

# مقدمه

به نام او که همه چیز دنیا را براساس حساب  
استوار کرد و بر پایه هندسه نظم بخشید.

## سلام به بچه‌های باحال ریاضی

در کتاب جیبی چکیده هندسه دهم تمام نکات و تست‌های سال‌های اخیر کنکور سراسری و هم‌چنین مطالب کتاب درسی به طور کامل پوشش داده شده است. این کتاب یک جمع‌بندی کامل از سرفصل‌های کتاب درسی، همراه با نکات و تست‌های مرتبط بوده که با نظم خاصی چیده شده‌اند. با مطالعه این کتاب می‌تونید آمادگی خود را در سطح بالایی نگه دارید و از پس امتحانات تشریحی و کنکورهای آزمایشی و سراسری بربیاید. امید آن دارم که این کتاب در بالابردن سطح علمی دانش‌آموزان کشورم مؤثر باشد.

لازم است تأکید کنم در تألیف این کتاب، دوستان عزیزی در انتشارات خیلی‌سبز من را همراهی کردند که از همه آن‌ها تشکر و قدردانی می‌کنم و هم‌چنین بی‌نهایت سپاس‌گزارم از پیگیری‌های فعالانه و دلسوزانه آقای ابراهیم‌نژاد.

به امید روزهای خوب آینده

محمدجواد نوری

شهریور ۱۴۰۲

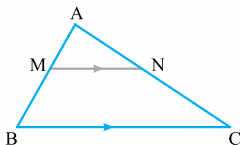
# فهرست مطالب

۷	ترسیم‌های هندسی و استدلال	فصل اول
۸	ترسیم‌های هندسی	• درس اول
۲۵	استدلال	• درس دوم
۴۸	قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن	فصل دوم
۴۹	نسبت و تناسب در هندسه	• درس اول
۵۷	قضیهٔ تالس	• درس دوم
۷۱	تشابه مثلث‌ها	• درس سوم
۸۲	کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها	• درس چهارم
۹۶	چندضلعی‌ها	فصل سوم
۹۷	چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	• درس اول
۱۱۴	مساحت و کاربردهای آن	• درس دوم
۱۳۹	تجسم فضایی	فصل چهارم
۱۳۰	خط، نقطه و صفحه	• درس اول
۱۳۸	تجسم فضایی	• درس دوم
۱۴۰	بُرش	• درس سوم
۱۴۶	دوران	• درس چهارم

# قضیه تالس

درس ۲

در مثلث ABC، اگر MN موازی BC باشد، آن گاه:



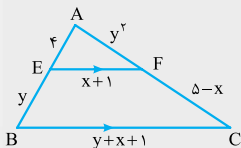
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{الف- (تالس جزء به جزء)}$$

$$\text{ب- (تالس جزء به کل)}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

تست

در شکل مقابل،  $EF \parallel BC$  است. مقدار



(تجربی ۱۴۰۰)

$y - 2x$  کدام است؟

-۲ (۲)	-۴ (۱)
۴ (۴)	۲ (۳)

پاسخ گزینۀ «۱» ابتدا قضیه تالس جزء به کل را می نویسیم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{y+4} = \frac{y^2}{5-x+y^2} = \frac{x+1}{y+x+1}$$

از طرفین وسطین کردن دو نسبت اولی و آخری داریم:

$$xy + y + 4x + 4 = 4y + 4x + 4 \Rightarrow xy + y = 4y$$

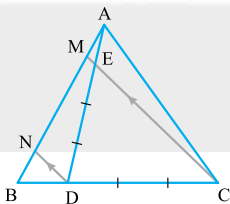
$$\Rightarrow xy = 3y \Rightarrow x = 3$$



اکنون تالس جزءه جزء می نویسیم:  $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

