درس اول: مفهوم تابع، دامنه، تساوی دو تابع و برد

مفهوم تابع

تعریف زوج مرتب: به هر دوتایی که برای آن‌ها ترتیبی در نظر گرفته شود، زوج مرتب می‌گوییم. زوج مرتب a و b را با نماد $(a،b)$ نشان می‌دهیم که در آن a مؤلفهٔ اول و b مؤلفهٔ دوم می‌باشد. دو زوج مرتب $(a،b)$ و $(c،d)$ را مساوی گوییم، هرگاه $a=c$ و $b=d$ باشد.

تعریف رابطه: به مجموعهٔ دلخواهی از زوج مرتب‌ها که مؤلفهٔ اول آن‌ها از مجموعهٔ A و مؤلفهٔ دوم آن‌ها از مجموعهٔ B انتخاب شود، رابطه‌ای از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B گفته می‌شود که به صورت $R:A\to B$ نمایش داده می‌شود.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. به طور کلی، اگر f تابعی از مجموعهٔ A به B باشد، می‌نویسیم: $f:A\to B$.

هر تابع سه عامل مهم دارد: ۱- دامنه ۲- هم‌دامنه ۳- قانونی که نحوهٔ ارتباط بین اعضای مجموعهٔ اول و دوم، یعنی دامنه و هم‌دامنه را نشان می‌دهد.

تعریف دامنهٔ تابع: به مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع $y=f(x)$ دامنهٔ تابع می‌گویند که با D_f نمایش داده می‌شود.

$$D_f=\{x|(x،y)\in f\}$$

به طور کلی در تابع $f:A\to B$ به مجموعهٔ A، دامنهٔ تابع و به مجموعهٔ B، هم‌دامنه گفته می‌شود.

تعریف برد تابع: به مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های تابع $y=f(x)$ برد تابع می‌گویند که با R_f نمایش داده می‌شود.

$$R_f=\{y|(x،y)\in f\}$$

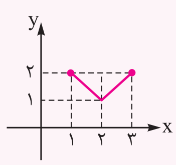
تذکر هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. بنابراین اگر f تابعی از A به B باشد، لزومی ندارد که برد آن مجموعهٔ B باشد. برد یک تابع، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ آن است و ممکن است مساوی هم‌دامنه نیز باشد.

تست برای تابع $\begin{cases}f:[۱،۳]\to[۱،+\infty)\\ f(x)=|x-۲|+۱\end{cases}$ **کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟**

(الف) $\begin{cases}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f(x)=|x-۲|+۱\end{cases}$ (ب) $\begin{cases}f:[۱،۳]\to[۱،۲]\\ f(x)=|x-۲|+۱\end{cases}$ (پ) $\begin{cases}f:\mathbb{R}\to[۱،۲]\\ f(x)=|x-۲|+۱\end{cases}$ (ت) $\begin{cases}f:[۱،۳]\to\mathbb{R}\\ f(x)=|x-۲|+۱\end{cases}$

۱) (الف) و (پ) ۲) (ب) و (ت) ۳) (الف) و (ت) ۴) (ب) و (پ)

پاسخ ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۲|+۱$ با دامنهٔ $[۱،۳]$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع بازهٔ $[۱،۲]$ است، پس نمایشی قابل قبول است که دامنهٔ آن $[۱،۳]$ باشد و هم‌دامنهٔ آن مجموعه‌ای انتخاب شود که برد تابع یعنی $[۱،۲]$ زیرمجموعهٔ آن باشد.

توابع مربوط به (الف) و (پ) دامنه‌شان برابر بازهٔ $[۱،۳]$ نمی‌باشد، پس قابل قبول نیستند. اما توابع مربوط به (ب) و (ت) علاوه بر آن‌که دامنه‌شان $[۱،۳]$ است، هم‌دامنه‌شان نیز شامل $[۱،۲]$ می‌باشد که هر دو قابل قبول‌اند. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

انواع نمایش تابع

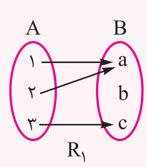
۱ نمایش پیکانی تابع: در یک تابع مانند f با دامنهٔ D و هم‌دامنهٔ R، اگر این مجموعه‌ها $(R،D)$ متناهی و کوچک باشند، می‌توان f را به‌صورت نمودار پیکانی نشان داد.

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار پیکانی نمایش داده شده باشد، آن‌گاه:

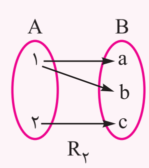
الف از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن‌که اصلاً پیکانی وارد نشود.

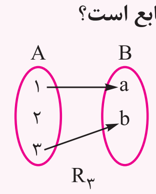
مثال **کدام‌یک از روابط زیر یک تابع است؟**



$R_۱$



$R_۲$



$R_۳$

پاسخ رابطهٔ R_1 تابع است، زیرا از تمام اعضای مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود. رابطهٔ R_2 تابع نیست، زیرا از عدد ۱ دو پیکان خارج شده است و هم‌چنین R_3 نیز تابع نیست، زیرا از ۲، پیکانی خارج نشده است.

۲ نمایش زوج مرتبی تابع: تابع را می‌توان به کمک زوج مرتب‌هایی نشان داد که مؤلفهٔ اول هر زوج مرتب، یک عضو از دامنه و مؤلفهٔ دوم آن یک عضو از برد است. از تعریف تابع نتیجه می‌شود، اگر تابعی به‌صورت زوج‌های مرتب نشان داده شده باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند. به عبارت دیگر اگر در یک تابع، دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول مساوی باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم آن‌ها یکسان خواهد بود. یعنی:

$$(x,y_1)\in f\ ,\ (x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$$

تست **رابطهٔ $A=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟**

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند. پس:

$$(۳,m^۲)=(۳,m+۲)\Rightarrow m^۲=m+۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow m=-۱,۲$$

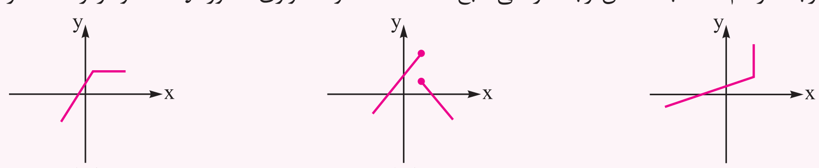
m های به دست آمده را در رابطه قرار می‌دهیم و تابع بودن یا نبودن رابطهٔ A را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m=-۱\Rightarrow A=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}\Rightarrow \text{تابع است.} \\ m=۲\Rightarrow A=\{(۳,۴),\underline{(۲,۱)},(-۳,۲),(-۲,۲),\underline{(۲,۴)}\}\Rightarrow \text{تابع نیست.} \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ نمایش نموداری تابع: اگر نمودار یک رابطه رسم شده باشد، آن رابطه زمانی تابع است که خطوط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

به نمودارهای روبه‌رو توجه کنید:



(الف) (ب) (پ)

ملاحظه می‌شود، فقط نمودار (پ) تابع است، اما (الف) و (ب) تابع نیستند.

محاسبهٔ تعداد توابع: مجموعه‌های $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ را در نظر بگیرید. تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با n^m.

دلیل رابطهٔ بالا آن است که چون دامنهٔ تابع، باید تمام اعضای مجموعهٔ A باشد، پس تابع f را به‌صورت $f=\{(a_1,\bigcirc),(a_2,\bigcirc),\dots,(a_m,\bigcirc)\}$ درنظر می‌گیریم. در هر یک از دایره‌های خالی، عضوهای مجموعهٔ B قرار می‌گیرند که برای هر دایرهٔ خالی، n انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب، $\underbrace{n\times n\times n\times\dots\times n}_{m\ \text{تا}}=n^m$ حالت مختلف داریم.

مثال **مجموعه‌های $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ را در نظر بگیرید.**

الف) تعداد توابعی که از A به B می‌توان نوشت بیشتر است یا از B به A؟ **ب) چند تابع از A به B می‌توان نوشت که $f(b)=۲$ باشد؟**

پاسخ الف) در توابع از A به B، به هر یک از عضوهای مجموعهٔ A یک عضو B را می‌توان نسبت داد:

$$f:A\rightarrow B: f=\{(a,\bigcirc),(b,\bigcirc),(c,\bigcirc)\}$$

$$\text{حالت }۴\times\text{حالت }۴\times\text{حالت }۴\Rightarrow ۴^۳=۶۴$$

در توابع از B به A، به هر یک از عضوهای مجموعهٔ B یک عضو A را می‌توان نسبت داد:

$$f:B\rightarrow A: f=\{(۱,\bigcirc),(۲,\bigcirc),(۳,\bigcirc),(۴,\bigcirc)\}$$

$$\text{حالت }۳\times\text{حالت }۳\times\text{حالت }۳\times\text{حالت }۳\Rightarrow ۳^۴=۸۱$$

بنابراین ۸۱ تابع از B به A و ۶۴ تابع از A به B می‌توان نوشت که تعداد توابع از B به A، بیشتر است.

ب) در توابعی که از A به B می‌توان نوشت و $f(b)=۲$ باشد، حتماً به عضو b باید عدد ۲ را نسبت دهیم. یعنی: $f=\{(a,\bigcirc),(b,۲),(c,\bigcirc)\}$

$$\text{حالت }۴\times\text{حالت }۱\times\text{حالت }۴\Rightarrow ۴^۲=۱۶$$

پس ۱۶ تابع با این شرط می‌توان نوشت.

۴ نمایش ضابطه‌ای تابع: یک تابع را می‌توان به صورت یک عبارت جبری از یک متغیر نشان داد. این نوع نمایش را نمایش ضابطه‌ای تابع می‌گوییم.

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. اما الزاماً یک معادله با دو متغیر بر حسب x و y، یک تابع را مشخص نمی‌کند.

تشخیص تابع بودن یک معادله: در یک معادله بر حسب x و y اگر بتوان y را بر حسب x به صورت صریح $y=f(x)$ نمایش داد، آن ضابطه حتماً یک تابع است.

مثال **بررسی کنید آیا رابطهٔ $y^۳+x^۲-۲x=۰$ تابع است؟**

پاسخ y را به صورت یک تابع صریح از x می‌نویسیم:

$$y^۳=۲x-x^۲\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۲x-x^۲}$$

چون به ازای هر x، فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس رابطهٔ بالا یک تابع است.

مثال **بررسی کنید آیا رابطهٔ $x=y^۳+۶y^۲+۱۲y+۲$ تابع است؟**

پاسخ از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$y^۳+۶y^۲+۱۲y+۸-۶=x\Rightarrow (y+۲)^۳=x+۶\Rightarrow y+۲=\sqrt[۳]{x+۶}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{x+۶}-۲$$

چون به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس تابع است.

نکته با مثال نقض می‌توان **تابع نبودن** یک رابطه را اثبات کرد. به‌خصوص در مواردی که نوشتن رابطه‌ای صریح برحسب x دشوار باشد، استفاده از مثال نقض روش مناسبی است.

مثال **بررسی کنید آیا رابطهٔ $y^۳-y=x^۳+x$ تابع است؟**

پاسخ از مثال نقض کمک می‌گیریم. کافی است به x مقدار صفر بدهیم:

$$x=۰\Rightarrow y^۳-y=۰\Rightarrow y(y^۲-۱)=۰\Rightarrow y=۰,\pm۱$$

چون به ازای $x=۰$، بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، پس رابطهٔ بالا تابع نیست.

تست **در کدام گزینه، y تابعی از x می‌باشد؟**

۱) $x+\sqrt{y+۲}=y$ ‏ ۲) $x=y^۳-۴y+۱$ ‏ ۳) $x=|۲y+۱|+y$ ‏ ۴) $x=y^۳+y+|y|$

پاسخ بهتر است از مثال نقض استفاده کنیم:

۱) $x=-۲\Rightarrow \sqrt{y+۲}=y+۲\Rightarrow y=\{-۱,-۲\}\Rightarrow$ تابع نیست.

۲) $x=۱\Rightarrow y^۳-۴y=۰\Rightarrow y(y^۲-۴)=۰\Rightarrow y=\{۰,\pm۲\}\Rightarrow$ تابع نیست.

۳) $x=۰\Rightarrow |۲y+۱|=-y\Rightarrow ۲y+۱=\pm y\Rightarrow y=\{-۱,\frac{-۱}{۳}\}\Rightarrow$ تابع نیست.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

محاسبهٔ مقدار تابع: اگر تابع را به صورت ضابطه‌ای نمایش دهیم و عبارت بر حسب x باشد، برای تعیین مقدار تابع، کافی است به جای x، عدد یا عبارت مورد نظر را قرار دهیم.

مثال **اگر $f(x)=x^۴-۳x^۲$ و $g(x)=۲x+۱$ باشند، هر یک از مقادیر $f(g(-۱))$ و $g(g(f(\sqrt{۲})))$ را به دست آورید.**

پاسخ

$$g(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱\Rightarrow f(g(-۱))=f(-۱)=(-۱)^۴-۳(-۱)^۲=۱-۳=-۲$$

$$f(\sqrt{۲})=(\sqrt{۲})^۴-۳(\sqrt{۲})^۲=۴-۶=-۲\ ;\ g(-۲)=۲(-۲)+۱=-۳\Rightarrow g(g(f(\sqrt{۲})))=g(g(-۲))=g(-۳)=۲(-۳)+۱=-۵$$

تست **اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟** *(تجربی خارج ۹۶)*

۱) x ‏ ۲) $-x$ ‏ ۳) $-x-۱$ ‏ ۴) $x+۱$

پاسخ در تابع $g(f(x))$ به جای $f(x)$ مقدارش را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x))=g(\frac{۲x+۳}{۲-x})=\frac{۱-۳(\frac{۲x+۳}{۲-x})}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}=\frac{\frac{۲-x-۶x-۹}{\cancel{۲-x}}}{\frac{\cancel{۲x}+۳+۴-\cancel{۲x}}{\cancel{۲-x}}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=-x-۱$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست **اگر $f(x)=x^3+9x^2+27x+10$ باشد، حاصل $f(f(\sqrt[3]{16}-3))$ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۹ ۴) ۹-

پاسخ با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=x^3+9x^2+27x+27-17=(x+3)^3-17$$

$$f(\sqrt[3]{16}-3)=(\sqrt[3]{16}-3+3)^3-17=16-17=-1 \Rightarrow f(f(\sqrt[3]{16}-3))=f(-1)=(-1+3)^3-17=8-17=-9$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

محاسبهٔ $f(x)$ از روی $f(g(x))$

اگر $f(g(x))$ معلوم باشد، برای تعیین $f(x)$ در بعضی موارد می‌توان با تغییر متغیر $g(x)=t$، x را برحسب t به‌دست آورد، سپس $f(t)$ را برحسب t نوشته و در انتها به جای t، x را جایگزین کرد.

تست **اگر $f(\frac{3x+1}{2})=\frac{2x-1}{x+1}$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟**

۱) $\frac{6x}{3x+3}$ ۲) $\frac{4x-5}{2x+2}$ ۳) $\frac{6x}{3x-3}$ ۴) $\frac{4x-5}{2x-2}$

پاسخ روش اول: با تغییر متغیر $\frac{3x+1}{2}=t$ داریم:

$$\frac{3x+1}{2}=t \Rightarrow 3x+1=2t \Rightarrow x=\frac{2t-1}{3}$$

$$f(\frac{3x+1}{2})=\frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f(t)=\frac{2(\frac{2t-1}{3})-1}{\frac{2t-1}{3}+1}$$

صورت و مخرج کسر را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم:

$$f(t)=\frac{2(2t-1)-3}{2t-1+3}=\frac{4t-5}{2t+2} \Rightarrow f(x)=\frac{4x-5}{2x+2}$$

روش دوم (عددگذاری): اگر در معادلهٔ $f(\frac{3x+1}{2})=\frac{2x-1}{x+1}$ به جای x عدد ۱ را قرار دهیم، آنگاه $f(2)=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. حال اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم، تنها گزینه‌ای که این مقدار در آن صدق می‌کند، گزینهٔ (۲) می‌باشد.

نکته اگر ضوابط $f(g(x))$ و $g(x)$ معلوم باشند، اما با فرض $g(x)=t$، x را به سادگی نتوانیم برحسب t به دست آوریم، باید به کمک اتحاد و تجزیه، $f(g(x))$ را به‌صورت عبارتی از $g(x)$ درآورده و سپس $f(t)$ را به دست آوریم.

مثال **اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$، مقدار عددی $f(3)$ را به دست آورید.**

پاسخ با فرض $x+\frac{1}{x}=t$ به سادگی نمی‌توان x را برحسب t پیدا کرد. پس سعی می‌کنیم عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را به‌صورت تابعی از $x+\frac{1}{x}$ به دست آوریم، با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$، داریم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow f(t)=t^3-3t \Rightarrow f(3)=3^3-3(3)=27-9=18$$

محاسبهٔ $f(x)$ از روی معادلهٔ $af(u)+bf(v)=g(x)$

معمولاً در این معادلات طوری باید از تغییر متغیر استفاده کرد که عبارات u و v به هم تبدیل شوند. در این حالت به رابطهٔ جدیدی مثل $a_1f(u)+b_1f(v)=g_1(x)$ می‌رسیم. حال این رابطه را با رابطهٔ اصلی در یک دستگاه قرار داده و به‌صورت دو معادلهٔ دو مجهولی، آن را حل می‌کنیم.

مثال **اگر $2f(x)+3f(-x)=2x-1$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست آورید.**

پاسخ در معادلهٔ داده شده، به جای x، $-x$ قرار می‌دهیم:

$$2f(-x)+3f(x)=-2x-1 \Rightarrow \begin{cases}2f(x)+3f(-x)=2x-1\\3f(x)+2f(-x)=-2x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\times 2\\\times(-3)\end{matrix}\begin{cases}4f(x)+6f(-x)=4x-2\\-9f(x)-6f(-x)=6x+3\end{cases}$$

از جمع دو معادلهٔ به‌دست آمده، داریم:

$$-5f(x)=10x+1 \Rightarrow f(x)=-2x-\frac{1}{5}$$

تست **اگر $f(\frac{1}{x})-2f(x)=x^2+\frac{1}{x}$، حاصل $f(2)$ کدام است؟**

۱) $-\frac{45}{4}$ ۲) $\frac{45}{4}$ ۳) $\frac{15}{4}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

پاسخ یک بار جای x عدد ۲ و یک بار $\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow f(\frac{1}{2})-2f(2)=4+\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow f(2)-2f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(2)+f(\frac{1}{2})=\frac{9}{2} \\ f(2)-2f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \times 2 \begin{cases} -4f(2)+2f(\frac{1}{2})=9 \\ f(2)-2f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4} \end{cases}$$

از جمع دو معادلهٔ به دست آمده، داریم:

$$-3f(2)=\frac{45}{4} \Rightarrow f(2)=-\frac{15}{4}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست **اگر $f(2\sin^2 x+3\sin x)=1-\tan^2 x$ باشد، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ

$$2\sin^2 x+3\sin x=2 \Rightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \Rightarrow \sin x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x=-2 \ (\text{غ ق ق}) \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

با فرض $\sin x=\frac{1}{2}$، مقدار $1-\tan^2 x$ را به دست می‌آوریم:

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3} \Rightarrow \tan^2 x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3} \Rightarrow 1-\tan^2 x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

توابع چندضابطه‌ای

تعریف تابع چندضابطه‌ای: تابعی که دامنهٔ آن به دو یا چند بخش تقسیم شده و هر بخش با معادلات مختلفی تعریف شود، تابع چندضابطه‌ای گویند. شکل کلی توابع چندضابطه‌ای به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

بدیهی است که هرکدام از ضابطه‌های f_1، f_2 و ... فقط در دامنهٔ خود اعتبار دارند.

در صورتی که در یک تابع چندضابطه‌ای بخواهیم مقدار تابع را به ازای یک ورودی تعیین کنیم، ابتدا باید مشخص کنیم آن ورودی متعلق به کدام محدوده از دامنه می‌باشد و سپس از ضابطهٔ متناظر با آن محدوده استفاده کنیم.

تست **تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x<1 \\ 2x-\frac{3}{4} & x\geq 1 \end{cases}$ مفروض است. $f(f(\frac{3}{4}))$ کدام است؟**

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ چون $\frac{3}{4}<1$ است، پس برای محاسبهٔ $f(\frac{3}{4})$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم:

$$f(\frac{3}{4})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

چون $f(\frac{3}{4})=\frac{3}{2}>1$ است، پس برای محاسبهٔ $f(\frac{3}{2})$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(f(\frac{3}{4}))=f(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته یک رابطهٔ چندضابطه‌ای با دو شرط زیر تابع محسوب شود:

۱ هر کدام از ضابطه‌ها در دامنهٔ خود تابع باشند.

۲ دامنهٔ ضابطه‌ها یا اشتراک نداشته باشند و یا اگر اشتراک داشته باشند، به ازای دامنه‌های مشترک، مقادیر یکسان تولید کنند.

