

به نام پروردگار مهربان

رشته: **کنکور جدید**

به همراه سوالات کنکور ۹۷

ریاضی



مهروماه

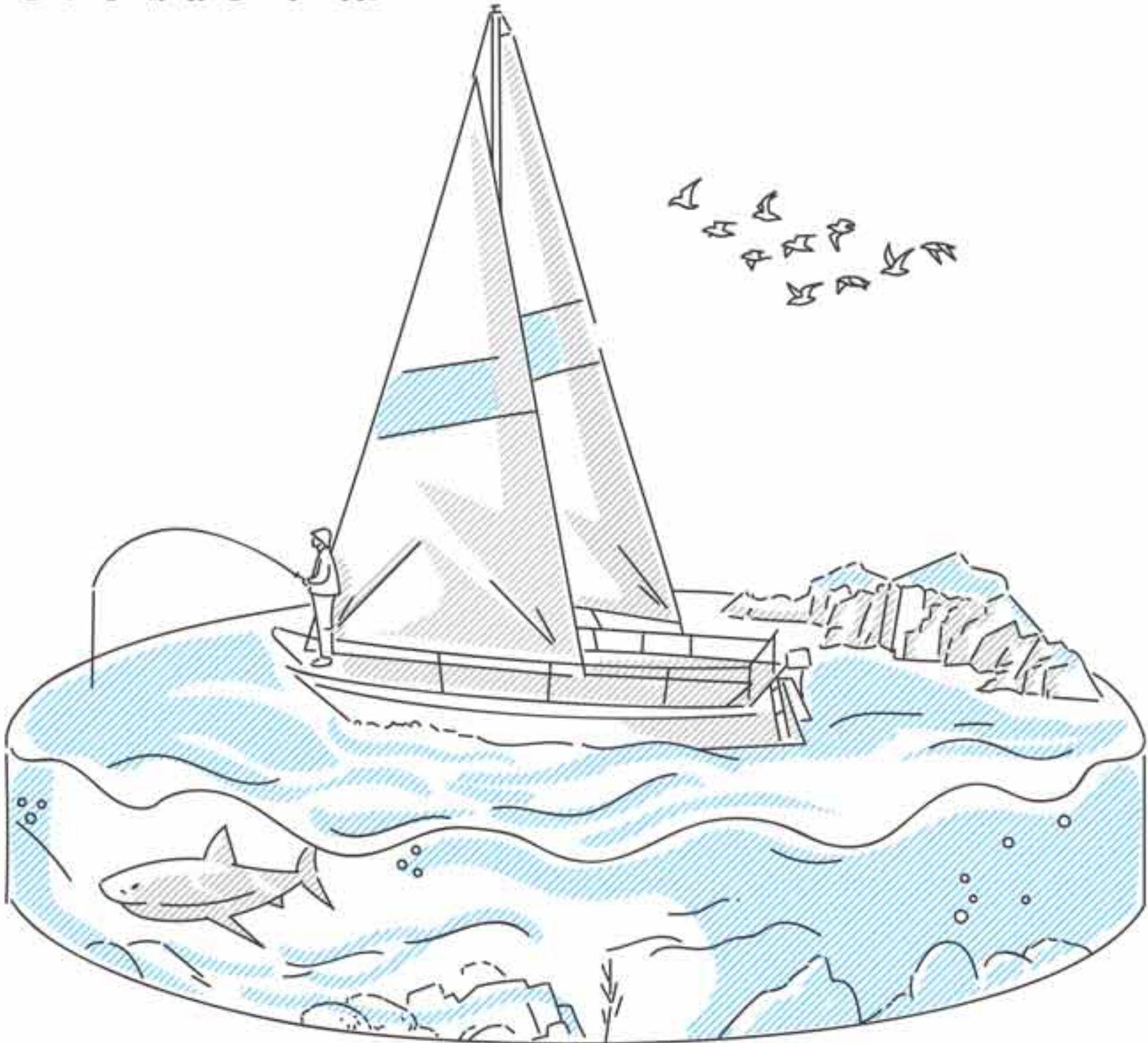
# حسابان ۲

حسابان ۲ پایه دوازدهم

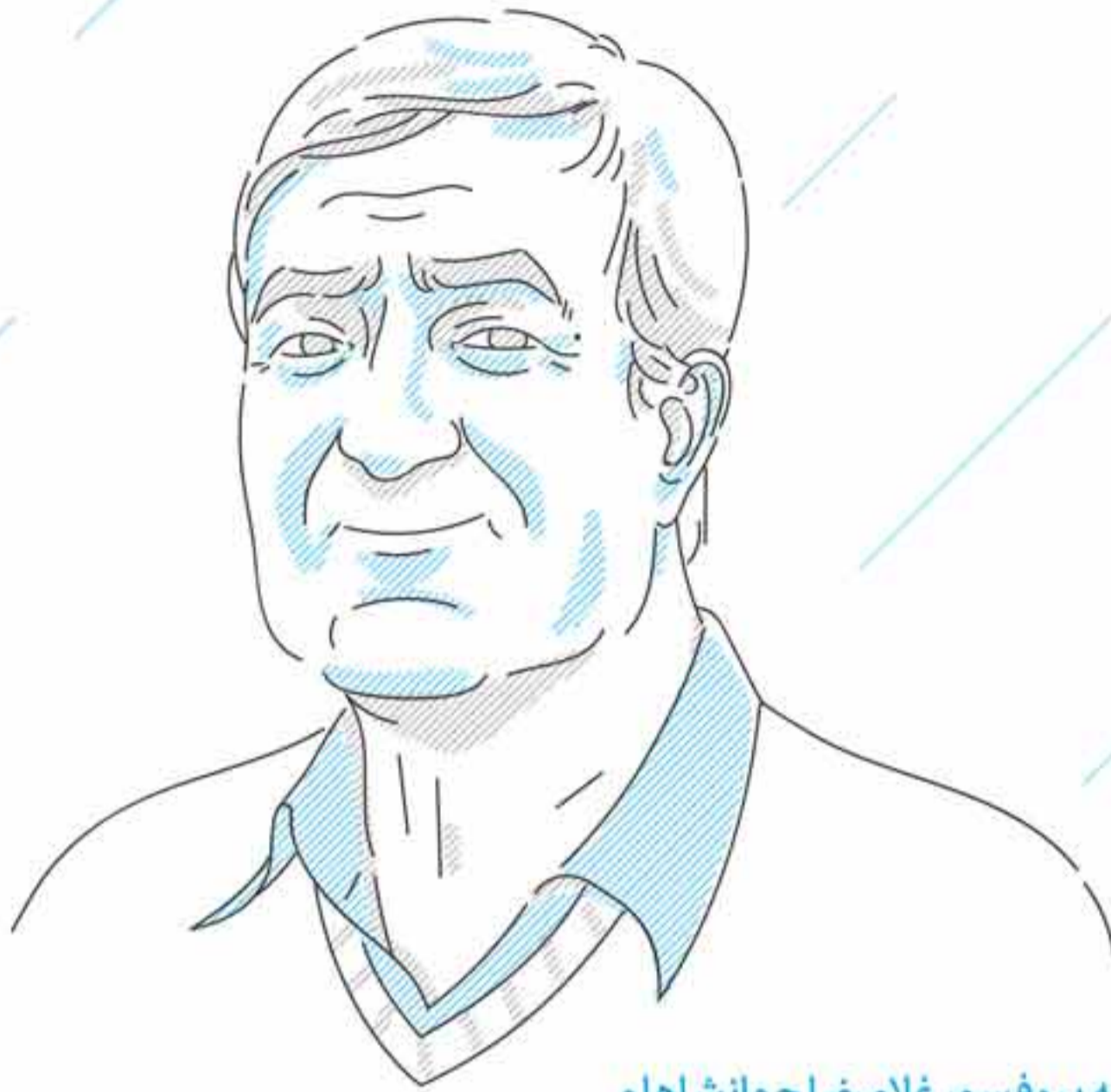
• عباس اشرفی • وهاب تقی زاده

• علیرضا نداق زاده • شروین سیاح نیا

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی







### تقدیم به پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو در روز ۲۷ اسفند سال ۱۳۲۲ در روستای سمنقور از توابع کمیجان در استان اراک چشم به دنیا گشود. وی مدرک ششم ابتدایی خود را در سال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرستانی تا فاصله صد کیلومتری سمنقور وجود نداشت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشاورزی پرداخت. در سال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ التحصیل ممتاز از دبیرستانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سپس برای تحصیل در مقطع کارشناسی رشته ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسی در مؤسسه ریاضیات که توسط «پروفیسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شد. مؤسسه ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران است که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسیس شده بود استاد جهانشاهلو دوره ۲۷ ماهه بسیار سنگین مؤسسه ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسانده و به عنوان فارغ التحصیل ممتاز در دانشسرای عالی (دانشگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شغل مقدس معلمی در دانشگاه مشغول شد. ایشان در سال ۱۳۵۱ برای ادامه تحصیل عازم انگلستان شد، ابتدا مدرک کارشناسی ارشد دیگری در رشته تحقیق در عملیات از دانشگاه ساوت همپتون دریافت نمود، سپس برای دوره دکتری در زمینه الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشگاه برونل رفت و در اردیبهشت سال ۱۳۵۵ از رساله خود دفاع کرد و به ایران بازگشت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبه استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ حاصل زندگی وی چاپ بیست و دو جلد کتاب و چاپ بیش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشجوی کارشناسی ارشد و بیش از هزار دبیر ریاضی است. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششی داده‌های ایران» همچون پدری دلسوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشنگر راه کسانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.



# مقدمه

بالاخره کنکوری شدی!

این کتاب مهم‌ترین کتاب رشته ریاضی مهروماه، بانک تست حسابان ۲ مربوط به سال دوازدهم به همین دلیل خیلی !!! برایش وقت گذاشتیم.

تا کتاب درسی اومد من و سه استاد همکارم، شبانه‌روزی وقت گذاشتیم تا این کتاب داغ، داغ و تنوری به دستت برسه! باور کنید برنامه‌های زندگی هر چهار نفرمون به هم ریخت آقای تقی‌زاده برنامه سفر کاریش رو با کلی زحمت جابه‌جا کرد، آقای نداف‌زاده کل برنامه‌های تابستونش رو کنسل کرد، آقای سیاح‌نیا کار ضبط برنامه‌های آموزشی خودش رو کنار گذاشت و من در مهر و ماه تحت شرایط امنیتی قرنطینه شدم! تا تألیف این کتاب خوب و زود پیش بره. سعی کردیم درسنامه‌ها مون کاملاً جدید و پرمحتوا باشه و مطالبی رو که توی کتاب بانک تست ریاضیات پایه (دهم و یازدهم) آوردیم تکرار نکنیم و الکی کتاب رو حجیم نکنیم.

روی مباحث‌هایی مثل چند جمله‌ای‌های درجه سه، نمودار تانژانت، دوره تناوب مثلثاتی، تعریف یکنوایی، تحلیل مشتق از روی نمودار تابع و ... که به روش جدیدی مطرح شدن یا توی کتاب درسی برجسته شدن خیلی بیشتر وقت گذاشتیم و کلی تست درآوردیم. چون تو کنکور تستی ازشون نیومده بود.

تو سه فصل آخر هم کمی سعی کردیم نوع درسنامه‌ها مون به متون دانشگاهی نزدیک‌تر باشه، آخه به سلامتی سال دیگه این موقع دانشجویی!


خلاصه روی بند، بند جمله‌ها و تست‌های کتاب وقت گذاشتیم. شاید باورتون نشه ولی برای درک مفاهیم کتاب کلی جلسه با مؤلف‌های محترم کتاب درسی داشتیم خلاصه قدر این کتاب رو بدونید.


حالا بذار بگم ما در درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.


هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم:


## قسمت اول: درسنامه


■ توی این قسمت یه درسنامه مفصل آوردیم که تمام مباحث رو مو به مو بهت یاد میده که پراز مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست داشتتیه؛ خلاصه این قسمت گل کتابه.

توی حل تست‌های آموزشی یه روش تکنیکی برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی! 

یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات مهر مهم زدیم تا بیشتر وقت بذاری. 

هر جا دیدیم بیشتر بچه‌ها راه حل رو اشتباه میرن برات هشدار گذاشتیم. 

اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره یک‌گام فراتر گذاشتیم. 

از همه مهم‌تر!!! یه راه‌حلی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم فرمول ممنوع، این دیگه آخرشه، بدون این‌که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی. 

نکته، دقت کنید و  تذکر هم که جای خودشون رو دارن. 



## قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

■ به سری تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدام از این مؤلف‌ها، به وزن‌های هستن تو ریاضی!

استاد نداف‌زاده مدرس دبیرستان‌های علامه حلی تهران و استاد تقی‌زاده مدرس دبیرستان ماندگار البرز تهران؛ استاد سیاح‌نیا که علی‌رغم جوان بودن تجربه‌های بسیار درخشانی در تولید محتوای آموزشی مثل آفبا، دیسون و ... دارن. وقت گرفتن ازشون خیلی سخت بود ولی خوشبختانه جور شد.

راستی به سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستن رو برات تو این قسمت آوردیم. تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!

به سری هم تست‌هایی اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بززن و برای همه لازم نیست. و در آخر ۱ و ۲ آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجی

## قسمت سوم: پاسخنامه تشریحی

■ خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به‌کار نرفتن.

به همه همکارها توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن چون همه اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه. تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

توی تهیه این کتاب خیلی‌ها تاثیرگذار بودن، از جمله:

- ◀ آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.
- ◀ استاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.
- ◀ سرکار خانم حجازیان و آقایان رامین احمدیان، محمد اسدالهی، غلیرضا بحری، سیدمحسن جلال‌زاده، علی‌حق‌شناس، امین خانی، امیر سمیعیان، مسعود عظیمی، بهنام قدردوست، حسن محمدی، احمد میربلند و احمد میری از مشاوران به‌نام و کاربلد عرصه کنکور که خیلی قوی در شیوه ارائه مطلب راهنمایمون کردن.
- ◀ از خانم سنور حریری مسئول ویراستاری، خانم‌ها دنیا سلیمی و ندا دهقانی و آقایان حامد شفیعی و احسان لعل که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.
- ◀ از گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات خانم الهام اسلامی و آقایان حسین شیرمحمدی، حسام طلایی و محسن فرهادی که با طراحی‌های زیباشون روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.
- ◀ از آقای امیر انوشه مدیر سایت، خانم فرزانه قنبری مدیر روابط عمومی، خانم الهام پیلوایه مدیر فنی و خانم مریم تاجداری صفحه‌آرای کتاب خیلی ممنونم.
- ◀ از رسام محترم مرتضی ضیایی و حروفچین‌های محترم آقای امیر ماهر و خانم ربابه موسوی کمال تشکر رو دارم.

# فهرست

۷

فصل ۱: تابع



۸۳

فصل ۲: مثلثات



۱۳۹

فصل ۳: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت



۲۴۱

فصل ۴: مشتق



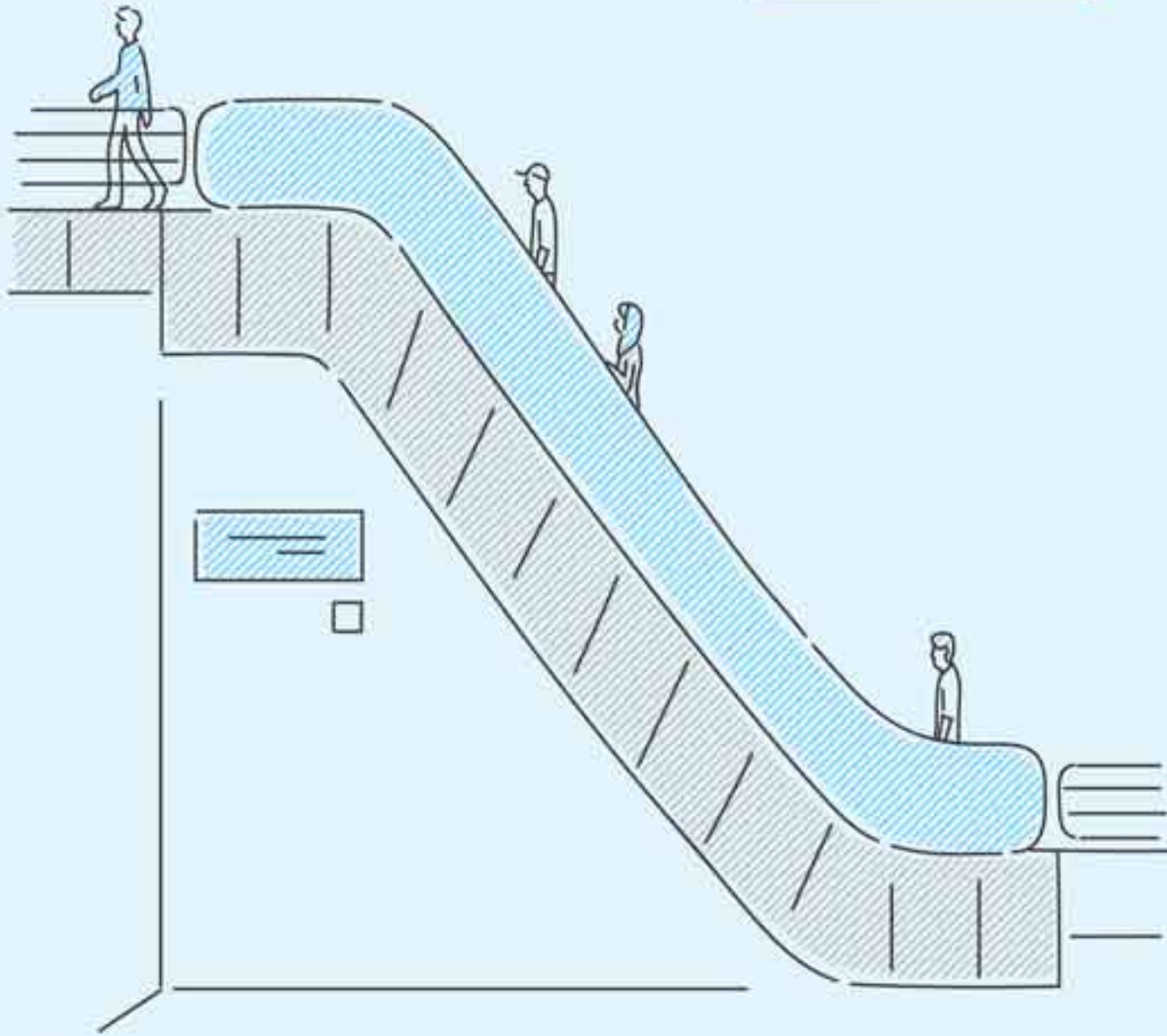
۳۳۳

فصل ۵: کاربردهای مشتق





## فصل ۱



## تابع

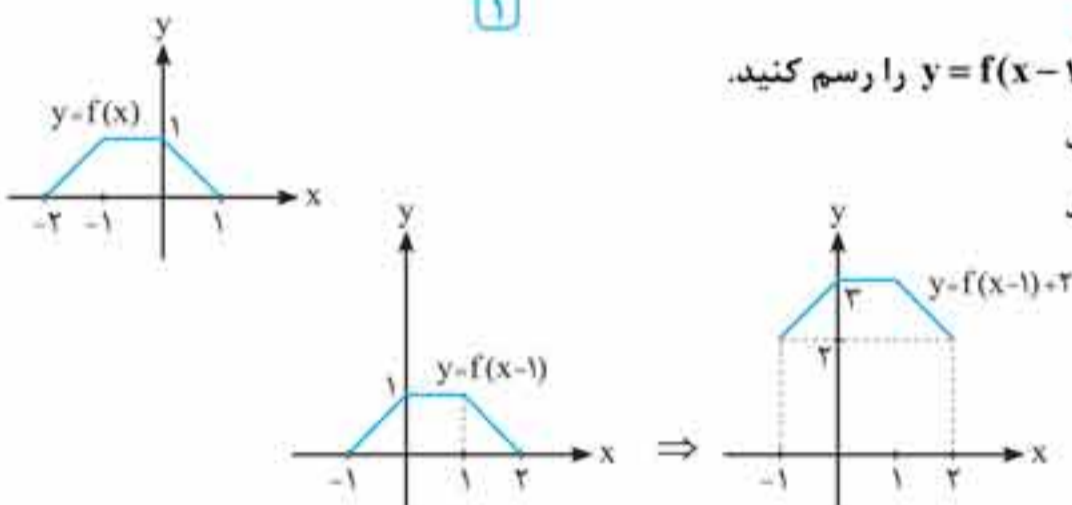
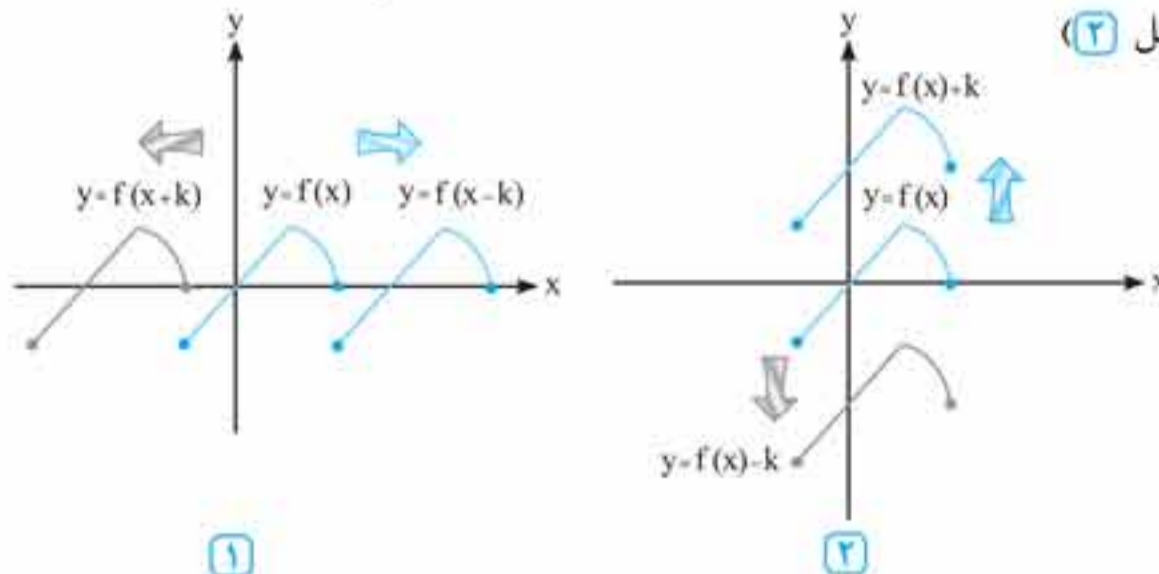
در این فصل ادامه تابع مانند انقباض‌های افقی و عمودی، چند جمله‌ای‌ها، رسم نمودار تابع درجه سه و بخش پذیری گنجانده شده است. معمولاً در بودجه بندی کنکورهای قدیم فقط از قسمت بخش پذیری و باقی مانده تست طرح شده است. آموزش رسم تابع درجه سه به شیوه جدیدی در کتاب درسی جدیدالتألیف آورده شده است و مؤلفان ما سعی نموده‌اند با تست‌سازی مناسب آن را پوشش دهند.

## تبدیل نمودار تابع

### انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های گذشته آموختید که برای رسم نمودارهای  $y = f(x+k)$  و  $y = f(x-k)$  با شرط  $k > 0$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  باید نمودار را به ترتیب  $k$  واحد به سمت چپ و  $k$  واحد به سمت راست انتقال دهیم. (شکل ۱)

همچنین برای رسم نمودارهای  $y = f(x) + k$  و  $y = f(x) - k$  با شرط  $k > 0$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$  باید نمودار را به ترتیب  $k$  واحد به بالا و  $k$  واحد به پایین انتقال دهیم. (شکل ۲)



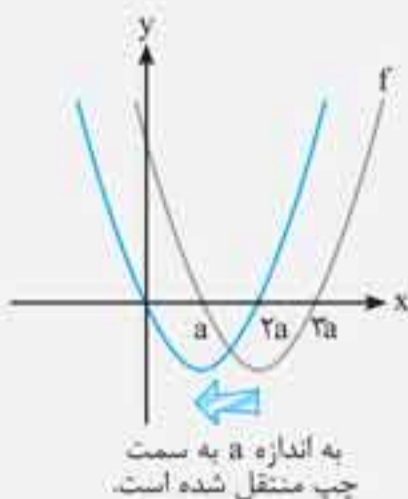
**مثال:** اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار  $y = f(x-1) + 2$  را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار تابع  $y = f(x-1)$ ، نمودار تابع  $f(x)$  را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم، سپس نمودار به دست آمده را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

**تست:** نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = x^2 - 4ax + 3a^2$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. حداکثر مقدار  $k$  کدام باشد تا نمودار از ربع سوم عبور نکند؟ ( $a, k > 0$ )

گزینه‌ها: (۱)  $\frac{a}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}a$  (۳)  $a$  (۴)  $\frac{5}{4}a$

پاسخ: **گزینه ۳** روش اول  $f(x) = x^2 - 4ax + 3a^2 = x^2 - (a + 3a)x + a \times 3a = (x-a)(x-3a)$  روش اول نمودار سهمی را رسم می‌کنیم که دهانه آن روبه‌بالاست و صفراهای (ریشه‌های) آن  $x = 3a$  و  $x = a$  است. برای آن که نمودار از ربع سوم عبور نکند، منحنی تا حدی می‌تواند به چپ منتقل شود که نقطه  $x = a$  روی تابع  $f(x)$  به مبدأ منتقل شود، یعنی:



روش دوم ضابطه تابعی که  $k$  واحد به سمت چپ انتقال یافته به صورت زیر است:

$$f(x+k) = (x+k)^2 - 4a(x+k) + 3a^2 \Rightarrow f(x+k) = x^2 + 2kx + k^2 - 4ax - 4ak + 3a^2$$

$$\Rightarrow f(x+k) = x^2 + (2k-4a)x + k^2 - 4ak + 3a^2$$

برای آن که نمودار یک سهمی از ربع سوم عبور نکند باید یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:

۱)  $\Delta < 0$  و  $> 0$  ضریب  $x^2$  ۲)  $\Delta \geq 0$  و عرض از مبدأ و طول رأس سهمی نامنفی باشند.

