مقدمهٔ ناشـــر

یکی از کارهایی که تو هندسه انجام می‌دیم اثبات قضیه‌هاست که شاید خیلی‌ها دوسش ندارن و با خودشون می‌گن این اثبات‌ها به چه دردمون می‌خوره؟!!

شاید فک کنید هیچ‌وقت از اثبات‌ها تو زندگیتون استفاده نکنید و فقط به درد نمره امتحانتون بخوره!! ولی اثبات‌ها باعث می‌شن که درست فکر کنید و بهت یاد می‌دن که خیلی منظم و دقیق بین افکارت ارتباط برقرار کنی! این‌ها زندگیتون رو بسیار ساده‌تر می‌کنند. باور کنید!!!

خلاصه این‌که هندسه نکته‌های جذاب زیادی واسه زندگی داره!

از استاد کیوان صارمی عزیز که زحمت تألیف این کتاب رو کشیدن و هم‌چنین همهٔ بچه‌های گروه تألیف و تولید خیلی‌سبز بسیار ممنونیم

مقدمهٔ مؤلف

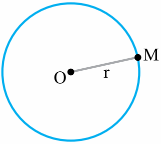
خلاصه و مفید بخوام بهتون بگم این کتاب «آن‌چه باید بدانید است»؛ یعنی هر چی لازمه رو براتون آوردم و هر چیزی که جاش تو این کتاب نبود نیاوردم. راستش سخت‌ترین قسمتش هم همین نیاوردنا بود. (حالا نمی‌دونم چه‌قدر موفق بودم تو این زمینه.) در تألیف این کتاب خیلیا به من کمک کردن؛ جا داره ازشون تشکر کنم:

- مهندس سبزمیدانی که به من اصولِ کتاب‌نوشتن رو یاد دادن. ممنونم بابت همه‌چیز.
- پیام ابراهیم‌نژاد که راهنمایی کرد منو.
- احسان حسینیان که اعتماد داشت بهم.
- و همهٔ دوستان واحد تولید خیلی‌سبزمون که زحمت تولید کتاب رو کشیدن. دمتون گرم.

فهرست مطالب

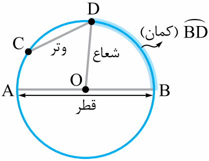
مفاهیم اولیهٔ دایره

دایره به مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت فاصله‌ای ثابت دارند، **دایره** می‌گوییم. به نقطهٔ ثابت، **مرکز** و به فاصلهٔ ثابت، **شعاع** دایره گفته می‌شود.



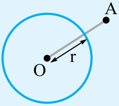
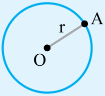
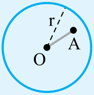
دایره‌ای را که مثل شکل روبه‌رو مرکزش O و شعاعش r باشد، به صورت $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

چند تعریف مقدماتی از دایره

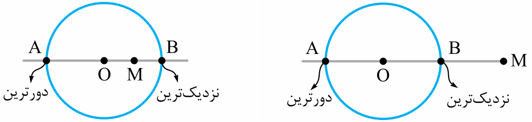


قبلا با مفاهیمی مثل شعاع، وتر، کمان و ... آشنا شدید. برای این‌که این مفاهیم یادتان بیاید به شکل مقابل توجه کنید:

وضعیت نقطه و دایره وضعیت نقطه و دایره با توجه به فاصله‌ای که آن نقطه از مرکز دایره دارد، مشخص می‌شود. نگاه کنید:

وضعیت نقطه و دایره	شکل	رابطه
نقطه خارج دایره		$OA > r$
نقطه روی دایره		$OA = r$
نقطه داخل دایره		$OA < r$

بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ یک نقطه از دایره



به شکل‌هایی که برایتان کشیدم توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید نقطهٔ M چه داخل دایره باشد و چه خارج از آن، وقتی خطی که از نقطهٔ M و مرکز دایره می‌گذرد رسم بشود، نزدیک‌ترین نقطه به M و دورترین نقطه از آن پیدا می‌شود. حالا اگر فرض کنیم فاصلهٔ M از مرکز d و شعاع دایره r باشد، بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ M از دایره برابر هستند با:

$MA =$ بیشترین فاصله $= d + r$

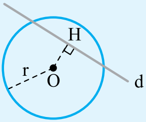
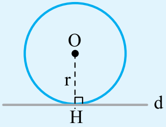
$MB =$ کم‌ترین فاصله $= \boxed{d-r}$ یا $\boxed{r-d}$

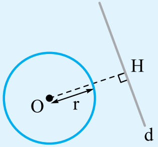
$d-r$: وقتی M خارج دایره است.