پس مقدار  $y - 2x$  برابر است با:  $2 - 2(3) = 2 - 6 = -4$



### تست

در شکل مقابل،  $BD = \frac{1}{4}BC$ ،  $AE = \frac{1}{4}AD$  و  $DN \parallel CM$ . اندازه  $AB$  چند برابر  $AM$  است؟ (خارج ۹۷)

$$4 \quad 1) \quad 5 \quad 2) \quad 6 \quad 3) \quad 8$$

$$4 \quad 1) \quad 5 \quad 2) \quad 6 \quad 3) \quad 8$$

پاسخ: گزینه «۳» در مثلثهای  $MBC$  و  $ADN$ ، تالس جزءه جزء

$$\triangle MBC : DN \parallel MC \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \quad \text{می نویسیم:}$$

$$\Rightarrow BN = \frac{1}{3}MN$$

$$\triangle ADN : ME \parallel DN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}MN$$

$$\begin{cases} BN = \frac{1}{3}MN \\ AM = \frac{1}{3}MN \end{cases} \Rightarrow AM = BN$$

از طرفی طبق شکل داریم:

$$AB = AM + MN + BN = AM + 3AM + AM = 5AM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 5$$



### تست

در شکل مقابل،  $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$  باشد،

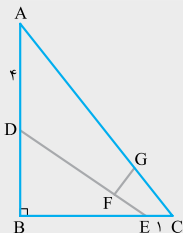
اندازه  $FG$  کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۲)

۱ (۱)

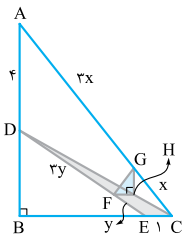
۱/۲۵ (۲)

۱/۵ (۳)

۱/۷۵ (۴)



**پاسخ** گزینه «۲» از C به D وصل می‌کنیم. از F به موازات BC و از G به موازات AB رسم می‌کنیم، حالا داریم:



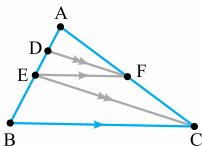
$$\triangle DEC : FH \parallel EC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{3y}{4y} = \frac{FH}{1} \Rightarrow FH = \frac{3}{4}$$

$$\triangle CDA : GH \parallel AD \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{x}{4x} = \frac{GH}{4} \Rightarrow GH = 1$$

چون  $AB \perp BC$  و  $\begin{cases} GH \parallel AB \\ FH \parallel BC \end{cases}$  است، پس  $\hat{H} = 90^\circ$ . به کمک

$$GF^2 = FH^2 + HG^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \quad \text{فیثاغورس داریم:}$$

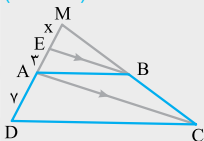
$$\Rightarrow GF = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1/25$$



$$\left\{ \begin{array}{l} EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\ DF \parallel EC \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AC} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AE^2 = AD \times AB$$

## تست

در شکل زیر، ABCD دوزنقه و  $BE \parallel AC$  است. اگر  $AD = 7$  و  $AE = 3$  باشد MD چه قدر است؟ (سراسری ۹۳)



- ۱۲ (۱)  
۱۲/۲۵ (۲)  
۱۲/۵ (۳)  
۱۲/۷۵ (۴)

پاسخ گزینۀ «۲» چون ABCD دوزنقه است، پس:  $AB \parallel CD$ .  
طبق فرض  $BE \parallel AC$ ، در نتیجه از تالس تودرتو داریم:

$$MA^2 = ME \times MD \quad (*)$$

ME = x را در رابطه (\*) قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow (x+3)^2 = x(x+10) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 10x$$

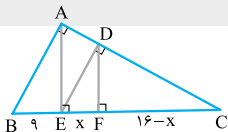
$$\Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = 2\frac{1}{4} + 3 + 7 = 12\frac{1}{4}$$



## تست

در شکل زیر، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. مقدار  $x$  کدام است؟



۴/۵۴ (۱)

۵/۳۶ (۲)

۵/۷۶ (۳)

۶/۷۵ (۴)

$$\begin{cases} DE \perp AC \\ BA \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \parallel DE$$

پاسخ گزینه «۳»

$$\begin{cases} AE \perp BC \\ DF \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \parallel DF$$