پس دلتای مربوط به معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = (2k-4a)^2 - 4(1)(k^2 - 4ak + 3a^2) = 4k^2 + 16a^2 - 16ak - 4k^2 + 16ak - 12a^2 = 4a^2 > 0$$



پس با توجه به حالت ۲ باید عرض از مبدأ و طول رأس سهمی نامنفی باشد.

$$k^2 - 4ak + 4a^2 \geq 0 \Rightarrow (k - 2a)(k - a) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} k \leq a \\ k \geq 2a \end{cases}$$

طول رأس سهمی:  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2k - 4a)}{2} = -k + 2a > 0 \Rightarrow k < 2a$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر  $k \leq a$  است، یعنی حداکثر  $k$  برابر  $a$  است.

### انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار  $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $k$  ضرب کنیم.

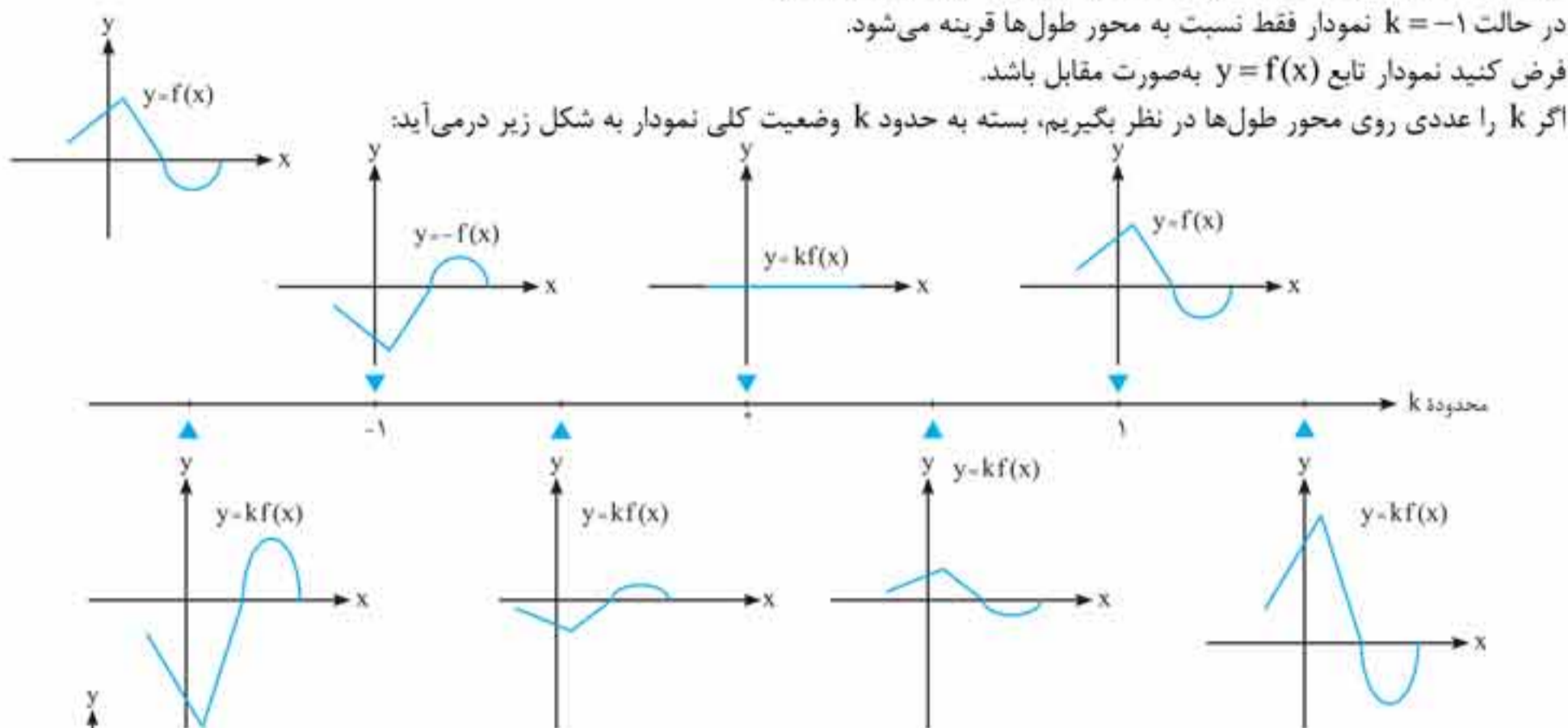
• اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود.

• اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  به دست می‌آید.

• اگر  $k$  عددی منفی باشد، ابتدا نمودار تابع را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس با محاسبه مقدار  $|k|$ ، اگر  $|k| > 1$  باشد، نمودار دچار انبساط عمودی و اگر  $0 < |k| < 1$  باشد، نمودار دچار انقباض عمودی می‌شود.

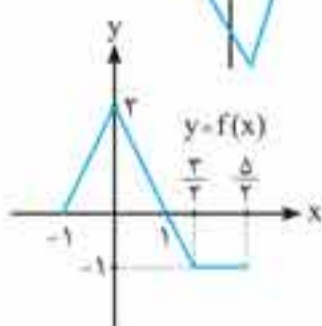
در حالت  $k = -1$  نمودار فقط نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود.

فرض کنید نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد.

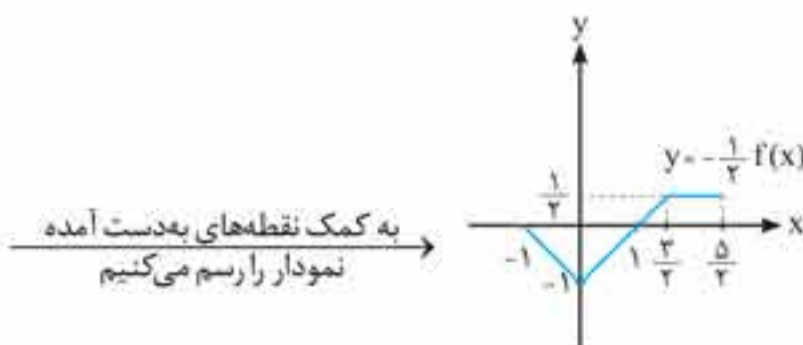


**مثال:** با توجه به نمودار تابع  $y = f(x)$ ، نمودار تابع  $y = -\frac{1}{3}f(x)$  را رسم کنید.

پاسخ: نقطه‌های مهم تابع را می‌نویسیم و عرض‌های نقاط آن را در  $-\frac{1}{3}$  ضرب می‌کنیم:



| x             | f(x) | x             | $-\frac{1}{3}f(x)$ |
|---------------|------|---------------|--------------------|
| -1            | 0    | -1            | 0                  |
| 0             | 2    | 0             | -1                 |
| 1             | 0    | 1             | 0                  |
| $\frac{2}{3}$ | -1   | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$      |
| $\frac{5}{3}$ | -1   | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$      |



دامنه تابع  $y = kf(x)$  همان دامنه تابع  $f(x)$  است ولی برد تابع  $y = kf(x)$ ،  $k$  برابر برد تابع  $f(x)$  است. ( $k \neq 0, 1$ )



**تست:** اگر برد تابع  $y = f(x)$  بازه  $(-2, 3]$  باشد، برد تابع  $y = -2f(x) + 1$  شامل چند عدد صحیح است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ برد تابع  $f(x)$  بازه  $(-2, 3]$  است:  $-2 < f(x) \leq 3 \xrightarrow{x(-2)} 4 > -2f(x) \geq -6 \xrightarrow{+1} 5 > -2f(x) + 1 \geq -5$

پس برد تابع  $y = -2f(x) + 1$  بازه  $(-5, 5]$  است و در این بازه ۱۰ عدد صحیح وجود دارد.

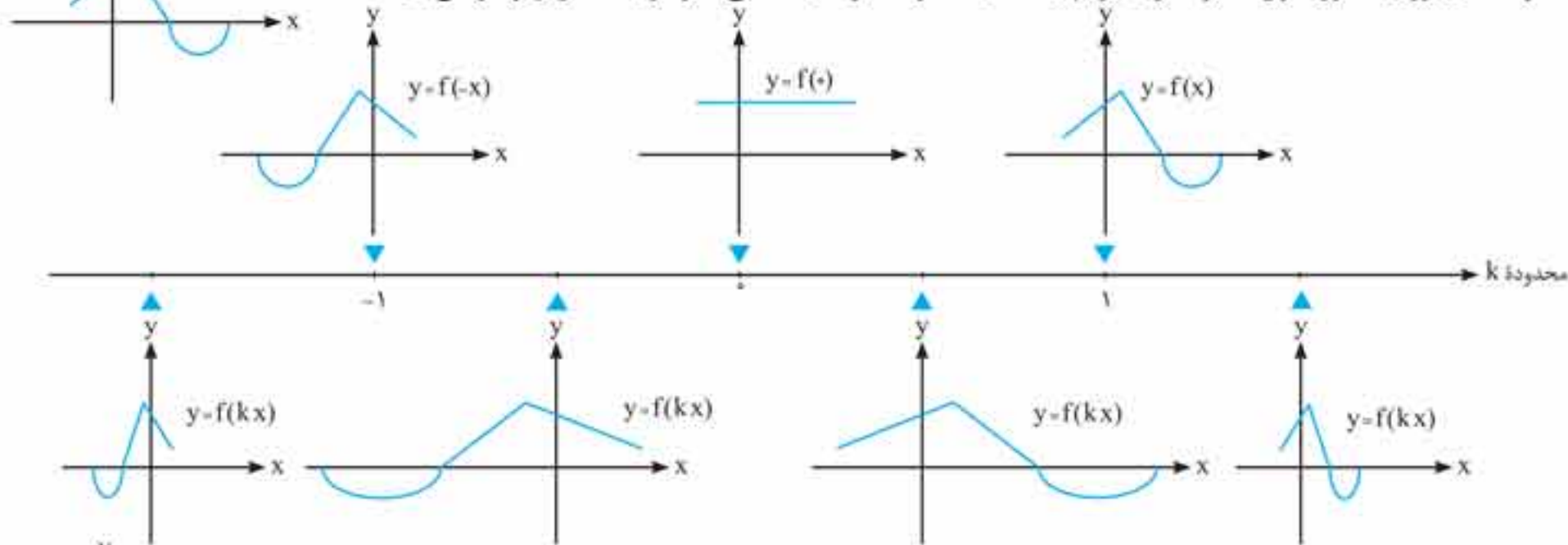


**انبساط و انقباض افقی**

برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم.  
 اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از انقباض افقی نمودار  $y = f(x)$  در راستای محور  $x$  ها به دست می آید.  
 اگر  $0 < k < 1$  باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

اگر  $k$  عددی منفی باشد، ابتدا نمودار تابع را نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم، سپس با محاسبه مقدار  $|k|$ ، اگر  $|k| > 1$  باشد، نمودار در راستای محور  $x$  ها منقبض و اگر  $0 < |k| < 1$  باشد، نمودار در راستای محور  $x$  ها منبسط می شود.

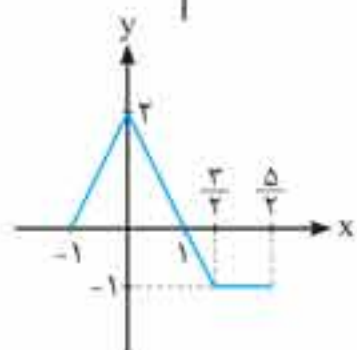
فرض کنید نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد.  
 اگر  $k$  را عددی روی محور طول ها در نظر بگیریم، بسته به حدود  $k$  وضعیت کلی نمودار به شکل زیر در می آید.



**مثال:** با توجه به نمودار تابع  $y = f(x)$ ، نمودار تابع  $y = f(-\frac{x}{2})$  را رسم کنید.

پاسخ: نقطه های مهم تابع را می نویسیم و طول های آن ها را در  $\frac{1}{-\frac{1}{2}}$  ضرب می کنیم:

(در واقع در  $-2$  ضرب می کنیم.)

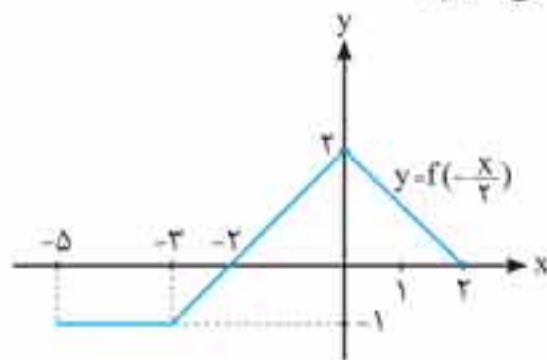


| x  | f(x) |
|----|------|
| -1 | 0    |
| 0  | 2    |
| 1  | 0    |
| 2  | -1   |
| 3  | -1   |

⇒

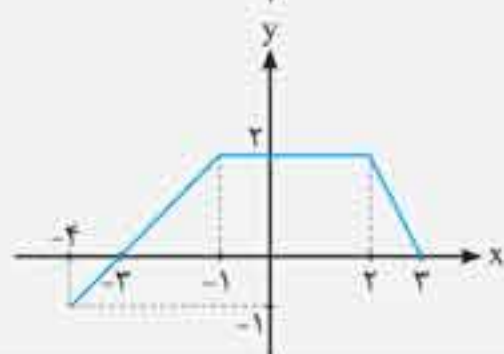
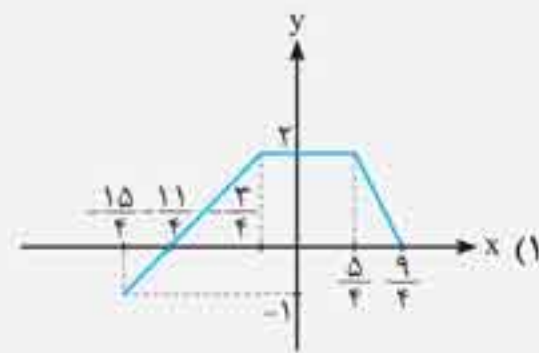
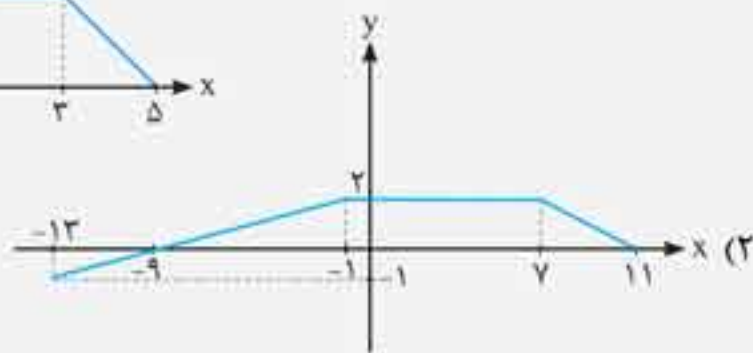
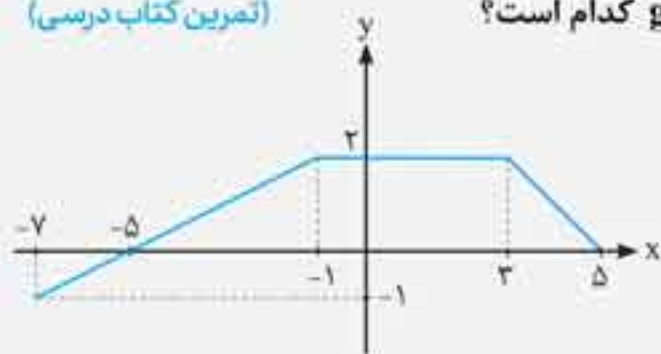
| x  | $f(-\frac{x}{2})$ |
|----|-------------------|
| 2  | 0                 |
| 0  | 2                 |
| -2 | 0                 |
| -3 | -1                |
| -5 | -1                |

به کمک نقطه های به دست آمده نمودار را رسم می کنیم.

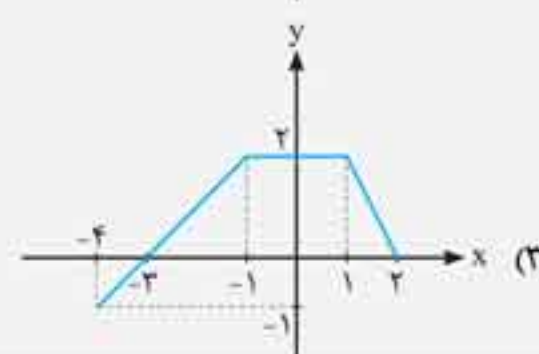


(تمرین کتاب درسی)

**تست:** اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت شکل زیر باشد، نمودار تابع  $g(x) = f(2x+1)$  کدام است؟



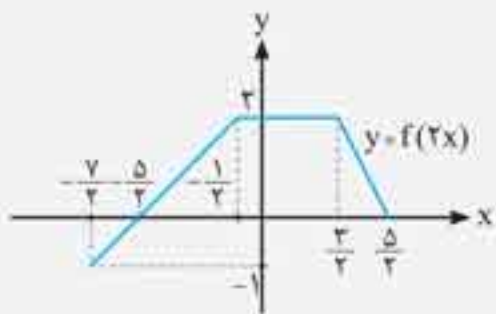
(4)



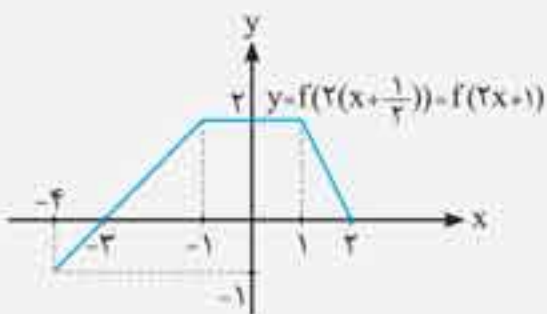
$$g(x) = f(2x+1) = f\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

پاسخ: گزینه ۳ روش اول در این روش از ضریب  $x$  فاکتور می‌گیریم:

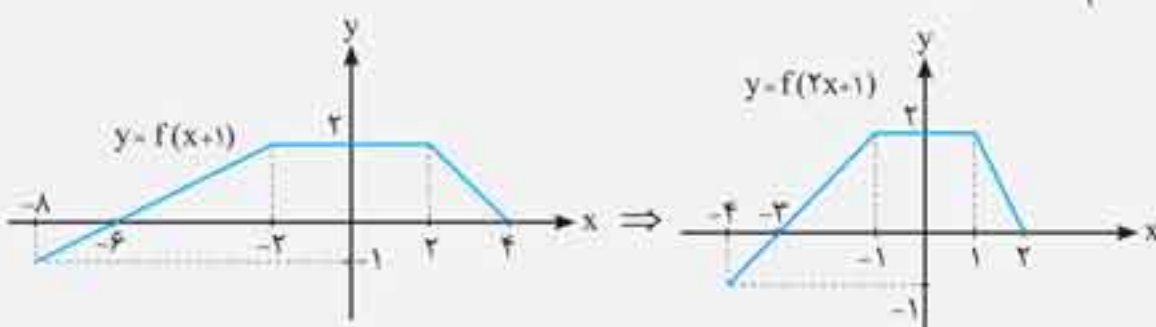
برای رسم نمودار  $g(x)$  از روی نمودار تابع  $f(x)$  ابتدا طول نقاط نمودار تابع  $f(x)$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب (یا بر ۲ تقسیم) می‌کنیم تا نمودار  $f(2x)$  ایجاد شود.



حال نمودار به دست آمده را به اندازه  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.



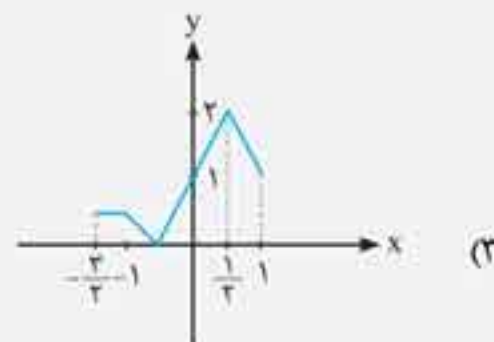
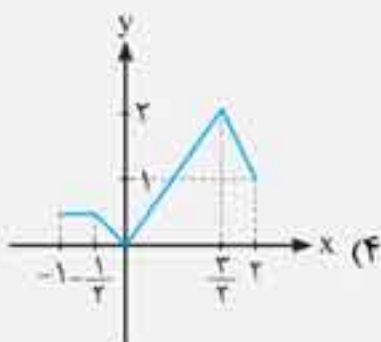
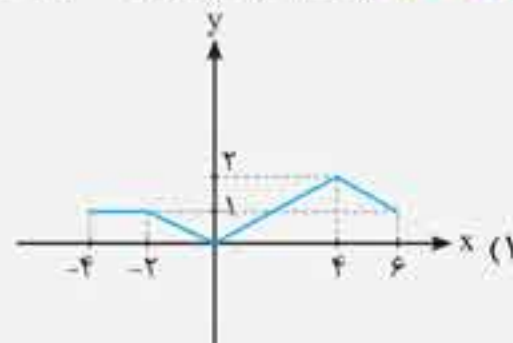
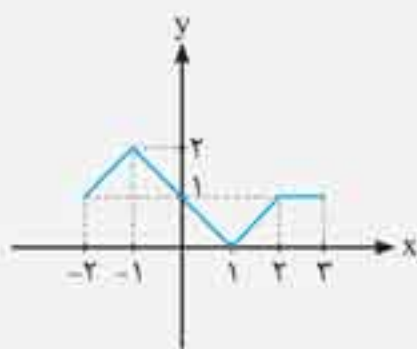
روش دوم برای رسم نمودار تابع  $g(x) = f(2x+1)$  ابتدا نمودار  $f(x)$  را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم، سپس طول نقاط نمودار را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم.



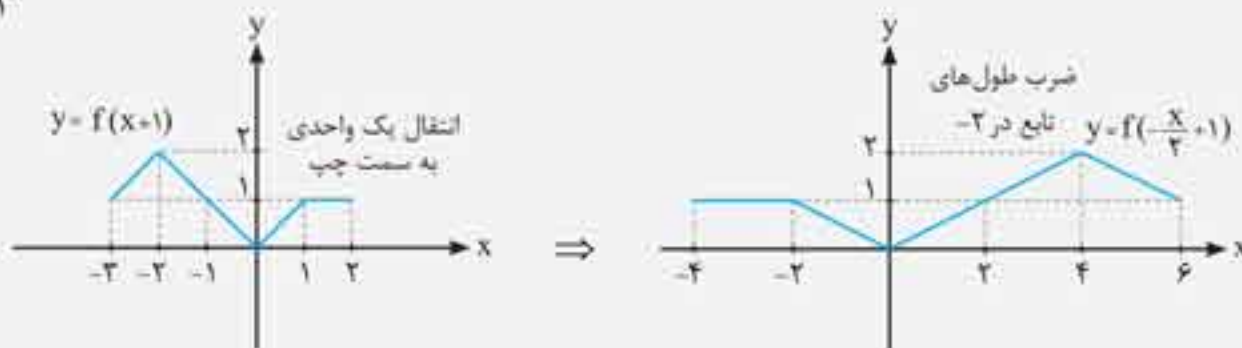
برای رسم نمودار تابع  $y = f(ax+b)$  با شرط  $b > 0$  از روی نمودار تابع  $y = f(x)$ ، نمودار را به اندازه  $b$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، سپس طول‌های آن را در  $\frac{1}{a}$  ضرب می‌کنیم. اگر  $b < 0$  باشد ابتدا نمودار را به اندازه  $|b|$  به راست انتقال می‌دهیم، سپس طول‌های آن را در  $\frac{1}{a}$  ضرب می‌کنیم. ( $a \neq 0$ )



تست: اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار  $f\left(-\frac{x}{2}+1\right)$  کدام است؟



پاسخ: گزینه ۱ نمودار تابع  $f(x)$  را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، سپس همه طول‌های آن را در  $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم.





**تست:** در مورد رسم نمودار تابع  $g(x) = f\left(\frac{2x-4}{5}\right)$  از روی نمودار  $y = f(x)$  کدام گزینه نادرست است؟

(۱) نمودار تابع  $f(x)$  را به اندازه  $\frac{4}{5}$  واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و طول‌های آن را در  $\frac{5}{4}$  ضرب می‌کنیم.

(۲) ابتدا نمودار تابع  $f\left(\frac{2}{5}x\right)$  را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

(۳) اگر  $A(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $f$  باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $g$  برابر  $A'\left(\frac{5x_0+4}{4}, y_0\right)$  است.

(۴) نمودار تابع  $f(x)$  را به اندازه ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس همه طول‌های نمودار را در  $\frac{5}{4}$  ضرب می‌کنیم.

**پاسخ:** **گزینه ۴** برای رسم نمودار تابع  $g(x) = f\left(\frac{2x-4}{5}\right)$  آن را به صورت  $g(x) = f\left(\frac{2x}{5} - \frac{4}{5}\right)$  می‌نویسیم. برای رسم  $g(x)$ ، نمودار تابع  $f$

را به اندازه  $\frac{4}{5}$  به راست انتقال می‌دهیم و طول‌های آن را در  $\frac{5}{4}$  ضرب می‌کنیم.