$r-d$: وقتی M داخل دایره است.

وضعیت خط و دایره

وضعیت خط و دایره با توجه به فاصلهٔ مرکز دایره از خط یا تعداد نقطه‌های مشترک خط و دایره مشخص می‌شود. این موضوع را در جدول زیر ببینید:

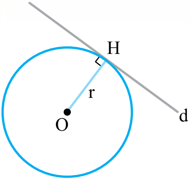
وضعیت خط و دایره	شکل	رابطه	تعداد نقاط مشترک
متقاطع		$OH < r$	۲
مماس		$OH = r$	۱

وضعیت خط و دایره	شکل	رابطه	تعداد نقاط مشترک
متخارج		$OH > r$	۰

نکته

شعاع (یا قطر) دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است و برعکس. یعنی اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، حتماً این خط بر دایره مماس است:

$OH \perp d \Leftrightarrow d$ بر دایره مماس است.

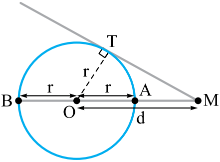


تست

نقطهٔ M بیرون دایرهٔ C مفروض است. اگر دورترین و نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C به نقطهٔ M به ترتیب به فاصلهٔ ۸ و ۲ واحد از آن قرار داشته باشند، طول مماس مرسوم از نقطهٔ M بر دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۳» اول شکل مسئله را به همراه شعاع عمود بر مماس رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که مسئله کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ M از دایره را داده است، می‌نویسیم:



$$\begin{cases} d+r=۸ \\ \boxed{d-r}=۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲d=۱۰ \Rightarrow d=۵ \xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{d+r=۸} r=۳$$

حواست باشه ننویسی r−d

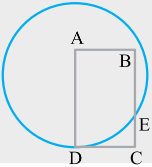
حالا با داشتن r و d می‌توانیم به کمک فیثاغورس در مثلث OTM، طول مماس MT را محاسبه کنیم:

$$r^۲ + MT^۲ = d^۲ \xrightarrow[r=۳]{d=۵} ۳^۲ + MT^۲ = ۵^۲$$

$$\Rightarrow MT^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow MT = ۴$$

تست

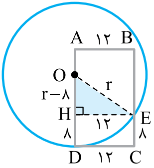
در شکل مقابل چهارضلعی ABCD مستطیل است به طوری که CD بر دایره مماس است. اگر $AB = ۱۲$ و $CE = ۸$ باشد، شعاع دایره برابر کدام است؟



۱) ۱۲/۵   ۲) ۱۳

۳) ۱۳/۵   ۴) ۱۴

پاسخ گزینهٔ «۲» از آن‌جایی که CD بر دایره مماس و $AD \perp CD$ است، مرکز دایره روی ضلع AD قرار دارد. (نقطهٔ O را در شکل مقابل ببینید.) اگر شعاع دایره r باشد، $OE = OD = r$ است. حالا اگر از نقطهٔ E عمود EH را بر AD رسم کنیم، مستطیل DHEC ساخته می‌شود که در آن $DH = EC = ۸$ و $CD = HE = ۱۲$ و در نتیجه $OH = r - ۸$ است. حالا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHE، مقدار r را به دست می‌آوریم:

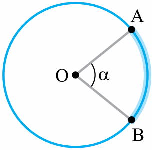


$$OE^۲ = OH^۲ + EH^۲ \Rightarrow r^۲ = (r - ۸)^۲ + ۱۲^۲$$

$$\Rightarrow \cancel{r^۲} = \cancel{r^۲} - ۱۶r + ۶۴ + ۱۴۴ \Rightarrow ۱۶r = ۲۰۸ \Rightarrow r = ۱۳$$

همه‌چیز راجع به زاویه‌ها و وترها در دایره

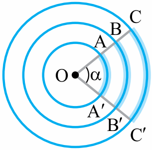
انواع زاویه‌ها در دایره



زاویهٔ مرکزی به زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند، زاویهٔ مرکزی می‌گوییم. مثلاً زاویهٔ α در شکل مقابل یک زاویهٔ مرکزی است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر با **اندازهٔ** کمان مقابلش است؛ یعنی:

$$\alpha = \overset{\frown}{AB}$$

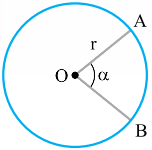
توجه دلیل تأکیدم روی کلمهٔ «**اندازه**» این است که معمولاً با **طول** اشتباه گرفته می‌شود. حواستان باشد، طول و اندازهٔ کمان با هم فرق دارند.