تست **کدام‌یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟**

۱) $y=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases}-x+1 & x<2\\ 2x & x>1\end{cases}$ ۳) $y=\begin{cases}-x+3 & x\le 1\\ x+1 & x\ge 1\end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases}-x+1 & x\le 0\\ 2x & x>-1\end{cases}$

پاسخ روش اول: هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

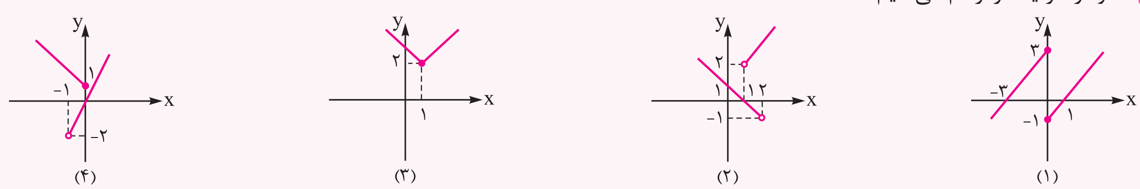
۱) دامنهٔ دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشند. با فرض $x=0$، مقدار $y=x+3$ و $y=x-1$ به ترتیب ۳ و ۱- می‌شود، چون به ازای $x=0$ دو مقدار برای y پیدا شد، پس این رابطه تابع نیست.

۲) دامنهٔ دو ضابطه در بازهٔ $(1,2)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=1/5$ دو مقدار $-0/5$ و ۳ به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

۳) هر یک از ضوابط در دامنهٔ خود تابع‌اند و دامنهٔ دو ضابطه در $x=1$ مشترک است که به ازای آن، مقدار هر دو ضابطه برابر ۲ می‌شود، پس این رابطه، تابع است.

۴) دو ضابطه در بازهٔ $(-1,0]$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $-0/5$ دو مقدار $1/5$ و ۱- به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

روش دوم: نمودار هر یک را رسم می‌کنیم:

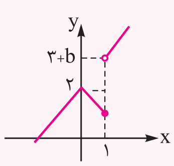


تنها گزینه‌ای که خطوط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، نمودار گزینهٔ (۳) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست **اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases}3x+b & x>1\\ 2-|x| & x\le 1\end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای b کدام است؟**

۱) $b\ge 0$ ۲) $b\ge -1$ ۳) $b\le -1$ ۴) $b\le 0$

پاسخ ابتدا به کمک انتقال، نمودار $y=2-|x|$ را در بازهٔ $(-\infty,1]$ و سپس خط $y=3x+b$ را در بازهٔ $(1,+\infty)$ رسم می‌کنیم.



مقدار تابع $y=3x+b$ به ازای $x=1$ برابر $y=3+b$ است، چون با توجه به شکل، برد تابع $y=2-|x|$ به صورت بازهٔ $(-\infty,2]$ می‌باشد، پس باید $3+b\le 2$ باشد تا برد $f(x)$ تمام اعداد حقیقی را پوشش دهد و برابر $\mathbb{R}$ شود. بنابراین:

$$3+b\le 2\Rightarrow b\le -1$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

انواع تابع

شما تاکنون با توابع مختلفی مانند خطی، چندجمله‌ای، ثابت و همانی آشنا شده‌اید. در این درس، این تعاریف را یادآوری کرده و با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شوید.

تابع ثابت: هر تابعی را که برد آن تنها شامل یک عضو باشد، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را با معادلهٔ $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم.

برای مثال، هر یک از توابع $f(x)=\frac{3}{2}$، $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ و $h(x)=\{(3,\sqrt{2}),(5,\sqrt{2})\}$ ثابت‌اند.

تذکر نمودار هر تابع ثابت، خطی (یا مجموعه نقاط روی خطی) موازی محور xها است.

تابع خطی: هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. (اگر $a=0$ باشد، آن‌گاه تابع به صورت ثابت $f(x)=b$ درمی‌آید.)

برای مثال هر یک از توابع $f(x)=\frac{1}{2}x+2$، $g(t)=\sqrt{2}t+3$ و $r(a)=5a-3$ خطی هستند.

تابع چندجمله‌ای: هر تابعی را که نمایش جبری آن یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامیم. هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم. (a_n، a_{n-1}، ...، a_0 اعدادی حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n\ne 0$)

توابع خطی حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند. تابع خطی $f(x)=a_1x+a_0$ $(a_1\ne 0)$ یک تابع چندجمله‌ای درجه اول است.

برای مثال، هر یک از توابع روبه‌رو، چندجمله‌ای هستند:

$$f(x)=2x^2+3x+\sqrt{2}\quad,\quad g(a)=a^3-5a\quad,\quad r(t)=\frac{3}{5}t^2-\sqrt{3}t$$

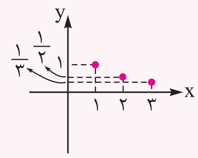
تابع همانی: اگر تابع $f(x)$ به ازای هر ورودی مجاز x، خود x را نظیر کند، تابع را همانی گوییم و آن را با $f(x)=x$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف، دامنه و برد تابع همانی با هم برابرند. نمودار تابع همانی، خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) یا مجموعه نقاطی روی آن می‌باشد.

توابع گویا: هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند، یک تابع گویا می‌نامیم $(Q(x)\neq ۰)$.

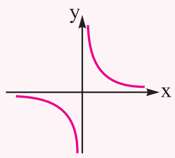
برای مثال، توابع $f(x)=\frac{۵}{x+۲}$ و $g(t)=\frac{\sqrt{۲}t+۱}{t^{۲}-t}$ گویا هستند.

مثال نمودار توابع $\begin{cases} f:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$ و $\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$ **را رسم کنید.**

پاسخ با توجه به دامنه، نمودار توابع f و t را رسم می‌کنیم. (نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را از روش نقطه‌یابی می‌توانید رسم کنید. اما بهتر است نمودار آن را به خاطر بسپارید).

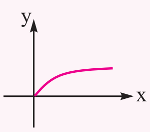


$f(x)$



$t(x)$

توابع رادیکالی: تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشهٔ دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع ریشهٔ دوم می‌نامند که به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش داده می‌شود. دامنه و برد این تابع، مطابق شکل روبه‌رو، بازهٔ $[۰,+\infty)$ می‌باشد. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.



روش‌های به دست آوردن دامنهٔ توابع

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را فقط با ارائهٔ ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود. در این موارد، طبق قرارداد، دامنهٔ تابع، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطهٔ ارائه شده روی آن مجموعه تعریف شده باشد. برای مثال، اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$، به عنوان تابع ارائه شده باشد، طبق قرارداد، دامنهٔ آن بازهٔ $[-۲,۲]$ است.

۱ **دامنهٔ توابع چندجمله‌ای:** دامنهٔ توابع چندجمله‌ای به فرم کلی $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+\dots$، برابر با $\mathbb{R}$ است.

۲ **دامنهٔ توابع گویا:** دامنهٔ توابع کسری که صورت و مخرجشان چندجمله‌ای باشد (توابع گویا)، برابر با مجموعهٔ اعداد حقیقی به‌جز ریشه یا ریشه‌های مخرج خواهد بود.

۳ **دامنهٔ توابع رادیکالی:** بستگی به زوج یا فردبودن فرجه، دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف اگر فرجهٔ رادیکال فرد باشد، دامنهٔ تابع همان دامنهٔ زیر رادیکال است:

$$y=\sqrt[۲k+۱]{f(x)}\Rightarrow D_y=D_f \quad ; \quad (k\in\mathbb{N})$$

ب اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد، باید زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد:

$$y=\sqrt[۲k]{f(x)}\Rightarrow f(x)\geq ۰ \quad ; \quad (k\in\mathbb{N})$$

بنابراین در این حالت، دامنهٔ تابع محدوده‌ای است که $x\in D_f$ و $f(x)\geq ۰$ باشد.

۴ **دامنهٔ توابع چندضابطه‌ای:** دامنهٔ توابع چندضابطه‌ای از **اجتماع** دامنهٔ ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۵ **دامنهٔ توابع لگاریتمی:** برای توابع لگاریتمی داریم:

$$y=\log_{g(x)}f(x)\Rightarrow D_y=\{x \mid g(x)>۰,\ g(x)\neq ۱,\ f(x)>۰\}$$

مثال **دامنهٔ توابع زیر را بیابید.**

الف) $f(x)=\frac{\sqrt{۳-x}}{x^{۲}-۱۶}$

ب) $f(x)=\sqrt{\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x^{۳}-۴x}}$

پ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+۱} & x\geq -۱ \\ \frac{۲x}{x-۲} & -۲<x<-۱ \end{cases}$

پاسخ الف) محدوده‌ای که عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است را به دست آورده و ریشه‌های مخرج کسر را از آن کم می‌کنیم:

$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\ ;\ x^۲-۱۶=۰\Rightarrow x=\pm ۴\Rightarrow D_f=(-\infty ,۳]-\{-۴\}$$

ب) با استفاده از جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲-۲x+۱}{x^۳-۴x}\geq ۰\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{x(x^۲-۴)}\geq ۰$$

x		-۲		۰		۱		۲	
$\frac{(x-۱)^۲}{x(x^۲-۴)}$	$-$	تن	$+$	تن	$-$	۰	$-$	تن	$+$

پس دامنهٔ تابع به صورت $(-۲,۰)\cup\{۱\}\cup(۲,+\infty)$ می‌باشد.

پ) دامنهٔ تابع از اجتماع دامنهٔ هر یک از ضابطه‌ها یعنی $[-۱,+\infty)$ و $(-۲,-۱)$ به دست می‌آید. بنابراین دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $(-۲,+\infty)$ می‌شود.

تست دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{۱-۲x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخ باید دو شرط $۱-۲x\geq ۰$ و $۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰$ برقرار باشند:

$$\begin{cases} ۱-۲x\geq ۰\Rightarrow ۲x\leq ۱\Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲} \\ ۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{۱-۲x}\leq ۴\Rightarrow ۱-۲x\leq ۱۶\Rightarrow ۲x\geq -۱۵\Rightarrow x\geq -\frac{۱۵}{۲} \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{-۱۵}{۲}\leq x\leq \frac{۱}{۲}$$

پس دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۷/۵,۰/۵]$ می‌باشد که شامل ۸ عدد صحیح $\{-۷,-۶,...,-۱,۰\}$ است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

تست اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{\sqrt{(m-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+m}}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $m<-۱$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) $m>۱$ ۴) $m>۲$

پاسخ زمانی دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌شود که همواره $(m-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+m>۰$ باشد. می‌دانیم شرط همواره مثبت بودن عبارت درجه دوم آن است که Δ منفی وضریب $x^۲$ مثبت باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x^۲\text{ضریب}>۰\Rightarrow m-۱>۰\Rightarrow m>۱ \\ \Delta<۰\Rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲-۴(m-۱)(m)<۰\Rightarrow ۸-۴m^۲+۴m<۰\xrightarrow{\div(-۴)}m^۲-m-۲>۰\Rightarrow (m+۱)(m-۲)>۰\Rightarrow m<-۱\ \text{یا}\ m>۲ \end{cases}$$

از اشتراک محدوده‌های به دست آمده، مجموعه جواب به صورت $m>۲$ حاصل می‌شود. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست اگر دامنهٔ $y=\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt[۴]{۴-|x-۲|-|x-۴|}}$ به صورت بازهٔ (α,β) باشد، مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

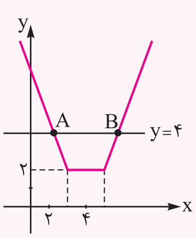
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ روش اول: باید شرط $۴-|x-۲|-|x-۴|>۰$ برقرار باشد. با توجه به ریشه‌های عبارات درون قدرمطلق، در سه حالت زیر این نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x<۲:\ ۴+x-۲+x-۴>۰\Rightarrow ۲x>۲\Rightarrow x>۱\xrightarrow{x<۲}۱<x<۲ \\ ۲\leq x\leq ۴:\ ۴-x+۲+x-۴>۰\Rightarrow ۲>۰\Rightarrow \text{بدیهی است.}\xrightarrow{۲\leq x\leq ۴}۲\leq x\leq ۴ \\ x>۴:\ ۴-x+۲-x+۴>۰\Rightarrow ۲x<۱۰\Rightarrow x<۵\xrightarrow{x>۴}۴<x<۵ \end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}}۱<x<۵$$

پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $(۱,۵)$ است و در نتیجه $\alpha\beta=۵$ می‌باشد.

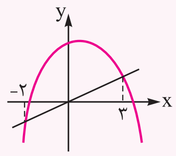
روش دوم: نامعادلهٔ $۴-|x-۲|-|x-۴|>۰$ را به صورت $|x-۲|+|x-۴|<۴$ نوشته و با رسم نمودارهای $y=|x-۲|+|x-۴|$ و $y=۴$ از روش هندسی مجموعه جواب را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} x>۴:\ y=۲x-۶\ ,\ y=۴\xrightarrow{\text{تلاقی}}۲x-۶=۴\Rightarrow x_B=۵ \\ x<۲:\ y=-۲x+۶,\ y=۴\xrightarrow{\text{تلاقی}}-۲x+۶=۴\Rightarrow x_A=۱ \end{cases}\Rightarrow (\alpha,\beta)=(۱,۵)\Rightarrow \alpha\beta=۵$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{-x^۲+x+۱۲}{x-f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۳]\cup[۴,+\infty)$
۲) $[-۳,-۲)\cup(۳,۴]$
۳) $(-۲,۳)$
۴) $(۳,+\infty)$

پاسخ باید دو شرط $\dfrac{-x^۲+x+۱۲}{x-f(x)}\geq ۰$ و $x-f(x)\neq ۰$ برقرار باشد. ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج کسر را مشخص می‌کنیم:

$$-x^۲+x+۱۲=۰\Rightarrow -(x^۲-x-۱۲)=۰\Rightarrow -(x+۳)(x-۴)=۰\Rightarrow x=-۳,۴$$

$$x-f(x)=۰\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow x=-۲,۳$$

با توجه به شکل، در بازهٔ $(-۲,۳)$ نمودار $y=f(x)$ بالاتر از خط $y=x$ و در بیرون این بازه، نمودار خط $y=x$ بالاتر یا روی نمودار $y=f(x)$ است. پس علامت عبارت $x-f(x)$ در بازهٔ $(-۲,۳)$ منفی و در بیرون این بازه نامنفی است. حال جدول تعیین علامت را برای عبارت $P=\dfrac{-x^۲+x+۱۲}{x-f(x)}$ رسم می‌کنیم:

x		−۳		−۲		−۳		۴	
$-x^۲+x+۱۲$	−	۰	+		+		+	۰	−
$x-f(x)$	+		+	۰	−	۰	+		+
P	−	۰	+	ت ن	−	ت ن	+	۰	−

با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع به صورت $[-۳,-۲)\cup(۳,۴]$ می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تساوی دو تابع

دو تابع زمانی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق باشند و هیچ نقطه‌ای پیدا نشود که روی یکی از نمودارها باشد، اما روی دیگری نباشد.

دو تابع f و g با هم مساوی‌اند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ دامنهٔ آن‌ها با هم مساوی باشند، یعنی $D_f=D_g$.

۲ به ازای هر x از دامنهٔ آن‌ها $f(x)=g(x)$ باشد. (ضابطه‌ها برابر باشند.)

اگر دو تابع به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

مثال آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۲x}$ با هم برابرند؟

پاسخ دامنهٔ دو تابع با هم برابر نیستند، زیرا در تابع f هر یک از عبارت‌های x و $x-۲$ همواره باید نامنفی باشند، در صورتی‌که در تابع g باید ضربشان یعنی $x(x-۲)$ نامنفی باشد:

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۲}\ :\ \begin{cases}x\geq ۰\\ x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[۲,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x^۲-۲x}\ :\ x^۲-۲x\geq ۰\Rightarrow x(x-۲)\geq ۰\Rightarrow D_g=(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$$

پس $D_f\neq D_g$ و در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

تست دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}\ ,\ g(x)=\cos x$
۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}\ ,\ g(x)=۱$
۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲\ ,\ g(x)=x$
۴) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\ ,\ g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

پاسخ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}=\sqrt{\cos^۲ x}=|\cos x|\Rightarrow f(x)\neq g(x)$

۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}=\dfrac{|x|}{|x|}=۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ;\ g(x)=۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲=x\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)\ ;\ g(x)=x\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

۴) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ;\ g(x)=\dfrac{|x|}{x}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\ ;\ f(x)=g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}\Rightarrow$ دو تابع مساوی‌اند.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۳+۸}{x-a} & x\neq a\\ k & x=a\end{cases}$ و $g(x)=x^۲-۲x+۴$ برابر باشند، حاصل $a+k$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ به ازای $x\neq a$ ضابطهٔ دو تابع برابرند، بنابراین:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{x^۳+۸}{x-a}=x^۲-۲x+۴\Rightarrow \frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{x-a}=x^۲-۲x+۴\Rightarrow a=-۲$$

از این‌که $a=-۲$ است، نتیجه می‌گیریم $f(a)=f(-۲)=k$ و چون دو تابع به ازای هر x برابرند، داریم:

$$g(x)=x^۲-۲x+۴\Rightarrow g(-۲)=۱۲\xrightarrow{f(-۲)=g(-۲)}k=۱۲\Rightarrow a+k=-۲+۱۲=۱۰$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

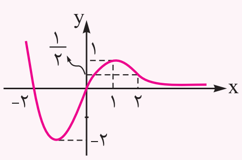
روش‌های به دست آوردن برد توابع

در این قسمت، برای پیدا کردن برد توابع به روش‌هایی اشاره می‌کنیم که برای بعضی توابع خاص کارایی دارند. برای تعیین برد یک تابع، ابتدا باید مشخص کنیم کدام‌یک از روش‌های زیر برای آن مناسب‌تر می‌باشد. بدیهی است روشی که برای یک تابع استفاده می‌کنیم، ممکن است برای یک تابع دیگر مفید نباشد. (کلی‌ترین روش برای محاسبهٔ برد، استفاده از مشتق می‌باشد که در فصل کاربرد مشتق مطالعه خواهید کرد).

۱ تعیین برد با استفاده از رسم نمودار تابع

اگر رسم نمودار یک تابع ساده باشد، برای تعیین برد، نمودار تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. تصویر نمودار بر روی محور yها محدودهٔ برد تابع را مشخص می‌کند.

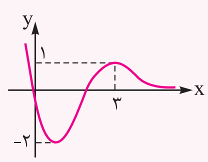
تست اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، برد تابع $y=f(|x|-۲)$ کدام است؟



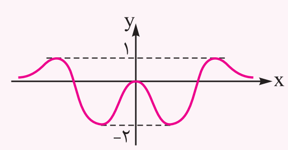
۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۱]$

۳) $[-۲,۱]$ ۴) $(۰,\frac{۱}{۲})$

پاسخ ابتدا نمودار $y=f(x-۲)$ و سپس $y=f(|x|-۲)$ را رسم می‌کنیم:



$y=f(x-۲)$

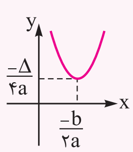


$y=f(|x|-۲)$

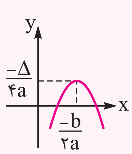
با توجه به شکل به دست‌آمده، برد تابع، بازهٔ $[-۲,۱]$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تذکر در تابع درجه دوم به شکل کلی $y=ax^۲+bx+c$، با توجه به نمودار آن، دو حالت وجود دارد:

الف اگر $a>۰$ باشد، برد تابع به صورت بازهٔ $[-\frac{\Delta}{۴a},+\infty)$ می‌باشد.



ب اگر $a<۰$ باشد، برد تابع به صورت بازهٔ $(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$ می‌باشد.



تست برد تابع $y=\sqrt{-x^۲+۴x+۱۱}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

پاسخ در تابع $f(x)=-x^۲+۴x+۱۱$، چون ضریب $x^۲$ منفی است، پس برد آن به صورت بازهٔ $(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$ می‌باشد:

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۶+۴۴)}{۴(-۱)}=\frac{-۶۰}{-۴}=۱۵\Rightarrow -x^۲+۴x+۱۱\leq ۱۵$$

چون عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$0 \le \sqrt{-x^2+4x+11} \le \sqrt{15} \Rightarrow R_y = [0, \sqrt{15}]$$

پس برد تابع، شامل ۴ عدد صحیح $\{0,1,2,3\}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲ تعیین برد با استفاده از نامساوی‌های مهم

در محاسبهٔ برد بعضی از توابع، می‌توان از نامساوی‌های زیر استفاده کرد: $(n \in \mathbb{N})$

$$x^{2n} \ge 0 \quad , \quad \sqrt[2n]{x} \ge 0 \quad , \quad |x| \ge 0 \quad , \quad -1 \le \sin^{(2n-1)} x \le 1 \quad , \quad -1 \le \cos^{(2n-1)} x \le 1 \quad , \quad 0 \le \frac{|x|}{|x|+1} < 1 \quad , \quad 0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1$$

$$a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \ge 2 \quad , \quad a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \le -2 \quad , \quad a, b \ge 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \quad , \quad a, b \le 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \le -\sqrt{ab}$$

تذکر در نامساوی‌های $(a>0) a+\frac{1}{a} \ge 2$ و $(a<0) a+\frac{1}{a} \le -2$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که به ترتیب $a=1$ و $a=-1$ باشد.

تذکر در نامساوی‌های $(a,b \ge 0) a+b \ge 2\sqrt{ab}$ و $(a,b \le 0)\ a+b \le -2\sqrt{ab}$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $a=b$ باشد.