همین‌طور می‌توان تابع  $g(x) = f\left(\frac{2}{5}(x-2)\right)$  نوشت، سپس نمودار  $y = f\left(\frac{2}{5}x\right)$  را رسم نمود و آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال داد.

برای یافتن نقطه نظیر  $A$  به مختصات  $(x_0, y_0)$  بر روی تابع  $g$  نیز داریم:

$$\frac{2x-4}{5} = x_0 \Rightarrow 2x-4 = 5x_0 \Rightarrow 2x = 5x_0 + 4 \Rightarrow x = \frac{5x_0 + 4}{2}$$

در نتیجه نقطه نظیر  $A(x_0, y_0)$  در تابع  $g$  به صورت  $A'\left(\frac{5x_0+4}{2}, y_0\right)$  است.

برای رسم تابع  $g(x) = f\left(\frac{2}{5}(x-2)\right)$  از روی نمودار  $y = f(x)$  نمی‌توان ابتدا نمودار تابع  $y = f(x-2)$  را رسم نمود، سپس طول‌های

آن را در  $\frac{5}{4}$  ضرب کرد.



### یافتن دامنه $f(u)$ تابع بر حسب دامنه تابع $f(x)$

برای یافتن دامنه تابع  $y = f(u)$  (که در آن  $u$  تابعی از  $x$  است) از روی دامنه تابع  $y = f(x)$ ، باید  $x$  را به گونه‌ای بیابیم که  $u$  در بازه دامنه  $y = f(x)$  قرار گیرد. برای نمونه اگر دامنه تابع  $y = f(x)$  بازه  $[-2, 3]$  باشد، برای یافتن دامنه تابع  $y = f(-x+2)$  داریم:

$$-2 < -x+2 \leq 3 \xrightarrow{-2} -4 < -x \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 4 > x \geq -1$$

**تست:** اگر دامنه تابع  $y = f(x)$  بازه  $[-1, 3]$  باشد، دامنه تابع  $y = 2f(|x|)$  کدام است؟

(۴)  $-1 < x < 3$

(۳)  $-1 \leq x < 4$

(۲)  $-2 \leq x < 3$

(۱)  $-1 \leq x < 3$

**پاسخ:** **گزینه ۱** برای یافتن دامنه تابع  $y = 2f(|x|)$  باید  $x$  هایی را بیابیم که به ازای آن‌ها جزء صحیح  $x$  در بازه  $[-1, 3]$  قرار بگیرد:

$$-1 \leq |x| < 3 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \\ [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \\ [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \end{cases} \xrightarrow{\cup} -1 \leq x < 3$$

دامنه تابع  $y = 2f(|x|)$  تصادفاً با دامنه  $y = f(x)$  برابر و بازه  $[-1, 3]$  است.

**تست:** اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب  $[1, 3]$  و  $[-1, 2]$  باشند، اشتراک دامنه و برد تابع  $g(x) = 3f(1-2x) - 1$  کدام است؟

(۴)  $(-5, 4)$

(۳)  $(0, 1)$

(۲)  $[-1, 0]$

(۱)  $(-4, 5)$

**پاسخ:** **گزینه ۲** برای یافتن دامنه  $g(x)$  باید  $1-2x$  را در بازه  $[1, 3]$  قرار دهیم و  $x$  را تنها کنیم:

$$1 \leq 1-2x \leq 3 \xrightarrow{-1} 0 \leq -2x \leq 2 \xrightarrow{+(-2)} 0 \geq x \geq -1$$

دامنه تابع  $g(x)$  بازه  $[-1, 0]$  است.

برای یافتن برد تابع  $g(x)$  باید برد تابع  $f(x)$  را ۳ برابر و یک واحد از آن کم کنیم.

**۱** برد تابع‌های  $f(x)$  و  $f(ax+b)$  برابر هستند. **۲** دامنه تابع‌های  $f(x)$  و  $f(x)+d$  برابر هستند.

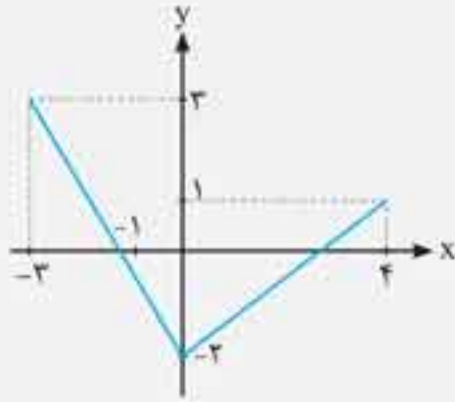


$$-1 < f(x) \leq 2 \Rightarrow -1 < f(1-2x) \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -3 < 3f(1-2x) \leq 6 \xrightarrow{-1} -4 < 3f(1-2x) - 1 \leq 5$$

برد تابع  $g(x)$  بازه  $(-4, 5]$  است.

اشتراک دامنه و برد تابع  $g(x)$  بازه  $[-1, 0]$  است.





**تست:** اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، برد تابع  $g(x) = f(x^2)$  کدام است؟

- (۱)  $[-2, 3]$
- (۲)  $[-2, 1]$
- (۳)  $[0, 9]$
- (۴)  $[0, 4]$

**پاسخ:** گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع  $g(x)$  را می‌یابیم. دامنه  $f(x)$  بازه  $[-3, 4]$  است.

$$\underbrace{-3 \leq x^2 \leq 4}_{\text{بدیهی}} \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

به‌ازای  $x$  های عضو دامنه  $g(x)$ ، مقادیر داخل پراتز  $f(x^2)$  همواره مثبت است. با توجه به نمودار تابع، برد تابع  $f$  به‌ازای مقادیر مثبت، بازه  $[-2, 1]$  است، یعنی:

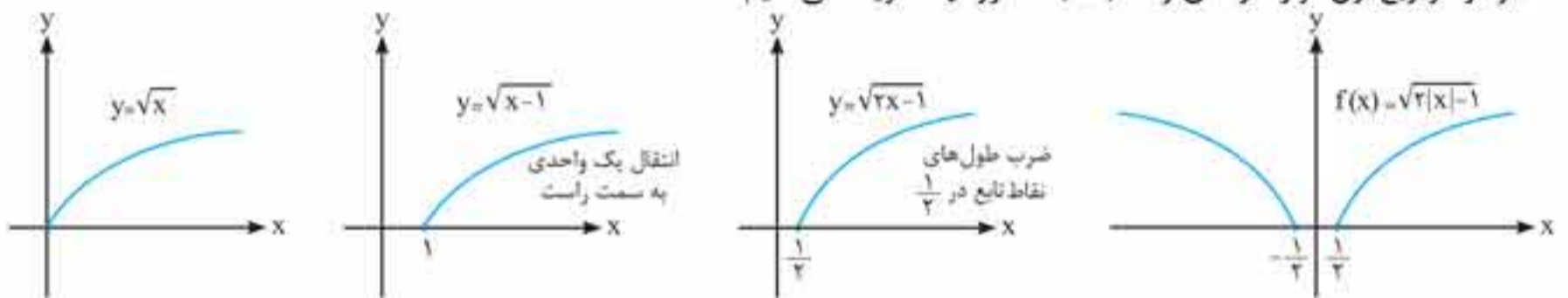
بنابراین برد تابع  $g(x)$  برابر بازه  $[-2, 1]$  است.

### رسم تابع $y = f(a|x|+b)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

برای رسم نمودار تابع  $y = f(a|x|+b)$ ، ابتدا نمودار تابع  $y = f(ax+b)$  را به روش‌های گفته‌شده رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از نمودار را که در ربع‌های دوم و سوم (  $x$  های منفی) قرار دارند حذف می‌کنیم و قسمت‌های باقی‌مانده در ربع‌های اول و چهارم (  $x$  های مثبت) را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل متعلق به تابع  $y = f(a|x|+b)$  است.

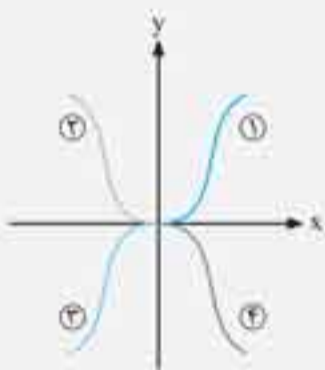
**مثال:** نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{2|x|-1}$  را از روی نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  رسم کنید.

**پاسخ:** نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و سپس طول‌های آن را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم و پس از آن با توجه به این که نمودار در ربع اول قرار دارد آن را نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم.



**تست:** اگر در شکل مقابل نمودار شماره ۱ مربوط به تابع  $y = f(x)$  باشد، نمودارهای شماره

۳ و ۴ به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



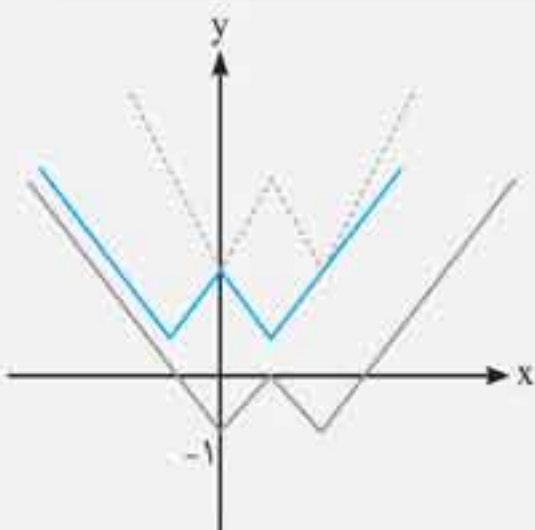
- (۱)  $-f(x), f(-x), -f(-x)$
- (۲)  $f(-x), -f(-x), -f(x)$
- (۳)  $-f(x), -f(-x), f(-x)$
- (۴)  $-f(-x), -f(x), f(-x)$

**پاسخ:** گزینه ۳ نمودار شماره ۲ قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور عرض‌هاست و ضابطه آن  $y = f(-x)$  است.

نمودار شماره ۳ قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور طول‌ها و عرض‌هاست و ضابطه آن  $y = -f(-x)$  است.

نمودار شماره ۴ قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور طول‌هاست و ضابطه آن  $y = -f(x)$  است.

**تست:** اگر نمودارهای  $f(x) - k$ ،  $kf(x)$  و  $f(x + \frac{k}{2})$  به شکل‌های زیر باشند،  $k$  کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) -۲



پاسخ: گزینه ۲ از آنجایی که همه نمودارها هم‌جهت هستند و قطعاً یکی از آن‌ها متعلق به تابع  $kf(x)$  است، می‌توان نتیجه گرفت  $k$

عددی مثبت است. اگر  $k < 0$  بود باید یکی از نمودارها به شکل  در می‌آمد.

با توجه به مثبت بودن  $k$ ، نمودار تابع  $y = f(x) - k$  شکل پایینی، نمودار  $y = f(x + \frac{k}{\gamma})$  شکل وسطی و نمودار  $y = kf(x)$  شکل بالایی است.

با توجه به این شرایط در نمودار وسطی، فاصله طولی رأس تا محور عرض‌ها  $\frac{k}{\gamma}$  است.

اگر این فاصله را  $\frac{k}{\gamma}$  در نظر بگیریم در شکل پایینی نقاط زیر برحسب  $k$  پیدا می‌شوند، بنابراین در تابع  $y = f(x) - k$  به‌ازای  $x = \frac{k}{\gamma}$  تابع برابر صفر است، یعنی:

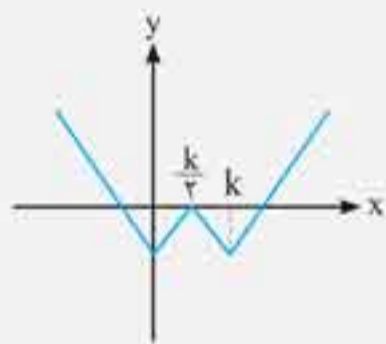
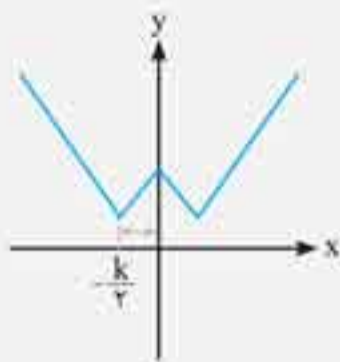
$$f(\frac{k}{\gamma}) - k = 0 \Rightarrow f(\frac{k}{\gamma}) = k$$

نمودار تابع‌های  $y = kf(x)$  و  $y = f(x + \frac{k}{\gamma})$  در  $x = 0$  متقاطع‌اند، پس:

$$k = kf(0) \xrightarrow{\div k} 1 = f(0)$$

در نهایت با توجه به این که در شکل پایینی مقدار تابع در  $x = 0$  برابر  $-1$  است، داریم:

$$y = f(x) - k \xrightarrow{(0, -1)} -1 = f(0) - k \xrightarrow{f(0)=1} -1 = 1 - k \Rightarrow k = 2$$



## تابع چندجمله‌ای از درجه $n$ و تابع درجه سوم

اگر  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  اعداد حقیقی باشند که  $a_n \neq 0$ ، آن‌گاه تابع  $f(x)$  را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌نامیم:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

به‌طور مثال تابع  $f(x) = 5$ ،  $f(x) = 3x - 1$ ،  $f(x) = x^2 - x + 5$ ،  $f(x) = 3x^2 - x$  و

$f(x) = x^2(1-x)^2$  به‌ترتیب توابعی چندجمله‌ای از درجه صفر، یک، دو، سه و چهار هستند.

مشهورترین تابع چندجمله‌ای از درجه ۳، تابع  $y = x^3$  است. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو

است. (نمودار این تابع در بین دانش‌آموزان به تابع لر مشهور است چرا که اگر به نمودار آن نگاه

کنید مانند این است که نوشته‌اید لر)

با رسم سه تابع  $f(x) = x$ ،  $g(x) = x^2$  و  $h(x) = x^3$  در یک دستگاه محورهای مختصات

می‌توان فهمید:

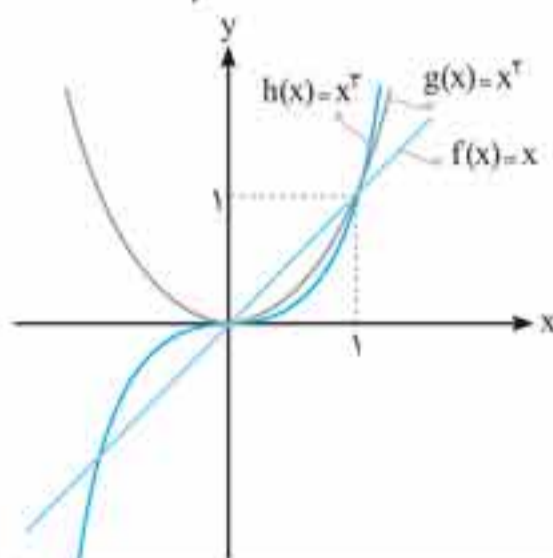
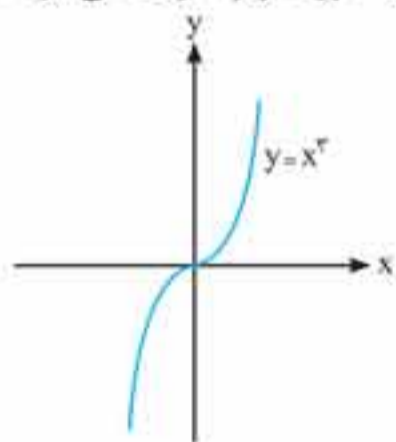
رابطه بین سه تابع  $f(x)$ ،  $g(x)$  و  $h(x)$  در بازه‌های مختلف به‌صورت زیر است:

اگر  $x \in (0, 1) \Rightarrow x^3 < x^2 < x$

اگر  $x \in (1, +\infty) \Rightarrow x^2 < x^3 < x$

اگر  $x \in (-1, 0) \Rightarrow x^2 > x^3 > x$

اگر  $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x^2 > x > x^3$



تست: نمودار تابع  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 10$  از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

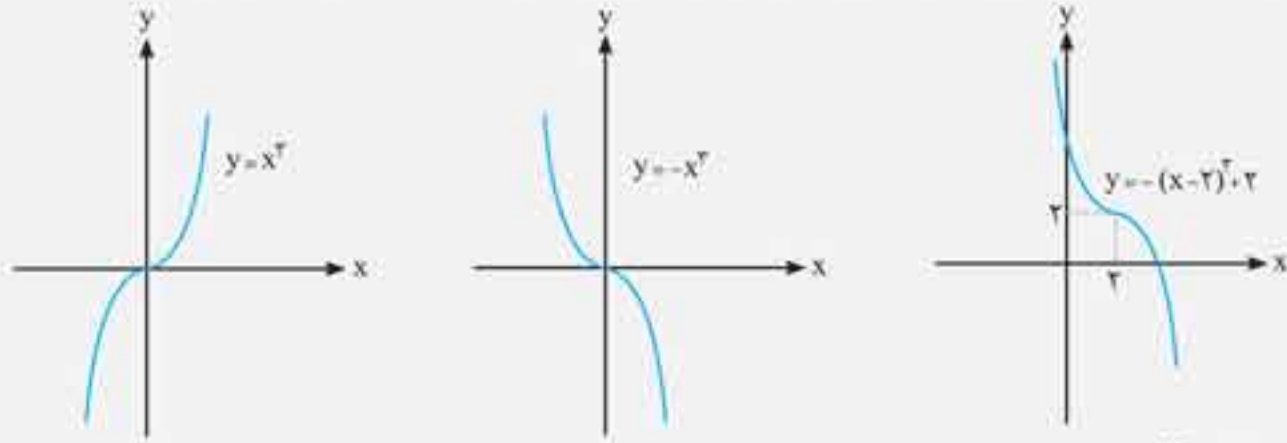
پاسخ: گزینه ۳ ضابطه تابع را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 10 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 + 2 = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 2 = -(x-2)^3 + 2$$

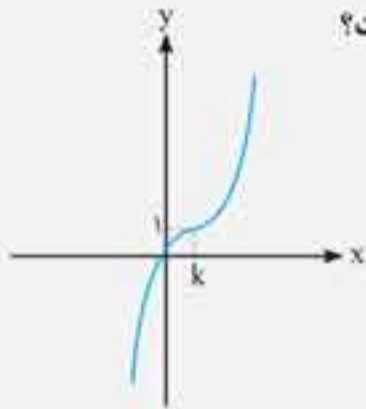


نمودار تابع  $y = x^2$  را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نمودار تابع از ربع سوم نمی‌گذرد.

**تست:** نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + ax^2 + bx + c$  به صورت مقابل است. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟



- (۱) صفر
- (۲) ۶
- (۳) -۶
- (۴) ۳

پاسخ: **گزینه ۱** ضابطه تابع  $f(x)$  (با توجه به نمودار) برابر است با:

$$f(x) = (x - k)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2kx^2 + 2k^2x - k^2 + 1$$

تابع از مبدأ گذشته است، بنابراین نقطه  $(0, 0)$  در آن صدق می‌کند:

$$0 = (0)^2 - 2k(0)^2 + 2k^2(0) - k^2 + 1 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = 1$$

ضابطه تابع پس از جای‌گذاری عدد ۱ به جای  $k$  برابر است با:

$$f(x) = x^2 - 2kx^2 + 2k^2x - k^2 + 1 \xrightarrow{k=1} f(x) = x^2 - 2x^2 + 2x - 1 + 1 = -x^2 + 2x$$

پس  $a = -2$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0$  و بنابراین داریم:

$$a + b + c = -2 + 2 + 0 = 0$$

**تست:** نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + ax^2 + bx + c$  به شکل مقابل است. مقدار  $b$  کدام است؟



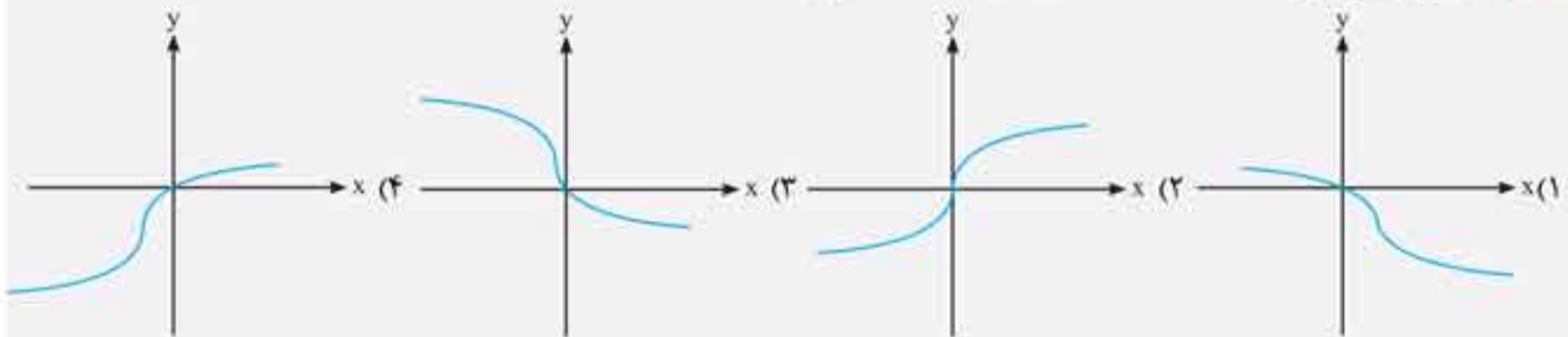
- (۱) ۹
- (۲) -۹
- (۳) ۲۷
- (۴) -۲۷

پاسخ: **گزینه ۴** با توجه به نمودار، ضابطه تابع برابر  $f(x) = -(x - 3)^2 - 9$  است، بنابراین داریم:

$$f(x) = -(x^2 - 6x + 9) - 9 = -x^2 + 6x - 18$$

پس مقدار  $b$  برابر  $-18$  است.

**تست:** نمودار تابع وارون  $f(x) = -x^2 - 3x^2 - 3x$  به کدام شکل زیر است؟



پاسخ: **گزینه ۱** تابع  $f(x) = -x^2 - 3x^2 - 3x$  را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = -(x^2 + 3x^2 + 3x) = -(x^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 1) = -(x + 1)^2 + 1$$

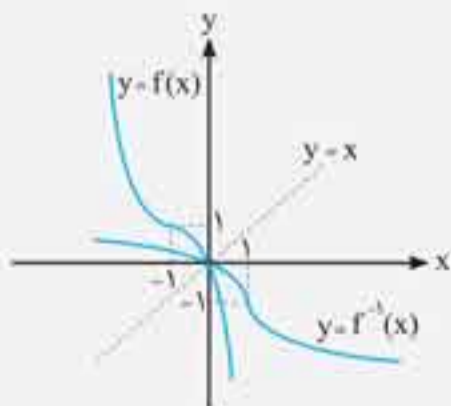
نمودار تابع  $f(x)$  را رسم می‌کنیم:

برای یافتن نمودار تابع وارون  $y = f(x)$  آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم می‌کنیم:

برای درک بهتر، ضابطه تابع وارون را نیز می‌یابیم:

$$y = -(x + 1)^2 + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 = 1 - y \Rightarrow x + 1 = \sqrt{1 - y} \Rightarrow x = \sqrt{1 - y} - 1$$

$$y = \sqrt{1 - x} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x} - 1$$

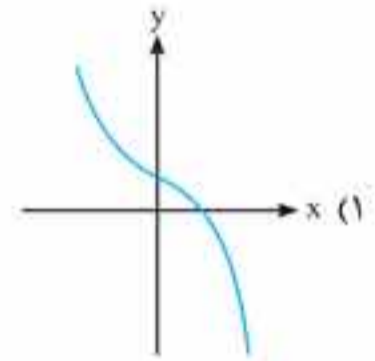
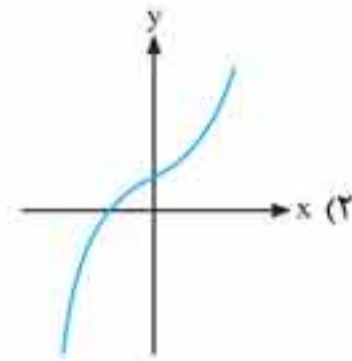
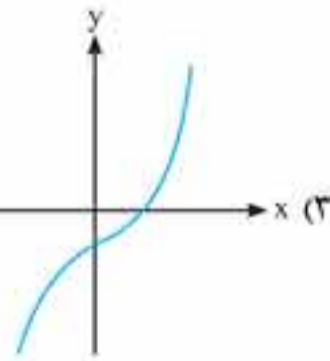
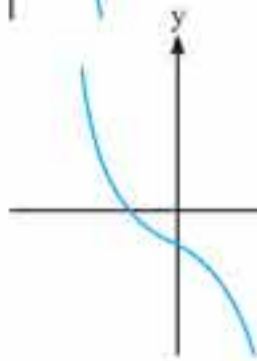
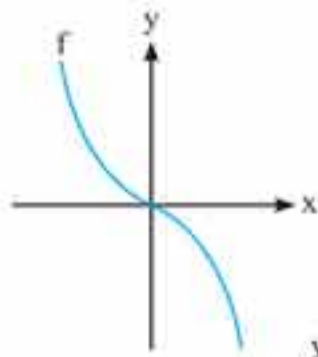