برای درک بهتر این موضوع به سه دایرهٔ هم‌مرکز روبه‌رو نگاه کنید. طبق تعریف زاویهٔ مرکزی می‌توانیم بنویسیم: $\alpha = \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{CC'}$

این یعنی کمان‌های $\overset{\frown}{AA'}$، $\overset{\frown}{BB'}$ و $\overset{\frown}{CC'}$ اندازه‌های یکسانی دارند، اما واضح است که طول‌های یکسانی ندارند: $AA' < BB' < CC'$؛ پس طول کمان یک چیز است و اندازهٔ کمان چیز دیگری!

نکته

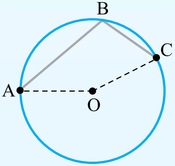


بین طول و اندازهٔ کمان این رابطه برقرار است:

$$\text{طول کمان} = \frac{\text{اندازهٔ آن کمان}}{۳۶۰^\circ} \times \text{محیط دایره}$$

یعنی برای کمان AB در شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{طول } AB = \frac{\alpha}{۳۶۰} \times ۲\pi r$$



مثال **دایرهٔ $C(O,۲)$ مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر طول کمان AB برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ و $۳\widehat{BC}=۲\widehat{AB}$ باشد، زاویهٔ AOC را به دست آورید.**

پاسخ طول کمان AB و شعاع دایره را داریم، پس می‌توانیم اندازهٔ کمان AB را به دست بیاوریم؛ ببینید:

$$\text{طول کمان AB} = \frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۳۶۰^\circ} \times \text{محیط دایره}$$

$$\Rightarrow \frac{۴\cancel{\pi}}{۳} = \frac{\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ} \times (۲\cancel{\pi} \times ۲) \Rightarrow \frac{\cancel{۴}}{۳} = \frac{\cancel{۴}\widehat{AB}}{۳۶۰^\circ}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۳} = ۱۲۰^\circ$$

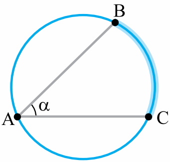
از طرفی به گفتهٔ سؤال $۳\widehat{BC}=۲\widehat{AB}$ است؛ پس:

$$۳\widehat{BC}=۲\widehat{AB} \xrightarrow{\widehat{AB}=۱۲۰^\circ} ۳\widehat{BC}=۲\times۱۲۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC}=۸۰^\circ$$

زاویهٔ AOC یک زاویهٔ مرکزی است که کمان $\widehat{ABC}$ را نگاه می‌کند، بنابراین:

$$A\hat{O}C = \widehat{ABC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = ۱۲۰^\circ + ۸۰^\circ = ۲۰۰^\circ$$

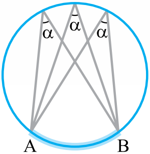
زاویهٔ محاطی به زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره هستند، زاویهٔ محاطی می‌گوییم. مثلاً در شکل مقابل، زاویهٔ α یک زاویهٔ محاطی است. اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابلش است؛ یعنی:



$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{۲}$$

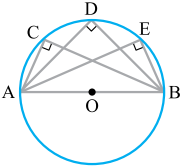
نکته

در هر دایره:



① اندازهٔ زاویه‌های محاطی رو به یک کمان، با هم برابرند.

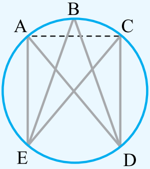
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

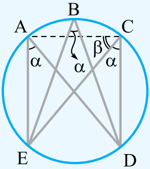


② زاویهٔ محاطی رو به قطر ۹۰° است.

$$\hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

مثال **در شکل مقابل AD قطر دایره است. اگر مجموع زاویه‌های A، B و C برابر ۱۵۰° باشد، زاویهٔ ACE را به دست آورید.**





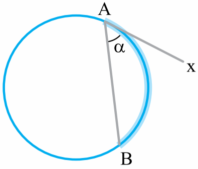
پاسخ همان‌طور که از شکل پیداست، زاویه‌های محاطی A، B و C همگی رو به کمان $\overset{\frown}{ED}$ هستند؛ پس می‌توانیم همهٔ آن‌ها را برابر α بگذاریم. سؤال می‌گوید جمع این زاویه‌ها ۱۵۰° است؛ بنابراین:

$$\alpha + \alpha + \alpha = ۱۵۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ$$

