی تغییر نمی‌کند:

$$\sin \rightarrow \sin$$
$$\cos \rightarrow \cos$$
$$\tan \rightarrow \tan$$
$$\cot \rightarrow \cot$$

گام۲| با توجه به ربعی که زاویه در آن قرار دارد، علامت را مشخص می‌کنیم.

به عنوان مثال برای محاسبهٔ $\sin(\pi+\theta)$ این طور عمل می‌کنیم که چون شامل π است، پس حاصل (بدون در نظرگرفتن علامت) $\sin\theta$ است. ولی زاویهٔ $\pi+\theta$ در ربع سوم است و سینوس در ربع سوم منفی است، پس حاصل نهایی $-\sin\theta$ می‌باشد، در نتیجه $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$.

از مطالبی که بیان شد نتیجه می‌شود که اگر α و β متمم یکدیگر باشند، یعنی $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ آن‌گاه داریم:

$$\sin\alpha=\cos\beta \ , \ \cos\alpha=\sin\beta \ , \ \tan\alpha=\cot\beta \ , \ \cot\alpha=\tan\beta$$

مثال

حاصل $\sin\frac{۷\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ| گزینهٔ ۳ می‌دانیم $\frac{۷\pi}{۶}=\frac{۶\pi}{۶}+\frac{\pi}{۶}$ یا $\frac{۷\pi}{۶}=\pi+\frac{\pi}{۶}$ است. در این‌جا θ، برابر $\frac{\pi}{۶}$ می‌باشد. $\pi+\frac{\pi}{۶}$ در ربع سوم است و در ربع سوم، سینوس منفی است و چون π دارد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند، پس:

$$\sin\frac{۷\pi}{۶}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

مثال

حاصل $A=\sin(-\frac{۱۳\pi}{۶})+\tan\frac{۷\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۴ می‌دانیم $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ است، پس:

$$\sin(-\frac{۱۳\pi}{۶})=-\sin\frac{۱۳\pi}{۶}=-\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که انتهای کمان $۲\pi+\frac{\pi}{۶}$ در ربع اول است و سینوس آن مثبت می‌باشد.

$$\tan\frac{۷\pi}{۴}=\tan(\frac{۸\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

پس توجه داریم که $۲\pi-\frac{\pi}{۴}$ در ربع چهارم است و تانژانت در ربع چهارم، منفی است. پس: $A=-\frac{۱}{۲}+(-۱)=-\frac{۳}{۲}$

مثال

حاصل $A=\dfrac{۲\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)+۳\sin(۲\pi-\theta)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\tan\theta$ ۲) $-\frac{۳}{۴}\cot\theta$ ۳) $-\frac{۱}{۲}\tan\theta$ ۴) $\frac{۳}{۴}\cot\theta$

پاسخ گزینهٔ ۲ واضح است که:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=+\cos\theta \quad ، \quad \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(۲\pi-\theta)=-\sin\theta \quad ، \quad \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta$$

پس داریم: $A=\dfrac{۲\cos\theta-(-\cos\theta)}{-\sin\theta+۳(-\sin\theta)}=\dfrac{۳\cos\theta}{-۴\sin\theta}=-\frac{۳}{۴}\cot\theta$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $۲k\pi \pm \theta$ $(k \in \mathbb{Z})$

می‌دانیم ۲π یعنی یک دوران کامل حول مرکز دایره، پس $۲k\pi$ که برابر با $k(۲\pi)$ است یعنی k بار کامل حول مرکز دایره دوران کنیم، بنابراین، انتهای کمان‌های $۲k\pi + \theta$ و θ و نیز انتهای کمان‌های $۲k\pi - \theta$ و $-\theta$ بر هم منطبق هستند و داریم:

$$\begin{aligned} \sin(۲k\pi+\theta) &= \sin\theta \\ \cos(۲k\pi+\theta) &= \cos\theta \\ \tan(۲k\pi+\theta) &= \tan\theta \\ \cot(۲k\pi+\theta) &= \cot\theta \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \sin(۲k\pi-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(۲k\pi-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(۲k\pi-\theta) &= -\tan\theta \\ \cot(۲k\pi-\theta) &= -\cot\theta \end{aligned}$$

به بیان ساده‌تر، در تمام نسبت‌های مثلثاتی مضرب‌های زوج π را می‌توان حذف نمود.

مثال

$M = \sqrt{۳}\cot(\frac{۱۶\pi}{۳}) + ۲\cos(\frac{۲۳\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$　　۴) ۲

پاسخ گزینهٔ ۴ می‌دانیم:

$$\cot(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \cot(\frac{۱۵\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}) = \cot(۵\pi + \frac{\pi}{۳})$$

$$= \cot(۴\pi + \pi + \frac{\pi}{۳}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{۳}) = +\cot\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

و

$$\cos(\frac{۲۳\pi}{۳}) = \cos(\frac{۲۴\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \cos(۸\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

پس داریم:

$$M = \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲$$

تذکر توابع سینوس و کسینوس همواره در بازهٔ $[-1,1]$ هستند؛ یعنی اگر θ زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه: $-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \sin\theta \leq 1$

مثال

مقدار θ چند رادیان باشد تا عبارت $A = 2\sin(\frac{\pi}{3} - \theta) + 1$ بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $-\frac{\pi}{6}$ ۴) $-\frac{\pi}{3}$

پاسخ **گزینهٔ ۳** بیشترین مقدار سینوس یک زاویه برابر با ۱ است، پس باید $\sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = 1$ باشد تا عبارت مورد نظر بیشترین مقدار ممکن شود. می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ است، پس زاویهٔ $\frac{\pi}{3} - \theta$ می‌تواند برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد.

$$\frac{\pi}{3} - \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - 3\pi}{6} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

درس ۳ توابع مثلثاتی

تابع سینوس و نمودار آن

اگر $f(x) = \sin x$ باشد، آن‌گاه با توجه به جدول زیر و رسم چند نقطه از این تابع و به هم وصل کردن این نقاط، نمودار تابع به شکل زیر خواهد بود: البته این شکل به همین فرم و از سمت‌های چپ و راست متناوباً تکرار می‌شود و به همین دلیل آن را موج سینوسی می‌نامند.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0