تست برد تابع $f(x) = x^6 - 5x^3 + \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ ۲) $[-6, +\infty)$ ۳) $[-5, +\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ تابع $f(x) = x^6 - 5x^3 + \frac{1}{4}$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$x^6 - 5x^3 + \frac{1}{4} = (x^3 - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = (x^3 - \frac{5}{2})^2 - 6$$

می‌دانیم $(x^3 - \frac{5}{2})^2 \ge 0$ است. بنابراین $(x^3 - \frac{5}{2})^2 - 6 \ge -6$ و از آن‌جا برد تابع به صورت بازهٔ $[-6, +\infty)$ می‌شود. (در نامساوی $(x^3 - \frac{5}{2})^2 \ge 0$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ باشد). بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست برد تابع $y = x + 5 + \frac{1}{x+3}$ کدام است؟

۱) $[0, 4]$ ۲) $\mathbb{R} - (0, 4)$ ۳) $[-2, 2]$ ۴) $\mathbb{R} - (-2, 2)$

پاسخ سعی می‌کنیم عبارت را به صورت $a + \frac{1}{a}$ بنویسیم:

$$y = x + 5 + \frac{1}{x+3} = x + 3 + 2 + \frac{1}{x+3} \Rightarrow y = (x+3) + \frac{1}{(x+3)} + 2$$

می‌دانیم همواره $a + \frac{1}{a} \ge 2$ یا $a + \frac{1}{a} \le -2$ است. اگر فرض کنیم $a = x+3$، آن‌گاه داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} (x+3) + \frac{1}{(x+3)} \ge 2 \Rightarrow (x+3) + \frac{1}{(x+3)} + 2 \ge 4 \Rightarrow y \ge 4 \\ \text{یا} \\ (x+3) + \frac{1}{(x+3)} \le -2 \Rightarrow (x+3) + \frac{1}{(x+3)} + 2 \le 0 \Rightarrow y \le 0 \end{array}\right. \Rightarrow R_y = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - (0, 4)$$

(در نامساوی‌های $x+3+\frac{1}{x+3} \ge 2$ و $x+3+\frac{1}{x+3} \le -2$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که به ترتیب $x=-2$ و $x=-4$ باشد.) بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ تعیین برد با به دست آوردن x بر حسب y

در تابع $y = f(x)$، x را بر حسب y می‌نویسیم. سپس با توجه به مقادیر قابل قبول برای y، محدودهٔ y و در نتیجه برد تابع را به دست می‌آوریم. از این روش بیشتر در توابع کسری استفاده می‌شود.

تست برد تابع $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ طرفین وسطین کرده و معادله را برحسب توان‌های نزولی x می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^2-x-1}{x^2-x+1}\Rightarrow x^2y-xy+y=x^2-x-1\Rightarrow (y-1)x^2+(-y+1)x+y+1=0$$

با شرط $y\neq 1$، یک عبارت درجه دوم داریم که باید دلتای معادله، مثبت یا صفر باشد. بنابراین:

$$\Delta\geq 0\Rightarrow (-y+1)^2-4(y-1)(y+1)\geq 0\Rightarrow (y-1)(y-1-4y-4)\geq 0\Rightarrow (y-1)(-3y-5)\geq 0\Rightarrow -\frac{5}{3}\leq y\leq 1$$

به ازای $y=1$، معادلهٔ درجه دوم بالا به معادلهٔ درجه اول تبدیل می‌شود. پس باید شرط $y=1$ را بررسی کرد:

$$\frac{x^2-x-1}{x^2-x+1}=1\Rightarrow x^2-x-1=x^2-x+1\Rightarrow -1=1 \quad \text{تناقض}$$

پس $y=1$ در برد تابع قرار ندارد. بنابراین $R_y=[-\frac{5}{3},1)$ که شامل دو عدد صحیح می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

چون در بسیاری از مسائل به تعیین علامت یک عبارت نیاز پیدا می‌کنیم در این قسمت روش تعیین علامت را یادآوری می‌کنیم:

تعیین علامت

برای این‌که معلوم کنیم علامت یک عبارت جبری، مثبت، منفی، صفر یا تعریف‌نشده است، از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول: چندجمله‌ای درجه اول $P(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ به ازای $x=\frac{-b}{a}$، صفر می‌شود و جدول تعیین علامت آن به صورت روبه‌رو است:

x		$-\frac{b}{a}$	
$P(x)$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم: جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$، بستگی به علامت Δ، به یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

۱ اگر $\Delta>0$ باشد، چندجمله‌ای دو ریشهٔ سادهٔ $x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد. با فرض $x_2>x_1$، جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		x_1		x_2	
$P(x)$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

۲ اگر $\Delta=0$ باشد، چندجمله‌ای یک ریشهٔ مضاعف $x_0=\frac{-b}{2a}$ دارد که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$-\frac{b}{2a}$	
$P(x)$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

۳ اگر $\Delta<0$ باشد، چندجمله‌ای ریشه ندارد و جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x	
$P(x)$	موافق علامت a

تعیین علامت عبارات به شکل کلی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$: اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند، برای تعیین علامت عبارت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ ریشه‌های f و g را پیدا کرده و از کوچک به بزرگ در یک جدول قرار می‌دهیم.

۲ از سمت راست، علامت اولین قسمت جدول را تعیین می‌کنیم. این علامت را می‌توان با امتحان یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، تعیین کرد.

۳ در جدول از سمت راست، علامت‌ها را یک در میان عوض می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که علامت در ریشه‌های مکرر مرتبهٔ زوج به شکل $(x-a)^{2n}=0\ (n\in\mathbb{N})$ تغییر نمی‌کند.

مثال عبارت $P(x)=\frac{(x+2)(x-1)^2(3-x)^{15}}{(x-2)^5(x+3)}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا ریشه‌ها را در جدول وارد می‌کنیم. برای تعیین علامت در بازهٔ $(3,+\infty)$ علامت $p(4)$ را معلوم می‌کنیم. $(p(4)<0)$ بنابراین داریم:

x		-3		-2		1		2		3	
$P(x)$	−	ت ن	+	0	−	0	−	ت ن	+	0	−

ملاحظه می‌شود که در این عبارت $x=1$ ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ زوج) می‌باشد و به همین خاطر است که در اطراف آن، عبارت $P(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مفاهیم مقدماتی تابع

۱- رابطهٔ $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}\,,\,۲x+y\leq ۷\}$ دارای چند زوج مرتب می‌باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۲- رابطهٔ $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}\,,|x|+|y|=۲\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳- اگر $A=\{۱,۴,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ باشد، رابطهٔ $R=\{(x,y)|x\in B,y\in A,y\neq\frac{۱۲}{x}\}$ چند عضو دارد؟

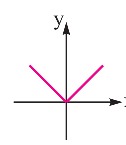
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

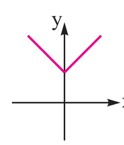
۴- برای تابع $\begin{cases}f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to[۰,+\infty)\\ f(x)=x^۲\end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ (کتاب درسی)

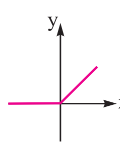
الف) $\begin{cases}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^۲\end{cases}$ ب) $\begin{cases}f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to[۰,\frac{۱}{۹}]\\ f(x)=x^۲\end{cases}$ پ) $\begin{cases}f:\mathbb{R}\to[۰,\frac{۱}{۹}]\\ f(x)=x^۲\end{cases}$ ت) $\begin{cases}f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^۲\end{cases}$

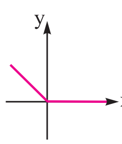
۱) (ب) و (ت) ۲) (الف) و (پ) ۳) (الف) و (ت) ۴) (ب) و (پ)

۵- ماشین f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت، خودش را با قدرمطلقش جمع می‌کند. نمودار این تابع کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶- اگر $f=\{(۲,-۱),(a,۴),(۲,a^۲-۲a),(۱,۲b)\}$ تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷- رابطهٔ $R=\{(۱,-a^۲+a-۱),(۲,b),(۱,b^۲)\}$ به ازای چند مقدار b، تابع می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{a,b,c\}$، آن‌گاه کدام‌یک از روابط زیر، تابعی از A به B را نشان می‌دهد؟

$R_۱=\{(۱,b),(۲,a)\}$; $R_۲=\{(۱,a),(۲,c),(۱,b)\}$; $R_۳=\{(۱,a),(۲,a),(۳,c)\}$; $R_۴=\{(۱,a),(۲,a),(۳,b)\}$

۱) $R_۱$، $R_۲$ ۲) $R_۳$، $R_۴$ ۳) $R_۱$، $R_۴$ ۴) $R_۲$، $R_۳$

۹- اگر f به صورت $f=\{(۲,۵),(۵,a^۲+a+۲),(c,b^۲),(۵,۴b-۳),(۲,c)\}$ معرف یک تابع باشد، b چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{d,e\}$ باشد، آن‌گاه چند تابع از A به B وجود دارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۵

۱۱- اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ باشد، با فرض $f(a)=۲$، چند تابع از A به B وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۷ ۴) ۵۴

۱۲- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{a,b,c\}$ باشد، با فرض $f(۱)\neq b$ و $f(۳)\neq a$، چند تابع از A به B وجود دارد؟

۱) ۵۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۹

۱۳- چه تعداد از عبارات زیر درست هستند؟ *(کتاب درسی)*

الف) اگر دامنه و برد دو تابع با یک‌دیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن‌ها بازهٔ $[۰,۳]$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

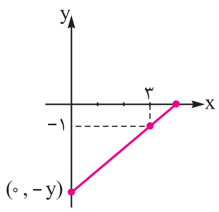
۱۴- اگر $\begin{cases} f:[۱,۵]\to B \\ f(x)=-x^۲+۴x-۳ \end{cases}$ **باشد، آن‌گاه B کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟**

۱) $[-۸,۰]$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[-۶,۳]$ ۴) $[-۹,۱]$

۱۵- کدام گزینه تابعی است که مساحت مثلث متساوی الاضلاع (S) را برحسب طول میانهٔ آن (m) نمایش می‌دهد؟

۱) $S=\frac{m^۲}{۲}$ ۲) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۲}m^۲$ ۳) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}m^۲$ ۴) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۳}m^۲$

۱۶- مطابق شکل، خطی که از نقطهٔ $(۳,-۱)$ می‌گذرد با محورهای مختصات، مثلث قائم‌الزاویه می‌سازد. تابع مساحت این مثلث برحسب y کدام است؟ $(y>۱)$



۱) $S(y)=\frac{۲y-۲}{۳y^۲}$ ۲) $S(y)=\frac{۳y^۲}{۲y-۲}$

۳) $S(y)=\frac{۳y^۲}{y-۱}$ ۴) $S(y)=\frac{y-۱}{۳y^۲}$

۱۷- اگر S و V به‌ترتیب مساحت و حجم یک کره باشند، ضابطهٔ تابعی که V را برحسب S بیان کند، کدام است؟

۱) $V=\frac{۶}{\sqrt{\pi}}S\sqrt{S}$ ۲) $V=\frac{\sqrt{\pi}}{۶\pi}S\sqrt{S}$ ۳) $V=\frac{۱}{۶\sqrt{\pi}}\sqrt{S}$ ۴) $V=S\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

۱۸- در درون کره‌ای به شعاع ۱۰ واحد مخروطی به ارتفاع h محاط کرده‌ایم. تابع حجم مخروط برحسب h کدام است؟

۱) $V(h)=\frac{\pi}{۳}(۲۰h^۲-h^۳)$ ۲) $V(h)=\frac{\pi}{۳}(h^۳-۱۰h^۲)$ ۳) $V(h)=\pi(۱۸h^۲-h^۳)$ ۴) $V(h)=\pi(h^۳-۲۴h)$

۱۹- اگر در دو تابع $f=\{(۲,a),(-۱,۱-b),(۲,-۲)\}$ و $g=\{(c,a^۲+۱),(۲b,۲),(۳,۵)\}$ تعداد اعضای دامنه برابر اما تعداد اعضای برد متفاوت باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

معادلات و توابع

۲۰- کدام‌یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟ *(کتاب درسی)*

۱) $x-y^۲=۴$ ۲) $x=|y|+۱$ ۳) $-x^۲+y=۴$ ۴) $x^۲=y^۲$

۲۱- در کدام‌یک از روابط زیر، y تابعی از x می‌باشد؟

۱) $y^۳+۳y^۲+۳y+x^۳+x=۰$ ۲) $y^۲+۲y=x-۱$ ۳) $|x|+|y-۱|=۱$ ۴) $|y|\sqrt[۳]{x}=۱$

۲۲- کدام‌یک از روابط زیر، معرف یک تابع می‌باشد؟

۱) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}, x^۲+y^۲=۵\}$ ۲) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}, |x|+|y|=۲\}$

۳) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}, x+y^۲=۵\}$ ۴) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}, x-|y-۳|=۰\}$

۲۳- کدام معادله، بیانگر یک تابع است؟

۱) $|y|=x+y$ ۲) $|y|=x+۲y$ ۳) $|y|=x-y$ ۴) $|y|=x+\frac{y}{۲}$

۲۴- کدام‌یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص <u>نمی‌کند</u>؟

۱) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲$ ۲) $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۰$ ۳) $xy=۲x$ ۴) $y^۳+x^۳=۲x+۱$

۲۵- اگر $۲x^۲+y^۲-۴x+۶y+k=۰$ یک تابع ناتهی باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۲۶- کدام رابطه، یک تابع است؟

۱) $y^۳-۳y^۲+x=۰$ ۲) $y+y^۳=x^۳+۱$ ۳) $|y-۱|+x=۰$ ۴) $xy^۲-x=۱$

محاسبهٔ $f(\alpha)$ و $f(x)$

۲۷- اگر $f(x)=\sqrt{x+۲|x|}$، مقدار $f(f(-۱۴۴))$ کدام است؟

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۸- اگر $f(x^۳+x)=۲x^۲-۱$ باشد، حاصل $f(۲)+f(۱۰)$ کدام است؟

۱) ۲۰۶ ۲) ۱۵۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۲۹- اگر $f(x)=۶f(x-۲)+f(x-۱)$، $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$ باشد، آن‌گاه $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۳۰- اگر $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x$ و $g(x)=x^۳+۹x^۲+۲۷x$ باشند، آن‌گاه حاصل $\dfrac{g(\sqrt[۳]{۷}-۳)}{f(\sqrt[۳]{۲}+۲)}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۱- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$ باشند، حاصل $f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))$ کدام است؟

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۳۲- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲(۲-x)^۲$، حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۴x$ ۳) $۲x^۲$ ۴) $۴x^۲$

۳۳- اگر داشته باشیم $f(x^۳-۲)+f(۶)=۵x-۴$، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۴- اگر $f(x)=۲-|x-۲|$ باشد، ضابطهٔ $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) x ۲) $۴-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $۲-f(x)$

۳۵- اگر $f(x-۳)=x^۲-۴x+۵$ باشد، آن‌گاه $f(۱-x)$ کدام است؟

۱) $x^۲+۱$ ۲) $x^۲+۳$ ۳) $x^۲+۴x+۵$ ۴) $x^۲-۴x+۵$

۳۶- اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+۱}$ باشد و داشته باشیم $f(x)=xf(\frac{۱}{x})$، در این صورت محدودهٔ x کدام است؟

۱) $x>۰$ ۲) $x<۰$ ۳) $|x|<۱$ ۴) $|x|>۱$

۳۷- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ باشد و بدانیم $g(f(a))=۵$، آن‌گاه عدد a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸- اگر $f(x)+xf(-x)=x^۲+۱$، آن‌گاه $f(۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹- اگر $\dfrac{f(x)}{\cos x}+\dfrac{f(-x)}{\sin x}=۲$، آن‌گاه $f(۴۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\sqrt{۲}$

۴۰- اگر داشته باشیم $f(\dfrac{x^۲+۲}{x})=x^۲+\dfrac{۴}{x^۲}$، آن‌گاه مقدار $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۱- اگر $f(\frac{x}{x^۲+۱})=۴+(x-\frac{۱}{x})^۲$ باشد، حاصل $f(\frac{۱}{۵})-f(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۴۲- اگر $f(۱+\tan^۲ x)=\frac{\cos^۲ x-۳}{۱-۲\cos^۲ x}$ باشد، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۸- ۴) ۸

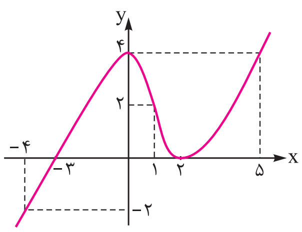
۴۳- اگر $f(\tan x)=\frac{۳\sin x-\cos x}{۲\sin x-۳\cos x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴- اگر $۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=۳x$ و $۳g(x)+۴g(-x)=۲x+۱$ باشند، حاصل عبارت $(f+g)(-۷)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۵- اگر نمودار $y=f(x-۳)$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار عددی $f(-\frac{۱}{۲}f(۲))$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) ۲-
۴) صفر

توابع دوضابطه‌ای

۴۶- در تابع باضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & ; \quad x>۳ \\ ۲x+۳ & ; \quad x\leq ۳ \end{cases}$، مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۷- تعداد صفرهای تابع دوضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} x^۳-۳a^۲ & x\geq a \\ ۱-۳x & x\leq a \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۸- کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

۱) $y=\begin{cases} |x-۱| & x\geq ۰ \\ -x & x\leq ۰ \end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases} -x^۲+۲ & x<۱ \\ \frac{x}{۲} & x>۰ \end{cases}$ ۳) $y=\begin{cases} x-|x|+۱ & x\geq ۰ \\ |x|+۱ & x\leq ۰ \end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases} x & x<۱ \\ -x+۱ & x>۰ \end{cases}$

۴۹- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x>۰ \\ ۱ & x\leq ۰ \end{cases}$ باشد، مقدار $f(f(-f(x)))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $x^۲+۲$ ۳) ۳ ۴) $(x^۲+۱)^۲+۲$

۵۰- f تابعی است با دامنهٔ اعداد حقیقی که $f(۲)=۳$ و $f(-۵)=-۲$ می‌باشد. این تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ ثابت و به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد. هم‌چنین برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند. چه تعداد از مقادیر زیر صحیح است؟ (کتاب درسی)

$f(-۱)=۲ \; ; \; f(۱)=۳ \; ; \; f(۳)=۹ \; ; \; f(-۳)=۰$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

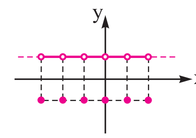
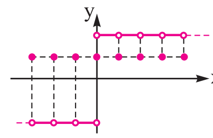
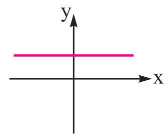
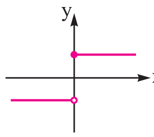
۵۱- اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} |x-۳|+۲ & x\geq ۲ \\ ax+\frac{۱}{۲} & x<۲ \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $a\leq \frac{۳}{۴}$ ۲) $a\geq \frac{۳}{۴}$ ۳) $a\geq \frac{۵}{۴}$ ۴) $a\leq \frac{۵}{۴}$

۵۲- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+1} & x\in\mathbb{Q}\\ x^6+3x^4+3x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(x))$ به ازای $x=\sqrt{\sqrt[3]{5}-1}$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۹　　۳) ۱۵　　۴) ۱۷

۵۳- اگر $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2} & x\geq 0\\ -\frac{1}{2} & x<0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in\mathbb{Z}\\ \frac{3}{2} & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ باشند، نمودار تابع $y=f(f(x))+g(g(x))$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+...+f(\sqrt{100})$ کدام است؟

۱) ۹۰　　۲) ۱۳۵　　۳) ۱۴۵　　۴) ۲۰۰

انواع تابع

۵۵- کدام‌یک از خطوط زیر، نمودار $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2 & x>0\\ \sqrt{x+2} & -2\leq x\leq 0\end{cases}$ را قطع نمی‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) $y=\sqrt{2}+1$　　۲) $y=\sqrt{2}-1$　　۳) $y=4-\sqrt{5}$　　۴) $y=\sqrt{5}-1$

۵۶- چه تعداد از توابع زیر ثابت هستند؟

الف) $f(x)=\tan x\cot x$　　ب) $g(x)=\sqrt{x-|x|}$　　پ) $s(x)=[-[x]+x]$　　ت) $t(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۵۷- اگر $f(x)$ یک تابع همانی باشد، آن‌گاه نقطهٔ تلاقی نمودار دو تابع $y_1=f(3x-1)$ و $y_2=f(2-2x)$ کدام است؟

۱) $(\frac{2}{5},\frac{2}{5})$　　۲) $(\frac{3}{5},\frac{3}{5})$　　۳) $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$　　۴) $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$

۵۸- معادلهٔ $|x-1|-|x-2|=\sqrt{x+1}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

محاسبهٔ دامنهٔ تابع

۵۹- اگر $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x-1}-1}{\frac{x}{x^2-1}+1}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع f شامل چند عدد حقیقی نمی‌باشد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۶۰- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^2+(m+3)x+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ باشد، مقدار mn کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) -2　　۴) -1

۶۱- به ازای چند مقدار صحیح m، دامنهٔ تابع $y=\dfrac{x^3-2}{\sqrt{2x^2+(m+2)x+\sqrt{2}}}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) ۷　　۲) ۶　　۳) ۵　　۴) ۴

۶۲- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{3-\sqrt{1-4x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) ۵