حالا خوب به زاویهٔ ACD نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید این زاویه رو به قطر AD است، پس $A\hat{C}D = ۹۰^\circ$ و در نتیجه:

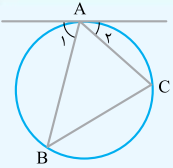
$$A\hat{C}D = ۹۰^\circ \Rightarrow \beta + \alpha = ۹۰^\circ \xrightarrow{\alpha = ۵۰^\circ} \beta + ۵۰^\circ = ۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow \beta = ۴۰^\circ$$

زاویهٔ ظلی به زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد، زاویهٔ ظلی می‌گوییم. مثلاً زاویهٔ α در شکل مقابل یک زاویهٔ ظلی است. اندازهٔ این زاویه هم مثل زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابلش است، یعنی:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

مثال **در شکل مقابل A نقطهٔ تماس است. اگر $\overset{\frown}{BC} = ۹۲^\circ$ و $\hat{A}_۱ = ۱/۵\hat{A}_۲$ باشد، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{ACB}$ را به دست آورید.**



پاسخ $\hat{A}$، زاویهٔ محاطی رو به کمان BC است؛ بنابراین $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۹۲^\circ}{۲} = ۴۶^\circ$ است. واضح است که جمع زاویه‌های $A_۱$، $A_۲$ و A باید ۱۸۰° باشد، پس داریم: $\hat{A}_۱ + \hat{A} + \hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ$

$$\xrightarrow[\hat{A}_۱ = ۱/۵\hat{A}_۲]{\hat{A} = ۴۶^\circ} ۱/۵\hat{A}_۲ + ۴۶^\circ + \hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲/۵\hat{A}_۲ = ۱۳۴^\circ$$

$$\Rightarrow A_۲ = \frac{۱۳۴^\circ}{۲/۵} \times \frac{۴}{۴} = ۵۳/۶^\circ$$

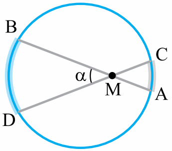
از طرفی $\hat{A}_۲$ یک زاویهٔ ظلی رو به کمان AC است؛ بنابراین:

$$\hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow ۵۳/۶^\circ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۱۰۷/۲^\circ$$

بنابراین اندازهٔ کمان ACB برابر می‌شود با:

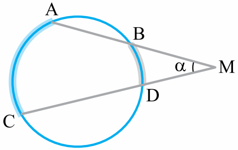
$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۱۰۷/۲^\circ + ۹۲^\circ = ۱۹۹/۲^\circ$$

زاویهٔ بین دو وتر به زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره ساخته می‌شود، زاویهٔ بین دو وتر می‌گوییم. مثلاً در شکل مقابل زاویهٔ α این‌چنین است. اندازهٔ این زاویه از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

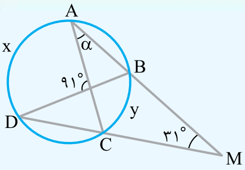
زاویهٔ بین امتداد دو وتر به زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در خارج از دایره ساخته می‌شود، زاویهٔ بین امتداد دو وتر می‌گوییم. مثلاً زاویهٔ α در شکل مقابل همین‌طور است. اندازهٔ این زاویه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

مثال **در شکل مقابل x، y و α را به دست آورید.**

(تمرین کتاب درسی)



پاسخ زاویهٔ بین امتداد دو وتر در خارج از دایره، 31° است؛ پس:

$$31^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y=62^\circ \quad (1)$$

زاویهٔ بین دو وتر در داخل دایره هم 91° است، پس:

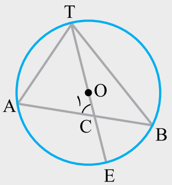
$$91^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y=182^\circ \quad (2)$$

حالا با حل دستگاه زیر، اول x و y و بعد α را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-y=62^\circ \\ x+y=182^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=244^\circ \Rightarrow x=122^\circ$$

$$\xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{x+y=182^\circ} y=60^\circ \xrightarrow[\text{به y است.}]{\alpha \text{ محاطی رو}} \alpha=\frac{y}{2}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$$

تست



در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\hat{A}=65^\circ$ و $\hat{B}=35^\circ$ باشد، زاویهٔ C_1 چند درجه است؟