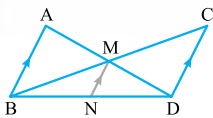
طبق تالس تودرتو در مثلث  $ABC$  داریم:

$$CE^2 = CF \times CB \Rightarrow 16^2 = (16-x)(25)$$

$$\Rightarrow 256 = 400 - 25x \Rightarrow 25x = 144$$

$$\Rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5/76$$

## تست

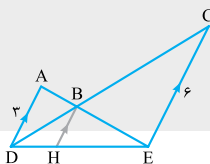


اگر یکی از دو خط موازی در دو مثلث مشترک باشد، آن گاه:

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$



### تست



در شکل مقابل،  $AD \parallel BH \parallel CE$  است. اگر  $AD = 3$  و  $CE = 6$  باشد، اندازه  $BH$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{3}$   
 (۳)  $\frac{2}{2}$       (۴) ۲

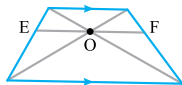
پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{1}{BH} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CE}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 2$$

### تست

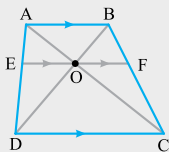
اگر از نقطه  $O$  محل تقاطع قطرهای دوزنقه، خطی به موازات قاعده رسم کنیم تا ساق‌ها را در  $E$  و  $F$  قطع کند، آن‌گاه:



$$OE = OF$$

### تست

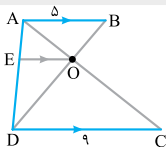
در شکل مقابل  $AB \parallel EF \parallel DC$ ،  $AB = 5$  و  $DC = 9$  است. اندازه  $EF$  چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{45}{7}$       (۲)  $\frac{45}{6}$   
 (۳)  $3\sqrt{5}$       (۴) ۷

پاسخ: گزینه «۱» در مثلث‌های  $ABD$  و  $ADC$  داریم:

$$\frac{1}{OE} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$$

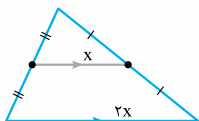




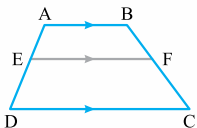


با توجه به نکته قبل، داریم:  $OE = OF = x$

$$\Rightarrow OE = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = 2OE = 2 \times \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$



• قضیه میان خط • پاره خطی که وسط‌های دو ضلع از مثلثی را به هم وصل کند، موازی ضلع سوم بوده و اندازه‌اش نصف اندازه ضلع سوم است.



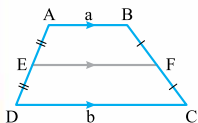
• تالس در دوزنقه • در هر دوزنقه، اگر خطی به موازات دو قاعده آن رسم کنیم، داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

### نکات مهم

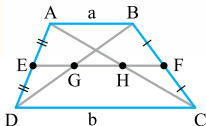
۱ اگر E وسط AD و F وسط BC (ساق‌های دوزنقه) باشند، آن‌گاه:

$$EF = \frac{a+b}{2}$$



(قضیه میان خط در دوزنقه)

۲ اگر E و F وسط ساق‌های دوزنقه باشند، آن‌گاه داریم:



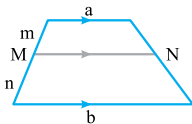
$$\begin{cases} EG = HF = \frac{a}{2} \\ EH = FG = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow GH = \frac{b-a}{2}$$

$$GH = \frac{b-a}{2}$$

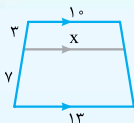


۳ هر خطی مانند MN موازی قاعده‌های دوزنقه رسم کنیم، داریم:

$$MN = \frac{mb + na}{m + n}$$



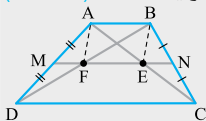
در شکل مقابل مقدار x را بیابید.



