فصل اول تابع

درس اول: تبدیل نمودار تابع

اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها نمودار بعضی از توابع دیگر را رسم کنیم.

۱- برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ اگر $k>0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا و برای $k<0$ به سمت پایین حرکت دهیم.

۲- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ اگر $k>0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ و برای $k<0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام شود.

۳- برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $k>1$ ، نمودار $y=kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر $0<k<1$ ، نمودار $y=kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

۴- برای رسم تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ ، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید و اگر $0<k<1$ ، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

درس دوم: تابع درجه سوم ، توابع یکنوا ، و بخش‌پذیری و تقسیم

۱- تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ که در آن $n\in\mathbb{N}$ ، $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی می‌باشند به طوری که $a_n\neq 0$ ، در این صورت تابع $f(x)$ **تابع چندجمله‌ای از درجه n** نامیده می‌شود.

۲- تابع f را در یک بازه **اکیداً صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$ آنگاه $f(a)<f(b)$.

۳- تابع f را در یک بازه **اکیداً نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a<b$ ، آنگاه $f(a)>f(b)$.

۴- تابع f را در یک بازه **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، $f(x)$ یک مقدار ثابت باشد.

۵- به تابعی که در یک بازه، اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

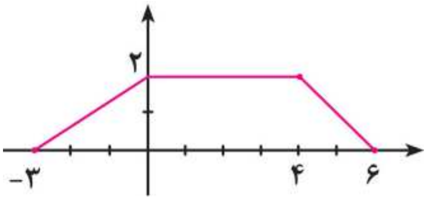
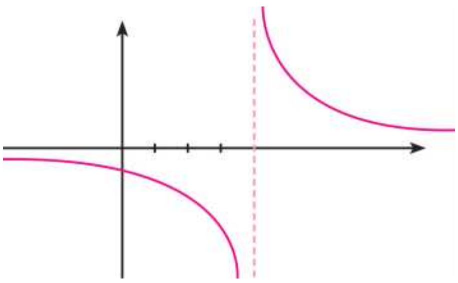
باسمه تعالی

سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم
سؤالات پیشنهادی نیمسال اول (دی ماه)

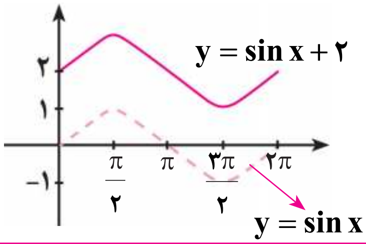
درس : **حسابان (۲)**
رشته : ریاضی و فیزیک

تاریخ امتحان : نوبت اول
مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه

آزمون شماره **۱**

۱- به کمک $y=\sin x$ با دامنه $[۰\ ,\ ۲\pi]$ نمودار $f(x)=\sin x+۲$ را رسم کنید.	۱/۵
۲- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است با انتقال عمودی و افقی نمودار تابع $y=f(x+۲)-۱$ را رسم کنید. 	۱/۵
۳- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۱ \\ ۱ & x<۱ \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟	۱/۵
۴- اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.	۱
۵- اگر باقی‌مانده $x^۴+ax^۳-۲x+۱$ بر $x-۲$ برابر با ۵ باشد، مقدار a را تعیین کنید.	۱
۶- دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید : الف) $f(x)=\sin ۴x$ ب) $g(x)=\cos(\sqrt{۲}x)$	۱
۷- معادله مثلثاتی روبه‌رو را حل کنید: $\sin\frac{۳\pi}{۲}=\sin ۵x$	۱/۵
۸- اگر $\sin\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای α در ربع اول باشد، حاصل $\sin ۲\alpha$ را به دست آورید.	۱/۵
۹- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مفروض است، اگر اندازه دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند. زوایای بین این دو ضلع چند درجه می‌توانند باشند؟	۱/۵
۱۰- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه ۷۵° به دست آورید.	۱/۵
۱۱- با توجه به نمودار تابع روبه‌رو حدهای نامتناهی را مشخص کنید : $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=$ 	۱
۱۲- حدود زیر را به دست آورید : ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۴x-۱}{\cos x}$ الف) $\lim\limits_{x\to -۳^-}\frac{۲x+۳}{۹-x^۲}$	۲
۱۳- مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}$ را به دست آورید.	۲
۱۴- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-۲\ ,\ ۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.	۱/۵
جمع	۲۰

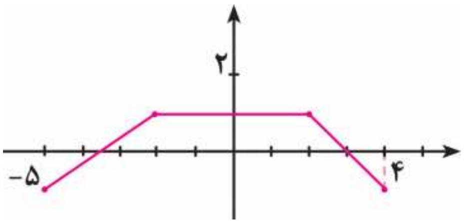
۱-



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰

$y = \sin x$

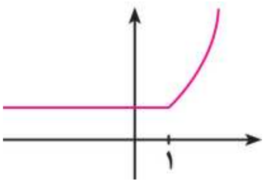
۲- برای رسم $y = f(x+۲) - ۱$ نمودار تابع را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



۳-

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۰}{۲} = ۰ \qquad y = x^۲$$



طبق نمودار در همه فاصله‌ها صعودی می‌باشد.

۴- چون f و g در یک فاصله اکیداً صعودی هستند پس داریم:

$$\begin{aligned} x_۱ < x_۲ &\Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲) \\ x_۱ < x_۲ &\Rightarrow g(x_۱) < g(x_۲) \end{aligned} \Rightarrow f(x_۱)+g(x_۱) < f(x_۲)+g(x_۲) \Rightarrow (f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲)$$

پس تابع $f+g$ نیز در آن فاصله اکیداً صعودی می‌باشد.

۵-

$$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$$

$$f(x) = x^۴ + ax^۳ - ۲x + ۱$$

$$\text{باقی مانده} = f(۲) = ۵ \Rightarrow (۲)^۴ + a(۲)^۳ - ۲(۲) + ۱ = ۵$$

$$۱۶ + ۸a - ۴ + ۱ = ۵$$

$$۸a = ۵ - ۱۳$$

$$۸a = -۸ \rightarrow a = -۱$$

۶-

ب) $g(x) = \cos(\sqrt{۲}x)$

$$T = \frac{۲\pi}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\pi\sqrt{۲}}{۲} = \pi\sqrt{۲}$$

الف) $f(x) = \sin ۴x$

$$T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

۷-

$$\sin ۵x = \sin\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۵x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi - \frac{۳\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{۳\pi}{۱۰} \\ x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵} - \frac{۳\pi}{۱۰} \end{cases}$$

ادامه دارد ...