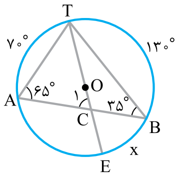
۱) ۶۰ ۲) ۶۱

۳) ۶۲ ۴) ۶۳

پاسخ گزینهٔ «۱» زاویه‌های A و B محاطی هستند، پس:

$$\begin{cases} \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{TB}}{2} \xrightarrow{\hat{A}=65^\circ} \overset{\frown}{TB}=130^\circ \\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{2} \xrightarrow{\hat{B}=35^\circ} \overset{\frown}{AT}=70^\circ \end{cases}$$

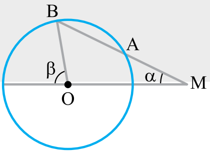
از طرفی پاره‌خط TE قطر دایره است؛ بنابراین $\overset{\frown}{TE} = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $x = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ$. حالا با توجه به این‌که $\hat{C}_۱$ زاویهٔ بین دو وتر در داخل دایره است، مقدار آن به راحتی پیدا می‌شود:



$$\hat{C}_۱ = \frac{x + ۷۰^\circ}{۲} = \frac{۵۰^\circ + ۷۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

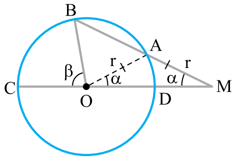
تست

دایرهٔ $C(O,r)$ مطابق شکل مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر $MA = r$ باشد، نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



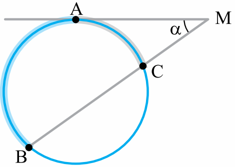
۱) ۲ ۲) ۲/۷۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۲۵

پاسخ گزینهٔ «۳» اول شعاع OA را رسم می‌کنیم. چون $MA = r$، پس مثلث OAM متساوی‌الساقین و در نتیجه $A\hat{O}M = \hat{M} = \alpha$ است. زاویه‌های $B\hat{O}C$ و $A\hat{O}D$ هر دو مرکزی هستند، پس $\overset{\frown}{AD} = \alpha$ و $\overset{\frown}{BC} = \beta$ است، حال با توجه به این‌که $\hat{M}$، زاویهٔ بین امتداد دو وتر در خارج دایره است، داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta - \alpha}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = \beta - \alpha \Rightarrow ۳\alpha = \beta \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = ۳$$

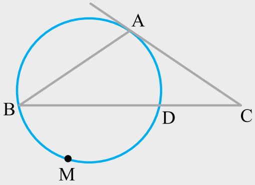
زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید به زاویه‌ای مثل α که از برخورد امتداد یک وتر و مماس در خارج دایره ساخته می‌شود، زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس می‌گوییم. اندازه‌اش هم از این رابطه پیدا می‌شود:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

تست

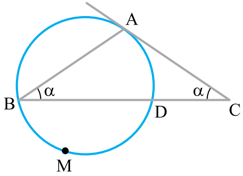
در شکل مقابل مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابرند. اگر $\overset{\frown}{DMB} = ۱۷۴^\circ$ باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۳۱ ۲) ۳۲

۳) ۳۳ ۴) ۳۴

پاسخ گزینهٔ «۱» از آن‌جایی که $AB = AC$، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است، در نتیجه می‌توان گفت $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. $\hat{B}$ یک زاویهٔ محاطی و $\hat{C}$ زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس است، پس:



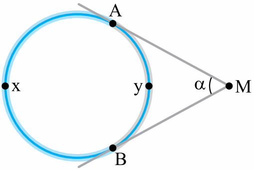
$$\begin{cases} \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۲\alpha \\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AD}}{۲} \xrightarrow[\hat{C}=\alpha]{\overset{\frown}{AD}=۲\alpha} \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - ۲\alpha}{۲} \\ \Rightarrow ۲\alpha = \overset{\frown}{AB} - ۲\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۴\alpha \end{cases}$$

از طرفی یک دایره کلاً ۳۶۰ درجه است، بنابراین:

$$\widehat{BMD}+\widehat{AD}+\widehat{AB}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۷۴^\circ+۲\alpha+۴\alpha=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶\alpha=۱۸۶^\circ \Rightarrow \alpha=۳۱^\circ$$