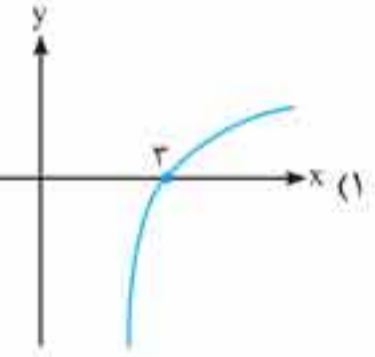
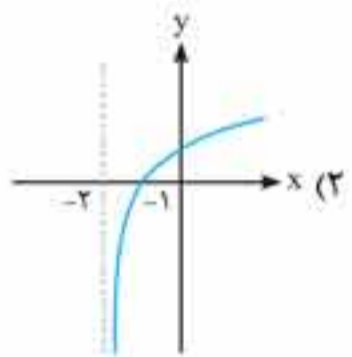
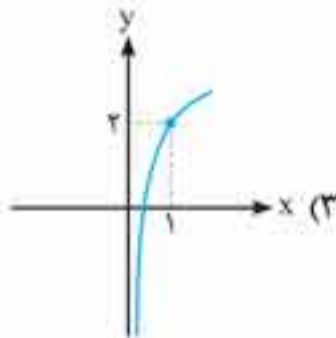
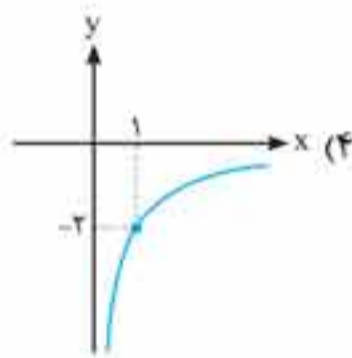
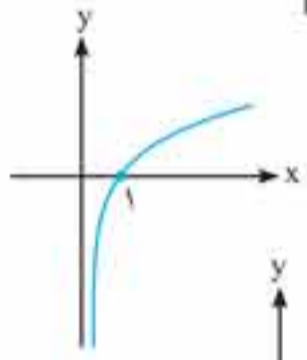
# پرسش‌های چهارگزینه‌ای

## تبدیل نمودار توابع

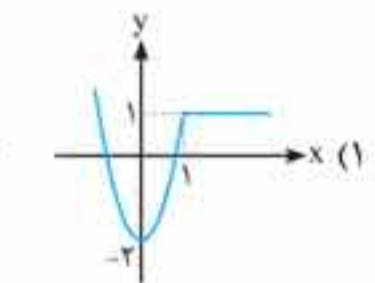
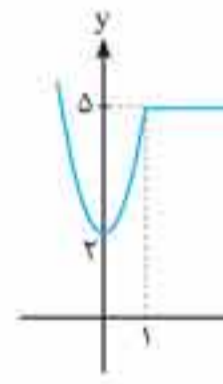
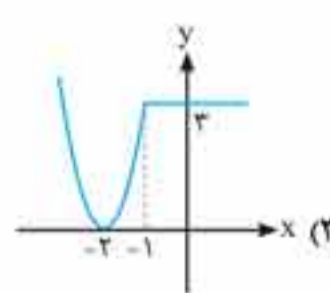
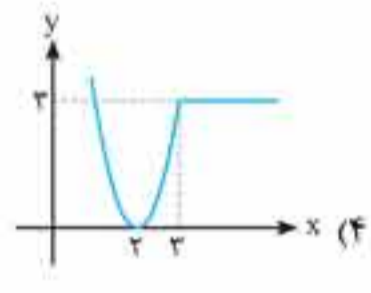
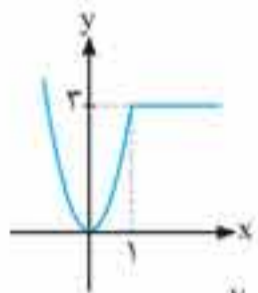
۱. اگر نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $f(x)+k$  با شرط  $k < 0$  به چه شکلی است؟



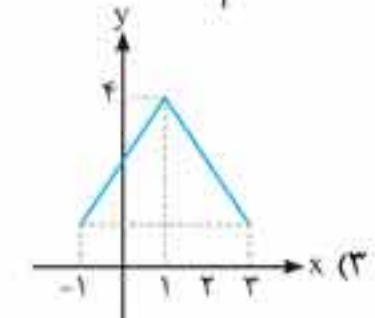
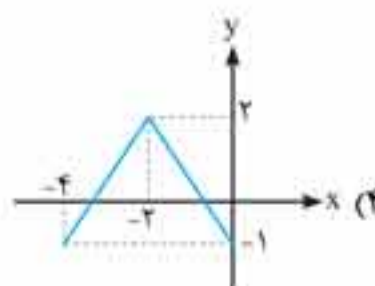
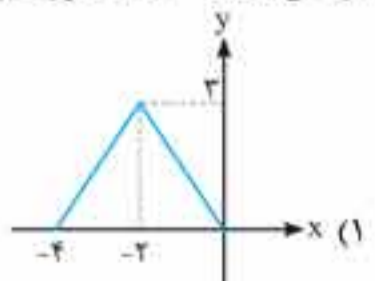
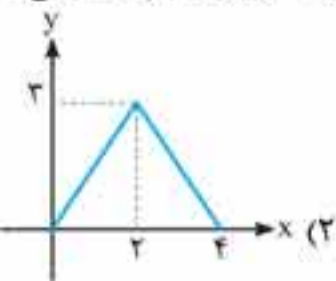
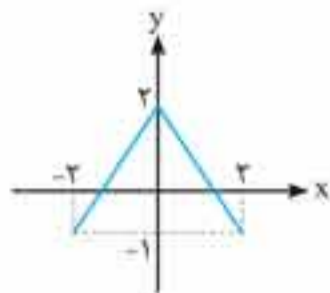
۲. نمودار تابع  $y = \log x$  به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع  $y = \log(x+2)$  کدام است؟



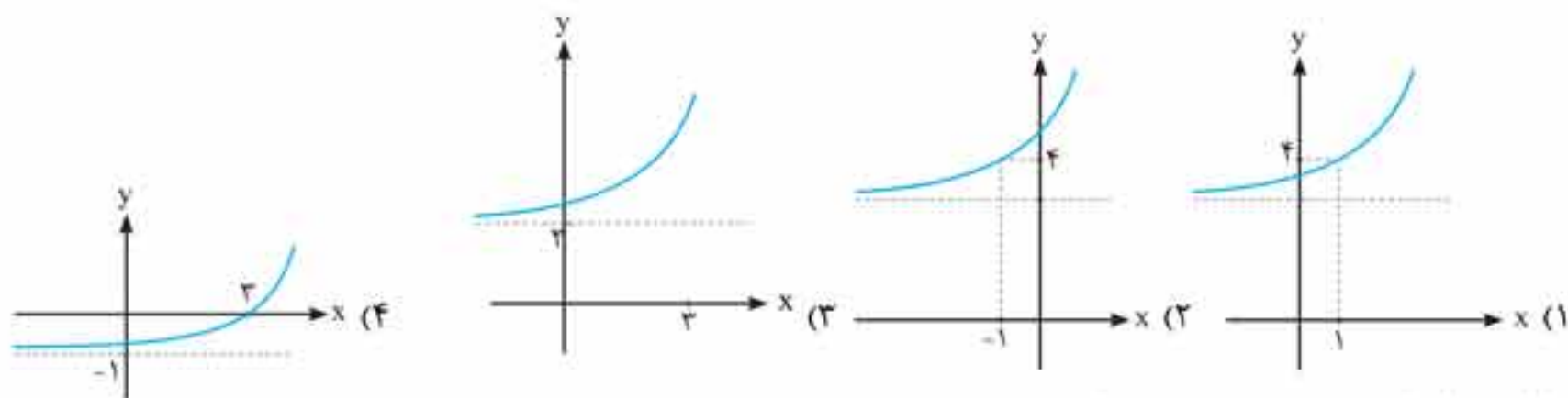
۳. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $f(x-2)$  کدام است؟



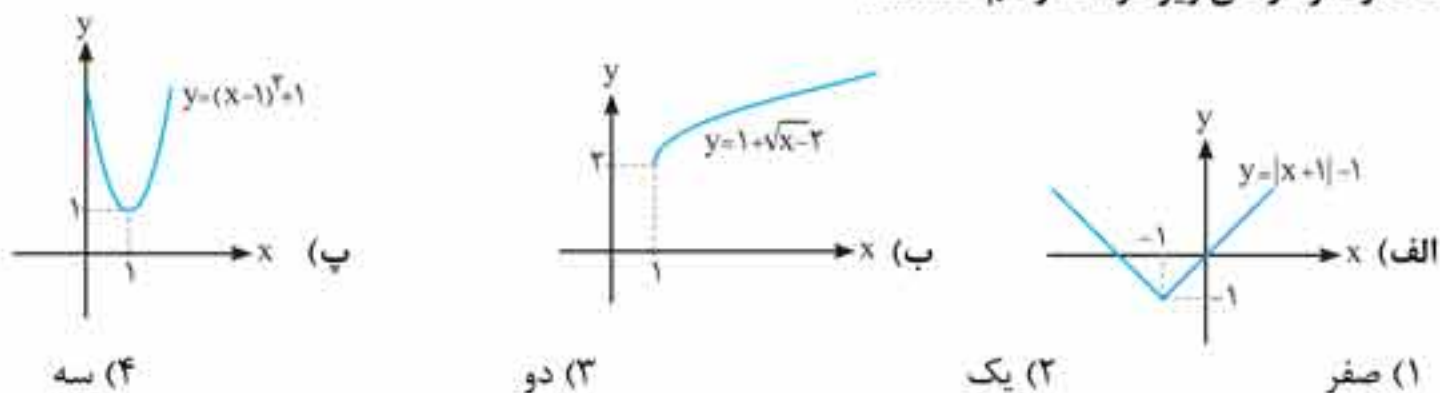
۴. نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت روبه‌رو است. نمودار تابع  $g(x) = f(x+2) + 1$  به چه شکلی خواهد بود؟



۵. ضابطه تابع  $f(x) = 3^x$  مفروض است. نمودار تابع  $g(x) = f(x-1) + 3$  کدام است؟

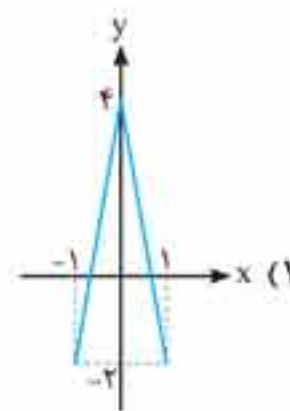
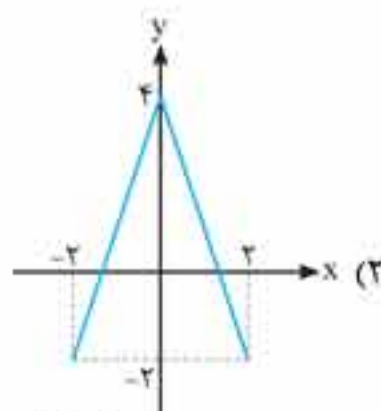
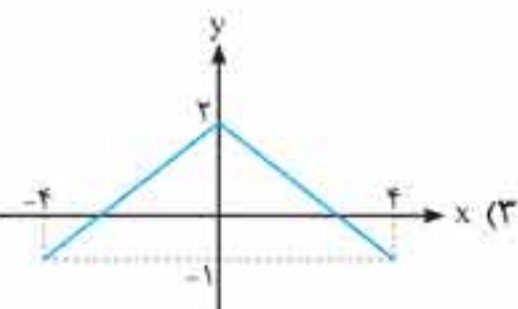
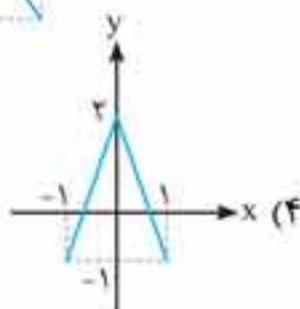
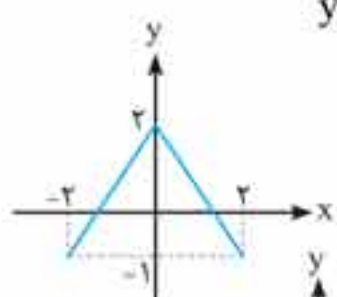


۶. چند تا از نمودارهای زیر درست رسم شده‌اند؟

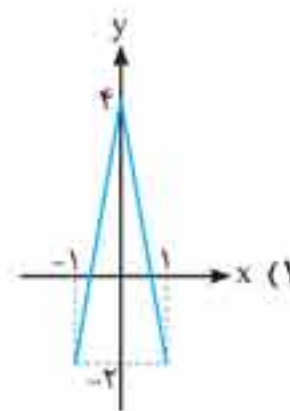
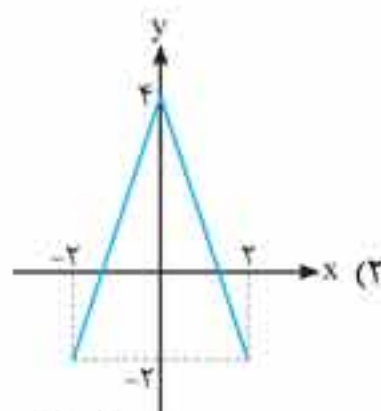
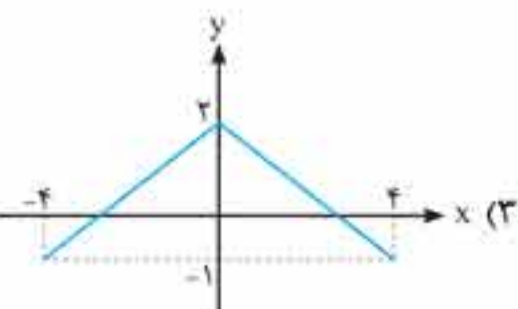
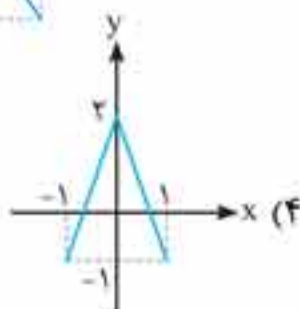


۷. نمودار تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$  بر نمودار کدام یک از توابع زیر منطبق است؟

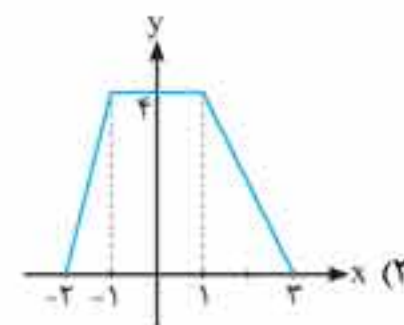
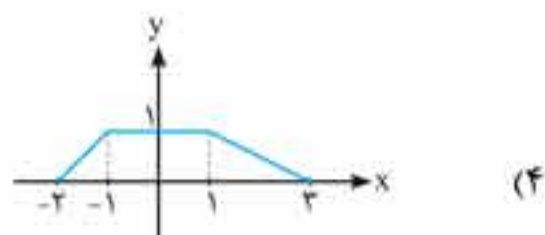
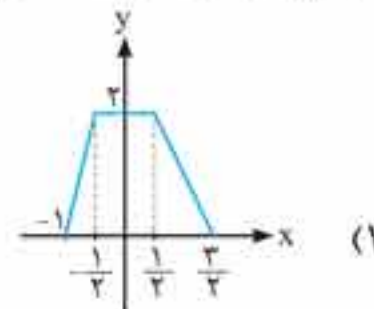
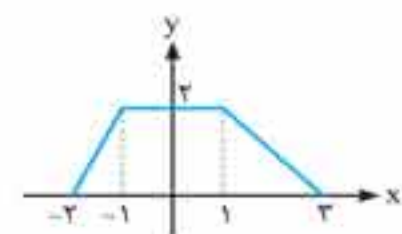
(۱)  $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$       (۲)  $y = \sin x$       (۳)  $y = \sin(x - \pi)$       (۴)  $y = \sin(x + \pi)$



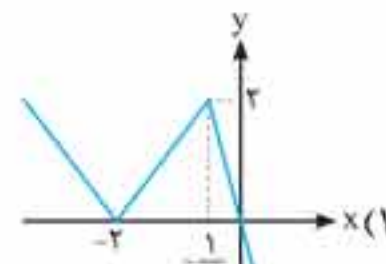
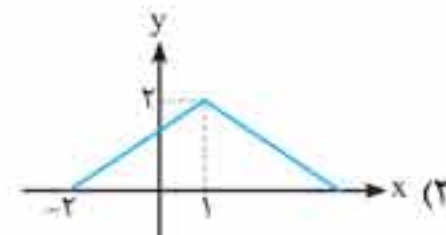
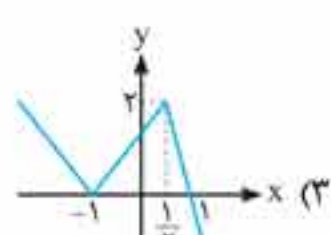
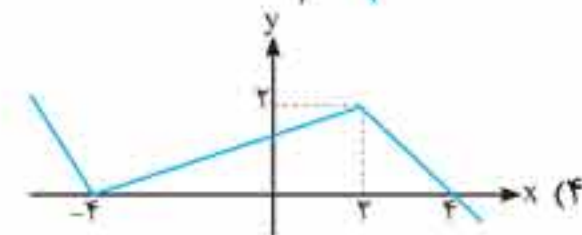
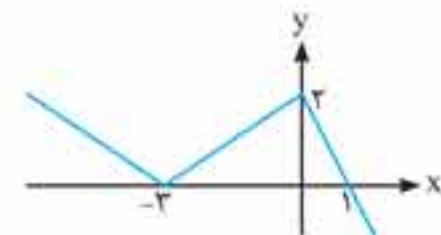
۸. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $g(x) = 2f(x)$  کدام است؟



۹. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $g(x) = \frac{f(x)}{2}$  به چه شکلی است؟

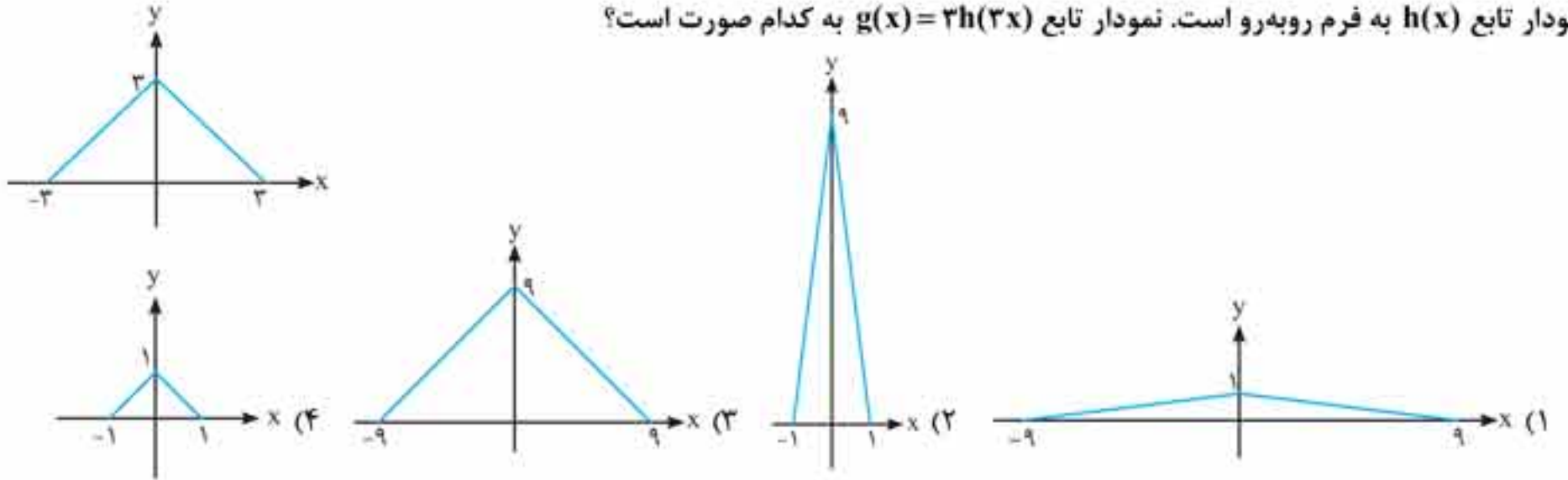


۱۰. نمودار تابع  $f(x)$  به صورت روبه‌رو است. کدام گزینه نمودار تابع  $g(x) = f(2x-1)$  را نشان می‌دهد؟

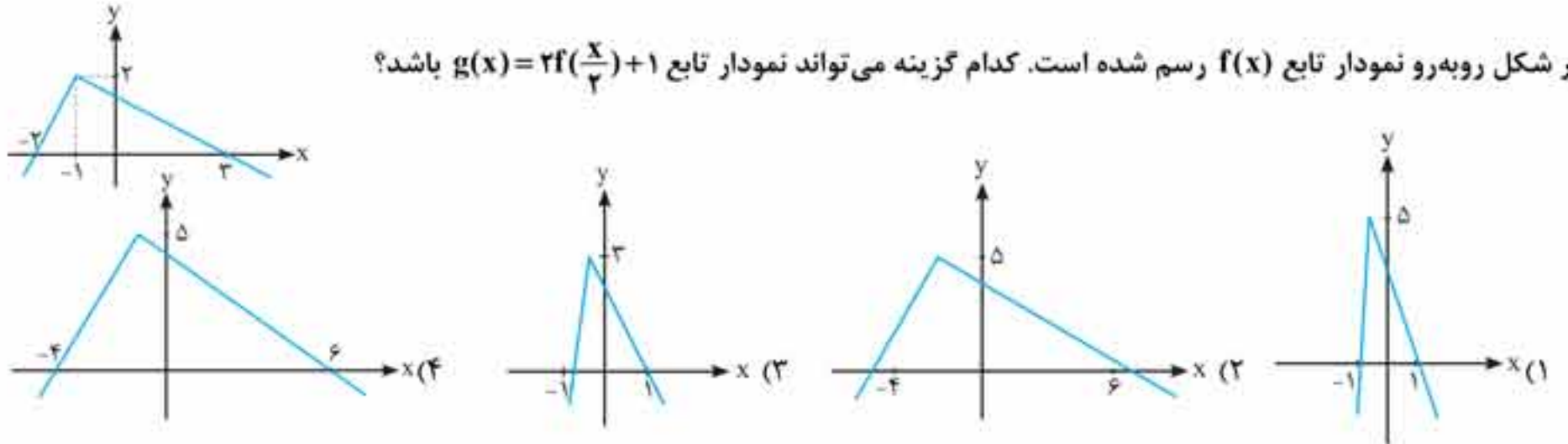




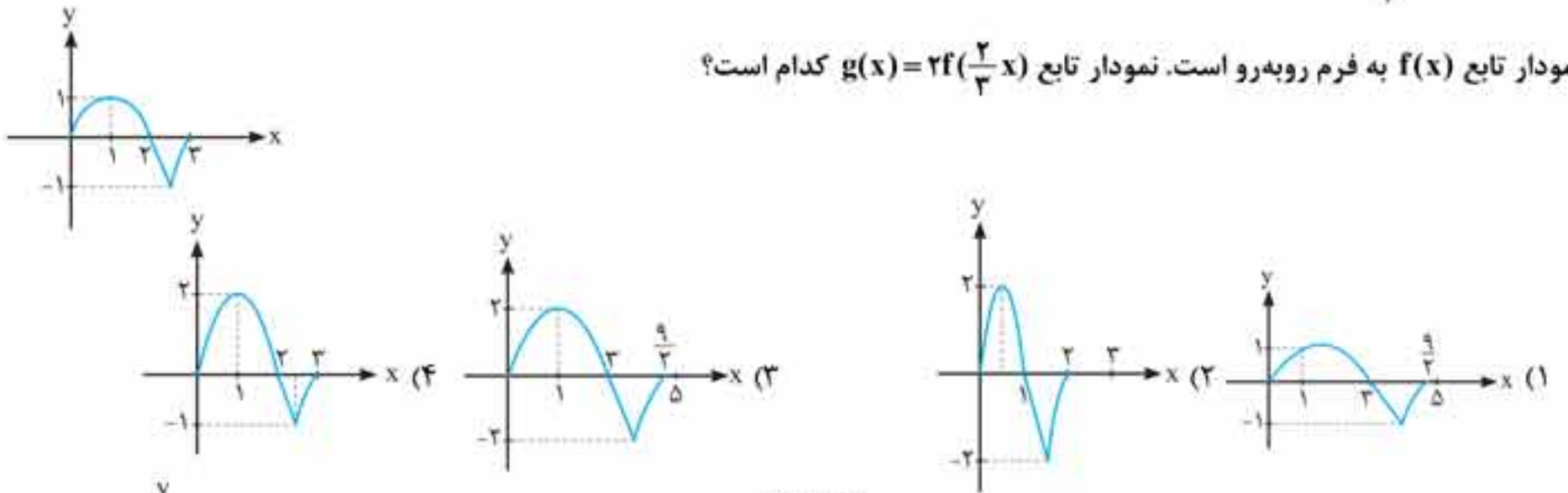
۱۱. نمودار تابع  $h(x)$  به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع  $g(x) = 3h(3x)$  به کدام صورت است؟