۶۳- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{-x^{۲}(x^{۲}-۴)^{۲}}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۲,۳)$

۶۵- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{۲x^{۲}+(\log_{۲}a)x+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-۳,۱\}$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۶۶- اگر عبارت $\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^{۲}}-\frac{۹}{۲}}+\sqrt[۳]{۲x-x^{۲}}$ عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $[\frac{۲}{۳},۲]$ ۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ۴) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۶۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^{۲}+x+a}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $|a|\le\frac{۱}{۲}$ ۲) $|a|\ge\frac{۱}{۲}$ ۳) $a\ge\frac{۱}{۲}$ ۴) $a\le-\frac{۱}{۲}$

۶۸- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۲}}$ با دامنهٔ کدام‌یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=\log(\frac{x-۱}{x+۲})$ ۲) $y=\sqrt[۴]{(x-۱)(x+۲)}$ ۳) $y=\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۲}}$ ۴) $y=\sqrt{(x-۱)(x+۲)}+\frac{x+۲}{x+۲}$

۶۹- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt[۴]{\frac{x}{۶}+۴-|x|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۰- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $x\le-۱$ ۲) $x\ge-۱$ ۳) $x\le۱$ ۴) $x\ge۱$

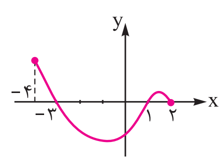
۷۱- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{||x-۱|-۳|-۲}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷۲- اگر $f(x)=x-۱$ و $g(x)=x^{۲}+۲x$ باشند، کدام تابع، دامنه‌ای برابر $\mathbb{R}$ دارد؟

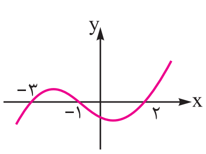
۱) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ۲) $y=\frac{۱}{f(x)+g(x)}$ ۳) $y=\frac{g(x)}{g(x)-f(x)}$ ۴) $y=\frac{\sqrt[۳]{f(x)}}{g(x)+۱}$

۷۳- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۲)



۱) $[۰,۲]$ ۲) $[-۳,۲]$ ۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$ ۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۷۴- شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



۱) $[-۳,۲]$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۱]$ ۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۷۵- دامنهٔ تغییرات تابع $f(x)=\log_{۶}\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۰)

۱) $(-۹,۹)$ ۲) $(-۴,۹)$ ۳) $(۴,۹)$ ۴) $(-۴,۴)$

۷۶- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_{۴}(x^{۲}-x-۲)}{\sqrt{x^{۲}-۱}+۱}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$ ۴) $(-۲,۱)$

۷۷- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_4(|x^2-2|-x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ ۳) $[-1,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

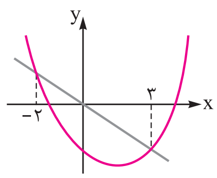
۷۸- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{-x}{3}-2+\sqrt{\frac{x}{3}+2}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

۷۹- دامنهٔ تابع $y=\frac{x+1}{\sqrt{\sqrt[5]{x-2}-\sqrt{x-2}}}$ به صورت بازهٔ (α,β) است. حاصل $2\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

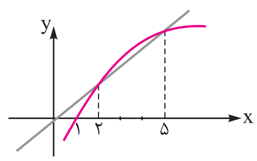
۸۰- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{x+f(x)}{16-x^2}}$ کدام است؟



۱) $(-4,-2]\cup[3,4)$ ۲) $(-4,-2]\cup(4,+\infty)$

۳) $(-2,4)$ ۴) $(-\infty,-2]$

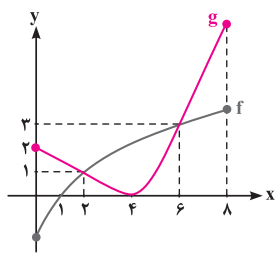
۸۱- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{x-f(x)}{(4-x)f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(1,2]\cup[5,+\infty)$ ۲) $[2,4)\cup[5,+\infty)$

۳) $(1,2]\cup(4,5]$ ۴) $(-\infty,1)\cup(4,5]$

۸۲- نمودار توابع f و g به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)\cdot g(x)}{x-2f(x)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۸۳- اگر دامنهٔ $y=\frac{\sqrt{|x+2|+3}}{\sqrt{5-|x-1|-|x-4|}}$ به صورت بازهٔ (α,β) باشد، مقدار $\beta-2\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۴- دامنهٔ تابع به معادلهٔ $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{y+1}=3$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[1,82]$ ۳) $[1,3]$ ۴) $[1,9]$

۸۵- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+2x+c}$ برابر مجموعهٔ $\{\frac{1}{2}\}$ باشد، مقدار $a-2c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۸۶- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{ax^2+2x+a}$ فقط شامل یک عدد حقیقی نباشد، a چند مقدار صحیح را شامل <u>نمی‌شود</u>؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۸۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^3+x}}{x^2+ax+1}$ به صورت بازهٔ $[0,+\infty)$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $a>-2$ ۲) $-2<a<2$ ۳) $a<2$ ۴) $a>-4$

تساوی دو تابع

۸۸- کدام‌یک از جفت توابع زیر با هم مساوی‌اند؟ (کتاب درسی)

۱) $g(x)=|x|$ ، $f(x)=\sqrt{x^2}$ ۲) $g(x)=|x|$ ، $f(x)=(\sqrt{x})^2$

۳) $g(x)=1$ ، $f(x)=\frac{x}{x}$ ۴) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ، $f(x)=\frac{|x|}{|x|}$

۸۹- کدام‌یک از جفت توابع زیر با هم مساوی هستند؟

۱) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ ، $g(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

۲) $f(x)=x\sqrt{-x}$ ، $g(x)=-\sqrt{-x^3}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 5 & x=3\end{cases}$ ، $g(x)=x+3$

۴) $f(x)=(\sqrt{x^2-2})^2$ ، $g(x)=|x^2-2|$

۹۰- دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام گزینه، دو تابع مساوی‌اند؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) $g(x)=\log x^2$ ، $f(x)=2\log x$

۲) $g(x)=1$ ، $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$

۳) $g(x)=x$ ، $f(x)=(\sqrt{x})^2$

۴) $g(x)=\frac{|x|}{x}$ ، $f(x)=\frac{x}{|x|}$

۹۱- کدام‌یک از جفت توابع زیر با هم مساوی نیستند؟

۱) $f(x)=\sqrt{1+x^2}-1$ ، $g(x)=\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

۲) $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}$ ، $g(x)=|x|-1$

۳) $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ ، $g(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$

۴) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ، $g(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$

۹۲- کدام تابع با ضابطهٔ زیر، با تابع $y=2x-1$ برابر است؟

۱) $y=\sqrt{4x^2-1}$

۲) $y=\frac{4x^2-1}{2x+1}$

۳) $y=\frac{4x^3-2x^2+2x-1}{2x^2+1}$

۴) $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$

۹۳- کدام‌یک از جفت توابع زیر با هم مساوی نیستند؟

۱) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ ، $g(x)=1$

۲) $f(x)=\sin^2 x+\cos^4 x$ ، $g(x)=\cos^2 x+\sin^4 x$

۳) $f(x)=\sqrt{1+\tan^2 x}$ ، $g(x)=\frac{1}{\cos x}$

۴) $f(x)=\frac{4\sin^2 x-6\sin x}{2\sin x-3}$ ، $g(x)=2\sin x$

۹۴- کدام‌یک از توابع زیر با تابع $y=\log\frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) $y=\log(x-2)-\log x$

۲) $y=\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$

۳) $y=\frac{1}{2}\log(\frac{x-2}{x})^2$

۴) $y=2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

۹۵- به ازای چند مقدار k، توابع $f(x)=\frac{3x^2+3x-3k}{x^2+x-k}$ و $g(x)=k^3-2k+3$ با هم مساوی می‌باشند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۹۶- اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-a} & x\neq a\\ k & x=a\end{cases}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$ برابر باشند، آن‌گاه حاصل ak کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{4}{3}$

۹۷- اگر دو تابع $f(x)=\frac{a}{x-3}$ و $g(x)=\frac{2x+b}{x^2+cx+d}$ مساوی باشند، آن‌گاه مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -1
۳) ۱
۴) -2

۹۸- به ازای چند مقدار طبیعی a، دو تابع $f(x)=|x-4|\sqrt{x-a}$ و $g(x)=\sqrt{(x^2-(4+a)x+4a)(x-4)}$ برابر هستند؟

۱) صفر
۲) بی‌شمار
۳) ۳
۴) ۴

محاسبهٔ برد توابع

۹۹- برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۳}{۲x-۶}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۳\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۴\}$

۱۰۰- برد تابع $y=۲\sin x+۷|\sin x|$ کدام بازه است؟

۱) $[۰,۷]$ ۲) $[۰,۹]$ ۳) $[-۲,۹]$ ۴) $[-۵,۹]$

۱۰۱- برد تابع $y=۱+\sqrt{۲x-x^۲}-\sqrt[۴]{x^۲-x-۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۲- برد تابع $y=x-۶\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۳۶

۱۰۳- برد تابع $y=\sqrt{-۴x^۲+۴x+۵}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۴- اگر برد تابع $y=f(x)$، بازهٔ $[-\frac{۱}{۴},۳]$ باشد، برد تابع $y=\frac{۳}{f(x)}$ شامل چند عدد صحیح <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۰۵- برد تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۲x^۳}+\sqrt[۴]{x^۳-x}+\frac{\sqrt{۲}}{x}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]-\{۰\}$ ۲) $[-\sqrt{۲},۰)$ ۳) $(۰,\sqrt{۲}]$ ۴) $\{-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\}$

۱۰۶- برد تابع $f(x)=x^۲+۲+\frac{۱}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۳,+\infty)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۱۰۷- کدام عدد در برد تابع $f(x)=\frac{|۳x|}{x}+\frac{x+۱}{|x+۱|}$ قرار <u>ندارد</u>؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۰۸- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۱,۳)$

۱۰۹- برد تابع $f(x)=\frac{x+۳}{(x-۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[-\frac{۱}{۱۶},+\infty)$ ۳) $[-۱,+\infty)$ ۴) $[-\frac{۱}{۲۵},+\infty)$

۱۱۰- برد تابع $y=\frac{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}{x^۲-x+۱}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۱- برد تابع $y=\frac{۲x^۲-۱}{x^۲+۳}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[-۱,۲)$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},۲]$ ۳) $\mathbb{R}-(-۱,۲]$ ۴) $[-\frac{۱}{۳},۲)$

۱۱۲- برد تابع $f(x)=\frac{۷\cos x}{\cos x+۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۷

۱۱۳- برد تابع با ضابطهٔ $y=x+\sqrt{۲x-x^۲}$ کدام بازه است؟

۱) $[۰,۱+\sqrt{۲}]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},\sqrt{۲}]$ ۳) $[۱-\sqrt{۲},۱+\sqrt{۲}]$ ۴) $[۰,۲]$

۱ ۴ روش اول: x و y اعداد طبیعی هستند که در نامساوی $2x+y\le 7$ صدق می‌کنند، پس حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$x=1\Rightarrow y\le 5\Rightarrow y=1,2,3,4,5$

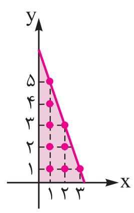
$\Rightarrow$ زوج مرتب‌ها: $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)$

$x=2\Rightarrow y\le 3\Rightarrow y=1,2,3\Rightarrow$ زوج مرتب‌ها: $(2,1),(2,2),(2,3)$

$x=3\Rightarrow y\le 1\Rightarrow y=1\Rightarrow$ زوج مرتب: $(3,1)$

بنابراین رابطهٔ R، شامل ۹ زوج مرتب می‌باشد.

روش دوم: کافی است محدودهٔ نامساوی $y\le 7-2x$ را در ربع اول مختصات رسم کرده و نقاطی را که طول و عرض آن‌ها طبیعی می‌باشد، مشخص کنیم:



$\Rightarrow$ شامل ۹ زوج مرتب است.

۲ ۴ از تساوی $|x|+|y|=2$ و $x,y\in\mathbb{Z}$، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع دو عدد صحیح نامنفی برابر ۲ شده است و این در صورتی امکان‌پذیر است که یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

$|x|=0,|y|=2\Rightarrow (0,2),(0,-2)\in R$

$|x|=1,|y|=1\Rightarrow (1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\in R$

$|x|=2,|y|=0\Rightarrow (2,0),(-2,0)\in R$

پس رابطهٔ R دارای ۸ عضو است.

۳ ۳ ابتدا رابطهٔ R را با فرض $x\in B$ و $y\in A$ می‌نویسیم:

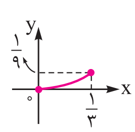
$R=\{(1,1),(1,4),(1,6),(2,1),(2,4),(2,6),(3,1),(3,4),(3,6)\}$

حال زوج مرتب‌هایی که $xy=12$ $(y=\frac{12}{x})$ می‌باشد را حذف می‌کنیم:

$R=\{(1,1),(1,4),(1,6),(2,1),(2,4),(3,1),(3,6)\}$

پس R شامل ۷ زوج مرتب می‌باشد.

۴ ۱ ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2$ با دامنهٔ $[0,\frac{1}{3}]$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع بازهٔ $[0,\frac{1}{9}]$ است، پس نمایشی قابل قبول است که دامنهٔ آن $[0,\frac{1}{3}]$ باشد و هم‌دامنهٔ آن مجموعه‌ای انتخاب شود که برد تابع یعنی $[0,\frac{1}{9}]$ زیرمجموعهٔ آن باشد.

توابع مربوط به (الف) و (پ) دامنه‌شان برابر بازهٔ $[0,\frac{1}{3}]$ نمی‌باشد، پس قابل قبول نیستند. اما توابع مربوط به (ب) و (ت) دامنه‌شان $[0,\frac{1}{3}]$ است و هم‌دامنه‌شان به گونه‌ای است که $[0,\frac{1}{9}]$ زیرمجموعهٔ آن است. بنابراین هر دو قابل قبول‌اند.

به جای این‌که نمودار تابع رو واسه پیدا کردن برد رسم کنی، این‌طوری هم میشه برد رو حساب کرد:

$0\le x\le \frac{1}{3}\Rightarrow 0\le x^2\le \frac{1}{9}\Rightarrow R_f=[0,\frac{1}{9}]$

۵ ۳ با توجه به فرض سؤال، نمایش تابع به صورت $f(x)=x+|x|$ است. اگر دو حالت $x\ge 0$ و $x<0$ را برای آن در نظر بگیریم، تابع به صورت دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ در می‌آید و در نتیجه نمودار آن به صورت گزینهٔ (۳) می‌باشد.

۶ ۲ برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشد، پس:

$(2,-1)=(2,a^2-2a)\Rightarrow a^2-2a=-1\Rightarrow a^2-2a+1=0$

$\Rightarrow (a-1)^2=0\Rightarrow a=1\Rightarrow f=\{(2,-1),(1,4),(1,2b)\}$

$(1,4)=(1,2b)\Rightarrow 2b=4\Rightarrow b=2\Rightarrow a+b=3$

۷ ۱ چون دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۱ وجود دارد، پس زمانی تابع است که مؤلفهٔ دوم آن‌ها برابر باشد، یعنی $-a^2+a-1=b^2$. از طرفی در عبارت $-a^2+a-1$، ضریب a^2 و علامت Δ هر دو منفی‌اند، پس همواره $-a^2+a-1<0$ می‌باشد. حال چون $b^2\ge 0$، بنابراین معادلهٔ $-a^2+a-1=b^2$ هیچ‌گاه ریشه ندارد.

۸ ۲ رابطه‌ای تابع است که به **هر** عضو A **دقیقاً** یک عضو از B را نسبت دهد. بنابراین رابطهٔ R_1 تابع نیست، زیرا زوج مرتبی با مؤلفهٔ اول ۳ وجود ندارد. در R_2 دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول یکسان وجود دارد $((1,a),(1,b))$، پس R_2 نیز تابع نیست. اما روابط R_3 و R_4 تابع هستند.

۹ ۲ با استفاده از تعریف تابع داریم:

$$\begin{cases}(2,5)\in f\\ (2,c)\in f\end{cases}\Rightarrow c=5\Rightarrow f=\{(2,5),(5,a^2+a+2),(5,b^2),(5,4b-3)\}$$

$$\begin{cases}(5,b^2)\in f\\ (5,4b-3)\in f\end{cases}\Rightarrow b^2=4b-3\Rightarrow b^2-4b+3=0\Rightarrow b=1 \text{ یا } b=3$$

$$\begin{cases}b=1\Rightarrow f=\{(2,5),(5,a^2+a+2),(5,1)\}\Rightarrow a^2+a+2=1\\ \Rightarrow a^2+a+1=0\xrightarrow{\Delta<0} \text{برای } a \text{ عدد حقیقی وجود ندارد.}\\ b=3\Rightarrow f=\{(2,5),(5,a^2+a+2),(5,9)\}\Rightarrow a^2+a+2=9\\ \Rightarrow a^2+a-7=0\xrightarrow{\Delta>0} \text{می‌تواند برقرار باشد.}\end{cases}$$

پس فقط یک مقدار $b=3$ وجود دارد.

۱۰ ۲ روش اول (مفهومی): در توابع از A به B، به هر یک از عضوهای مجموعهٔ A یک عضو B را می‌توان نسبت داد:

$$f:A\to B\ :\ f=\{(a,\underset{\text{۲حالت}}{\underset{\downarrow}{\bigcirc}}),(b,\underset{\text{۲حالت}}{\underset{\downarrow}{\bigcirc}}),(c,\underset{\text{۲حالت}}{\underset{\downarrow}{\bigcirc}})\}$$

در هر یک از دایره‌های خالی یکی از دو عضو مجموعهٔ B می‌تواند قرار گیرد. یعنی در هر دایرهٔ خالی ۲ انتخاب داریم، پس طبق اصل ضرب داریم:

$\text{۲حالت}\times\text{۲حالت}\times\text{۲حالت}=2^3=8$ حالت

روش دوم (فرمولی): طبق مطالب درسنامه اگر A ، m عضو و B ، n عضو داشته باشد، تعداد توابع از مجموعهٔ A به B برابر است با: n^m، پس $2^3=8$ حالت وجود دارد.

۱۱ ۳ چون $f(a)=2$ است، پس برای $f(a)$ فقط یک حالت وجود دارد. اما برای $f(b)$، $f(c)$ و $f(d)$ سه حالت (۱ یا ۲ یا ۳) امکان دارد، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f:A\to B:\ f=\{(a,2),(b,\bigcirc),(c,\bigcirc),(d,\bigcirc)\}$$

۱ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت $=3^3=27$

۱۲ ۲ چون $f(1)\neq b$ است، پس برای $f(1)$ دو حالت وجود دارد ($f(1)=a$ یا $f(1)=c$). همچنین $f(3)\neq a$ می‌باشد، پس برای $f(3)$ نیز دو حالت وجود دارد ($f(3)=c$ یا $f(3)=b$)، اما برای $f(2)$، $f(4)$ و $f(5)$ سه حالت (a یا b یا c) امکان دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f:A\to B:\ f=\{(1,\bigcirc),(2,\bigcirc),(3,\bigcirc),(4,\bigcirc),(5,\bigcirc)\}$$

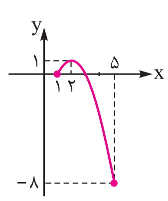
۲ حالت × ۳ حالت × ۲ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت $=108$

پس ۱۰۸ تابع از A به B می‌توان نوشت.

۱۳ ۲ ممکن است دامنه و برد دو تابع برابر باشند اما دو تابع برابر نباشند. برای مثال اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x^2$ را در نظر بگیریم، آنگاه $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $R_f=R_g=[0,+\infty)$، اما چون ضابطه‌های یکسان ندارند، پس برابر نیستند و در نتیجه عبارت (الف) درست نیست.

طبق تعریف، برد یک تابع، زیرمجموعهٔ هم‌دامنه است، بنابراین برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند برابر باشند، اما هم‌دامنه زیرمجموعهٔ برد نیست، پس عبارت (ب) درست و عبارت (پ) نادرست است. همچنین به ازای هر دامنهٔ مشخص غیرتهی، بی‌شمار تابع می‌توان مشخص کرد. برای مثال توابع $f_1(x)=\sqrt{x(3-x)}$، $f_2=2\sqrt{x(3-x)}$ و $f_3(x)=3\sqrt{x(3-x)}$ و ... همگی دارای دامنهٔ $[0,3]$ هستند. بنابراین عبارت (ت) هم درست است.