$$x = \frac{3 \times 7 + 7 \times 10}{3 + 7} = \frac{39 + 70}{10} = 10.9$$

### تست

در دوزنقه ABCD زیر، نسبت قاعده‌ها  $\frac{1}{3}$  است. با توجه به شکل، مساحت ABFE چند برابر مساحت دوزنقه اولیه است؟ (سراسری ۹۷)



$$\frac{1}{6} \quad (2) \quad \frac{2}{9} \quad (1)$$

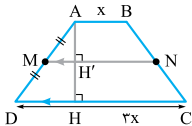
$$\frac{1}{4} \quad (4) \quad \frac{3}{16} \quad (3)$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} AB = x \\ CD = 3x \end{cases}$$

پاسخ گزینه «۴»

مطابق شکل، M و N وسط ساق‌های دوزنقه ABCD هستند؛ پس:

$$EF = \frac{3x - x}{2} = x = AB$$





مطابق شکل ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث ADH تالس

$$1 = \frac{AM}{MD} = \frac{AH'}{HH'} \Rightarrow AH' = HH'$$

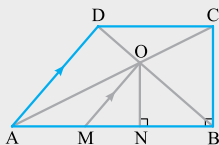
جزء به جزء برقرار است:

یعنی  $H'$  وسط  $AH$  است؛ پس  $AH = 2AH'$ .

از طرفی در چهارضلعی  $ABEF$ ،  $AB = EF$  و  $AB \parallel EF$ ؛ پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است:

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{AH' \times EF}{\frac{(AB + CD) \times AH}{2}} = \frac{2AH' \times x}{(x + 3x) \times AH} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

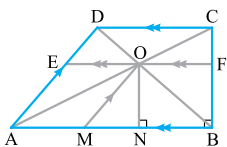
### تست



با توجه به شکل مقابل، در ذوزنقه

$ABCD$  نسبت  $\frac{AM}{BN}$  چه قدر است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲ (سراسری ۹۹)  
(۳) کمتر از ۱  
(۴) بین ۱ و ۲



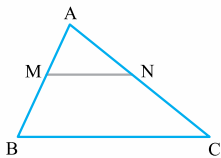
پاسخ گزینه «۱» از  $O$  خطی موازی

قاعده‌ها رسم می‌کنیم:

چهارضلعی  $OEAM$  متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع روبه‌رو، دوجه‌دو موازی‌اند. در نتیجه:  $OE = AM$

چهارضلعی  $OFBN$  مستطیل است، زیرا اضلاع روبه‌رو، دوجه‌دو موازی‌اند و  $\hat{B} = \hat{N} = 90^\circ$ ؛ پس  $OF = BN$ .

از طرفی می‌دانیم  $OF = OE$ ؛ پس:  $\frac{AM}{BN} = 1 \Rightarrow BN = AM$

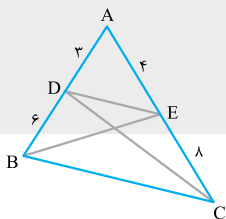


**عکس قضیه تالس** اگر خطی روی دو ضلع مثلثی پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

فرض:  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  حکم:  $MN \parallel BC$

**تذکره** - توجه کنید اثبات عکس قضیه تالس، به روش برهان خلف انجام می‌شود.

### تست



در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟  
(تجربی خارج ۱۴۰۱)

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{2}{3}$   
(۳)  $\frac{3}{4}$   
(۴) ۱

**پاسخ** - گزینه «۴» ابتدا شرایط عکس قضیه تالس را بررسی

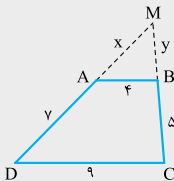
می‌کنیم:  $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow DE \parallel BC$

اکنون دو مثلث CDE و BDE در قاعده DE مشترک و ارتفاع‌های یکسان نیز دارند (فاصله دو خط موازی DE و BC اندازه ارتفاع آن‌ها است). پس هم‌مساحت‌اند. در نتیجه:

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle BDE}} = 1$$

• تست‌های مروری از بحث تالس •

تست



در دوزنقهٔ مقابل، محیط مثلث MAB چه قدر

(تجربی ۹۹)

$$۱۳/۶ (۲)$$

$$۱۴/۸ (۴)$$

است؟

$$۱۳/۲ (۱)$$

$$۱۴/۴ (۳)$$

پاسخ گزینۀ «۲» در دوزنقه، قاعده‌ها موازی‌اند؛ پس  $AB \parallel CD$ .