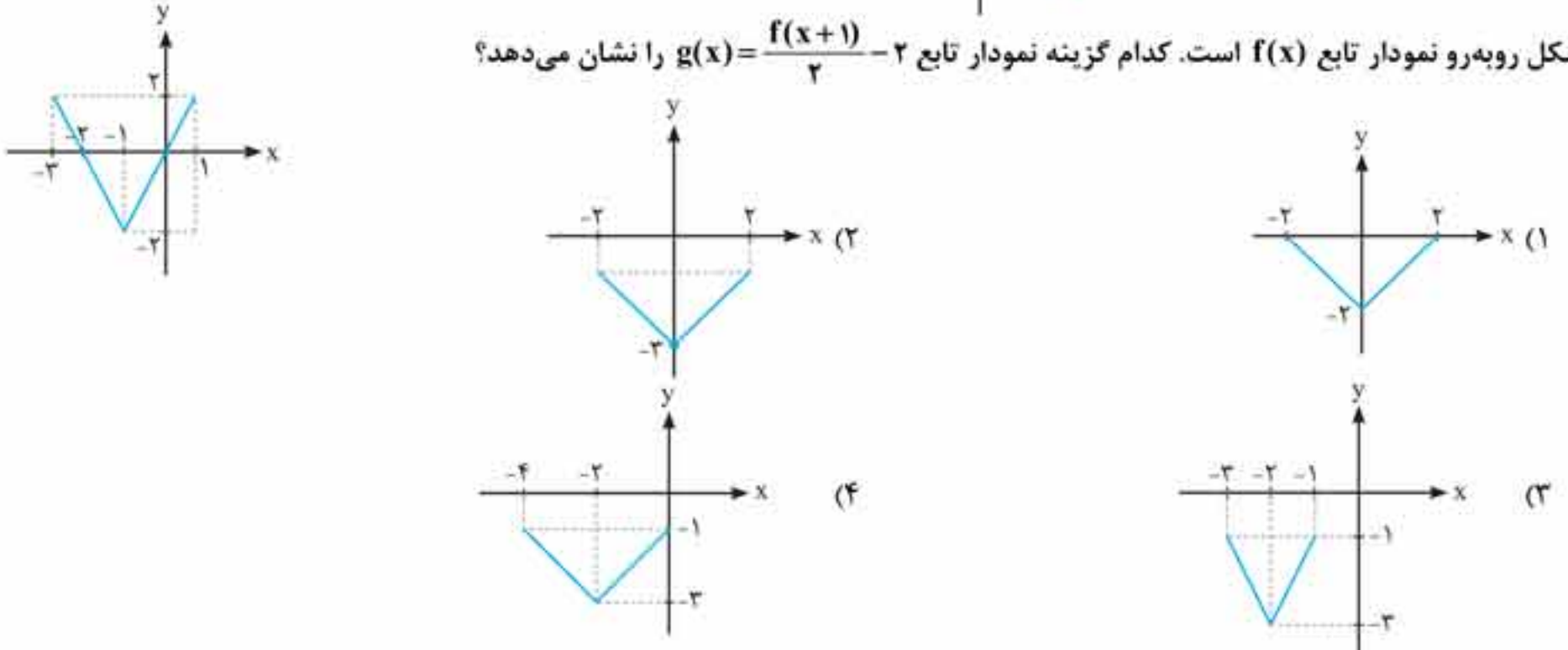
۱۲. در شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f(x)$  رسم شده است. کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع  $g(x) = 2f(\frac{x}{2}) + 1$  باشد؟



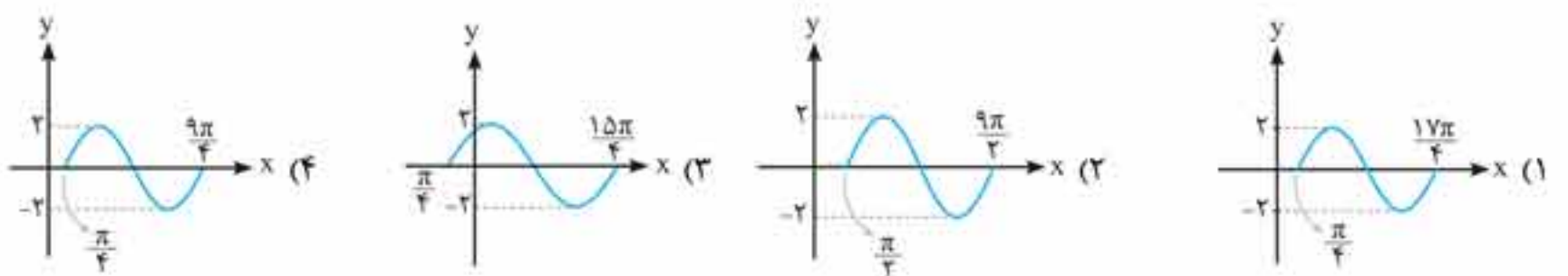
۱۳. نمودار تابع  $f(x)$  به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع  $g(x) = 2f(\frac{2}{3}x)$  به کدام است؟



۱۴. شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f(x)$  است. کدام گزینه نمودار تابع  $g(x) = \frac{f(x+1)}{2} - 2$  را نشان می‌دهد؟

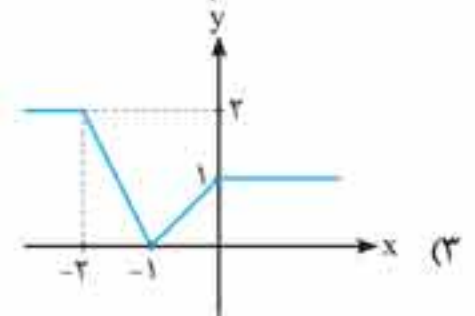
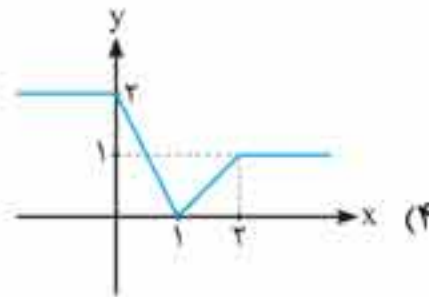
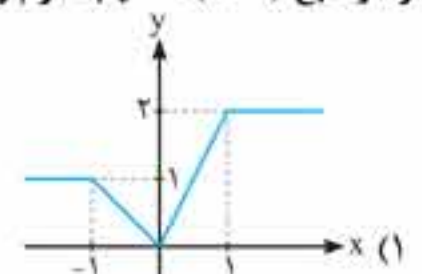
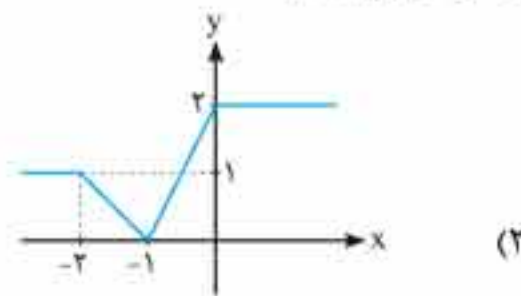
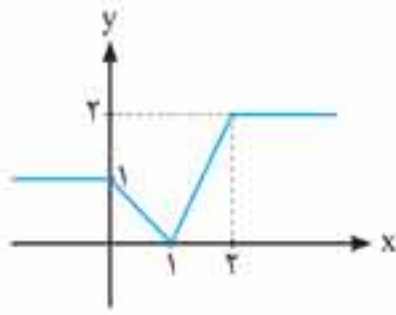


۱۵. تابع  $f(x) = \sin x$  با دامنه  $[0, 2\pi]$  مفروض است. نمودار تابع  $g(x) = 2f(\frac{2x-\pi}{4})$  به کدام است؟

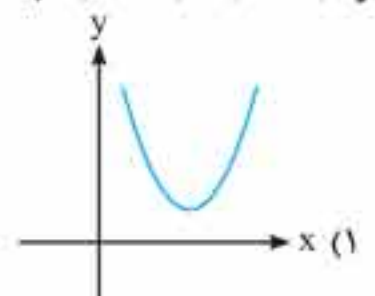
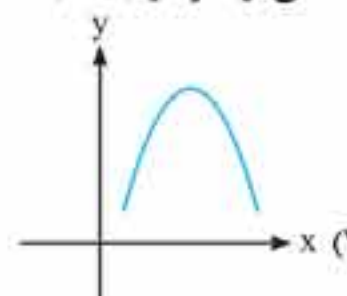
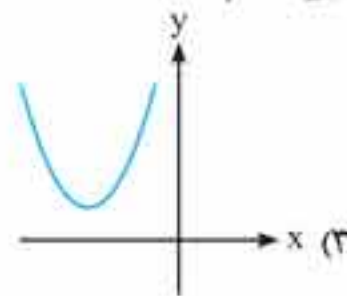
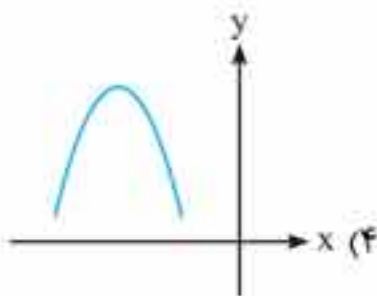




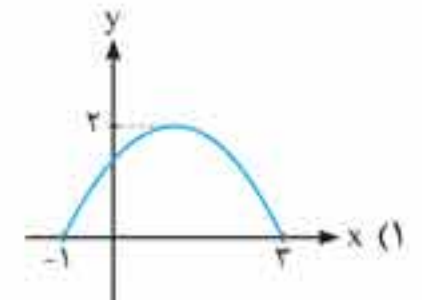
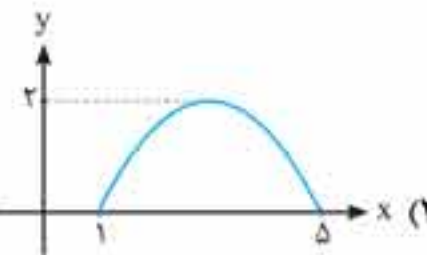
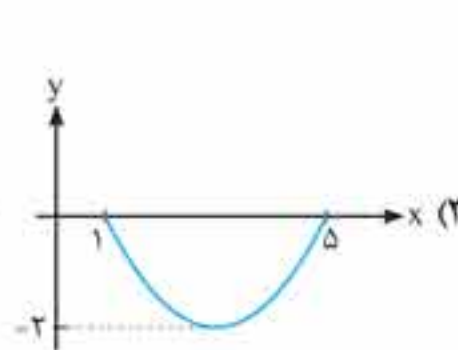
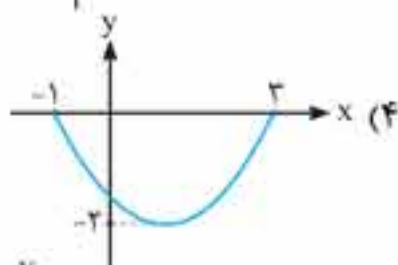
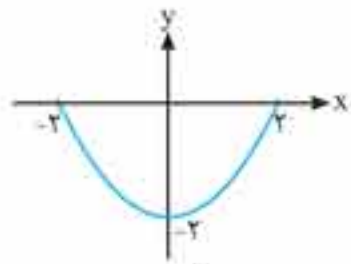
۳۵. نمودار تابع  $y = f(x-1)$  به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع  $y = f(1-x)$  کدام است؟



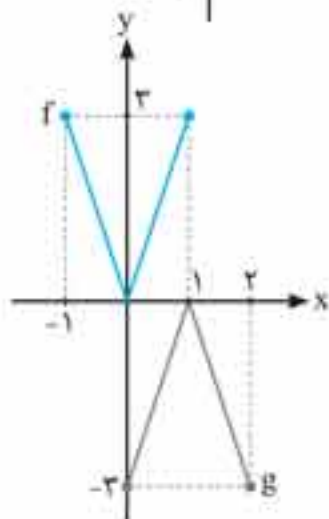
۳۶. اگر  $f(2-2x) = (2x-1)^2$  باشد، قسمتی از نمودار  $g(x) = 3 - f(x-1)$  کدام است؟



۳۷. شکل مقابل نمودار تابع  $y = f(x-2)$  را نشان می‌دهد. نمودار تابع  $y = f(-x+1)$  کدام است؟



۳۸. در شکل مقابل، نمودار دو تابع  $f(x)$  و  $g(x) = af(bx+c)$  داده شده است. حاصل  $a+b-c$  کدام می‌تواند باشد؟



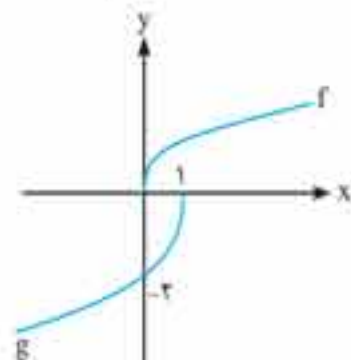
(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۳۹. نمودار تابع  $g$  طی مراحل از روی نمودار  $f(x) = \sqrt{x}$  رسم شده است. ضابطه تابع  $g$  کدام است؟



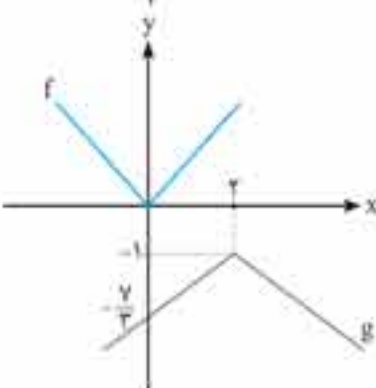
(۱)  $-2f(x)$

(۲)  $-2f(-x+1)$

(۳)  $-2f(-x)$

(۴)  $-2f(-x-1)$

۴۰. نمودار تابع  $g$  از روی نمودار تابع  $y = |x|$  رسم شده است.  $g(5)$  کدام است؟



(۱) -۴

(۲)  $-\frac{5}{2}$

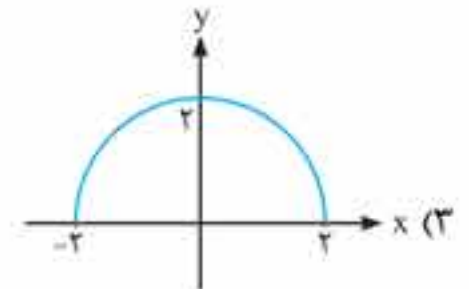
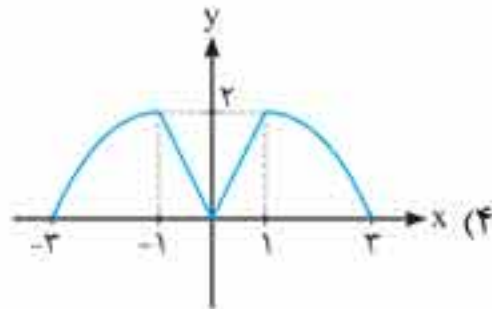
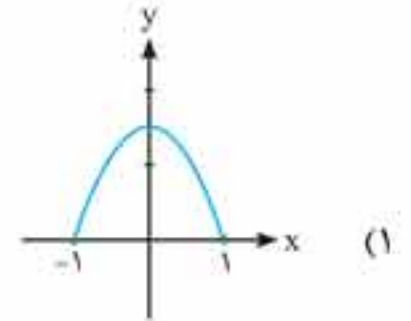
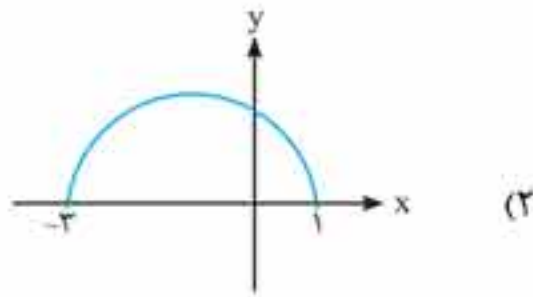
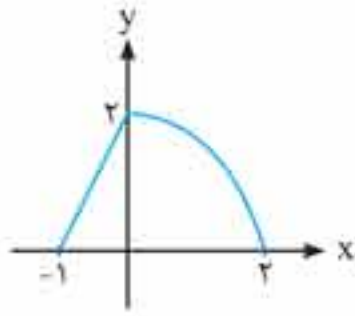
(۳)  $-\frac{7}{3}$

(۴) -۳

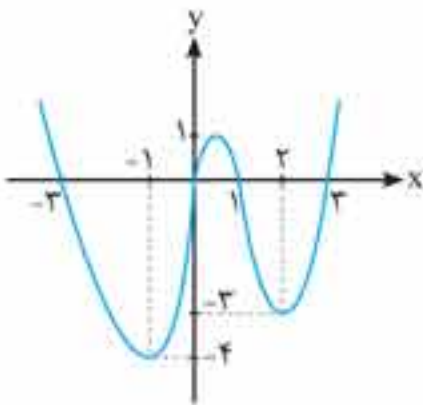




۶۹ شکل مقابل نمودار تابع  $y = f(x)$  است. نمودار تابع  $y = f(|x+1|)$  کدام است؟



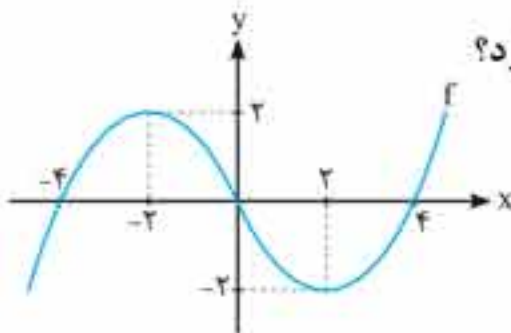
۷۰ نمودار تابع  $f$  به شکل روبه‌رو رسم شده است. کم‌ترین مقدار تابع  $h(x) = 3f(|2x|) - 3$  کدام است؟



- (۱) صفر
- (۲) -۹
- (۳) -۱۲
- (۴) -۱۵

۷۱ نمودار تابع  $g(x) = |f(x) - 2|$  از روی نمودار  $f(x) = |x|$  رسم شده است. اگر  $g(x)$  در تقاطع با خط  $y = k$ ، ۴ نقطه تقاطع داشته باشد:  $k$  در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

- (۱)  $[0, 2]$
- (۲)  $(0, 2)$
- (۳)  $[-2, 2]$
- (۴)  $(-2, 2)$



۷۲ نمودار تابع  $g(x) = ||f(x)| - 2|$  از روی نمودار تابع  $f$  رسم شده است. معادله  $g(x) = \frac{2}{3}$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۱۲

۷۳ نمودار تابع  $g(x) = |f(|x|)|$  از روی نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  رسم شده است. اگر  $g(x)$  در تقاطع با خط  $y = a$  دقیقاً ۴ نقطه برخورد داشته باشد، آن‌گاه  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$
- (۲) صفر
- (۳) ۱
- (۴) ۲

(ریاضی خارج ۹۳)

۷۴ در کدام بازه از مقادیر  $x$ ، نمودار تابع  $f(x) = 5 - |x - 1|$  بالاتر از نمودار  $g(x) = |2x|$  قرار دارد؟

- (۱)  $(-\frac{4}{3}, 1)$
- (۲)  $(-\frac{2}{3}, 1)$
- (۳)  $(-\frac{4}{3}, 2)$
- (۴)  $(-\frac{2}{3}, 2)$

### تابع درجه ۳

۷۵ چند مورد از عبارات زیر دربارهٔ تابع  $y = x^3 + 6x^2 + 12x - 1$  صحیح است؟

(الف) برد این تابع بازه  $[-1, +\infty)$  است.

(ب) وارون‌پذیر است.

(پ) نمودار این عبارت نسبت به خط  $x = -2$  متقارن است.

(ت) با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  نیز افزایش می‌یابد.

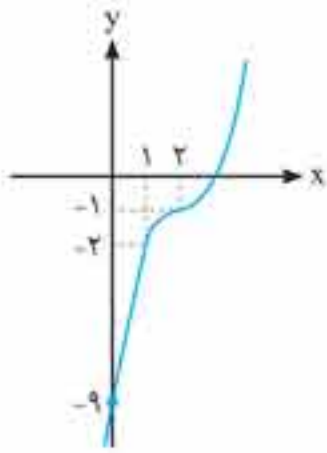
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۷۶ اگر  $f_1(x) = x$ ،  $f_2(x) = x^2$  و  $f_3(x) = x^3$  باشند، آن‌گاه در کدام بازه رابطه  $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x)$  برقرار است؟

- (۱)  $[0, 1]$
- (۲)  $[-1, 1]$
- (۳)  $[-1, 0]$
- (۴)  $(0, 1)$

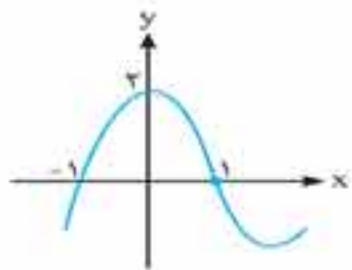
۷۷ سه تابع  $f(x) = x + a$ ،  $g(x) = f^2(x)$  و  $h(x) = f^3(x)$  مفروض‌اند و در بازه  $[3, 4]$  داریم:  $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ . کدام است  $a$ ؟

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) ۴
- (۴) -۴



۷۸. شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  را نشان می‌دهد. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

- (۱) -۹
- (۲) -۶
- (۳) -۳
- (۴) صفر



۷۹. نمودار تابع  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  به صورت روبه‌رو است. مقدار  $b$  کدام است؟

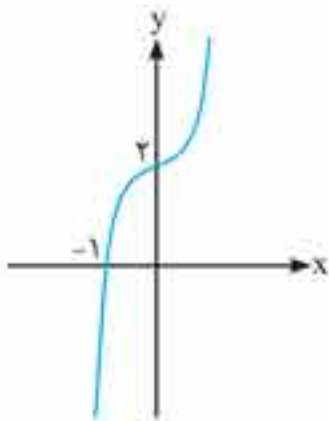
- (۱) ۴
- (۲) ۲
- (۳) -۲
- (۴) -۴

۸۰. نمودار تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + a$  نسبت به نقطه  $(-1, -5)$  متقارن است.  $a$  کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) ۲
- (۳) -۴
- (۴) ۴

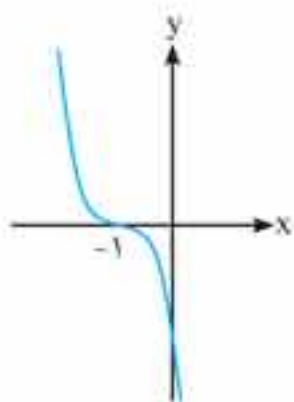
۸۱. منحنی تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  و خط  $y = ax + b$  یکدیگر را فقط در نقطه  $x = 0$  قطع می‌کنند. در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱)  $(2, +\infty)$
- (۲)  $(-\infty, \frac{3}{4})$
- (۳)  $(-\infty, 2)$
- (۴)  $(\frac{3}{4}, +\infty)$



۸۲. اگر نمودار تابع  $f(x) = x^3 + ax + b$  به صورت مقابل باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴



۸۳. اگر نمودار تابع  $f(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + c$  به صورت مقابل باشد،  $a$  کدام است؟

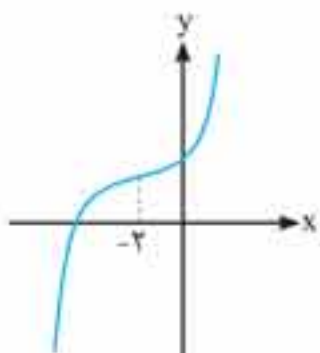
- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) -۶
- (۴) -۹

۸۴. حدود  $k$  کدام باشد تا نمودار تابع  $f(x) = -x^3 + x^2 - \frac{x}{3} + k$  از ربع اول عبور نکند؟

- (۱)  $k \leq 0$
- (۲)  $k < 1$
- (۳)  $k \geq 0$
- (۴)  $k > 1$

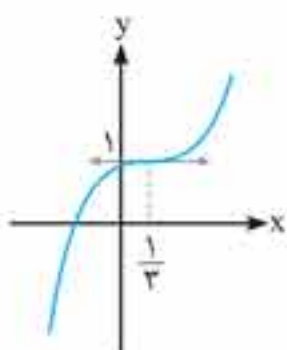
۸۵. اگر  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$ ،  $g(x) = ax + b$  و نمودار تابع  $y = (f + g)(x)$  به صورت زیر باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) ۱
- (۴) ۲



۸۶. نمودار تابع  $f(x) = (x + a)(x^2 + bx + c)$  به صورت مقابل است. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$
- (۲)  $\frac{1}{9}$
- (۳) ۱
- (۴)  $\frac{10}{9}$





۱۲۲. به ازای کدام مقادیر  $a$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \leq 1 \\ -x + 2a & ; x \geq 2 \end{cases}$  نزولی است؟

- (۱)  $a > \frac{1}{3}$  (۲)  $a \geq \frac{1}{3}$  (۳)  $a < \frac{1}{3}$  (۴)  $a \leq \frac{1}{3}$

۱۲۳. تابع  $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{ax} & ; x < 0 \end{cases}$  یک تابع اکیداً صعودی است.  $a$  کدام یک از مقادیر زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) -۳ (۴) هیچ مقداری برای  $a$  وجود ندارد.