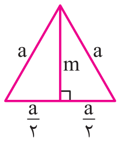
۱۴ ۴ بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که برد تابع، زیرمجموعهٔ آن باشد. برای تعیین برد سهمی، چون دامنهٔ آن به صورت بازهٔ $[1,5]$ محدود شده، بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. برای این کار مختصات رأس سهمی و نقاط سر و ته آن را مشخص می‌کنیم:



$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2\Rightarrow y_S=1$$

با توجه به نمودار، برد تابع، بازهٔ $[-8,1]$ است. چون این بازه، زیرمجموعهٔ $[-9,1]$ می‌باشد، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۵ ۴ در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و میانه روی هم قرار دارند، پس داریم:



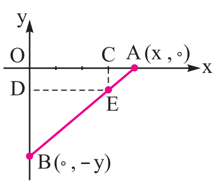
$$S=\frac{1}{2}ma$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$m^2+(\frac{a}{2})^2=a^2\Rightarrow\frac{3a^2}{4}=m^2\Rightarrow a=\frac{2m}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times m\times\frac{2m}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}m^2$$

۱۶ ۲ مساحت مثلث به صورت $S=\frac{1}{2}xy$ می‌باشد. در مثلث ABO، پاره‌خط CE با OB موازی است، با توجه به قضیهٔ تالس، x را برحسب y به دست می‌آوریم:



$$\frac{CE}{OB}=\frac{AC}{AO}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{x-3}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{y}=1-\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{y-1}{y}\Rightarrow x=\frac{3y}{y-1}$$

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{3y}{y-1}\times y\Rightarrow S=\frac{3y^2}{2y-2}$$

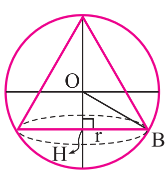
۱۷ ۲

حجم کره : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

مساحت کره : $S=4\pi r^2\Rightarrow r^2=\frac{S}{4\pi}\Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\Rightarrow V=\frac{4\pi}{3}(r^2)r$

$$=\frac{4\pi}{3}\times\frac{S}{4\pi}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\Rightarrow V=\frac{\sqrt{\pi}}{6\pi}S\sqrt{S}$$

۱۸ ۱ اگر r شعاع مخروط و h ارتفاع مخروط باشد، در مثلث OHB طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$OB^2=OH^2+HB^2\Rightarrow 10^2=(h-10)^2+r^2$$

$$\Rightarrow r^2=100-(h^2+100-20h)\Rightarrow r^2=20h-h^2$$

حجم مخروط برابر $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h$ می‌باشد که با جای‌گذاری $r^2=20h-h^2$ داریم:

$$V(h)=\frac{\pi}{3}(20h^2-h^3)$$

۱۹ ۴ در تابع f چون دو زوج مرتب $(2,a)$ و $(2,-2)$ وجود دارند، پس باید $a=-2$ باشد. بنابراین داریم:

$$f=\{(2,-2),(-1,1-b)\}\quad,\quad g=\{(c,5),(2b,2),(3,5)\}$$

برد تابع g شامل دو عضو $\{2,5\}$ می‌باشد. چون طبق فرض، تعداد اعضای برد f و g متفاوت است، پس با توجه به تابع f باید تعداد اعضای برد f برابر ۱ باشد و در نتیجه داریم:

$$1-b=-2\Rightarrow b=3\Rightarrow g=\{(c,5),(6,2),(3,5)\}$$

در آخر این‌که چون تعداد اعضای دامنهٔ f و g برابر است، پس $c=3$ و در نتیجه $a+b+c=-2+3+3=4$ می‌شود.

۲۰ ۳ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) در معادلهٔ $x-y^2=4$، به‌ازای $x=5$ داریم: $y=\pm 1$. پس این معادله تابع نیست.

۲) در معادلهٔ $x=|y|+1$، به‌ازای $x=2$ داریم: $y=\pm 1$. بنابراین این معادله تابع نیست.

۳) از معادلهٔ $-x^2+y=4$ نتیجه می‌گیریم $y=4+x^2$. چون این معادله به صورت صریح $y=f(x)$ نمایش داده شده، پس به‌ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد. پس معادله تابع است.

۴) در معادلهٔ $x^2=y^2$، به‌ازای $x=1$ داریم $y=\pm 1$. بنابراین این معادله تابع نیست.

۲۱ ۱ رابطه‌ای که تابع است را بررسی می‌کنیم و برای اثبات تابع نبودن بقیهٔ گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

۱) $y^3+3y^2+3y+1-1+x^3+x=0 \Rightarrow (y+1)^3-1+x^3+x=0$

$$\Rightarrow (y+1)^3=-x^3-x+1 \xRightarrow{\sqrt[3]{\ }} y+1=\sqrt[3]{-x^3-x+1}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt[3]{-x^3-x+1}-1$$

چون معادله به صورت $y=f(x)$ بیان شده و به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس این معادله تابع است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) $x=1 \Rightarrow y^2+2y=0 \Rightarrow y(y+2)=0 \Rightarrow y=0$ یا $y=-2 \Rightarrow$ تابع نیست.

۳) $x=0 \Rightarrow |y-1|=1 \Rightarrow y-1=\pm 1 \Rightarrow y=0$ یا $y=2 \Rightarrow$ تابع نیست.

۴) $x=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع نیست.

۲۲ ۱ *توی این روابط حتماً باید به این‌که x و y متعلق به چه مجموعه‌هایی هستن توجه کرد.*

اگر x و y طبیعی باشند، معادلهٔ $x^2+y^2=5$ فقط شامل دو زوج مرتب $\{(2,1),(1,2)\}$ می‌باشد که تابع است. حال برای بقیهٔ گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

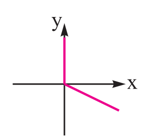
۲) $x=0 \Rightarrow y=\pm 2$

۳) $x=1 \Rightarrow y=\pm 2$

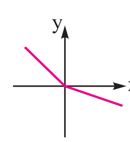
۴) $x=1 \Rightarrow y=2$ یا $y=4$

۲۳ ۲ **روش اول:** هر یک از معادلات را در دو حالت $y\geq 0$ و $y<0$ به صورت ساده‌تر نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

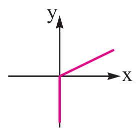
۱) $|y|=x+y:\begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow y=x+y \Rightarrow x=0 \\ y<0 \Rightarrow -y=x+y \\ \Rightarrow -2y=x \Rightarrow y=-\dfrac{x}{2} \end{cases}$



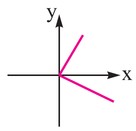
۲) $|y|=x+2y:\begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow y=x+2y \Rightarrow y=-x \\ y<0 \Rightarrow -y=x+2y \Rightarrow y=-\dfrac{x}{3} \end{cases}$



۳) $|y|=x-y:\begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow y=x-y \Rightarrow y=\dfrac{x}{2} \\ y<0 \Rightarrow -y=x-y \Rightarrow x=0 \end{cases}$



۴) $|y|=x+\dfrac{y}{2}:\begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow y=x+\dfrac{y}{2} \Rightarrow \dfrac{y}{2}=x \Rightarrow y=2x \\ y<0 \Rightarrow -y=x+\dfrac{y}{2} \\ \Rightarrow \dfrac{-3y}{2}=x \Rightarrow y=\dfrac{-2x}{3} \end{cases}$



همان‌طور که می‌بینید تنها در گزینهٔ (۲) هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

روش دوم (مثال نقض): برای هر یک از گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) مثال نقض می‌آوریم:

۱) $x=0 \Rightarrow |y|=y \Rightarrow y\geq 0 \Rightarrow y\in[0,+\infty)$

۳) $x=0 \Rightarrow |y|=-y \Rightarrow y\leq 0 \Rightarrow y\in(-\infty,0]$

۴) $x=1 \Rightarrow |y|=1+\dfrac{y}{2}:\begin{cases} y\geq 0 \Rightarrow y=1+\dfrac{y}{2} \Rightarrow 2y=2+y \Rightarrow y=2 \\ y<0 \Rightarrow -y=1+\dfrac{y}{2} \Rightarrow -2y=2+y \Rightarrow y=\dfrac{-2}{3} \end{cases}$

۲۴ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}=-2 \Rightarrow x^2+y^2=-2xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy=0 \Rightarrow (x+y)^2=0 \Rightarrow y=-x$$

در رابطهٔ $y=-x$، به ازای هر x فقط یک y وجود دارد، پس تابع است.

۲) می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک‌تک آن‌ها هم‌زمان صفر باشند. پس جواب معادلهٔ $(x-1)^2+(y-2)^2=0$ فقط نقطهٔ $(1,2)$ می‌باشد که تابع است.

۳) معادلهٔ $xy=2x$ را حل می‌کنیم:

$xy-2x=0 \Rightarrow x(y-2)=0 \Rightarrow x=0$ یا $y=2$

خط $x=0$ یک خط عمودی است، پس این رابطه، تابع نیست.

۴) y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$y^3+x^3=2x+1 \Rightarrow y^3=-x^3+2x+1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{-x^3+2x+1}$$

در این رابطه نیز به ازای هر x فقط یک y وجود دارد، پس تابع است.

۲۵ ۳ عبارت را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$2x^2+y^2-4x+6y+k=0 \Rightarrow 2(x^2-2x)+(y^2+6y)+k=0$$

$$\Rightarrow 2((x-1)^2-1)+(y+3)^2-9+k=0 \Rightarrow 2(x-1)^2+(y+3)^2=11-k$$

اگر $11-k>0$ باشد، به ازای مقادیری از x دو جواب برای y به دست می‌آید، پس تابع نیست.

اگر $۱۱-k<۰$ باشد، معادله جواب ندارد و در نتیجه تابع تهی می‌باشد.

اگر $۱۱-k=۰$ باشد، تنها جواب معادله، زوج مرتب (۳-،۱) می‌باشد که تابعی ناتهی است، پس $k=۱۱$ می‌شود.

۲۶ **۲** می‌دانیم با مثال نقض می‌توان تابع نبودن یک رابطه را اثبات کرد. بنابراین داریم:

$$۱)\ x=۰\Rightarrow y^۳-۳y^۲=۰\Rightarrow y^۲(y-۳)=۰\Rightarrow y=۰ \text{ یا } y=۳\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$۳)\ x=-۱\Rightarrow |y-۱|=۱\Rightarrow y-۱=\pm۱\Rightarrow y=۰ \text{ یا } y=۲\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$۴)\ x=۱\Rightarrow y^۲-۱=۱\Rightarrow y^۲=۲\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

در نتیجه، رابطهٔ گزینهٔ (۲) تابع می‌باشد.

چون فهمیدیم گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) تابع نیستند، دیگه نیازی به اثبات تابع بودن گزینهٔ (۲) نیست. کتاب درسی هم اشاره‌ای به تابع بودن این نوع معادلات نداشته. روش‌های مختلفی برای بررسی این معادلات داریم که بهترینش استفاده از مشتقه که در فصل مشتق می‌خونید.

۲۷ **۲**

$$f(x)=\sqrt{x+۲|x|}\Rightarrow f(-۱۴۴)=\sqrt{-۱۴۴+۲|-۱۴۴|}$$

$$=\sqrt{-۱۴۴+۲\times۱۴۴}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

$$f(f(-۱۴۴))=f(۱۲)=\sqrt{۱۲+۲\times۱۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

۲۸ **۳** در رابطهٔ $f(x^۳+x)=۲x^۲-۱$ برای محاسبهٔ $f(۲)$ به جای x عدد ۱ و برای محاسبهٔ $f(۱۰)$ به جای x عدد ۲ را می‌گذاریم، پس:

$$\begin{cases}x=۱\Rightarrow f(۲)=۲-۱=۱\\ x=۲\Rightarrow f(۱۰)=۸-۱=۷\end{cases}\Rightarrow f(۲)+f(۱۰)=۱+۷=۸$$

۲۹ **۲** در رابطهٔ $f(x)=۶f(x-۲)+f(x-۱)$ به جای x عدد ۴ را قرار می‌دهیم:

$$f(۴)=۶f(۲)+f(۳)$$

حال در رابطهٔ قبل به جای x عدد ۳ را قرار می‌دهیم:

$$f(۳)=۶f(۱)+f(۲)=۶(۱)+۲=۸$$

$$\Rightarrow f(۴)=۶f(۲)+f(۳)=۶(۲)+۸=۲۰$$

۳۰ **۱** با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای سعی می‌کنیم عبارات f و g را به صورت ساده‌تری بنویسیم:

$$\begin{cases}f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸+۸\Rightarrow f(x)=(x-۲)^۳+۸\\ \Rightarrow f(\sqrt[۳]{۲}+۲)=(\sqrt[۳]{۲}+۲-۲)^۳+۸=۲+۸=۱۰\\ g(x)=x^۳+۹x^۲+۲۷x+۲۷-۲۷\Rightarrow g(x)=(x+۳)^۳-۲۷\\ \Rightarrow g(\sqrt[۳]{۷}-۳)=(\sqrt[۳]{۷}-۳+۳)^۳-۲۷=۷-۲۷=-۲۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{g(\sqrt[۳]{۷}-۳)}{f(\sqrt[۳]{۲}+۲)}=\frac{-۲۰}{۱۰}=-۲$$

۳۱ **۱** با توجه به توابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$ داریم:

$$g(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲=(۲-\sqrt{۲})^۲=۴-۴\sqrt{۲}+۲=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))=f(۶-۴\sqrt{۲})=|۶-۴\sqrt{۲}|=|۶-\sqrt{۱۶\times۲}|$$

$$=|۶-\sqrt{۳۲}|\ \xrightarrow[\sqrt{۳۲}\simeq۵/۰۰]{۶-\sqrt{۳۲}>۰}\ ۶-\sqrt{۳۲}=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$f(۱-\sqrt{۲})=|۱-\sqrt{۲}|\ \xrightarrow[\sqrt{۲}\simeq۱/۴]{۱-\sqrt{۲}<۰}\ -(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱$$

$$\Rightarrow g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=۲$$

$$\Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۳۲ **۱** با توجه به تابع $f(x)=x^۲(۲-x)^۲$ داریم:

$$\begin{cases}f(۱+x)=(۱+x)^۲(۲-(۱+x))^۲=(۱+x)^۲(۱-x)^۲\\ f(۱-x)=(۱-x)^۲(۲-(۱-x))^۲=(۱-x)^۲(۱+x)^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(۱+x)=f(۱-x)\Rightarrow f(۱+x)-f(۱-x)=۰$$

۳۳ **۱** ابتدا باید $f(۶)$ را تعیین کنیم. برای این منظور کافی است جای x عددی قرار دهیم تا مقدار $x^۳-۲$ هم ۶ شود. بنابراین:

$$f(x^۳-۲)+f(۶)=۵x-۴\xrightarrow{x=۲}f(۶)+f(۶)=۱۰-۴$$

$$\Rightarrow ۲f(۶)=۶\Rightarrow f(۶)=۳$$

حال معادله را به صورت ساده‌تر نوشته و برای محاسبهٔ $f(-۱)$ به جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$f(x^۳-۲)+۳=۵x-۴\Rightarrow f(x^۳-۲)=۵x-۷\xrightarrow{x=۱}f(-۱)=-۲$$

۳۴ **۳** با توجه به تابع $f(x)=۲-|x-۲|$ داریم:

$$f(f(x))=f(۲-|x-۲|)=۲-|(۲-|x-۲|)-۲|=۲-|-|x-۲||$$

$$=۲-|x-۲|=f(x)$$

۳۵ **۴** برای محاسبهٔ $f(۱-x)$ دو بار از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x-۳=t\Rightarrow x=t+۳\Rightarrow f(t)=(t+۳)^۲-۴(t+۳)+۵$$

$$t=۱-x\Rightarrow f(۱-x)=(۱-x+۳)^۲-۴(۱-x+۳)+۵$$

$$=(۴-x)^۲-۴(۴-x)+۵=x^۲-۸x+۱۶-۱۶+۴x+۵=x^۲-۴x+۵$$

۳۶ **۱** عبارت $xf(\frac{۱}{x})$ را به دست آورده و برابر $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$xf(\frac{۱}{x})=x\frac{|\frac{۱}{x}|}{|\frac{۱}{x}|+۱}=\frac{x(\frac{۱}{|x|})}{\frac{۱}{|x|}+۱}=\frac{\frac{x}{\cancel{|x|}}}{\frac{۱+|x|}{\cancel{|x|}}}\ \overset{x\neq۰}{=\!=}\ \frac{x}{۱+|x|}$$

$$f(x)=xf(\frac{۱}{x})\Rightarrow\frac{|x|}{|x|+۱}=\frac{x}{|x|+۱}\Rightarrow|x|=x\Rightarrow x>۰$$

۳۷ ۴ با توجه به تابع g، $g(۶)=۵$ است، بنابراین:

$$g(f(a))=۵ \xrightarrow{g(۶)=۵} f(a)=۶ \Rightarrow a+\sqrt{a}=۶$$

با تغییر متغیر $\sqrt{a}=t$، معادله را حل می‌کنیم:

$$t^۲+t-۶=۰ \Rightarrow (t+۳)(t-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۳ \Rightarrow \sqrt{a}=-۳ \ (\text{غ‌ق‌ق}) \\ t=۲ \Rightarrow \sqrt{a}=۲ \Rightarrow a=۴ \end{cases}$$

۳۸ ۱ در معادلهٔ داده‌شده به جای x اعداد ۲ و ۲- را قرار می‌دهیم:

$$f(x)+xf(-x)=x^۲+۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow f(۲)+۲f(-۲)=۵ \\ x=-۲ \Rightarrow f(-۲)-۲f(۲)=۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)} \begin{cases} f(۲)+۲f(-۲)=۵ \\ -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۵f(۲)=-۵ \Rightarrow f(۲)=-۱$$

۳۹ ۳ در معادلهٔ $\frac{f(x)}{\cos x}+\frac{f(-x)}{\sin x}=۲$ به جای x یک بار ۴۵° و یک بار -۴۵° را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=۴۵^\circ \Rightarrow \frac{f(۴۵^\circ)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\frac{f(-۴۵^\circ)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲ \xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}} f(۴۵^\circ)+f(-۴۵^\circ)=\sqrt{۲} \\ x=-۴۵^\circ \Rightarrow \frac{f(-۴۵^\circ)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\frac{f(۴۵^\circ)}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲ \xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}} f(-۴۵^\circ)-f(۴۵^\circ)=\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق}} ۲f(۴۵^\circ)=۰ \Rightarrow f(۴۵^\circ)=۰$$

۴۰ ۴ به‌کمک اتحاد $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ عبارت $x^۲+\frac{۴}{x^۲}$ را بر حسب $\frac{x^۲+۲}{x}$ می‌نویسیم:

$$f(\frac{x^۲+۲}{x})=x^۲+\frac{۴}{x^۲} \Rightarrow f(\frac{x^۲}{x}+\frac{۲}{x})=x^۲+(\frac{۲}{x})^۲$$

$$\Rightarrow f(x+\frac{۲}{x})=(x+\frac{۲}{x})^۲-۴$$

با فرض $x+\frac{۲}{x}=t$ داریم: $f(t)=t^۲-۴ \Rightarrow f(۴)=۱۶-۴=۱۲$

۴۱ ۳ ابتدا عبارت را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(\frac{x}{x^۲+۱})=۴+(x-\frac{۱}{x})^۲=۴+(x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲$$

$$=(x+\frac{۱}{x})^۲=(\frac{x^۲+۱}{x})^۲ \Rightarrow f(\frac{x}{x^۲+۱})=(\frac{x^۲+۱}{x})^۲$$

حال با فرض $t=\frac{x}{x^۲+۱}$، نتیجه می‌گیریم $f(t)=(\frac{۱}{t})^۲$، بنابراین داریم:

$$f(x)=(\frac{۱}{x})^۲ \Rightarrow f(\frac{۱}{۵})-f(\frac{۱}{۳})=۵^۲-۳^۲=۲۵-۹=۱۶$$

۴۲ ۳ اگر فرض کنیم $۱+\tan^۲ x=t$ آن‌گاه به کمک اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$، عبارت را بر حسب t می‌نویسیم:

$$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}=t \Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{t}$$

$$f(۱+\tan^۲ x)=\frac{\cos^۲ x-۳}{۱-۲\cos^۲ x} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{۱}{t}-۳}{۱-\frac{۲}{t}}=\frac{\frac{۱-۳t}{\cancel{t}}}{\frac{t-۲}{\cancel{t}}} \overset{t\neq ۰}{=} \frac{۱-۳t}{t-۲}$$

$$\Rightarrow f(۳)=\frac{۱-۹}{۳-۲}=-۸$$

۴۳ ۱ صورت و مخرج کسر را بر $\cos x \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم:

$$f(\tan x)=\frac{\frac{۳\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{۲\sin x}{\cos x}-\frac{۳\cos x}{\cos x}} \Rightarrow f(\tan x)=\frac{۳\tan x-۱}{۲\tan x-۳}$$

$$\xrightarrow{\tan x=۲} f(۲)=\frac{۳(۲)-۱}{۲(۲)-۳}=\frac{۵}{۱}=۵$$

۴۴ ۱ در رابطهٔ $۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=۳x$ به جای x، $\frac{۱}{x}$ قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\times۲ \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} ۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=۳x \\ ۲f(\frac{۱}{x})-f(x)=\frac{۳}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴f(x)-۲f(\frac{۱}{x})=۶x \\ ۲f(\frac{۱}{x})-f(x)=\frac{۳}{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} ۳f(x)=۶x+\frac{۳}{x} \Rightarrow f(x)=۲x+\frac{۱}{x} \quad (*)$$

در رابطهٔ $۳g(x)+۴g(-x)=۲x+۱$ به جای x، $-x$ قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\times۳ \\ \times(-۴)\end{matrix}\begin{cases} ۳g(x)+۴g(-x)=۲x+۱ \\ ۳g(-x)+۴g(x)=-۲x+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۹g(x)+۱۲g(-x)=۶x+۳ \\ -۱۲g(-x)-۱۶g(x)=۸x-۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} -۷g(x)=۱۴x-۱ \Rightarrow g(x)=-۲x+\frac{۱}{۷} \quad (**)$$

$$(*),(**) \Rightarrow (f+g)(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۷} \Rightarrow (f+g)(-۷)=\frac{-۱}{۷}+\frac{۱}{۷}=۰$$

۴۵ ۲ اگر فرض کنیم نمودار داده‌شده، نمودار $g(x)=f(x-۳)$ باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ $f(۲)$ کافی است $g(۵)$ را به دست آوریم. زیرا $g(۵)=f(۵-۳)=f(۲)$. با توجه به نمودار $g(۵)=۴$ است، بنابراین داریم:

$$g(۵)=۴ \Rightarrow f(۲)=۴ \Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(۲))=f(-\frac{۱}{۲}\times۴)=f(-۲)$$

هم‌چنین برای محاسبهٔ $f(-۲)$ داریم:

$$\begin{cases} g(x)=f(x-۳) \xrightarrow{x=۱} g(۱)=f(-۲) \\ \text{با توجه به نمودار داده‌شده}: g(۱)=۲ \end{cases} \Rightarrow f(-۲)=۲$$

۴۶ ۴ با توجه به شرط هر ضابطه، مقادیر خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲ \Rightarrow f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷ \\ f(۱)=۲(۱)+۳=۵ \Rightarrow f(f(۱))=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

۴۷ ۲ چون طبق صورت سؤال رابطهٔ داده شده تابع است، پس باید به ازای $x=a$ مقدار دو ضابطه با هم برابر باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x^۳-۳a^۲ \overset{x=a}{=\!=\!=} a^۳-۳a^۲ \\ ۱-۳x \overset{x=a}{=\!=\!=} ۱-۳a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۳-۳a^۲=۱-۳a \Rightarrow a^۳-۳a^۲+۳a-۱=۰ \Rightarrow (a-۱)^۳=۰ \Rightarrow a=۱$$

حال تابع را با $a=۱$ بازنویسی کرده و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۳ & x\geq ۱ \\ ۱-۳x & x\leq ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(x)=۰} \begin{cases} x^۳-۳=۰ \Rightarrow x^۳=۳ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۳} \xrightarrow{\sqrt[۳]{۳}>۱} \text{قابل قبول} \\ ۱-۳x=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\frac{۱}{۳}<۱} \text{قابل قبول} \end{cases}$$

پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشهٔ $x=\sqrt[۳]{۳}$ و $x=\frac{۱}{۳}$ دارد.