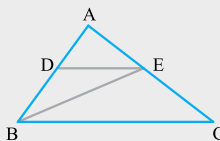
$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل در } \triangle MDC} \frac{x}{y+x} = \frac{y}{\Delta+y} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x = 28 + 4x \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ 9y = 20 + 4y \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AMB \text{ محیط} = x + y + 4 = \frac{28}{5} + \frac{20}{5} + 4$$

$$= \frac{68}{5} = \frac{136}{10} = 13/6$$

تست



در مثلث ABC مقابل،  $DE \parallel BC$  و

$$\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5} \text{ است. مساحت مثلث EBC}$$

چند برابر مساحت مثلث EBD است؟

(سراسری ۹۳)

$$۲/۷۵ (۴)$$

$$۲/۵ (۳)$$

$$۲/۲۵ (۲)$$

$$۲ (۱)$$



پاسخ گزینه «۲» دو مثلث EBC و EBD هم‌ارتفاع هستند،

پس نسبت مساحت‌هایشان برابر است با نسبت قاعده‌هایشان:

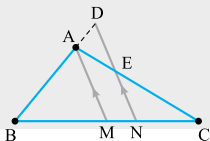
$$\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle EBD}} = \frac{BC}{DE}$$

از طرفی طبق تالس جزءبه‌کل در مثلث ABC داریم:  $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

و طبق فرض  $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$ ؛ پس  $AD = 4x$  و  $DB = 5x$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+DB} = \frac{4x}{9x} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4} = 2/25$$

### تست



در مثلث ABC، اگر  $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ ،

موازی میانه AM باشد، نسبت  $\frac{AD}{AE}$

کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳» AM میانه است؛ پس:  $BM = MC$

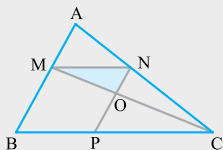
$$\triangle CAM : EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \quad (1)$$

$$\triangle BDN : AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AD}{AE}$$



### تست



در شکل مقابل،  $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$  است. مساحت مثلث MNO چند درصد متوازی الاضلاع MNPB است؟

(خارج ۹۰)

۲۴ (۲)      ۲۰ (۱)

۳۰ (۴)      ۲۵ (۳)

پاسخ گزینه «۱» طبق فرض، چهارضلعی MNPB متوازی الاضلاع

$MN \parallel BP$  ,  $NP \parallel MB$

است. پس:

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{MN}{BC}$$

$$\triangle ACM : ON \parallel AM \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{ON}{AM}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{5}{3}$$

از طرفی

$$\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AC}{NC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{ON}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{ON}{\frac{2}{3}MB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{ON}{MB} = \frac{\frac{2}{3} \times 3}{5} = \frac{2}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ONM}}{S_{MNPB}} = \frac{ON \times MN \times \sin \hat{N}}{NP \times MN \times \sin \hat{N}}$$

$$= \frac{ON}{NP} = \frac{ON}{2NP} = \frac{ON}{2MB} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100}$$

پس مساحت مثلث ONM، ۲۰ درصد مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB است.

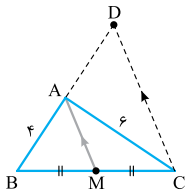
### تست

در مثلث ABC، اضلاع  $AB=4$ ،  $AC=6$  و  $BC=7$  است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD کدام است؟

(تجربی خارج ۹۸)

- ۱)  $7/5$       ۲) ۸      ۳)  $8/5$       ۴) ۹

پاسخ - گزینه «۲» ابتدا شکل مناسب رسم می‌کنیم:



$$\triangle BDC : AM \parallel CD$$

$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BD = 2BA = 2(4) = 8$$