۱۲۴. تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x < 1 \\ \sqrt{x-1} + a & ; x \geq 1 \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  صعودی اکید است.  $a$  چه مقادیری دارد؟

- (۱)  $a \geq 1$  (۲)  $a < 1$  (۳)  $a \geq 0$  (۴)  $a < -1$

۱۲۵. تابع  $f(x) = |2x - 2| + kx$  اکیداً صعودی است. حدود مقادیر  $k$  کدام است؟

- (۱)  $k > 2$  (۲)  $k < -2$  (۳)  $-2 < k < 2$  (۴)  $k < 2$

۱۲۶. اگر تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + (m-3)x + 2$  روی بازه  $(2, +\infty)$  صعودی اکید و روی بازه  $(-\infty, 2)$  نزولی اکید باشد. آن گاه  $m$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۲۷. حدود  $a$  برای آن که تابع  $y = (a-2)x^2 - x$  در فاصله  $[1, +\infty)$  صعودی باشد، کدام است؟

- (۱)  $a \geq \frac{5}{2}$  (۲)  $2 < a \leq \frac{5}{2}$  (۳)  $a < \frac{5}{2}$  (۴)  $a > 2$

۱۲۸. اگر تابع با ضابطه  $f(x) = (m-3)x^2 + 2(m^2-3)x + 5$  روی بازه  $(-\infty, 1)$  اکیداً صعودی و روی بازه  $(1, +\infty)$  اکیداً نزولی باشد، آن گاه مجموع مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۳

۱۲۹. دو تابع  $f(x) = \frac{-3kx+1}{x^2-x}$  و  $h(x) = \frac{3kx^2-1}{x^2-x}$  مفروضاند. اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  اکیداً نزولی باشد، تابع  $h$  در بازه  $[a, b]$  چه وضعیتی خواهد داشت؟ ( $k \neq 0$ )

- (۱) اکیداً نزولی (۲) اکیداً صعودی  
(۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۱۳۰. اگر  $f$  و  $g$  هر دو صعودی اکید باشند، کدام تابع در  $D_f \cap D_g$  الزاماً صعودی اکید است؟

- (۱)  $f - g$  (۲)  $fg$  (۳)  $f + g$  (۴)  $f^2$

۱۳۱. دو تابع  $f$  و  $g$  با دامنه های یکسان به ترتیب صعودی و نزولی اند. توابع  $f - g$  و  $\frac{f}{g}$  به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) صعودی - نزولی (۲) نزولی - صعودی  
(۳) صعودی - نمی توان تعیین کرد (۴) نزولی - نمی توان تعیین کرد

۱۳۲. اگر  $f$  نزولی اکید و  $g$  صعودی اکید با دامنه  $\mathbb{R}$  باشند، چه تعداد از گزاره های زیر درست است؟

- (الف)  $f \circ g$  نزولی اکید است. (ب)  $g \circ f$  صعودی اکید است.  
(پ)  $f \circ f$  نزولی اکید است. (ت)  $g \circ g$  صعودی اکید است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۳. اگر تابع  $f$  صعودی اکید باشد، کدام یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $y = |x| + f(x)$  (۲)  $y = xf(x)$  (۳)  $y = x + f(x)$  (۴)  $y = |x|f(x)$

۱۳۴. دو تابع  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = x - \sqrt{x}$  از نظر یکنوایی چگونه اند؟

- (۱)  $f$  صعودی و  $g$  نزولی است. (۲)  $f$  نزولی و  $g$  صعودی است.  
(۳)  $f$  صعودی اما  $g$  یکنوا نمی باشد. (۴)  $f$  و  $g$  هر دو یکنوا نیستند.

۱۳۵. اگر  $g$  تابعی نزولی اکید باشد، تابع  $f(x) = g(x^2 + 1) - 1$  به شرط تعریف شدن چگونه است؟

- (۱) نزولی اکید است. (۲) صعودی اکید است.  
(۳) اگر  $x \geq 1$  صعودی اکید است. (۴)  $x \geq 0$  نزولی اکید و  $x < 0$  صعودی اکید است.

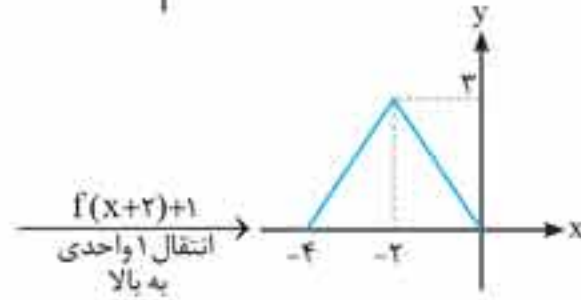
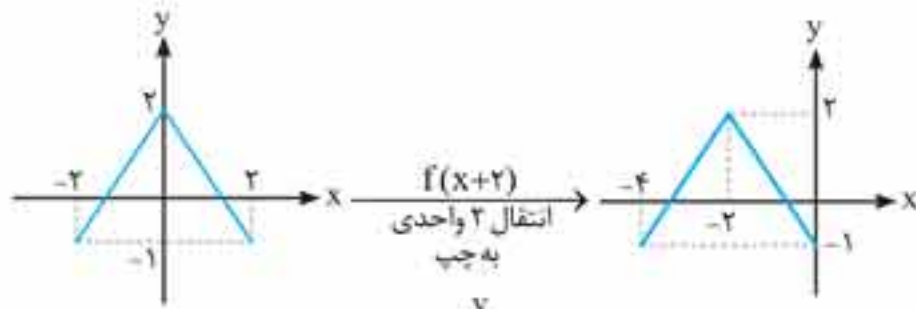
۱۳۶. در مورد تغییرات  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2+2}$  کدام درست است؟

- (۱) روی  $\mathbb{R}$  صعودی اکید است.  
(۲) در  $[0, +\infty)$  صعودی اکید و در  $(-\infty, 0)$  نزولی اکید است.  
(۳) در  $[0, +\infty)$  نزولی اکید و در  $(-\infty, 0)$  صعودی اکید است.  
(۴) روی  $\mathbb{R}$  نزولی اکید است.

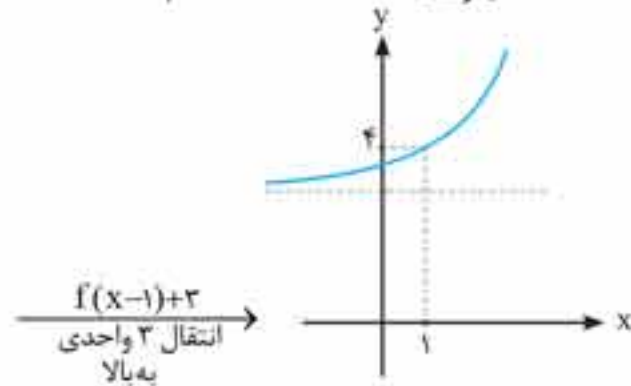
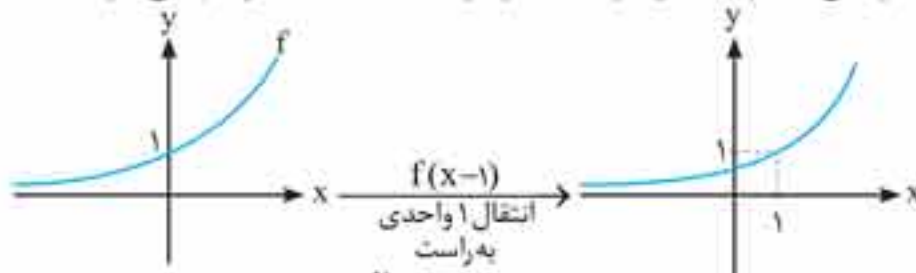




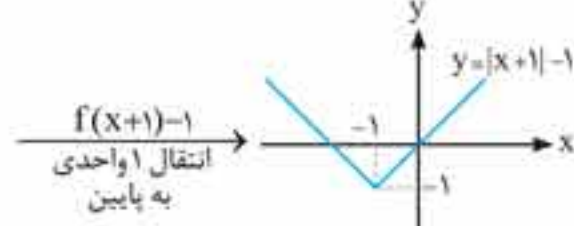
## پاسخ‌های تشریحی



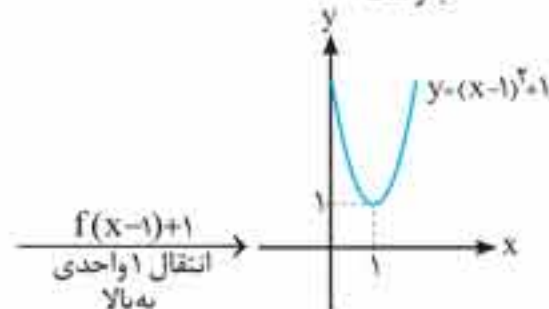
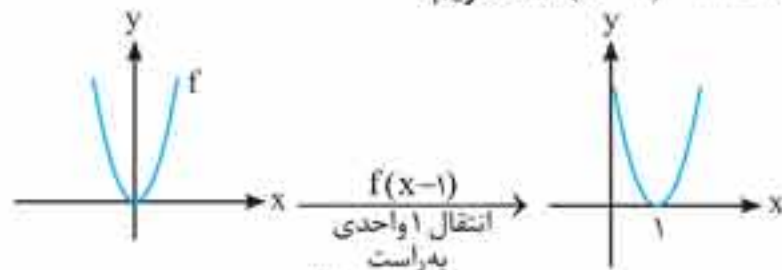
۵. **گزینه ۱** برای رسم نمودار  $f(x-1)+3$  از روی نمودار  $f(x)$  ابتدا نمودار  $f(x-1)$  را رسم می‌کنیم که به همین منظور باید نمودار تابع  $f$  را در جهت افقی و به اندازه ۱ واحد به سمت راست منتقل کنیم. سپس نمودار حاصل را ۳ واحد در راستای قائم و به سمت بالا انتقال می‌دهیم. به این ترتیب نمودار  $f(x-1)+3$  رسم می‌شود.



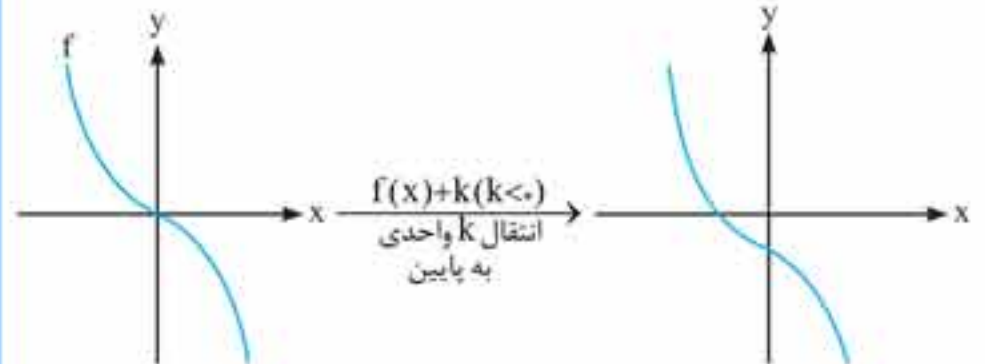
۶. **گزینه ۳** نمودارهای (الف) و (پ) درست رسم شده‌اند. اگر تابع اولیه نمودار (الف) را  $f(x)=|x|$  فرض کنیم، آن‌گاه  $f(x+1)-1=|x+1|-1$ ، لذا خواهیم داشت:



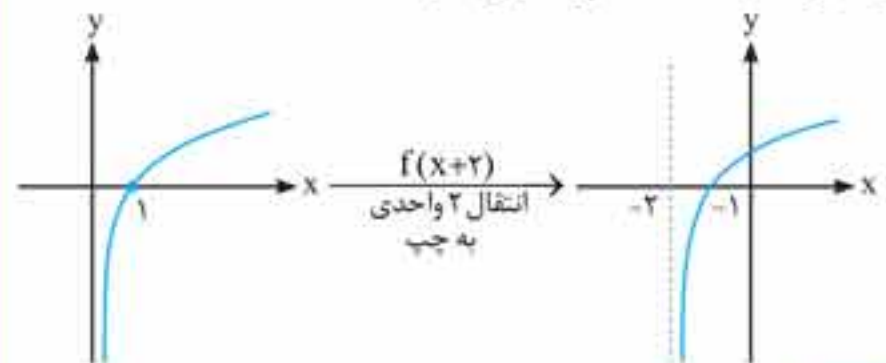
اگر تابع اولیه نمودار (پ) را  $f(x)=x^2$  فرض کنیم، آن‌گاه  $f(x-1)+1=(x-1)^2+1$ ، لذا داریم:



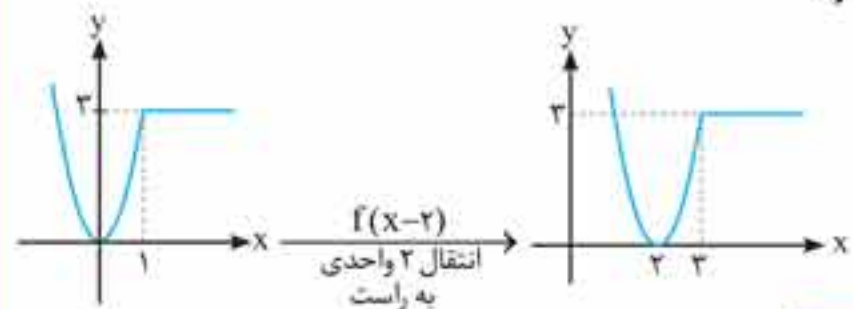
۱. **گزینه ۴** برای رسم نمودار تابع  $f(x)+k$  با شرط  $k < 0$ ، کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم و به سمت پایین انتقال دهیم. لازم به ذکر است که دامنه تابع  $f(x)+k$  یا دامنه تابع  $f(x)$  هیچ تفاوتی ندارد و انتقال در راستای قائم، فقط می‌تواند روی برد تابع جدید اثر بگذارد.



۲. **گزینه ۲** با فرض این که  $f(x)=\log(x)$  و  $g(x)=\log(x+2)$  می‌توان دریافت:  $g(x)=f(x+2)$ . برای رسم نمودار تابع  $f(x+2)$  از روی نمودار تابع  $f(x)$ ، کافی است نمودار تابع  $f$  را ۲ واحد در جهت افقی و به سمت چپ منتقل کنیم. لازم به ذکر است تمام دامنه  $f(x+2)$  از ابتدا تا انتها به ۲ واحد چپ‌تر منتقل می‌شوند ولی برد این تابع با برد  $f(x)$  هیچ تفاوتی ندارد.



۳. **گزینه ۴** برای رسم نمودار تابع  $f(x-2)$  از روی نمودار تابع  $f(x)$  کافی است نمودار تابع  $f$  را ۲ واحد در جهت افقی و به سمت راست انتقال دهیم. لازم به ذکر است تمام دامنه  $f(x-2)$  از ابتدا تا انتها به ۲ واحد راست‌تر از دامنه  $f(x)$  منتقل می‌شوند، اما برد  $f(x-2)$  با برد  $f(x)$  هیچ فرقی ندارد.



۴. **گزینه ۱**

**راهنما:** برای رسم نمودارهای ترکیبی (شامل انتقال افقی و عمودی و ...)، ابتدا تکلیف داخل پرانتز جلوی  $f$  را روشن می‌کنیم و سپس سراغ اجزای بیرون پرانتز می‌رویم.

برای رسم نمودار  $f(x+2)+1$  ابتدا نمودار  $f(x+2)$  را رسم می‌کنیم که به همین منظور باید نمودار تابع  $f$  را در جهت افقی و به اندازه ۲ واحد به چپ منتقل کنیم. سپس نمودار حاصل را یک واحد در راستای قائم و به سمت بالا انتقال می‌دهیم. به این ترتیب نمودار  $f(x+2)+1$  رسم می‌شود.



۱۰. گزینه ۳

تذکره

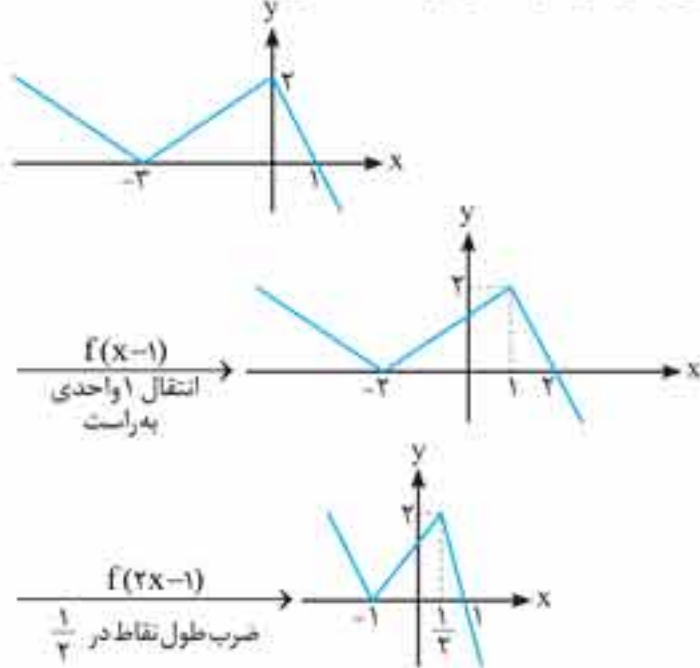
۱ در رسم نمودارهای به فرم  $kf(ax+b)+c$  از روی نمودار  $f(x)$  ابتدا سراغ درون پراتز مقابل  $f$  می‌رویم و سپس به اجزای خارج پراتز می‌پردازیم.

۲ در رسم نمودارهای به فرم  $f(ax+b)$  از روی نمودار  $f(x)$  در صورتی که  $|a| > 1$  نمودار دچار فشردگی (انقباض) افقی می‌شود و در حقیقت دامنه تابع در  $\frac{1}{a}$  ضرب می‌شود نه در  $a$ .

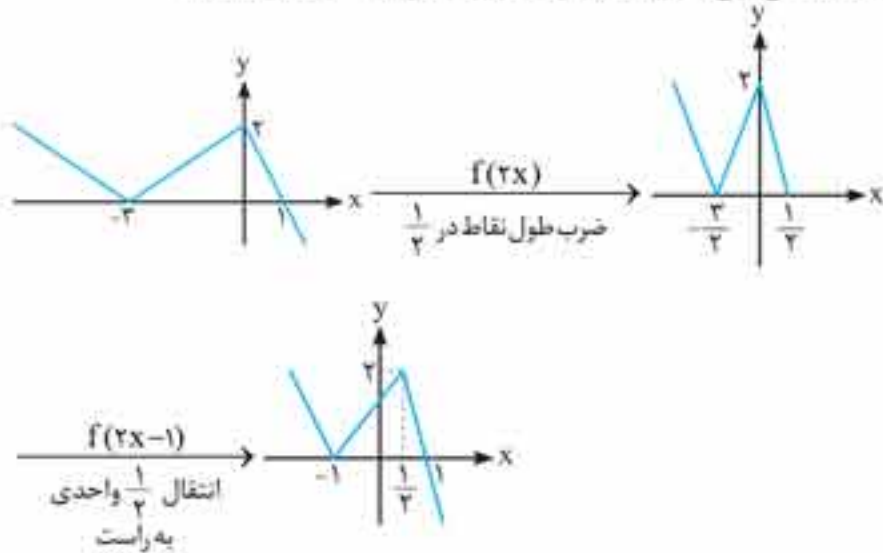
دام آموزشی: بسیاری از دانش‌آموزان برای رسم  $f(ax+b)$

از روی نمودار  $f(x)$  ابتدا طول همه نقاط  $f$  را در  $\frac{1}{a}$  ضرب کرده (انبساط را انقباض را اعمال می‌کنند)، سپس به اندازه  $b$  واحد انتقال افقی را اعمال می‌کنند که این کار غلط است. ابتدا باید انتقال افقی  $b$  واحدی اعمال شده و سپس طول همه نقاط نمودار حاصل در  $\frac{1}{a}$  ضرب شود.

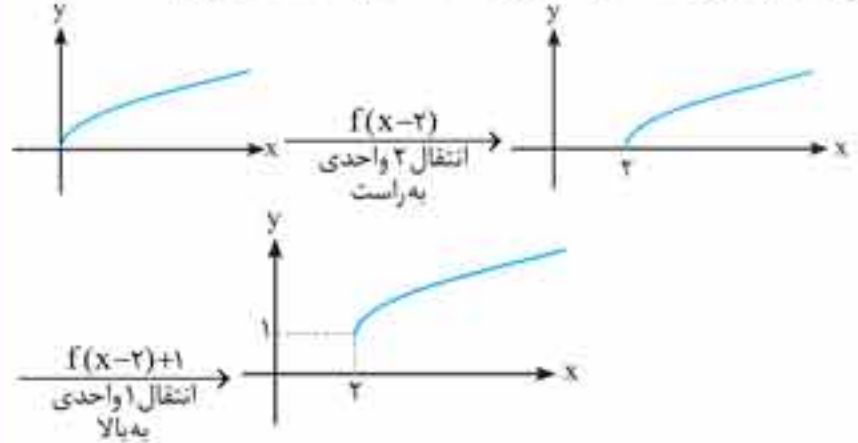
روش اول برای رسم نمودار  $g(x) = f(2x-1)$  از روی نمودار  $f(x)$  ابتدا نمودار  $f(x)$  را ۱ واحد در جهت مثبت محور  $x$  ها انتقال افقی می‌دهیم  $f(x-1)$ . سپس طول همه نقاط نمودار حاصل را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انقباض افقی می‌شود) نمودار حاصله همان  $g(x)$  است.



روش دوم با توجه به این که  $f(2x-1) = f(2(x-\frac{1}{2}))$  ابتدا نمودار  $f(2x)$  را رسم کرده و سپس نمودار حاصل را  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت راست انتقال افقی می‌دهیم. نمودار حاصل همان  $f(2x-1)$  است.



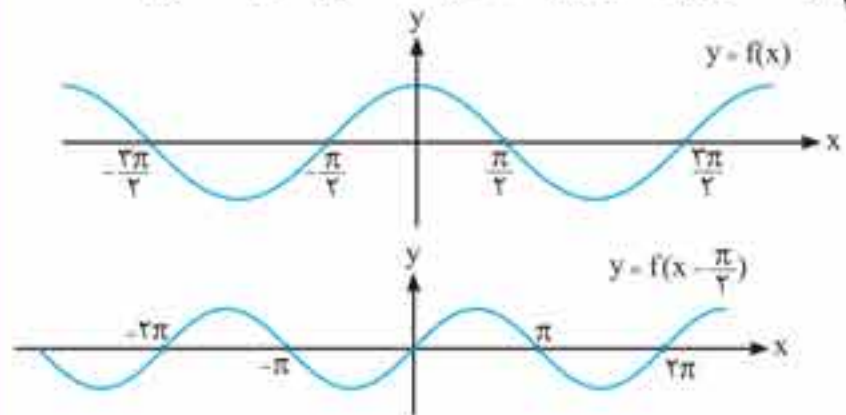
و اما در مورد نمودار صحیح (ب)، اگر تابع اولیه نمودار را  $f(x) = \sqrt{x}$  فرض کنیم، آن‌گاه  $1 + \sqrt{x-2} = f(x-2) + 1$ ، لذا داریم:



۷. گزینه ۲ با فرض این که  $f(x) = \cos x$  باشد، خواهیم داشت:

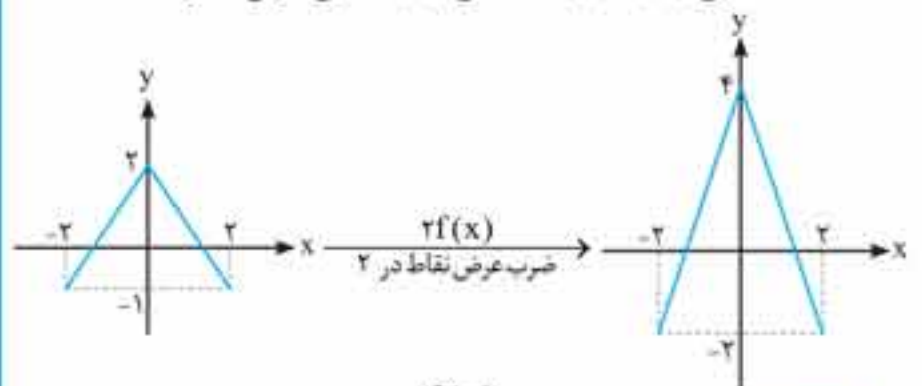
$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = f(x - \frac{\pi}{2})$$

برای رسم نمودار تابع  $f(x - \frac{\pi}{2})$  از روی نمودار  $f(x)$ ، کافی است نمودار  $f$  را  $\frac{\pi}{2}$  واحد در جهت افقی و به سمت راست انتقال دهیم. لذا داریم:



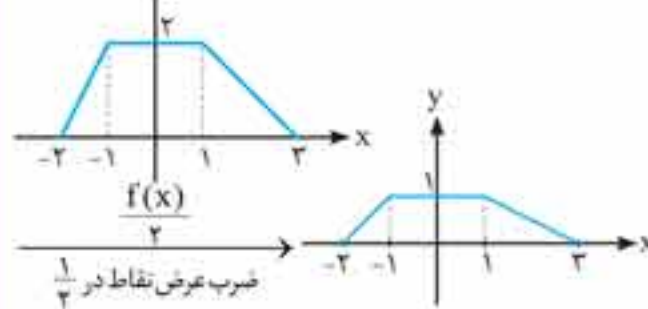
همان‌طور که دیده می‌شود نمودار  $f(x - \frac{\pi}{2})$  بر نمودار تابع  $y = \sin x$  منطبق است.

۸. گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع  $2f(x)$  از روی نمودار تابع  $f(x)$  کافی است عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را در ۲ ضرب کنیم. یعنی عملاً برد تابع را دو برابر می‌کنیم که در این حالت انبساط عمودی رخ می‌دهد. لازم به ذکر است که دامنه تابع  $2f(x)$  با دامنه تابع  $f(x)$  هیچ فرقی ندارد.