۴۸ ۳ **روش اول:** می‌دانیم در توابع چندضابطه‌ای یا دامنهٔ ضوابط اشتراک ندارند و یا اگر اشتراک داشته باشند به ازای دامنهٔ مشترک، مقدارشان برابر است. حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

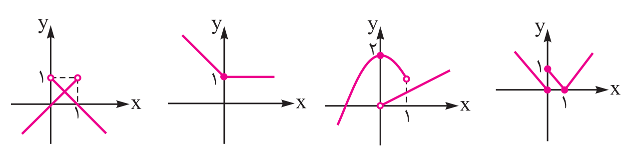
۱) دامنهٔ دو ضابطه در $x=۰$ مشترک می‌باشد، با فرض $x=۰$ مقدار $y=|x-۱|$ و $y=-x$ به ترتیب برابر ۱ و صفر می‌شود. حال چون به ازای $x=۰$ دو مقدار برای y پیدا شد، پس این رابطه تابع نیست.

۲) دامنهٔ دو ضابطه در بازهٔ $(۰,۱)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=\frac{۱}{۲}$، دو مقدار $\frac{۷}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ برای y به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

۳) هر یک از ضوابط تابع‌اند و دامنهٔ دو ضابطه در $x=۰$ مشترک می‌باشد که به ازای آن، مقدار هر دو ضابطه برابر ۱ می‌شود، پس این رابطه تابع است.

۴) دامنهٔ دو ضابطه در بازهٔ $(۰,۱)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $\frac{۱}{۳}$ دو مقدار $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

روش دوم: نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



گزینهٔ (۱) گزینهٔ (۲) گزینهٔ (۳) گزینهٔ (۴)

تنها نموداری که خطوط موازی محور عرض‌ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، نمودار گزینهٔ (۳) است.

۴۹ ۳ به ازای هر x، مقدار $f(x)$ همواره مثبت می‌باشد، پس حاصل $-f(x)$ همواره منفی است و برای تشکیل عبارت $f(-f(x))$ باید از ضابطهٔ دوم استفاده کنیم:

$$f(\underbrace{-f(x)}_{\text{منفی}})=۱ \Rightarrow f(f(-f(x)))=f(۱)=۱+۲=۳$$

۵۰ ۴ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. چون $f(۲)=۳$ و در بازهٔ $[۰,۲]$ تابع ثابت است، پس در این بازه $f(x)=۳$ می‌باشد. از طرفی برای اعداد منفی، خطی است که از نقاط $(-۳,۰)$ و $(-۵,-۲)$ می‌گذرد، حال معادلهٔ این خط را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۲-(۰)}{-۵-(-۳)}=\frac{-۲}{-۲}=۱$$

$$\xrightarrow{y-y_۱=m(x-x_۱)} y-۰=۱(x+۳) \Rightarrow y=x+۳$$

بنابراین داریم:

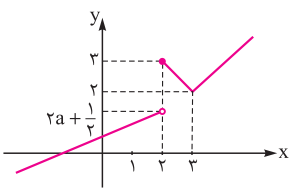
$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x>۲ \\ ۳ & ۰\leq x\leq ۲ \\ x+۳ & x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-۱)=۲\ ;\ f(۱)=۳\ ;\ f(۳)=۹\ ;\ f(-۳)=۰$$

یعنی هر چهار مقدار صحیح است.

۵۱ ۲ ابتدا به کمک انتقال، نمودار $y=|x-۳|+۲$ را در بازهٔ $[۲,+\infty)$ و سپس خط $y=ax+\frac{۱}{۲}$ را در بازهٔ $(-\infty,۲)$ رسم می‌کنیم.

توجه داشته باشید که اگر شیب خط $y=ax+\frac{۱}{۲}$ منفی یا صفر باشد، برد تابع نمی‌تواند $\mathbb{R}$ بشود. مقدار تابع $y=ax+\frac{۱}{۲}$ به ازای $x=۲$ برابر $y=۲a+\frac{۱}{۲}$ است، چون با توجه به شکل، برد تابع $y=|x-۳|+۲$ به صورت بازهٔ $[۲,+\infty)$ می‌باشد، پس باید $۲a+\frac{۱}{۲}\geq ۲$ باشد تا برد $f(x)$ تمام مقادیر اعداد حقیقی را پوشش دهد و برابر $\mathbb{R}$ شود. بنابراین:



$$۲a+\frac{۱}{۲}\geq ۲ \Rightarrow ۲a\geq \frac{۳}{۲} \Rightarrow a\geq \frac{۳}{۴}$$

۵۲ ۱ ابتدا با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، ضابطهٔ دوم را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$x^۶+۳x^۴+۳x^۲=(x^۶+۳x^۴+۳x^۲+۱)-۱=(x^۲+۱)^۳-۱$$

چون عدد $\sqrt{\sqrt[۳]{۵}-۱}$ گنگ است، پس برای محاسبهٔ مقدار آن از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(\underbrace{\sqrt{\sqrt[۳]{۵}-۱}}_{\text{گنگ}})=((\sqrt{\sqrt[۳]{۵}-۱})^۲+۱)^۳-۱=(\sqrt[۳]{۵}-۱+۱)^۳-۱$$

$$=(\sqrt[۳]{۵})^۳-۱=۵-۱=۴$$

$$\Rightarrow f(f(\sqrt{\sqrt[۳]{۵}-۱}))=f(\underbrace{۴}_{\text{گویا}}) \overset{\text{ضابطهٔ اول}}{=\!=\!=\!=} \sqrt{۲(۴)+۱}=۳$$

۵۳ ۳ برای تعیین ضابطهٔ $f(f(x))$ به جای $f(x)$ درون پرانتز به ازای $x\geq ۰$، $-\sqrt{۲}$ و به ازای $x<۰$، $-\frac{۱}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$f(f(x))=\begin{cases} f(-\sqrt{۲}) & x\geq ۰ \\ f(-\frac{۱}{۲}) & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f(f(x))=\begin{cases} -\frac{۱}{۲} & x\geq ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(f(x))=-\frac{۱}{۲}$$

برای تعیین ضابطهٔ $g(g(x))$ به جای $g(x)$ درون پرانتز به ازای $x\in\mathbb{Z}$، $\frac{۱}{۲}$ و به ازای $x\notin\mathbb{Z}$، $\frac{۳}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$g(g(x))=\begin{cases} g(\frac{۱}{۲}) & x\in\mathbb{Z}\\ g(\frac{۳}{۲}) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow g(g(x))=\begin{cases}\frac{۳}{۲} & x\in\mathbb{Z}\\ \frac{۳}{۲} & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(g(x))=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(f(x))+g(g(x))=-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۱$$

پس نمودار تابع، خط افقی $y=۱$ می‌باشد.

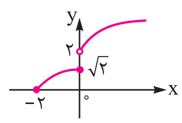
۵۴ **۳** تابع $f(x)$ به ازای xهای گویا برابر خودش (x) و به ازای xهای گنگ برابر ۱ است. می‌دانیم از $\sqrt{۱}$ تا $\sqrt{۱۰۰}$، ۱۰ عدد گویای $\sqrt{۱}$، $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۹}$، ...، $\sqrt{۸۱}$، $\sqrt{۱۰۰}$ وجود دارد که حاصل تابع به ازای آن‌ها برابر خودشان، یعنی ۱، ۲، ۳، ...، ۹ و ۱۰ می‌شود. هم‌چنین از $\sqrt{۱}$ تا $\sqrt{۱۰۰}$، ۹۰ عدد گنگ وجود دارد که حاصل تابع به ازای آن‌ها برابر ۱ می‌شود. بنابراین داریم:

$$f(\sqrt{۱})+f(\sqrt{۲})+...+f(\sqrt{۱۰۰})=(۱+۲+۳+...+۹+۱۰)+(۹۰\times ۱)$$

$$=\frac{۱۰\times ۱۱}{۲}+۹۰=۵۵+۹۰=۱۴۵$$

رابطهٔ $۱+۲+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ از دنبالهٔ حسابی رو که هنوز یادت نرفته!

۵۵ **۳** به کمک انتقال، نمودارهای $y=\sqrt{x}+۲$ و $y=\sqrt{x+۲}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع به صورت $[۰,\sqrt{۲}]\cup(۲,+\infty)$ می‌باشد. پس خط $y=k$، اگر k منفی یا $\sqrt{۲}<k\le ۲$ باشد، نمودار را قطع نمی‌کند. با فرض $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۵}\simeq ۲/۲$، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\sqrt{۲}+۱\simeq ۱/۴+۱=۲/۴$ ۲) $\sqrt{۲}-۱\simeq ۱/۴-۱=۰/۴$

۳) $۴-\sqrt{۵}\simeq ۴-۲/۲=۱/۸$ ۴) $\sqrt{۵}-۱\simeq ۲/۲-۱=۱/۲$

چون $\sqrt{۲}<۴-\sqrt{۵}\le ۲$ است، پس خط $y=۴-\sqrt{۵}$ نمودار را قطع نمی‌کند.

۵۶ **۴** تابع $f(x)=\tan x\cot x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{۲}|k\in\mathbb{Z}\}$، همواره برابر یک می‌باشد، پس تابع ثابت است.

در تابع $g(x)=\sqrt{x-|x|}$، دامنه به صورت بازهٔ $[۰,+\infty)$ است که در این بازه همواره برابر صفر می‌باشد، بنابراین تابع ثابت است.

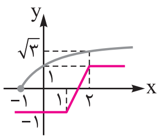
در تابع $s(x)=[x-[x]]$، چون $۰\le x-[x]<۱$، پس $s(x)=۰$ و تابع ثابت می‌باشد.

تابع $t(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$، همواره برابر یک می‌باشد، پس تابع ثابت است.

۵۷ **۳** چون تابع $f(x)$ تابع همانی است، پس $f(۳x-۱)=۳x-۱$ و $f(۲-۲x)=۲-۲x$ می‌باشد. حال نقطهٔ تلاقی $y_۱$ و $y_۲$ را می‌یابیم:

$۳x-۱=۲-۲x\Rightarrow ۵x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}\Rightarrow y=\frac{۴}{۵}\Rightarrow$ نقطهٔ تلاقی $(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})$ می‌باشد.

۵۸ **۴** هر یک از نمودارهای $y=|x-۱|-|x-۲|$ و $y=\sqrt{x+۱}$ را رسم می‌کنیم. برای رسم تابع آبشاری، نقاط شکستگی $(۲,۱)$ و $(۱,-۱)$ را به هم وصل کرده و از دو سر پاره‌خط به دست آمده، دو نیم‌خط افقی می‌کشیم. هم‌چنین برای رسم نمودار $y=\sqrt{x+۱}$، کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ انتقال بدهیم:



با توجه به شکل، دو تابع نقطهٔ مشترک ندارند. پس معادله جواب ندارد (به ازای $x=۲$ مقدار $\sqrt{x+۱}$ برابر $\sqrt{۳}>۱$ می‌شود. پس نمودار تابع آبشاری را قطع نمی‌کند).

۵۹ **۴** در یک تابع کسری، ریشه‌های مخرج در دامنهٔ تابع قرار نمی‌گیرند. در این‌جا کسری داریم که در صورت و مخرج آن نیز یک کسر دیگر وجود دارد. پس ریشه‌های مخرج هر یک از کسرها را به دست می‌آوریم:

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

$$\frac{x}{x^۲-۱}+۱=۰\Rightarrow\frac{x}{x^۲-۱}=-۱\Rightarrow x^۲+x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین دامنهٔ تابع f شامل ۴ عدد حقیقی نمی‌باشد.

۶۰ **۴** چون مخرج کسر، یک عبارت درجه دوم است، فقط در حالتی دامنهٔ تابع به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$ درمی‌آید که مخرج به شکل $(x-\frac{۱}{۲})^۲$ یا ضریبی از آن باشد. بنابراین با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ در مخرج، یک است داریم:

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲=x^۲-x+\frac{۱}{۴}=x^۲+(m+۳)x+n$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+۳=-۱\Rightarrow m=-۴\\ n=\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow mn=-۱$$

۶۱ **۳** زمانی دامنهٔ یک تابع گویا برابر $\mathbb{R}$ است که مخرج ریشه نداشته باشد. پس باید دلتای مخرج منفی باشد:

$$\sqrt{۲}x^۲+(m+۲)x+\sqrt{۲}=۰\Rightarrow\Delta=(m+۲)^۲-۴(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})<۰$$

$$\Rightarrow(m+۲)^۲<۸\Rightarrow-\sqrt{۸}<m+۲<\sqrt{۸}\Rightarrow-\sqrt{۸}-۲<m<\sqrt{۸}-۲$$

$$\Rightarrow-۲\sqrt{۲}-۲<m<۲\sqrt{۲}-۲$$

با فرض $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$، محدودهٔ به دست آمده به صورت $-۴/۸<m<۰/۸$ درمی‌آید که شامل ۵ عدد صحیح است.

۶۲ **۱** در $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ دو رادیکال وجود دارد که عبارت زیر هر یک از رادیکال‌ها باید مثبت یا صفر باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} ۱-۴x\ge ۰\Rightarrow x\le\frac{۱}{۴}\\ ۳-\sqrt{۱-۴x}\ge ۰\Rightarrow\sqrt{۱-۴x}\le ۳\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۱-۴x\le ۹\Rightarrow x\ge -۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۲\le x\le\frac{۱}{۴}$$

پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $[-۲,\frac{۱}{۴}]$ می‌باشد که شامل ۳ عدد صحیح است.

۶۳ ۳ باید $-x^۲(x^۲-۴)^۲ \ge ۰$ باشد. از آن‌جایی که $x^۲(x^۲-۴)^۲$ همواره نامنفی است، پس $-x^۲(x^۲-۴)^۲ \le ۰$ است و در نتیجه برای تعریف‌شدن رادیکال باید عبارت زیر رادیکال صفر باشد:

$$-x^۲(x^۲-۴)^۲=۰ \Rightarrow x=۰\,,\pm ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع، سه عضو دارد.

۶۴ ۱ **روش اول:** باید هر یک از عبارت‌های زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$\begin{cases}\dfrac{x-۱}{x-۳}\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\le ۱ \text{ یا } x>۳\\[2mm] \dfrac{۲-x}{x}\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<x\le ۲\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰<x\le ۱$$

روش دوم (عددگذاری): دو عدد $x=۱$ و $x=۲$ را امتحان می‌کنیم. به ازای $x=۱$، عبارت‌های زیر هر دو رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌شوند. پس گزینهٔ (۴) رد می‌شود. هم‌چنین به ازای $x=۲$، عبارت $\frac{x-۱}{x-۳}$ منفی می‌شود. پس در دامنه قرار ندارد و گزینه‌های (۲) و (۳) نیز رد می‌شوند. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶۵ ۱ درصورتی دامنهٔ تابع به صورت $\mathbb{R}-\{-۳,۱\}$ می‌شود که اعداد ۳- و ۱ ریشه‌های مخرج کسر، یعنی $۲x^۲+(\log_۲ a)x+b=۰$ باشند. چون این معادله، درجهٔ دوم است، با استفاده از جمع (S) و ضرب (P) دو ریشه داریم:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}\Rightarrow -۳+۱=\dfrac{-\log_۲ a}{۲}\Rightarrow -۴\\ =-\log_۲ a\Rightarrow \log_۲ a=۴\Rightarrow a=۲^۴=۱۶\\ P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}\Rightarrow -۳\times ۱=\dfrac{b}{۲}\Rightarrow b=-۶\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-۶}{۱۶}=-\frac{۳}{۸}$$

۶۶ ۴ زمانی عبارت داده‌شده حقیقی (تعریف شده) می‌شود که x در دامنهٔ تابع قرار بگیرد. می‌دانیم رادیکال با فرجهٔ ۳ روی دامنه تأثیری نمی‌گذارد. اما عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\ge ۰ \Rightarrow \frac{۲}{x^۲}\ge \frac{۹}{۲}$$

با توجه به این‌که همواره $x^۲\ge ۰$ است، با شرط $x\ne ۰$ داریم:

$$۹x^۲\le ۴\Rightarrow x^۲\le \frac{۴}{۹}\xRightarrow{x\ne ۰} -\frac{۲}{۳}\le x\le \frac{۲}{۳}\ ,\ x\ne ۰$$

پس دامنهٔ تابع به صورت $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$ می‌باشد.

۶۷ ۳ برای این‌که عبارت $ax^۲+x+a$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر گردد، باید $\Delta\le ۰$ و $a>۰$ باشد. بنابراین:

$$\Delta\le ۰\Rightarrow ۱-۴a^۲\le ۰\Rightarrow a^۲\ge \frac{۱}{۴}\Rightarrow a\ge \frac{۱}{۲} \text{ یا } a\le -\frac{۱}{۲}\xrightarrow{a>۰} a\ge \frac{۱}{۲}$$

۶۸ ۴ **روش اول:** دامنهٔ تابع داده‌شده به صورت $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$ و دامنهٔ هر یک از گزینه‌ها به ترتیب $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$، $(-\infty,-۲]\cup[۱,+\infty)$، $(-\infty,-۲)\cup[۱,+\infty)$ و $[۱,+\infty)$ می‌باشند، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

روش دوم: بدون تعیین دامنهٔ توابع می‌توان گفت در تابع داده‌شده باید $\frac{x-۱}{x+۲}\ge ۰$ باشد و می‌دانیم مجموعه جواب این نامعادله با مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-۱)(x+۲)\ge ۰$ فقط در $x=-۲$ اختلاف دارند. پس گزینهٔ (۴) را انتخاب می‌کنیم تا شرط $x\ne -۲$ را (به خاطر عبارت کسری آن) نیز داشته باشد.

۶۹ ۴ باید $\frac{x}{۶}+۴-|x|\ge ۰$ باشد. پس داریم:

$$\begin{cases}x\ge ۰\Rightarrow \dfrac{x}{۶}+۴-x\ge ۰\Rightarrow \dfrac{۵x}{۶}\le ۴\Rightarrow x\le ۴/۸\xrightarrow{x\ge ۰} ۰\le x\le ۴/۸\\[2mm] x<۰\Rightarrow \dfrac{x}{۶}+۴+x\ge ۰\Rightarrow \dfrac{۷x}{۶}\ge -۴\Rightarrow x\ge \dfrac{-۲۴}{۷}\xrightarrow{x<۰} \dfrac{-۲۴}{۷}\le x<۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} -\frac{۲۴}{۷}\le x\le ۴/۸\Rightarrow D_f=\left[-\frac{۲۴}{۷},۴/۸\right]$$

بنابراین دامنهٔ تابع شامل ۸ عدد صحیح می‌باشد.