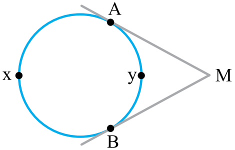
زاویهٔ بین دو مماس همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید به زاویه‌ای مثل α که از برخورد دو مماس در خارج دایره ساخته می‌شود، زاویهٔ بین دو مماس می‌گوییم. اندازه‌اش هم می‌شود:



$$\alpha=\frac{\widehat{AxB}-\widehat{AyB}}{۲}$$

نکته

زاویهٔ بین دو مماس و کمان کوچکی که در دایره می‌سازد، مکمل یکدیگرند. (مجموعشون ۱۸۰ درجه‌اس.)



$$\hat{M}+\widehat{AyB}=۱۸۰^\circ$$

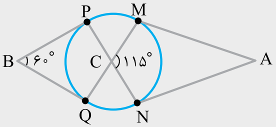
$\downarrow$

کمان کوچیکه ($\widehat{AxB}$ هم کمان بزرگس که باهاش کاری نداریم!)

حواستون باشه که این نکته فقط برای زاویهٔ بین دو مماس برقراره.

تست

پاره‌خط‌های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویهٔ MAN به درجه کدام است؟

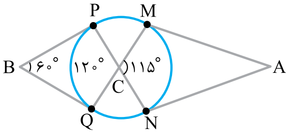


(خارج ۱۴۰۰)

۱) ۶۰ ۲) ۶۵

۳) ۷۰ ۴) ۷۵

پاسخ گزینهٔ «۳» ابتدا به کمک نکته‌ای که در مورد زاویهٔ بین دو مماس گفتیم، اندازهٔ کمان PQ را محاسبه می‌کنیم:



$$\hat{B}+\overset{\frown}{PQ}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ+\overset{\frown}{PQ}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{PQ}=۱۲۰^\circ$$

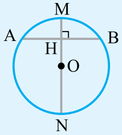
از طرفی $\hat{C}$، زاویهٔ بین دو وتر در داخل دایره است، پس:

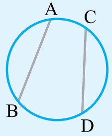
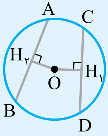
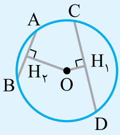
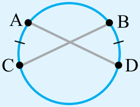
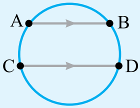
$$۱۱۵^\circ=\frac{۱۲۰+\overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MN}=۱۱۰^\circ$$

حالا اگر یک بار دیگر از نکتهٔ زاویهٔ بین دو مماس استفاده کنیم، خواستهٔ مسئله به دست می‌آید:

$$\hat{A}+\overset{\frown}{MN}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۱۱۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow A=۷۰^\circ$$

قضیه‌های مربوط به وتر در دایره در بعضی از سؤالات این قسمت، مباحث مربوط به زاویه‌ها را با ویژگی‌های وترها ترکیب می‌کنند. در جدول زیر تمام قضیه‌هایی را که باید راجع به وترها بدانید برایتان آورده‌ام:

اسم قضیه	شرح قضیه	عکس قضیه	شکل
قطر عمود بر وتر	هم خود وتر و هم کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند.	برقرار است، یعنی اگر از مرکز دایره به وسط وتر یا وسط کمان نظیرش وصل کنید، بر آن وتر عمود است.	 $OH \perp AB$ $\Leftrightarrow AH=HB$ $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$

اسم قضیه	شرح قضیه	عکس قضیه	شکل
وترهای مساوی	۱- کمان‌های مساوی ایجاد می‌کنند. ۲- فاصله‌شان از مرکز دایره یکسان است.	برقرار است، یعنی اگر اندازهٔ دو کمان برابر باشند، طول وترهای نظیرشان نیز برابر است و هم‌چنین اگر فاصلهٔ دو وتر از مرکز دایره یکسان باشد، طول وترها نیز یکسان خواهد بود.	 $AB = CD$ $\Leftrightarrow \ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$  $AB = CD$ $\Leftrightarrow \ OH_1 = OH_2$
وترهای نامساوی	از بین آن‌ها وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز کم‌تر باشد. (هر چه وتر بزرگ‌تر، فاصله از مرکز کم‌تر)	برقرار است، یعنی هر چه فاصلهٔ یک وتر از مرکز کم‌تر باشد، طول وتر بزرگ‌تر است.	 $CD > AB$ $\Leftrightarrow \ OH_1 < OH_2$
وترهای موازی	کمان‌های محصور بین آن‌ها هم‌اندازه هستند.	لزوماً برقرار نیست. مثال نقض زیر را ببینید. 	 $AB \parallel CD$ $\Rightarrow \ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$