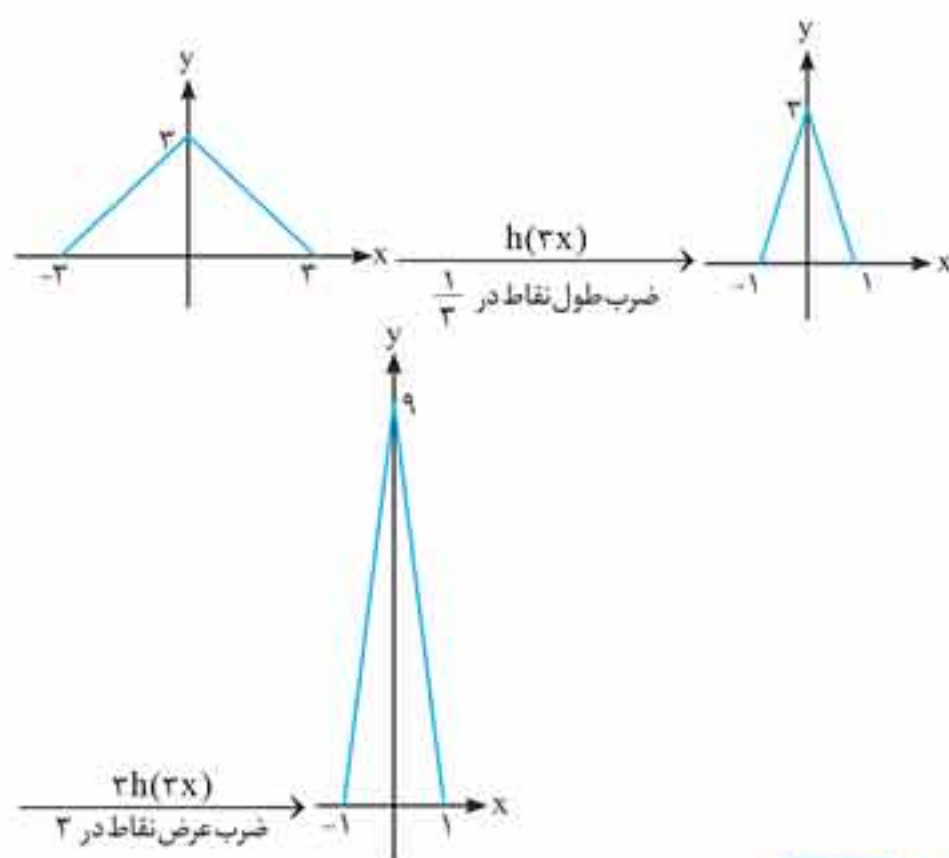
۹. گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع  $\frac{f(x)}{2}$  از روی نمودار  $f(x)$ ، کافی است

عرض نقاط نمودار تابع  $f$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنیم. که در این حالت انقباض عمودی رخ می‌دهد. لازم به ذکر است دامنه تابع  $\frac{f(x)}{2}$  با تابع  $f(x)$  هیچ تفاوتی نخواهد داشت.





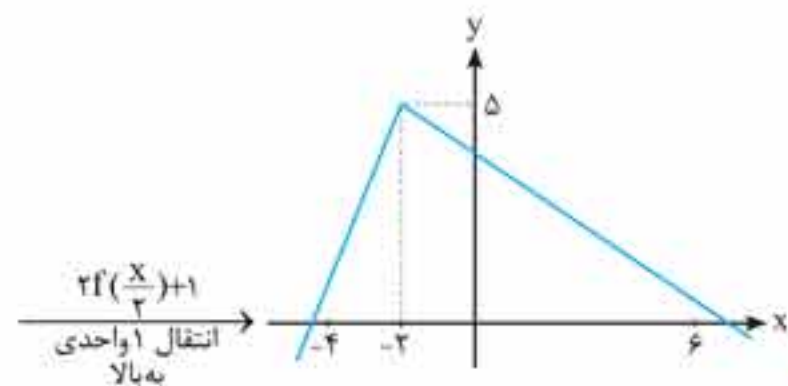
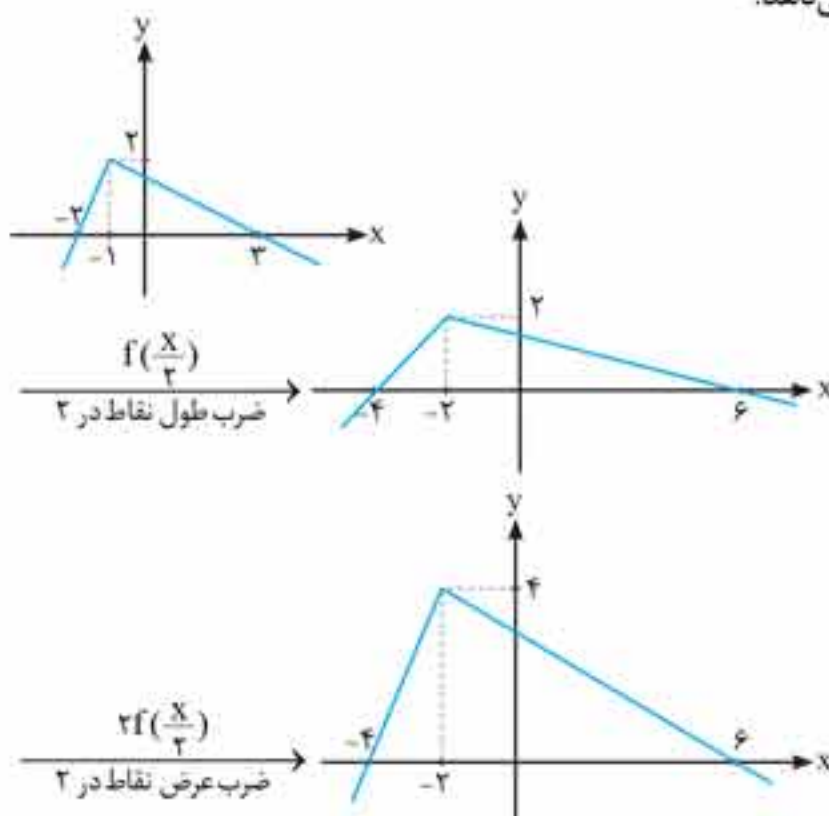
۱۱. **گزینه ۲** برای رسم نمودار  $3h(3x)$  از روی نمودار  $h(x)$  ابتدا نمودار  $h(3x)$  را رسم می‌کنیم که به همین منظور می‌بایست طول همه نقاط نمودار را در  $\frac{1}{3}$  ضرب کنیم سپس عرض نقاط به دست آمده از نمودار جدید را در ۳ ضرب می‌کنیم تا  $3h(3x)$  پدید آید.



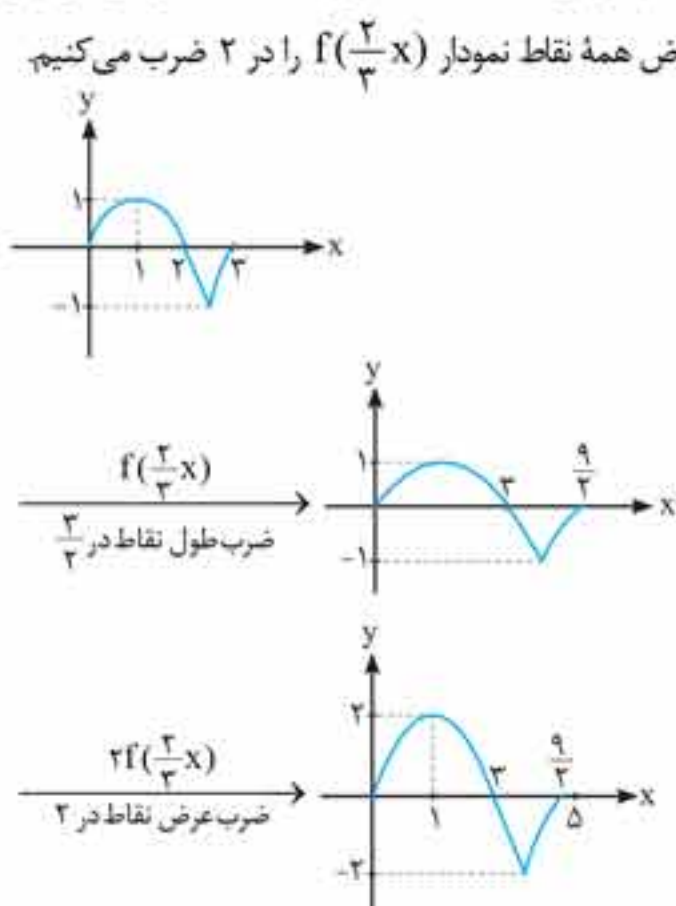
۱۲. **گزینه ۲**

**را تذکر:** در رسم نمودارهای به فرم  $f(ax+b)$  از روی نمودار  $f(x)$  در صورتی که  $|a| < 1$  نمودار دچار کشیدگی (انبساط) افقی می‌شود و در حقیقت دامنه تابع در  $\frac{1}{a}$  ضرب می‌شود نه در  $a$ .

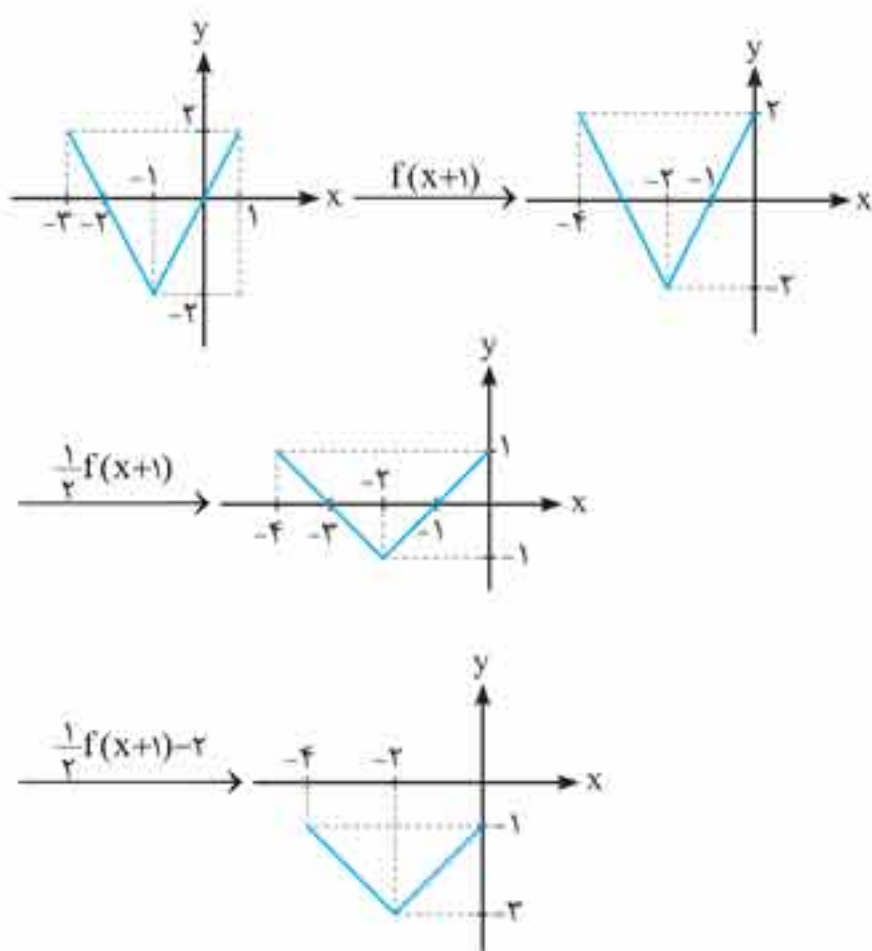
برای رسم نمودار  $g(x)$  ابتدا باید  $f(\frac{x}{3})$  را رسم کنیم. به همین منظور طول همه نقاط نمودار  $f$  را در ۳ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط افقی می‌شود). در گام بعدی، سراغ اجزای خارج پیرانتز می‌رویم. همیشه ضرب بر جمع تقدم دارد. لذا در قدم بعدی باید نمودار  $2f(\frac{x}{3})$  را رسم کنیم. به همین جهت عرض همه نقاط نمودار  $f(\frac{x}{3})$  را در ۲ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط عمودی می‌شود) و در نهایت کل نمودار  $2f(\frac{x}{3})$  را یک واحد در راستای قائم و به سمت بالا منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل،  $g(x)$  را نمایش می‌دهد.

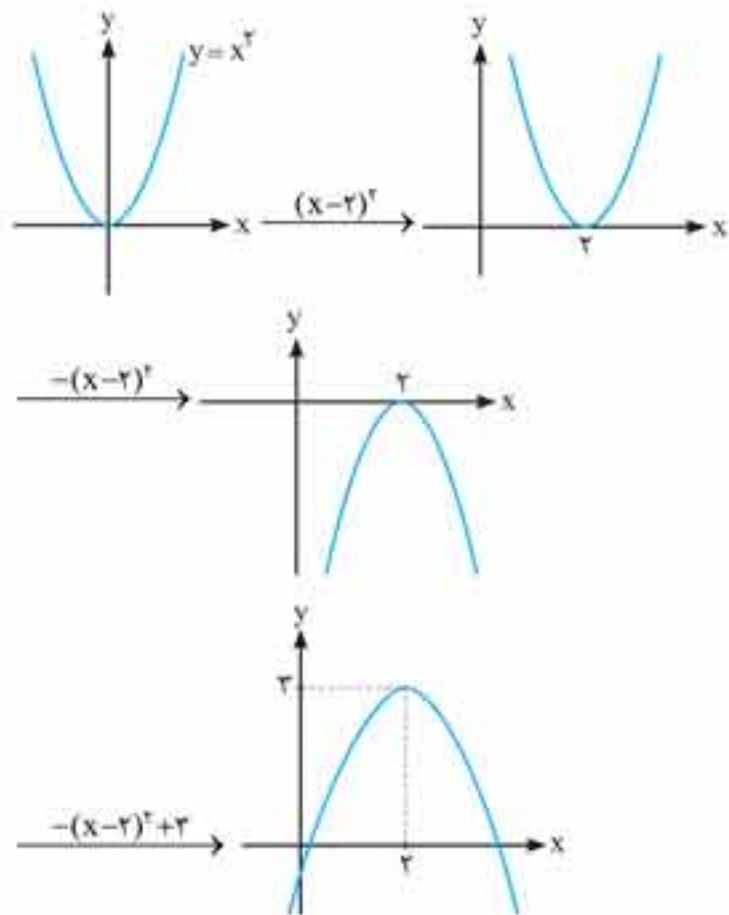


۱۳. **گزینه ۳** برای رسم نمودار  $g(x)$  ابتدا طول همه نقاط نمودار  $f$  را در  $\frac{3}{2}$  ضرب می‌کنیم. عرض همه نقاط نمودار  $f(\frac{2}{3}x)$  را در ۲ ضرب می‌کنیم.



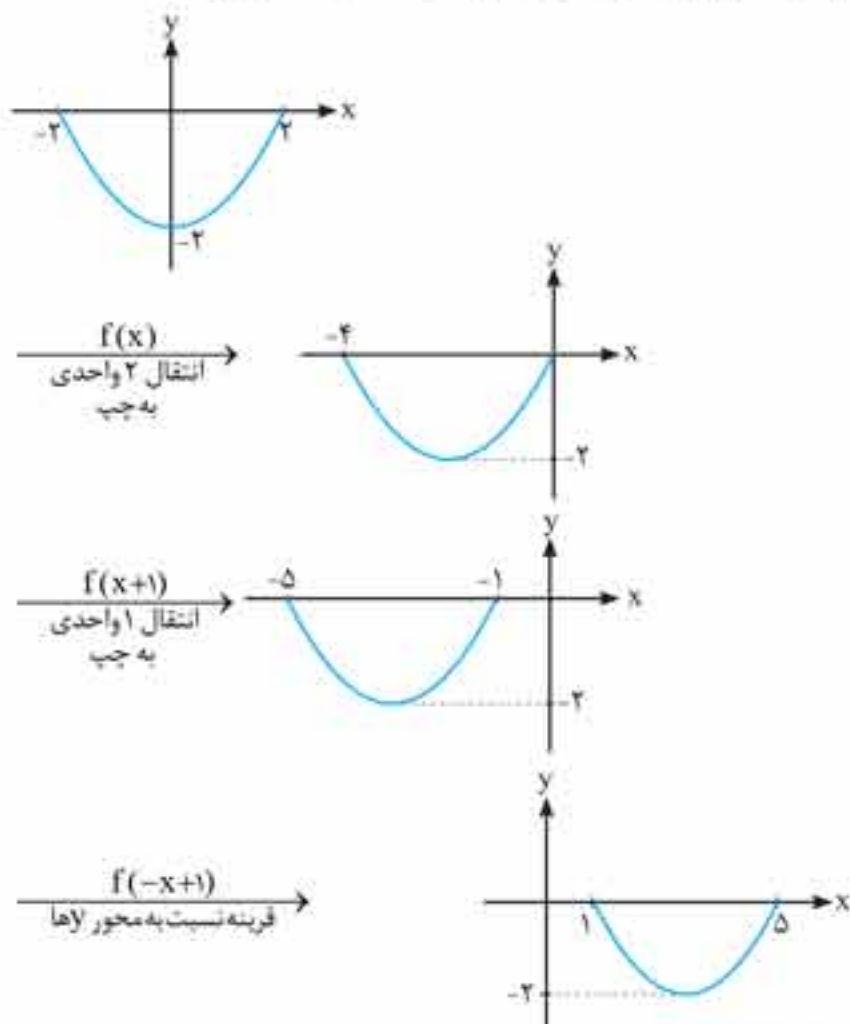
۱۴. **گزینه ۴** برای رسم نمودار  $g(x)$  ابتدا باید  $f(x+1)$  را رسم کنیم. به همین منظور نمودار  $f$  را در جهت افقی و به سمت چپ یک واحد انتقال می‌دهیم. در گام بعدی سراغ اجزای خارج پیرانتز می‌رویم. همیشه ضرب بر جمع تقدم دارد و باید نمودار  $\frac{1}{3}f(x+1)$  را رسم کنیم. به همین جهت عرض همه نقاط نمودار  $f(x+1)$  را در  $\frac{1}{3}$  ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انقباض عمودی می‌شود) و در نهایت کل نمودار  $\frac{1}{3}f(x+1)$  را ۲ واحد و به سمت پایین منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل،  $g(x)$  را نمایش می‌دهد.





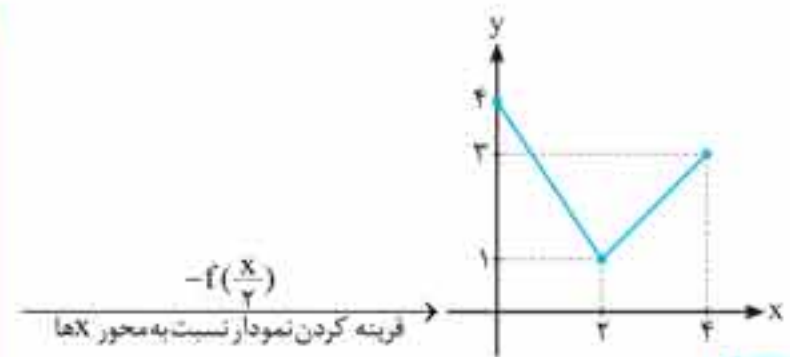
همان طور که واضح است گزینه «۲» پاسخ صحیح مسئله است.

۳۷. **گزینه ۳** ابتدا باید از نمودار داده شده به نمودار  $f(x)$  رسید و سپس نمودار مطلوب را رسم کرد به همین جهت کافی است تابع  $f(x-2)$  را  $2$  واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا نمودار  $f(x)$  پدید آید (دقیقاً معکوس کاری که برای رسیدن از  $f(x)$  به  $f(x-2)$  انجام می دادیم)، حال که نمودار  $f(x)$  را داریم ابتدا آن را  $1$  واحد به سمت چپ انتقال می دهیم سپس نمودار حاصل را نسبت به محور  $y$ ها قرینه می کنیم تا  $f(-x+1)$  ظاهر گردد.



۳۸. **گزینه ۳** روش اول برای حل این گونه مسائل باید هر دو نمودار را از نظر انتقال های افقی و عمودی و انقباضها و انقباض های افقی و عمودی بررسی کرد.

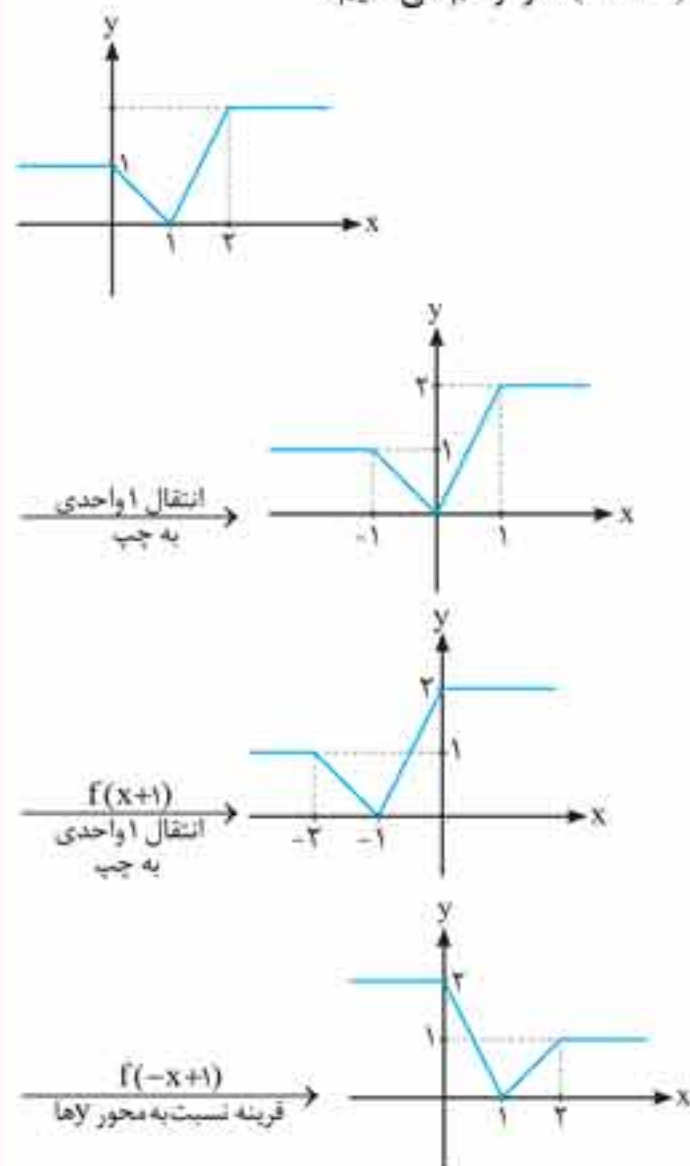
همان طور که در شکل دیده می شود، نمودار دچار هیچ فشردگی یا کشیدگی نشده است. بنابراین می توان دریافت که:



۳۵. **گزینه ۴**

**دام آموزشی:** با توجه به این که  $f(1-x) = f(-(x-1))$ ، بسیاری از دانش آموزان با قرینه کردن نمودار  $f(x-1)$  نسبت به محور  $y$ ها به نمودار  $f(1-x)$  دست یافته اند و گزینه «۳» را انتخاب می کنند. باید بدانید که در عملیات های رسم نمودار هر کاری که داریم فقط و فقط با خود  $x$  است نه با  $(x-1)$  یا ...

برای رسم نمودار  $f(1-x)$ ، ابتدا باید با استفاده از نمودار  $f(x-1)$  به نمودار  $f(x)$  دست یابیم. به همین جهت کافی است نمودار  $f(x-1)$  را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا  $f(x)$  به دست آید. حال که  $f(x)$  را داریم،  $f(-x+1)$  را رسم می کنیم:



۳۶. **گزینه ۲** ابتدا با استفاده از ضابطه  $f(2-2x)$ ، ضابطه  $f(x)$  را به دست آورده و سپس ضابطه  $3-f(x-1)$  را می نویسیم تا بفهمیم شکل نمودار به چه صورتی است:

$$f(2-2x) = (2x-1)^2$$

$$2-2x=z \Rightarrow x = \frac{2-z}{2} \Rightarrow f(z) = \left(2\left(\frac{2-z}{2}\right) - 1\right)^2 \Rightarrow f(z) = (1-z)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (1-x)^2$$

$$g(x) = 3 - f(x-1) = 3 - (1 - (x-1))^2 = 3 - (2-x)^2$$

$$\Rightarrow g(x) = -(x-2)^2 + 3$$

حال نمودار  $g(x)$  را از روی نمودار  $y = x^2$  رسم می کنیم:



۱۰۰. **گزینه ۳** ضابطه معکوس تابع را می‌نویسیم و از برابری

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \text{تعداد نقاط برخورد را پیدا می‌کنیم:}$$

$$y = -(x+2)^2 - 2 \Rightarrow y+2 = -(x+2)^2 \Rightarrow x+2 = -\sqrt{y+2}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{y+2} - 2 \Rightarrow y = -\sqrt{x+2} - 2$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow -(x+2)^2 - 2 = -\sqrt{x+2} - 2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (x+2)^4 = (x+2)$$

$$\Rightarrow (x+2) = 0 \text{ یا } (x+2)^3 = 1 \Rightarrow x+2 = 0 \text{ یا } x+2 = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = -3$$

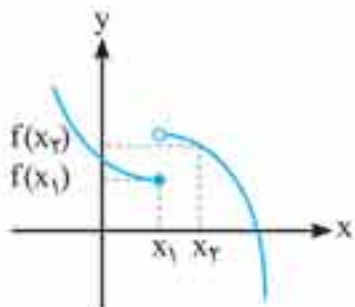
**دقت کنید:** محل برخورد تابع با وارونش ممکن است روی نیمساز ربع اول و سوم قرار نداشته باشد.

بنابراین این دو تابع در سه نقطه متقاطع‌اند.

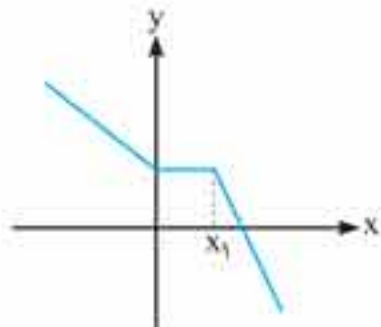
۱۰۱. **گزینه ۳** تابع اکیداً نزولی تابعی است که هرچه مقدار  $x$  آن افزایش

یابد، مقدار  $f(x)$  آن کاهش یابد. یا به زبان ریاضی:

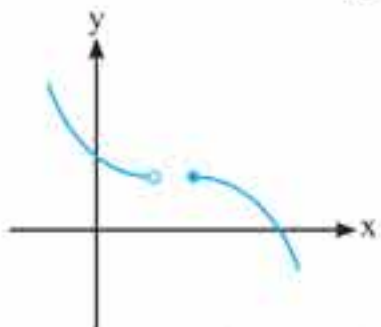
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$  طبق تعریف، شکل‌ها را بررسی می‌کنیم. **گزینه «۱»** همان‌طور که در شکل می‌بینیم:  $x_2 > x_1$  اما  $f(x_2) > f(x_1)$ ، بنابراین این تابع اکیداً نزولی نیست.