۷۰ ۳ **روش اول:** تابع $f(-x)$ را تشکیل داده و دامنهٔ آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}\xrightarrow{|a|=|-a|} f(-x)=\sqrt{|x-۲|-x}$$

باید شرط $|x-۲|-x\ge ۰$ برقرار باشد. این نامعادله را در دو حالت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\ge ۲: x-۲-x\ge ۰\Rightarrow -۲\ge ۰\ (\text{غ‌ق‌ق})\\ x<۲: -x+۲-x\ge ۰\Rightarrow ۲x\le ۲\Rightarrow x\le ۱\xrightarrow{x<۲} x\le ۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}} x\le ۱$$

روش دوم (عددگذاری): در $f(-x)=\sqrt{|x-۲|-x}$، تابع به ازای $x=۰$ و $x=-۲$ تعریف می‌شود. پس در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) می‌تواند درست باشد.

۷۱ ۲ باید شرط $||x-۱|-۳|-۲\ge ۰$ برقرار باشد. بنابراین:

$$||x-۱|-۳|\ge ۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|x-۱|-۳\ge ۲\Rightarrow |x-۱|\ge ۵\Rightarrow \begin{cases}x-۱\ge ۵\Rightarrow x\ge ۶\\ \text{یا}\\ x-۱\le -۵\Rightarrow x\le -۴\end{cases}\\ \xrightarrow{\text{اجتماع}} (-\infty,-۴]\cup[۶,+\infty)\\ \text{یا}\\ |x-۱|-۳\le -۲\Rightarrow |x-۱|\le ۱\Rightarrow -۱\le x-۱\le ۱\Rightarrow ۰\le x\le ۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} D_y=(-\infty,-۴]\cup[۰,۲]\cup[۶,+\infty)$$

بنابراین شش عدد ۳-، ۲-، ۱-، ۳، ۴ و ۵ در دامنهٔ تابع وجود ندارند.

۷۲ ۳ هر چهار گزینه، توابع کسری هستند و در صورتی دامنه‌ای برابر $\mathbb{R}$ دارند که مخرج کسر، ریشه نداشته باشد. پس ریشهٔ مخرج هر یک را بررسی می‌کنیم:

۱) $g(x)=۰\Rightarrow x^۲+۲x=۰\Rightarrow x=۰,-۲\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰,-۲\}$

۲) $f(x)+g(x)=۰\Rightarrow x^۲+۳x-۱=۰\Rightarrow \Delta>۰\Rightarrow$ دو ریشه دارد.
$\Rightarrow$ دامنه برابر $\mathbb{R}$ نمی‌باشد.

۳) $g(x)-f(x)=۰\Rightarrow x^۲+x+۱=۰\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow D=\mathbb{R}$

۴) $g(x)+۱=۰\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۰\Rightarrow x=-۱$
$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۱\}$

۷۳ ۴ **روش اول:** باید عبارت $xf(x)$ نامنفی باشد. پس با استفاده از نمودار تابع f، جدول تعیین علامت $xf(x)$ را رسم می‌کنیم:

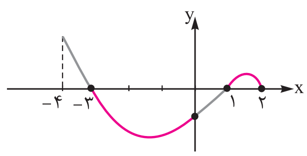
x		−۴		−۳		۰		۱		۲	
f(x)	▨		+	۰	−		−	۰	+		▨
x	−		−		−	۰	+		+		+
xf(x)	▨		−	۰	+	۰	−	۰	+		▨

بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ برابر $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$ می‌باشد.

روش دوم: شرط $xf(x)\geq ۰$ زمانی برقرار است که نمودار $f(x)$ در ناحیهٔ اول یا ناحیهٔ سوم باشد. زیرا:

$$xf(x)\geq ۰\Rightarrow\begin{cases} x\geq ۰\ ,\ f(x)\geq ۰\Rightarrow \text{ناحیهٔ اول}\\ x\leq ۰\ ,\ f(x)\leq ۰\Rightarrow \text{ناحیهٔ سوم}\end{cases}$$

اگر $x\geq ۰$ باشد، نمودار $f(x)$ در بازهٔ $[۱,۲]$ نامنفی است و اگر $x\leq ۰$ باشد، نمودار $f(x)$ در بازهٔ $[-۳,۰]$ نامثبت است. پس مجموعه جواب به صورت $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$ به‌دست می‌آید.



۷۴ ۴ با توجه به نمودار، علامت $f(x)$ در بازه‌های $(-۳,-۱)$ و $(۲,+\infty)$ مثبت و در بازه‌های $(-\infty,-۳)$ و $(-۱,۲)$ منفی است. بنابراین:

x		−۳		−۱		۲	
x+۱	−		−	۰	+		+
f(x)	−	۰	+	۰	−	۰	+
(x+۱)f(x)	+	۰	−	۰	−	۰	+

$$(x+۱)f(x)\geq ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}-(-۳,۲)$$

البته ۱− نیز جزء دامنه محسوب می‌شود، ولی احتمالاً منظور طراح محترم از تابع غیرنقطه‌ای حذف ۱− از دامنه بوده است.

۷۵ ۱ **روش اول:** دامنهٔ تابع $y=\log_{g(x)}f(x)$ به صورت $D_y=\{x|g(x)>۰, g(x)\neq ۱, f(x)>۰\}$ به‌دست می‌آید. در این تابع مبنا همواره مثبت و مخالف یک است. پس فقط کافی است نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}>۰\Rightarrow ۶+\sqrt{|x|}-|x|>۰\xrightarrow{\sqrt{|x|}=t}۶+t-t^۲>۰$$

$$\Rightarrow t^۲-t-۶<۰\Rightarrow(t-۳)(t+۲)<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۲<t<۳$$

$$\Rightarrow -۲<\sqrt{|x|}<۳$$

عبارت $\sqrt{|x|}$ همواره نامنفی است، پس نامساوی $\sqrt{|x|}>-۲$ همواره برقرار می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\sqrt{|x|}<۳\Rightarrow|x|<۹\Rightarrow -۹<x<۹\Rightarrow D_f=(-۹,۹)$$

روش دوم (عددگذاری): تابع به ازای $x=-۴$ تعریف می‌شود، زیرا:

$$f(-۴)=\log_۶\frac{۱}{۶+\sqrt{|-۴|}-|-۴|}=\log_۶\frac{۱}{۴}$$

بنابراین در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ(۱) می‌تواند درست باشد.

۷۶ ۱ **روش اول:** عبارت $\sqrt{x^۲-۱}$ همواره نامنفی است، بنابراین $۱+\sqrt{x^۲-۱}$ هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود، پس فقط کافی است دو شرط $x^۲-x-۲>۰$ و $x^۲-۱\geq ۰$ برقرار باشد:

$$x^۲-x-۲>۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<-۱ \text{ یا } x>۲\quad(۱)$$

$$x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۱\Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq ۱\quad(۲)$$

از اشتراک محدوده‌های (۱) و (۲)، دامنهٔ تابع به صورت $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ حاصل می‌شود.

روش دوم (عددگذاری): به ازای $x=۰$ و $x=\frac{۳}{۲}$ عبارت جلوی لگاریتم منفی می‌شود. پس این دو عدد نباید در دامنهٔ تابع قرار بگیرند. تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد گزینهٔ (۱) می‌باشد.

۷۷ ۴ **روش اول:** باید شرط $|x^۲-۲|-x>۰$ برقرار باشد:

$$|x^۲-۲|>x\Rightarrow x^۲-۲>x \text{ یا } x^۲-۲<-x$$

$$\begin{cases} x^۲-۲>x\Rightarrow x^۲-x-۲>۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)>۰\\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<-۱ \text{ یا } x>۲\qquad(۱)\\ x^۲-۲<-x\Rightarrow x^۲+x-۲<۰\Rightarrow(x-۱)(x+۲)<۰\\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۲<x<۱\qquad(۲)\end{cases}$$

از اجتماع محدوده‌های (۱) و (۲)، دامنهٔ تابع به صورت $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$ حاصل می‌شود.

روش دوم (عددگذاری): به ازای $x=۲$ عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس در دامنه قرار نمی‌گیرد و در نتیجه گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. هم‌چنین به ازای $x=۰$ عبارت جلوی لگاریتم برابر ۲ می‌شود، چون $x=۰$ متعلق به دامنه است، پس گزینهٔ (۱) نیز رد می‌شود و در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح است.

۷۸ ۴ باید دو شرط $\frac{x}{۳}+۲\geq ۰$ و $\frac{-x}{۳}-۲+\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}\geq ۰$ برقرار باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{x}{۳}+۲\geq ۰\Rightarrow\frac{x}{۳}\geq -۲\Rightarrow x\geq -۶\\ -\frac{x}{۳}-۲+\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}\geq ۰\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}\geq\frac{x}{۳}+۲\\ \xrightarrow{\text{به توان ۲}}\cancel{(\frac{x}{۳}+۲)}\geq(\frac{x}{۳}+۲)^{\cancel{۲}}\Rightarrow ۱\geq\frac{x}{۳}+۲\Rightarrow\frac{x}{۳}\leq -۱\Rightarrow x\leq -۳\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۶\leq x\leq -۳$$

پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $[-۶,-۳]$ است که شامل چهار عدد صحیح می‌باشد.

۷۹ ۲ باید دو شرط $x-۲>۰$ و $\sqrt[۵]{x-۲}-\sqrt{x-۲}>۰$ برقرار باشد. برای حل نامعادلهٔ رادیکالی داریم:

$$\sqrt[۵]{x-۲}>\sqrt{x-۲}\xRightarrow{\text{به توان ۱۰}}(x-۲)^۲>(x-۲)^۵$$

$$\Rightarrow(x-۲)^۲-(x-۲)^۵>۰\Rightarrow(x-۲)^۲(۱-(x-۲)^۳)>۰$$

$$\xRightarrow[x\neq ۲]{(x-۲)^۲\geq ۰}۱-(x-۲)^۳>۰\Rightarrow(x-۲)^۳<۱\Rightarrow x-۲<۱\Rightarrow x<۳$$

با توجه به شرط اول باید $۲ < x < ۳$ باشد، پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $(۲,۳)$ می‌باشد و در نتیجه $۲\beta-\alpha=۶-۲=۴$ است.

به طور کلی، زمانی $\sqrt{a} > \sqrt[۵]{a}$ میشه که $۰<a<۱$ باشه. پس در این‌جا می تونیم بگیم $۰<x-۲<۱$ و در نتیجه $۲<x<۳$.

۸۰ **۱** باید دو شرط $\frac{x+f(x)}{۱۶-x^۲}\geq ۰$ و $۱۶-x^۲\neq ۰$ برقرار باشد. ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج کسر را مشخص می‌کنیم:

$$x+f(x)=۰\Rightarrow f(x)=-x\Rightarrow x=-۲,۳\;;\;۱۶-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm۴$$

با توجه به شکل، در بازهٔ $(-۲,۳)$ نمودار $y=-x$ بالاتر از نمودار $y=f(x)$ و در بیرون این بازه، نمودار $y=f(x)$ بالاتر یا روی نمودار $y=-x$ است. پس علامت $x+f(x)=f(x)-(-x)$ در بازهٔ $(-۲,۳)$ منفی و در بیرون این بازه نامنفی است. حال جدول تعیین علامت را برای عبارت $P=\frac{x+f(x)}{۱۶-x^۲}$ رسم می‌کنیم:

x		−۴		−۲		۳		۴	
$f(x)-(-x)$	+		+	۰	−	۰	+		+
$۱۶-x^۲$	−	۰	+		+		+	۰	−
P	−	ت ن	+	۰	−	۰	+	ت ن	−

با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع به صورت $(-۴,-۲]\cup[۳,۴)$ می‌شود.

۸۱ **۳** باید دو شرط $\frac{x-f(x)}{(۴-x)f(x)}\geq ۰$ و $(۴-x)f(x)\neq ۰$ برقرار باشد.

ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج کسر را مشخص می‌کنیم:

$$x-f(x)=۰\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow x=۲,۵$$

$$(۴-x)f(x)=۰\Rightarrow ۴-x=۰\Rightarrow x=۴$$

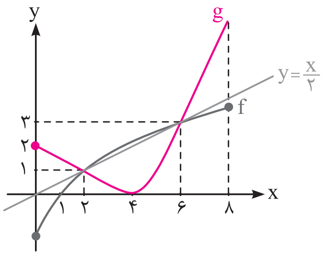
یا $f(x)=۰\Rightarrow x=۱$

با توجه به شکل، در بازهٔ $(۲,۵)$ نمودار $y=f(x)$ بالاتر از خط $y=x$ و در بیرون این بازه، خط $y=x$ بالاتر یا روی $y=f(x)$ است. پس علامت عبارت $x-f(x)$ در بازهٔ $(۲,۵)$ منفی و در بیرون این بازه نامنفی است. همچنین در $x>۱$، علامت $f(x)$ مثبت و در $x<۱$ علامت $f(x)$ منفی است. حال جدول تعیین علامت را برای عبارت $P=\frac{x-f(x)}{(۴-x)f(x)}$ رسم می‌کنیم:

x		۱		۲		۴		۵	
$x-f(x)$	+		+	۰	−		−	۰	+
$۴-x$	+		+		+	۰	−		−
$f(x)$	−	۰	+	۰	+		+	۰	+
P	−	ت ن	+		−	ت ن	+		−

با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع به صورت $(۱,۲]\cup(۴,۵]$ می‌شود.

۸۲ **۲** باید $P=\frac{f(x).g(x)}{۲(\frac{x}{۲}-f(x))}\geq ۰$ باشد، می‌دانیم ریشهٔ معادلهٔ $g(x)=۰$، برابر $x=۴$ و ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$، برابر $x=۱$ است. برای تعیین ریشهٔ $\frac{x}{۲}-f(x)=۰$ ابتدا خط $y=\frac{x}{۲}$ را رسم می‌کنیم:



$$\frac{x}{۲}-f(x)=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=f(x)$$
$$\Rightarrow x=۲,x=۶$$

در بازهٔ $(۲,۶)$ نمودار تابع $y=f(x)$ بالاتر از نمودار $y=\frac{x}{۲}$ است. پس علامت عبارت $\frac{x}{۲}-f(x)$ منفی می‌باشد به همین ترتیب می‌توان گفت بیرون این بازه علامت $\frac{x}{۲}-f(x)$ مثبت است. در نتیجه داریم:

x		۰		۱		۲		۴		۶		۸	
f(x)	▨		−	۰	+		+		+		+		▨
g(x)	▨		+		+		+	۰	+		+		▨
$۲(\frac{x}{۲}-f(x))$	▨		+		+	۰	−		−	۰	+		▨
p	▨		−	۰	+	ت ن	−	۰	−	ت ن	+		▨

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $[۱,۲)\cup(۶,۸]\cup\{۴\}$ می‌باشد که شامل ۴ عدد صحیح است.

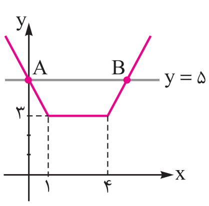
۸۳ **۴** **روش اول:**

عبارت $|x+۲|+۳$ همواره مثبت است. پس فقط باید شرط $۵-|x-۱|-|x-۴|>۰$ را بررسی کرد.

با توجه به ریشه‌های درون قدرمطلق، در سه حالت زیر نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x<۱: ۵+x-۱+x-۴>۰\Rightarrow ۲x>۰\Rightarrow x>۰ \xrightarrow{x<۱} ۰<x<۱ \\ ۱\leq x\leq ۴: ۵-\cancel{x}+۱+\cancel{x}-۴>۰\Rightarrow ۲>۰ \text{ بدیهی است.} \xrightarrow{۱\leq x\leq ۴} ۱\leq x\leq ۴ \\ x>۴: ۵-x+۱-x+۴>۰\Rightarrow ۲x<۱۰\Rightarrow x<۵ \xrightarrow{x>۴} ۴<x<۵ \end{cases}$$

اجتماع سه بازه به دست آمده، بازهٔ $(۰,۵)$ می‌شود. پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $(۰,۵)$ است و در نتیجه $\beta-۲\alpha=۵$ می‌باشد.



روش دوم: نامعادلهٔ $۵-|x-۱|-|x-۴|>۰$ را به صورت $|x-۱|+|x-۴|<۵$ نوشته و با رسم $y=|x-۱|+|x-۴|$ و $y=۵$ از روش هندسی مجموعه جواب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x>۴: y=۲x-۵, y=۵ \\ \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x-۵=۵\Rightarrow x_B=۵ \\ x<۱: y=-۲x+۵, y=۵ \\ \xrightarrow{\text{تلاقی}} -۲x+۵=۵\Rightarrow x_A=۰ \end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(۰,۵)\Rightarrow\beta-۲\alpha=۵$$

۸۴ **۲** در معادلهٔ $\sqrt{y+۱}=۳-\sqrt[۴]{x-۱}$، چون $\sqrt{y+۱}$ همواره نامنفی است، پس داریم: $۳-\sqrt[۴]{x-۱}\ge ۰ \Rightarrow \sqrt[۴]{x-۱}\le ۳ \Rightarrow x-۱\le ۸۱ \Rightarrow x\le ۸۲$

از طرفی باید $x-۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۱$ باشد. پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $[۱,۸۲]$ است.

۸۵ **۳** **روش اول:** زمانی دامنهٔ تابع فقط شامل یک عضو $x=\frac{۱}{۲}$ است که عبارت زیر رادیکال به ازای هر عدد غیر از $\frac{۱}{۲}$، منفی شود. پس باید مضربی از $-(x-\frac{۱}{۲})^۲$ باشد. بنابراین عبارت $ax^۲+۲x+c$ فقط یک ریشهٔ مضاعف $x=\frac{۱}{۲}$ دارد: $y=ax^۲+۲x+c$

$$\Rightarrow\begin{cases} \text{طول ریشهٔ مضاعف}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{-۲}{۲a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۲ \\ \Delta=۰\Rightarrow ۴-۴ac=۰ \xrightarrow{a=-۲} ۴+۸c=۰\Rightarrow c=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-۲c=-۲+۱=-۱$$

روش دوم: می‌دانیم زمانی $ax^۲+bx+c$ مضربی از $a'x^۲+b'x+c'$ است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. پس برای آن‌که $ax^۲+۲x+c$ مضربی از $-(x-\frac{۱}{۲})^۲$ باشد، داریم:

$$-(x-\frac{۱}{۲})^۲=-(x^۲-x+\frac{۱}{۴})=-x^۲+x-\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{a}{-۱}=\frac{۲}{۱}=\frac{c}{-\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ c=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow a-۲c=-۱$$

۸۶ **۳** در کسر $y_۱=\frac{x}{x}$ دامنهٔ تابع، شامل عدد صفر نمی‌باشد. پس اگر بخواهیم دامنهٔ تابع $f(x)$ فقط شامل یک عدد نباشد، باید مخرج کسر $y_۲=\frac{\sqrt[۳]{x}}{ax^۲+۲x+a}$ ریشه نداشته باشد یا فقط ریشه‌ای برابر صفر داشته باشد. پس:

$$\begin{cases}\Delta<۰\Rightarrow ۴-۴a^۲<۰\Rightarrow a^۲>۱\Rightarrow a>۱ \text{ یا } a<-۱\\ \text{فقط ریشه‌ای برابر صفر داشته باشد}\Rightarrow a=۰\end{cases}\Rightarrow a>۱ \text{ یا } a<-۱ \text{ یا } a=۰$$

بنابراین a اعداد صحیح ±۱ را شامل نمی‌شود.

۸۷ **۱** ابتدا شرط $x^۳+x\ge۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$x^۳+x\ge۰\Rightarrow x(x^۲+۱)\ge۰ \xrightarrow{x^۲+۱>۰} x\ge۰$$

بنابراین زمانی دامنهٔ تابع، بازهٔ $[۰,+\infty)$ می‌شود که یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

حالت اول: عبارت مخرج کسر، ریشه نداشته باشد:

$$\Delta<۰\Rightarrow a^۲-۴<۰\Rightarrow a^۲<۴\Rightarrow -۲<a<۲$$

حالت دوم: مخرج، ریشهٔ منفی داشته باشد. (زیرا اگر ریشهٔ مثبت یا صفر داشته باشد، باید از بازهٔ $[۰,+\infty)$ کم شود). پس باید سه شرط $\Delta\ge۰$، $S<۰$ و $P>۰$ برقرار باشد:

$$\Delta\ge۰\Rightarrow a\le-۲ \text{ یا } a\ge۲ \quad ; \quad S<۰\Rightarrow -a<۰\Rightarrow a>۰$$

$P>۰\Rightarrow ۱>۰$ همواره برقرار است.

با توجه به محدوده‌های به دست آمده در حالت دوم، باید $a\ge۲$ باشد.

از اجتماع حالت اول و دوم، مجموعه جواب به صورت $a>-۲$ حاصل می‌شود.

۸۸ **۱** زمانی دو تابع f و g برابرند که: الف) $D_f=D_g$ ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان $f(x)=g(x)$ باشد. با توجه به این تعریف، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) می‌دانیم همواره $x^۲\ge۰$ است، پس دامنهٔ توابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=|x|$ هر دو برابر $\mathbb{R}$ هستند و به طور کلی با توجه به ویژگی‌های قدرمطلق $\sqrt{x^۲}=|x|$ می‌باشد، بنابراین دو تابع با هم برابرند.

۲) دامنهٔ تابع $f(x)=(\sqrt{x})^۲$ برابر بازهٔ $[۰,+\infty)$ و دامنهٔ تابع $g(x)=|x|$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس این دو تابع برابر نیستند.

۳) دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ و دامنهٔ تابع $g(x)=۱$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس این دو تابع برابر نیستند.

۴) دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{|x|}{|x|}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ و دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ بازهٔ $(۰,+\infty)$ است، پس این دو تابع نیز برابر نیستند.

۸۹ **۲** **بررسی گزینه‌ها:**

۱) دامنهٔ دو تابع برابر نیست، زیرا:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+۲}{x-۲}}\ :\ \frac{x+۲}{x-۲}\ge۰\Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup(۲,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۲}}\ :\ x+۲\ge۰\ ,\ x-۲>۰\Rightarrow x\ge-۲\ ,\ x>۲$$

$$\Rightarrow D_g=(۲,+\infty)$$

۲) این دو تابع برابرند، زیرا $D_f=D_g=(-\infty,۰]$ و داریم:

$$g(x)=-\sqrt{-x^۳}=-\sqrt{x^۲(-x)}=-|x|\sqrt{-x}$$

$$\overset{x\le۰}{=\!=}-(-x)\sqrt{-x}=x\sqrt{-x}$$

۳) چون $f(۳)=۵$ و $g(۳)=۶$، پس این دوتابع برابر نیستند.

۴) دامنه و ضابطهٔ دو تابع برابر نیست:

$$D_g=\mathbb{R}\ ,\ D_f=(-\infty,-\sqrt{۲}]\cup[\sqrt{۲},+\infty)$$

۹۰ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

۱) $D_f=(۰,+\infty), D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\Rightarrow D_f\ne D_g\Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

۲) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\ne D_g\Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

۳) $D_f=[۰,+\infty), D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\ne D_g\Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

۴) $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $f(x)=g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}\Rightarrow$ دو تابع مساوی‌اند.

۹۱ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

۱) دو تابع برابرند، زیرا دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد ($۱+x^۲>۰$ و $۱+\sqrt{۱+x^۲}\ne۰$) و داریم:

$$g(x)=\frac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x^۲(۱-\sqrt{۱+x^۲})}{۱-۱-x^۲}=\sqrt{۱+x^۲}-۱=f(x)$$

۲) دوتابع برابرند، زیرا دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد $(|x|+1\neq 0)$ و داریم:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}=\frac{(|x|)^2-1}{|x|+1}=\frac{(|x|-1)\cancel{(|x|+1)}}{\cancel{(|x|+1)}}=|x|-1=g(x)$$

۳) $x=0$ در دامنهٔ تابع g نمی‌باشد، درصورتی‌که در دامنهٔ تابع f قرار دارد، پس این دو تابع برابر نیستند.

$$f(x)=\sqrt{x^4-x^2}\ :\ x^4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2(x^2-1)\ge 0$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$$

$$g(x)=|x|\sqrt{x^2-1}\ ;\ x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x\ge 1 \ \text{یا}\ x\le -1$$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

برای درک بهتر می‌توانید جدول تعیین علامت بکشید.

۴) دو تابع برابرند، زیرا $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}$ و داریم:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\times\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=g(x)$$

۹۲ ۳ دامنهٔ تابع $y=2x-1$ برابر $\mathbb{R}$ است. حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است، اما داریم: $y=\sqrt{4x^2}-1=2|x|-1\neq 2x-1$

۲) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{\frac{-1}{2}\}$ است، پس نمی‌تواند با تابع داده‌شده برابر باشد.

۳) چون $2x^2+1\neq 0$، پس دامنهٔ این تابع برابر $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$y=\frac{4x^3-2x^2+2x-1}{2x^2+1}=\frac{4x^3+2x-(2x^2+1)}{2x^2+1}$$

$$=\frac{2x(2x^2+1)-(2x^2+1)}{2x^2+1}=\frac{\cancel{(2x^2+1)}(2x-1)}{\cancel{2x^2+1}}=2x-1$$

۴) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است، اما داریم:

$$y=\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|\neq 2x-1$$

۹۳ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) دو تابع برابرند، زیرا دامنهٔ هر دو برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد و همواره داریم:

$$\sin^2x+\cos^2x=1$$

۲) دو تابع برابرند، زیرا دامنهٔ هر دو برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد و همواره داریم:

$$\begin{cases}f(x)=\sin^2x+\cos^4x=1-\cos^2x+\cos^4x\\ =1-\cos^2x(1-\cos^2x)=1-\cos^2x\sin^2x\\ g(x)=\cos^2x+\sin^4x=1-\sin^2x+\sin^4x\\ =1-\sin^2x(1-\sin^2x)=1-\sin^2x\cos^2x\end{cases}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

۳) در هر دو تابع باید $\cos x\neq 0$ باشد $(\tan x=\frac{\sin x}{\cos x})$، پس دامنهٔ دو تابع برابر است. اما داریم:

$$f(x)=\sqrt{1+\tan^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}=\frac{1}{|\cos x|}\neq\frac{1}{\cos x}$$

۴) می‌دانیم معادلهٔ $2\sin x-3=0$ ریشه ندارد، زیرا همواره $-1\le\sin x\le 1$ است، پس هیچ‌گاه $\sin x$ نمی‌تواند برابر $\frac{3}{2}$ شود. بنابراین دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد و داریم:

$$f(x)=\frac{4\sin^2x-6\sin x}{2\sin x-3}=\frac{2\sin x\cancel{(2\sin x-3)}}{\cancel{2\sin x-3}}=2\sin x=g(x)$$

۹۴ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع داده‌شده و دامنهٔ هر یک از گزینه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$y=\log\frac{x-2}{x}\ :\ \frac{x-2}{x}>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}D_y=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$$

$$1)\ y=\log(x-2)-\log x\ :\ x-2>0\Rightarrow x>2\ ,\ x>0$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_y=(2,+\infty)$$

$$2)\ y=\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}\ :\ \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}>0\xrightarrow{x\neq -2}\frac{x-2}{x}>0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}D_y=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-\{-2\}$$

$$3)\ y=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2>0\Rightarrow x\neq 0\ ,\ 2\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{0,2\}$$

$$4)\ y=2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}} : \frac{x-2}{x}>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}D_y=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$$

بنابراین فقط دامنهٔ گزینهٔ (۴) با دامنهٔ تابع داده‌شده برابر است. البته از نظر ضابطه نیز با هم برابرند، زیرا:

$$y=2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}=2\log\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{2}\log\frac{x-2}{x}=\log\frac{x-2}{x}$$

به جای اینکه دامنهٔ هر کدوم از گزینه‌ها رو تعیین کنی، می‌تونی این طوری جواب بدی که در تابع داده شده باید شرط $\frac{x-2}{x}>0$ برقرار باشه و در تابع گزینهٔ (۴) هم همینطور، پس دامنهٔ این توابع با هم برابرند.

۹۵ ۲ ابتدا باید دامنهٔ f و g با هم برابر باشند و چون $D_g=\mathbb{R}$ می‌باشد، پس مخرج f نباید ریشه داشته باشد، بنابراین:

$$x^2+x-k\neq 0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow 1+4k<0\Rightarrow k<-\frac{1}{4}$$

حال تابع f را ساده می‌کنیم و برابر g قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{3\cancel{(x^2+x-k)}}{\cancel{x^2+x-k}}=3\\ g(x)=k^3-2k+3\end{cases}\xrightarrow{f(x)=g(x)}k^3-2k+3=3$$

$$\Rightarrow k(k^2-2)=0\Rightarrow k=0\ ,\ \pm\sqrt{2}\xrightarrow{k<-\frac{1}{4}}k=-\sqrt{2}$$

پس فقط یک مقدار برای k وجود دارد.

۹۶ ۳ به ازای $x\neq a$ ضابطهٔ دو تابع برابر است. بنابراین:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-a}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{x-8}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{x-۸}{(x-a)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\Rightarrow a=۸$$

از این‌که $a=۸$ است، نتیجه می‌گیریم $f(a)=f(۸)=k$ است و چون دو تابع به ازای هر x برابرند، داریم:

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\Rightarrow g(۸)=\frac{۱}{۴+۴+۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{f(۸)=g(۸)} k=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow ak=۸\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

۹۷ **۲** در ابتدا شرط تساوی دامنهٔ دو تابع را بررسی می‌کنیم. چون دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}-\{۳\}$ است، پس دامنهٔ تابع g هم به‌صورت $\mathbb{R}-\{۳\}$ می‌باشد، از طرفی می‌دانیم زمانی معادلهٔ $x^۲+cx+d=۰$ فقط یک ریشهٔ $x=۳$ دارد که به‌صورت $(x-۳)^۲$ باشد:

$$x^۲+cx+d=(x-۳)^۲\Rightarrow x^۲+cx+d=x^۲-۶x+۹\Rightarrow c=-۶\,,\,d=۹$$

هم‌چنین در مخرج کسر تابع $f(x)=\frac{a}{x-۳}$ یک عامل و در مخرج کسر $g(x)=\frac{۲x+b}{(x-۳)^۲}$ دو عامل $x-۳$ وجود دارد. بنابراین باید در عبارت صورت کسر g یک عامل $x-۳$ داشته باشیم تا با مخرج ساده شود. در نتیجه داریم:

$$\frac{۲x+b}{(x-۳)^۲}=\frac{۲(x-۳)}{(x-۳)^۲}\Rightarrow ۲x+b=۲x-۶\Rightarrow b=-۶$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{۲(x-۳)}{(x-۳)^۲}=\frac{۲}{x-۳}\xrightarrow{f(x)=g(x)} a=۲$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=۲-۶-۶+۹=-۱$$

۹۸ **۴** ابتدا عبارت زیر رادیکال را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$g(x)=\sqrt{(x-۴)(x-a)(x-۴)}=\sqrt{(x-۴)^۲(x-a)}$$

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[a,+\infty)$ و دامنهٔ تابع g برابر $[a,+\infty)\cup\{۴\}$ می‌باشد و فقط در شرایطی $D_f=D_g$ می‌شود که $a\le۴$ باشد (زیرا در این حالت $\{۴\}$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[a,+\infty)$ می‌شود و بدیهی است که $[a,+\infty)\cup\{۴\}=[a,+\infty)$ می‌شود). پس به ازای چهار عدد طبیعی، دو تابع برابر می‌شوند.

۹۹ **۲** **روش اول:** در تابع $y=\frac{۴x+۳}{۲x-۶}$ با طرفین وسطین x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$y(۲x-۶)=۴x+۳\Rightarrow ۲xy-۶y=۴x+۳\Rightarrow ۲xy-۴x=۶y+۳$$

$$\Rightarrow x(۲y-۴)=۶y+۳\Rightarrow x=\frac{۶y+۳}{۲y-۴}$$

در $x=\frac{۶y+۳}{۲y-۴}$، زمانی برای x مقادیر حقیقی یافت می‌شود که $۲y-۴\neq۰$ و در نتیجه $y\neq۲$ باشد، پس برد تابع $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.

روش دوم:

نکته

به توابع به شکل کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq۰,c\neq۰)$ توابع هموگرافیک می‌گویند. برد این توابع همواره از رابطهٔ $R_y=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ به دست می‌آید.

با توجه به نکتهٔ بالا، برد تابع $f(x)=\frac{۴x+۳}{۲x-۶}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ می‌باشد.

۱۰۰ **۲** برای این‌که قدرمطلق را برداریم، بازهٔ $-۱\le\sin x\le۱$ را تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{cases}۰\le\sin x\le۱\xrightarrow{y=۹\sin x}۰\le y\le۹\\ -۱\le\sin x<۰\xrightarrow{y=-۵\sin x}۰<y\le۵\end{cases}$$

از اجتماع دو محدودهٔ به دست آمده، برد تابع به صورت $[۰,۹]$ حاصل می‌شود.

۱۰۱ **۲** ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۲x-x^۲\ge۰\Rightarrow x(۲-x)\ge۰\Rightarrow ۰\le x\le۲\\ x^۲-x-۲\ge۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)\ge۰\Rightarrow x\ge۲ \text{ یا } x\le-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x=\{۲\}$$

پس دامنهٔ تابع، مجموعهٔ تک عضوی $\{۲\}$ می‌باشد که برای پیدا کردن مقدار برد، آن را در تابع قرار می‌دهیم: $f(۲)=۱+۰-۰=۱\Rightarrow R_f=\{۱\}$

بنابراین برد تابع شامل یک عدد صحیح می‌باشد.

۱۰۲ **۲** ابتدا عبارت را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$x-۶\sqrt{x}=(\sqrt{x}-۳)^۲-۹$$

می‌دانیم $(\sqrt{x}-۳)^۲\ge۰$ است. بنابراین $(\sqrt{x}-۳)^۲-۹\ge-۹$ و از آن‌جا برد تابع به صورت بازهٔ $[-۹,+\infty)$ می‌شود. در نتیجه ۹ عدد صحیح منفی در برد تابع قرار دارند.

(در نامساوی $(\sqrt{x}-۳)^۲\ge۰$ حالت تساوی زمانی برقرار است که $x=۹$ باشد.)

۱۰۳ **۲** در توابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ اگر $a<۰$ باشد، برد تابع $R_y=(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$ می‌باشد. پس ابتدا برد تابع $f(x)=-۴x^۲+۴x+۵$ را می‌یابیم:

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-۹۶}{۴(-۴)}=۶\Rightarrow R_f=(-\infty,۶]$$

چون $f(x)$ زیر رادیکال قرار دارد، پس $۰\le f(x)\le۶$. بنابراین برد تابع $y=\sqrt{f(x)}$ به صورت بازهٔ $[۰,\sqrt{۶}]$ می‌باشد که شامل ۳ عدد صحیح است.

۱۰۴ **۴** بازهٔ $[-\frac{۱}{۴},۳]$ را به دو بازهٔ زیر تقسیم می‌کنیم، توجه کنید که باید $f(x)\neq۰$ باشد:

$$-\frac{۱}{۴}\le f(x)<۰\Rightarrow-\infty<\frac{۱}{f(x)}\le-۴\Rightarrow-\infty<\frac{۳}{f(x)}\le-۱۲$$

$$۰<f(x)\le۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}\le\frac{۱}{f(x)}<+\infty\Rightarrow ۱\le\frac{۳}{f(x)}<+\infty$$

بنابراین برد تابع $y=\frac{۳}{f(x)}$ به صورت $(-\infty,-۱۲]\cup[۱,+\infty)$ است که شامل ۱۲ عدد صحیح $\{-۱۱,\dots,-۱,۰\}$ نمی‌باشد.

۱۰۵ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم. برای تعیین دامنه باید سه شرط $x\neq ۰$، $x^۳-x\geq ۰$ و $۲x-۲x^۳\geq ۰$ برقرار باشد:

$$\begin{cases} ۲x-۲x^۳\geq ۰ \xrightarrow{\div ۲} x-x^۳\geq ۰ \\ x^۳-x\geq ۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x-x^۳=۰ \Rightarrow x(۱-x^۲)=۰\Rightarrow x=۰, x=\pm۱$$

با توجه به شرط $x\neq ۰$، دامنهٔ تابع فقط شامل دو عضو ۱ و ۱- است. پس برد این تابع نیز فقط به ازای این دو عدد حاصل می‌شود. بنابراین:

$$f(۱)=۰+۰+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\,;\, f(-۱)=۰+۰-\sqrt{۲}=-\sqrt{۲}\Rightarrow R_f=\{-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\}$$

۱۰۶ ۳

$$f(x)=x^۲+۱+۱+\frac{۱}{x^۲+۱}\Rightarrow f(x)=x^۲+۱+\frac{۱}{x^۲+۱}+۱$$

می‌دانیم اگر $a>۰$، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ می‌شود. بنابراین اگر فرض کنیم $a=x^۲+۱$، آن‌گاه داریم:

$$x^۲+۱+\frac{۱}{x^۲+۱}\geq ۲\Rightarrow x^۲+۱+\frac{۱}{x^۲+۱}+۱\geq ۳\Rightarrow f(x)\geq ۳$$

(در $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ زمانی حالت تساوی رخ می‌دهد که $a=۱$ باشد که در این‌جا به ازای $x=۰$، مقدار $a=x^۲+۱$، برابر ۱ می‌شود.)

۱۰۷ ۱ دامنهٔ تابع به صورت $\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$ می‌باشد. چون ریشه‌های عبارت‌های درون قدرمطلق ۱- و ۰ است، پس با توجه به جدول تعیین علامت در سه حالت مختلف زیر، حاصل عبارت را تعیین می‌کنیم:

x		-۱		۰	
$۳x$	−		−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+		+

$$\Rightarrow\begin{cases} x<-۱\Rightarrow f(x)=\frac{-۳\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\cancel{x+۱}}{-(\cancel{x+۱})}=-۳-۱=-۴ \\ -۱<x<۰\Rightarrow f(x)=\frac{-۳\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\cancel{x+۱}}{\cancel{x+۱}}=-۳+۱=-۲ \\ x>۰\Rightarrow f(x)=\frac{۳\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\cancel{x+۱}}{\cancel{x+۱}}=۳+۱=۴\end{cases}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\{-۴,-۲,۴\}$ حاصل می‌شود.

۱۰۸ ۲ روش اول: ابتدا دامنهٔ تابع را به دست آورده و سپس به کمک آن، تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

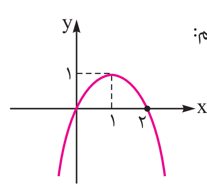
$$\frac{۲-x}{x}\geq ۰\Rightarrow ۰<x\leq ۲\Rightarrow D_f=(۰,۲]$$

چون $۰<x\leq ۲$ است، پس $|x|=x$ می‌باشد بنابراین:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}\overset{x>۰}{=}۲\sqrt{\frac{x^۲(۲-x)}{x}}$$

$$=۲\sqrt{x(۲-x)}\Rightarrow f(x)=۲\sqrt{-x^۲+۲x}$$

حال نمودار سهمی $g(x)=-x^۲+۲x$ را رسم می‌کنیم:



$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۲}{-۲}=۱\Rightarrow g(۱)=-۱+۲=۱$$

از این‌که $۰<x\leq ۲$ است، نتیجه می‌گیریم $۰\leq g(x)\leq ۱$ می‌باشد. بنابراین:

$$۰\leq -x^۲+۲x\leq ۱\Rightarrow ۰\leq\sqrt{-x^۲+۲x}\leq ۱\Rightarrow ۰\leq ۲\sqrt{-x^۲+۲x}\leq ۲$$

$$\Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

روش دوم: چون $f(۲)=۰$ است، بنابراین صفر عضوی از برد می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۲) شامل صفر است.

۱۰۹ ۲ طرفین وسطین کرده و معادله را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم:

$$y=\frac{x+۳}{x^۲-۲x+۱}\Rightarrow yx^۲-۲xy+y=x+۳$$

$$\Rightarrow yx^۲-(۲y+۱)x+y-۳=۰$$

اگر $y\neq ۰$ باشد، معادلهٔ درجه ۲ داریم و زمانی این معادلهٔ درجه ۲ جواب دارد که $\Delta\geq ۰$ باشد. بنابراین:

$$\Delta\geq ۰\Rightarrow (۲y+۱)^۲-۴y(y-۳)\geq ۰\Rightarrow \cancel{۴y^۲}+۴y+۱-\cancel{۴y^۲}+۱۲y\geq ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶y\geq -۱\Rightarrow y\geq -\frac{۱}{۱۶}$$

محدودهٔ به دست آمده را با شرط $y\neq ۰$ تعیین کردیم. حال شرط $y=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$y=۰\Rightarrow \frac{x+۳}{x^۲-۲x+۱}=۰\Rightarrow x=-۳$$

چون به ازای $y=۰$ ریشهٔ حقیقی $x=-۳$ به دست آمد، پس $y=۰$ عضو برد می‌باشد. در نتیجه $R_y=[-\frac{۱}{۱۶},+\infty)$ است.

۱۱۰ ۱ روش اول: مانند تست قبل، طرفین‌وسطین کرده و معادله را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم:

$$y=\frac{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}{x^۲-x+۱}\Rightarrow yx^۲-xy+y=x^۲-x+\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (y-۱)x^۲-(y-۱)x+y-\frac{۱}{۴}=۰$$

اگر $y\neq ۱$، معادلهٔ درجه ۲ داریم و زمانی این معادله جواب دارد که $\Delta\geq ۰$ باشد. بنابراین:

$$\Delta\geq ۰\Rightarrow (y-۱)^۲-۴(y-۱)(y-\frac{۱}{۴})\geq ۰\Rightarrow (y-۱)(y-۱-۴y+۱)\geq ۰$$

$$\Rightarrow (y-۱)(-۳y)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq y\leq ۱$$

حال شرط $y=۱$ را بررسی می‌کنیم:

$$y=۱\Rightarrow ۱=\frac{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}{x^۲-x+۱}\Rightarrow \cancel{x^۲}-\cancel{x}+\frac{۱}{۴}=\cancel{x^۲}-\cancel{x}+۱\Rightarrow \frac{۱}{۴}=۱ \;\text{(تناقض)}$$

چون به تناقض رسیدیم، پس $y=۱$ به برد تابع تعلق ندارد. بنابراین $R_y=[۰,۱)$ می‌باشد که شامل یک عدد صحیح است.

روش دوم:

$$y=\frac{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}{x^۲-x+۱}=\frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲}{(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}\Rightarrow ۰\leq \frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲}{(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}<۱$$

(صورت و مخرج کسر همواره مثبت است و مخرج از صورت بزرگ‌تر می‌باشد.)