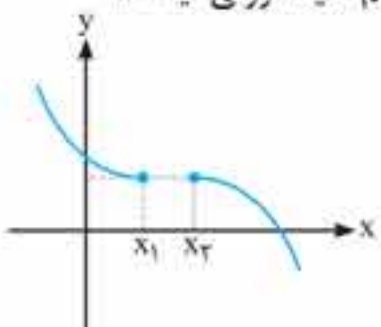
**گزینه «۲»:** این تابع در بازه  $[0, x_1]$  مقدار ثابتی را پذیرفته است. به همین دلیل این تابع نیز نزولی اکید نیست.



**گزینه «۳»:** در تمامی نقاط این نمودار کاهش مقدار  $f(x)$  از چپ به راست دیده می‌شود. پس این تابع اکیداً نزولی است.



**گزینه «۴»:** در دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  داریم:  $f(x_1) = f(x_2)$  که این با تعریف تابع اکیداً نزولی مغایرت دارد، پس این تابع هم اکیداً نزولی نیست.

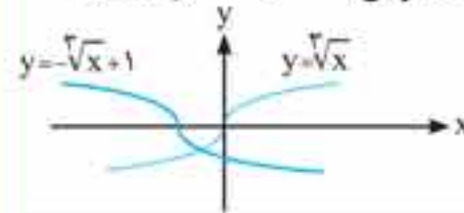


۱۰۲. **گزینه ۳** تابع اکیداً صعودی تابعی است که هرچه مقدار  $x$  آن افزایش یابد، مقدار  $y$  یا همان  $f(x)$  آن نیز افزایش یابد. یا به زبان ریاضی  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$  یعنی نقاط با عرض یکسان نباید در

۹۶. **گزینه ۲** روش اول ابتدا ضابطه تابع معکوس  $y = -x^2 - 1$  را

نوشته، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$y = -x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = -x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{y+1} \Rightarrow y = -\sqrt{x+1}$  برای رسم نمودار  $y = -\sqrt{x+1}$  کافی است نمودار  $y = \sqrt{x}$  را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی داده و سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم. نمودار حاصل همان نمودار تابع معکوس  $y = -x^2 - 1$  است.

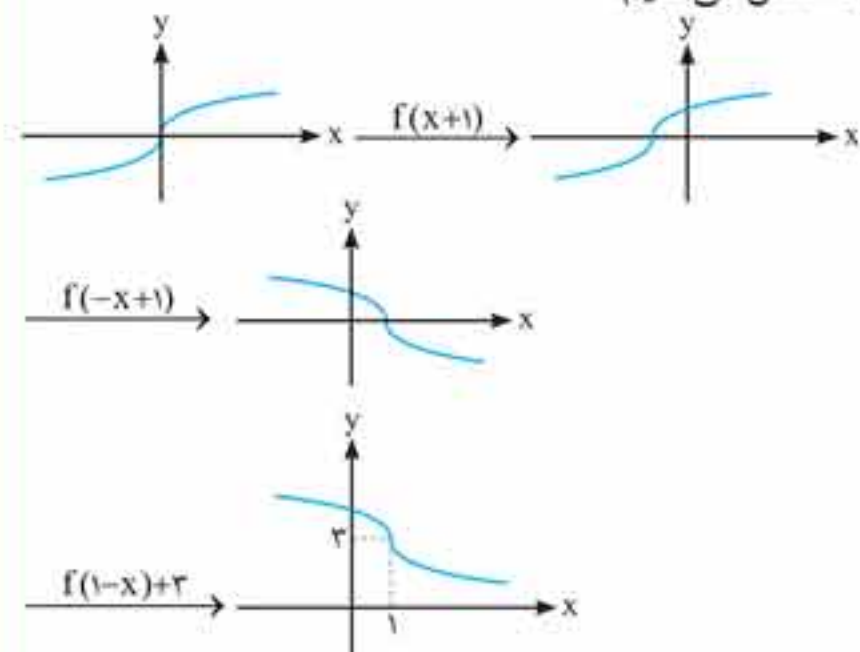


**نکته:** به طور کلی نمودار تابع  $y = \sqrt[3]{x}$  به شکل زیر است:



**روش دوم**  
 $f(-1) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = -1$   
 $f(0) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 0$   
 این دو نقطه را در شکل‌ها امتحان می‌کنیم که فقط در گزینه «۲» صدق می‌کنند.

۹۷. **گزینه ۴** روش اول با فرض  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  به عنوان تابع اولیه باید نمودار  $f(1-x) + 3$  را رسم کنیم. به همین منظور ابتدا نمودار  $f$  را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی داده  $f(x+1)$  و سپس نسبت به محور  $y$  ها قرینه می‌کنیم ( $f(-x+1)$ ) و در نهایت سه واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



**روش دوم** دو نقطه  $f(1) = 3$  و  $f(0) = 4$  را در شکل‌های گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که فقط در گزینه (۴) صدق می‌کنند.

۹۸. **گزینه ۱** نوشتن ضابطه معکوس این تابع سخت است. نیازی هم به آن نداریم. کافی است جای طول و عرض نقاط گزینه‌ها را عوض کرده و در ضابطه تابع  $f(x)$  قرار دهیم (زیرا اگر  $(y, x) \in f^{-1}$  آن‌گاه  $(x, y) \in f$ ). اگر نقاط  $(-2, -9)$ ،  $(3, 1)$ ،  $(0, 3)$  و  $(-2, 11)$  را در ضابطه  $f(x) = x^2 + x + 1$  قرار دهیم، خواهیم دید که تنها نقطه  $(-2, -9)$  در ضابطه صدق می‌کند، بنابراین معکوس این تابع از نقطه  $(-9, -2)$  می‌گذرد.

۹۹. **گزینه ۴** اگر تابع معکوس  $y$  از نقطه  $(4, 2)$  بگذرد، آن‌گاه خود  $y$  از  $(2, 4)$  می‌گذرد، بنابراین  $(2, 4)$  را در ضابطه  $y = x^2 + ax - 4$  قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 + ax - 4 \xrightarrow{(2,4)} 4 = (2)^2 + 2a - 4 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$



۱۳۴. **گزینه ۳** هر دو تابع  $y = x$  و  $y = \sqrt{x}$  در دامنه خود اکیداً صعودی اند، بنابراین  $f(x) = x + \sqrt{x}$  نیز اکیداً صعودی خواهد بود اما تابع  $g(x)$  یکنوا نیست، چون  $g(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}$  که اگر  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$  باشد،  $g$  نزولی و به ازای  $x > \frac{1}{4}$  صعودی اکید خواهد بود.

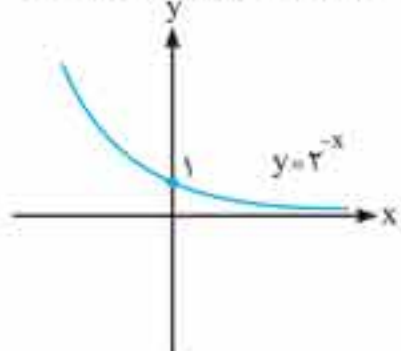
۱۳۵. **گزینه ۱** تابع  $y = x^2 + 1$  اکیداً صعودی و تابع  $g$  اکیداً نزولی است، بنابراین  $g(x^2 + 1)$  ترکیب یک تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی خواهد بود، پس اکیداً نزولی می‌باشد. انتقال یک واحدی نیز تأثیری در یکنوایی  $g(x^2 + 1)$  نداشته و در نتیجه  $f(x)$  اکیداً نزولی است.

۱۳۶. **گزینه ۲** تابع  $y = \frac{\pi}{x^2 + 2}$  در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً نزولی است، زیرا با افزایش مقدار  $x$  مقدار  $y$  کاهش می‌یابد و همواره  $0 < \frac{\pi}{x^2 + 2} \leq \frac{\pi}{2}$  است که تابع  $\cos x$  در بازه  $(0, \frac{\pi}{2}]$  اکیداً نزولی

است. بنابراین  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2}$  در بازه  $[0, +\infty)$  ترکیب دو تابع اکیداً نزولی می‌باشد و در نتیجه اکیداً صعودی خواهد بود. در بازه  $(-\infty, 0)$  تابع  $y = \frac{\pi}{x^2 + 2}$  صعودی است ولی تابع  $\cos x$  در

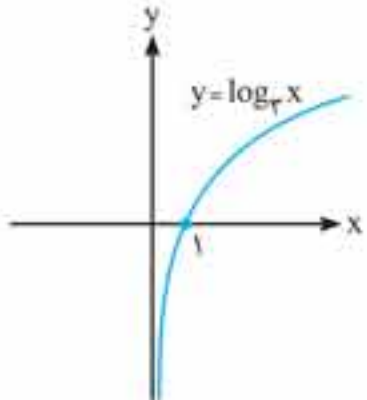
بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  باز هم اکیداً نزولی است، بنابراین  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x^2 + 2}$  در بازه  $(-\infty, 0)$  ترکیب یک تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی می‌باشد و در نتیجه اکیداً نزولی خواهد بود.

۱۳۷. **گزینه ۱** تابع  $f \circ g$  نزولی است، پس یکی از توابع باید صعودی و دیگری باید نزولی باشد. تابع  $f(x) = 2^{-x}$  مطابق شکل نزولی است.



پس تابع  $g$  باید صعودی باشد. با توجه به این که  $2 < 3 < 4$ ، لذا  $f(2) \leq f(3) \leq f(4)$  یعنی  $1 \leq a \leq 5$ ، بنابراین حداکثر مقدار طبیعی  $a$  برابر با ۵ است.

۱۳۸. **گزینه ۳** برای آن که ترکیب دو تابع اکیداً نزولی شود، باید یکی از آن‌ها اکیداً صعودی و دیگری اکیداً نزولی باشد. تابع  $y = \log_3 x$  در کل دامنه‌اش اکیداً صعودی می‌باشد.



بنابراین  $y = x^2 - 4x - 5$  باید نزولی باشد. برابر  $y = (x-2)^2 - 9$  که نمودار یک سهمی روبه بالا با رأس  $(2, -9)$  است در واقع این تابع در بازه  $(-\infty, +2]$  اکیداً نزولی است. حل مسئله هنوز تمام نشده است. باید بررسی کنیم که به ازای چه  $x$  هایی از بازه  $(-\infty, 2]$  جلوی لگاریتم مثبت می‌شود، بنابراین داریم:

۱۳۰. **گزینه ۳**

**راهبرد:** اگر توابع  $f$  و  $g$  اکیداً صعودی باشند،  $f + g$  نیز اکیداً صعودی خواهد بود و اگر  $f$  و  $g$  اکیداً نزولی باشند،  $f + g$  نیز اکیداً نزولی خواهد بود. اما در مورد توابع  $f - g$ ،  $f \times g$  و  $f^2$  حکم کلی وجود ندارد.

با توجه به نکته فوق، تابع  $f + g$  در  $D_f \cap D_g$  اکیداً صعودی است.

**فرمول ممنوع:** به کمک مثال نقض گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» را رد می‌کنیم. فرض کنیم  $f(x) = g(x) = x$  (هر دو اکیداً صعودی‌اند) باشد، در این صورت داریم:

- هم صعودی و هم نزولی  $\otimes$  **گزینه «۱»**
- نه صعودی و نه نزولی  $\otimes$  **گزینه «۲»**
- نه صعودی و نه نزولی  $\otimes$  **گزینه «۴»**

۱۳۱. **گزینه ۳**

اگر تابع  $g$  نزولی باشد، آن‌گاه  $-g$  حتماً صعودی خواهد بود (زیرا نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌شود). بنابراین تابع  $f + (-g) = f - g$  جمع دو تابع صعودی است، پس صعودی خواهد بود. اما در مورد تابع  $\frac{f}{g}$  نمی‌توان حکم کلی صادر کرد.

۱۳۲. **گزینه ۲**

**نکته:** اگر دو تابع  $f$  و  $g$  هر دو صعودی اکید و یا نزولی اکید باشند، آن‌گاه  $f \circ g$  و  $g \circ f$  صعودی اکید خواهند بود، یعنی:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{نزولی}]{g} g(x_2) < g(x_1) \\ \xrightarrow[\text{نزولی}]{f} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \\ \Rightarrow f \circ g(x_2) > f \circ g(x_1) \\ \\ x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{صعودی}]{g} g(x_2) > g(x_1) \\ \xrightarrow[\text{صعودی}]{f} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \\ \Rightarrow f \circ g(x_2) > f \circ g(x_1) \end{array} \right.$$

اگر یکی از  $f$  و  $g$  صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد،  $f \circ g$  و  $g \circ f$  هر دو نزولی اکید خواهند بود، یعنی:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{نزولی}]{g} g(x_2) < g(x_1) \\ \xrightarrow[\text{صعودی}]{f} f(g(x_2)) < f(g(x_1)) \\ \Rightarrow f \circ g(x_2) < f \circ g(x_1) \\ \\ x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{صعودی}]{g} g(x_2) > g(x_1) \\ \xrightarrow[\text{نزولی}]{f} f(g(x_2)) < f(g(x_1)) \\ \Rightarrow f \circ g(x_2) < f \circ g(x_1) \end{array} \right.$$

با توجه به نکته فوق، توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  نزولی اکید و تابع‌های  $f \circ f$  و  $g \circ g$  صعودی اکید خواهند بود، پس فقط موارد (الف) و (ت) صحیح‌اند.

۱۳۳. **گزینه ۳** توابع  $y = x$  و  $y = f(x)$  هر دو اکیداً صعودی هستند و جمع دو تابع اکیداً صعودی نیز اکیداً صعودی خواهد بود، بنابراین گزینه «۳» صحیح است.



$$f(x) = x^2 + ax^2 + x + 4 \xrightarrow{f(1)=0} 1^2 + a(1)^2 + 1 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + a + 1 + 4 = 0 \Rightarrow a = -6$$

۱۵۲. **گزینه ۱** فرض کنیم مقداری که به چندجمله‌ای  $3x^2 - 5x^2 + 2x$  اضافه می‌شود تا بر  $x - 2$  بخش‌پذیر شود، برابر با  $a$  باشد. یعنی چندجمله‌ای جدید ما  $f(x) = 3x^2 - 5x^2 + 2x + a$  است که بر  $x - 2$  بخش‌پذیر است. بنابراین کافی است رابطه  $f(2) = 0$  را تشکیل دهیم تا مقدار  $a$  به دست آید:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 3(2)^2 - 5(2)^2 + 2(2) + a = 0 \Rightarrow 24 - 20 + 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow a = -8$$

۱۵۳. **گزینه ۱** حاصل چندجمله‌ای به ازای  $x = -a$  باید صفر شود، یعنی به جای  $x$ ،  $-a$  گذاشته و حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x^2 + x^2 + ax - 1$$

$$\xrightarrow{f(-a)=0} (-a)^2 + (-a)^2 + a(-a) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -a^2 + a^2 - a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a = -1$$

۱۵۴. **گزینه ۲** برای فهم بهتر  $f(x^2 - 1)$  را تابع جدیدی مانند  $g(x)$  در نظر گرفته و ضابطه تابع  $g(x) = f(x^2 - 1)$  را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + k$$

برای آن که  $g(x)$  بر  $x - 2$  بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:  $g(2) = 0$ . یعنی در ضابطه  $g$  به جای  $x$ ،  $2$  می‌گذاریم و حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقدار  $k$  به دست آید:

$$g(2) = 0 \Rightarrow 2^2 - 1 + k = 0 \Rightarrow 3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$$

۱۵۵. **گزینه ۱** باید حاصل چندجمله‌ای به ازای ریشه مقسوم‌علیه یعنی  $-2$  صفر شود، یعنی به جای  $x$ ،  $-2$  می‌گذاریم و عبارت را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 5x^2 + bx - 2$$

$$\xrightarrow{f(-2)=0} a(-2)^2 + 5(-2)^2 + b(-2) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -8a + 20 - 2b - 2 = 0 \Rightarrow 8a + 2b = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای بخش‌پذیری  $f(x)$  بر  $x + 2$  این است که:  $4a + b = 0$ .

۱۵۶. **گزینه ۱** مقدار چندجمله‌ای به ازای  $x = \alpha + \beta$  برابر با صفر است. با جای‌گذاری  $\alpha + \beta$  به جای  $x$  داریم:

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) + k$$

$$\xrightarrow{f(\alpha+\beta)=0} ((\alpha + \beta) - \alpha)((\alpha + \beta) - \beta) + k = 0$$

$$\Rightarrow \beta\alpha + k = 0 \Rightarrow k = -\alpha\beta$$

۱۵۷. **گزینه ۱** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا مشخص شود که مقدار  $f$  به ازای ریشه کدام گزینه صفر می‌شود.

**گزینه ۱:** حاصل چندجمله‌ای  $x^2 + 5x^2 + x - 10$  به ازای  $x = -2$  برابر است با:  $(-2)^2 + 5(-2)^2 + (-2) - 10 = 0$ . بنابراین گزینه «۱» درست است.

**گزینه ۲:** مقدار  $f(6)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(6) = 6^2 + 5(6)^2 + 6 - 10 = 392$$

پس این گزینه نادرست است.

**گزینه ۳:** مقدار  $f(-6)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(-6) = (-6)^2 + 5(-6)^2 + (-6) - 10 = -52$$

نادرست است.

**گزینه ۴:** مقدار  $f(-3)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(-3) = (-3)^2 + 5(-3)^2 + (-3) - 10 = 5$$

نادرست است.

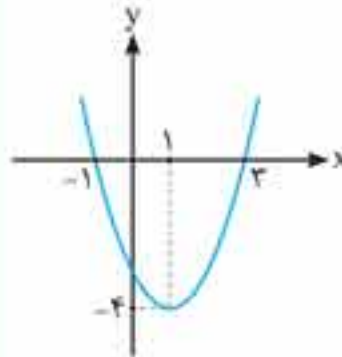
پس تابع اکیداً نزولی است و داریم:

$$f(5) \leq f(x) \leq f(-2) \Rightarrow \sqrt{11} - \sqrt{7} \leq f(x) \leq 2$$

$$\Rightarrow 0.6 \leq f(x) \leq 2$$

که در این بازه تنها دو عدد طبیعی ۱ و ۲ یافت می‌شود.

۱۴۶. **گزینه ۱** با توجه به این که  $x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$  نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



دامنه  $2 < |x - 1| < 3$  است، یعنی  $2 < x - 1 < 3$  و در نتیجه  $-1 < x < 3$ . یعنی دقیقاً بین نقاط برخورد تابع با محور  $x$  ها. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودار در این بازه، نه صعودی و نه نزولی است اما مقدار آن همواره منفی است. لذا گزینه «۱» صحیح است.

۱۴۷. **گزینه ۱**

**را تذکر:** باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $ax + b$  برابر با  $f\left(-\frac{b}{a}\right)$  است.

برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $2x - 4$ ، کافی است  $f(2)$  را حساب کنیم: (ریشه  $2x - 4$  برابر با ۲ است.)

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 8 - 12 + 8 - 5 = -1$$

۱۴۸. **گزینه ۴**

**نکته:** باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $ax + b$  و  $x + \frac{b}{a}$  یکسان است.

ریشه هر دو عبارت  $3x - 1$  و  $x - \frac{1}{3}$  یکسان و برابر با  $\frac{1}{3}$  است، یعنی باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر هر دو عبارت  $3x - 1$  و  $x - \frac{1}{3}$  همان  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  یا  $R$  است.

پس گزینه «۴» صحیح است.

۱۴۹. **گزینه ۲** برای محاسبه باقی‌مانده باید ریشه مقسوم‌علیه را به دست آوریم و آن را در  $f$  قرار دهیم. یعنی در ضابطه  $f(x)$ ، به جای  $x$ ،  $-1$  بگذاریم و در نهایت حاصل را برابر با ۴ قرار دهیم و  $a$  را حساب می‌کنیم:

$$f(-1) = 4 \Rightarrow (-1)^4 - a(-1)^2 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4$$

$$\Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow 3 - a = 4 \Rightarrow a = -1$$

۱۵۰. **گزینه ۴** ریشه مقسوم‌علیه  $(x - a)$  را به دست می‌آوریم و آن را در

$$f(x) = x^2 - 2x - 27$$
 قرار می‌دهیم. حاصل باید برابر ۸ شود:

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$f(a) = 8 \Rightarrow a^2 - 2a - 27 = 8 \Rightarrow a^2 - 2a - 35 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 7)(a + 5) = 0 \Rightarrow a = 7, -5 \xrightarrow{a > 0} a = 7$$

۱۵۱. **گزینه ۴**

**راهیبرد:** برای آن که چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $ax + b$  بخش‌پذیر

$$باشد، کافی است داشته باشیم:  $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ .$$

حاصل چندجمله‌ای به ازای  $x = 1$  باید صفر شود، پس به جای  $x$ ،  $1$  می‌گذاریم و حاصل را مساوی صفر قرار داده و  $a$  را پیدا می‌کنیم:



$$f(1) = 2 \Rightarrow 1^2 + m(1) + n = 2 \Rightarrow m + n = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} -3m = 6 \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow n = 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$x - 3 \text{ بر باقی مانده بر } f(3) = 3^2 - 2(3) + 4 = 25$$

۱۶۲. **گزینه ۳** با توجه به این که  $f(1) = 1$ ،  $f(2) = 4$  و  $f(3) = 9$ ، با جای گذاری مقادیر ۱، ۲ و ۳ در ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $a$ ،  $b$  و  $c$  را به دست آورده و سپس باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای بر  $x + 1$  یا همان  $f(-1)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1^2 + a(1)^2 + b(1) + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow 2^2 + a(2)^2 + b(2) + c = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = -4 \quad (2)$$

$$f(3) = 9 \Rightarrow 3^2 + a(3)^2 + b(3) + c = 9$$

$$\Rightarrow 9a + 3b + c = -18 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} a = -5, b = 11, c = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 5x^2 + 11x - 6$$

۱۶۳. **گزینه ۲** برای بخش پذیر  $f(x)$  بر  $x + 1$  باقی مانده بر  $f(-1) = (-1)^2 - 5(-1)^2 + 11(-1) - 6 = -23$

داشته باشیم:  $f\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = 0$  یا  $f(\tan \alpha) = 0$ .

بنابراین با جای گذاری  $x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  داریم:

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 \cos^2 \alpha - m\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

$$\xrightarrow{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \sin^2 \alpha - 2m \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \alpha - 2m \sin^2 \alpha = 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha = m \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow m = \sin \alpha$$

۱۶۴. **گزینه ۲** با توجه به این که  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ، می‌توان گفت که  $f(x)$  هم بر  $x - 2$  و هم بر  $x + 2$  بخش پذیر است. بنابراین:  $f(2) = f(-2) = 0$ . حال با جای گذاری  $x = 2$  و  $x = -2$  مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست می‌آوریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^4 + 4a(2)^2 + 2b(2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a + 4b = -17 \quad (1)$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^4 + 4a(-2)^2 + 2b(-2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a - 4b = -17 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به (1), (2) داریم}} b = 0, a = -\frac{17}{16} \Rightarrow a + b = -\frac{17}{16}$$

۱۶۵. **گزینه ۴** می‌دانیم:  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ ، بنابراین  $f(x)$  هم بر  $x - 1$  و هم بر  $x - 2$  بخش پذیر است و داریم:  $f(1) = f(2) = 0$ . حال با جای گذاری  $x = 1$  و  $x = 2$  در ضابطه  $f$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - a(1)^2 + 5(1)^2 - 9(1) + b = 0 \Rightarrow b - a - 3 = 0 \quad (1)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^4 - a(2)^2 + 5(2)^2 - 9(2) + b = 0$$

$$\Rightarrow b - 4a + 18 = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = 3, b = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

۱۶۶. **گزینه ۱** باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - a$  برابر با  $R$  یعنی  $f(a) = R$  است. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + a$  برابر است با:  $f(-a)$ . با استفاده از فرضیات مسئله  $f(-a)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) + f(-x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

$$\xrightarrow{x=a} f(-a) = f(a) \Rightarrow f(-a) = R$$

۱۵۸. **گزینه ۳**

**راهنما:** هر چندجمله‌ای که مجموع ضرایب تمامی جملات آن برابر با صفر باشد بر  $(x - 1)$  بخش پذیر است و هر چندجمله‌ای که مجموع ضرایب جملات با درجه فرد آن برابر با مجموع ضرایب جملات با درجه زوج آن باشد بر  $(x + 1)$  بخش پذیر است. (توجه داشته باشید که عدد ثابت در هر چندجمله‌ای ضریب  $x^0$  محسوب می‌شود و در حقیقت ضریب جمله‌ای با درجه زوج است.)

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

**گزینه‌های «۱» و «۲»:** با توجه به این که مجموع ضرایب جملات این چندجمله‌ای برابر صفر است، پس بر  $(x - 1)$  بخش پذیر است و چون مجموع ضرایب جملات درجه فرد با مجموع ضرایب جملات درجه زوج برابر است، پس بر  $x + 1$  نیز بخش پذیر است. (اگر از راهنما استفاده نکنیم می‌توانیم  $f(1)$  و  $f(-1)$  را حساب کنیم.)

**گزینه «۳»:** مقدار  $f(3)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(3) = 3^3 + 2(3)^2 - 3 - 2 = 40$$

پس این عبارت بر  $x - 3$  بخش پذیر نیست.

**گزینه «۴»:** مقدار  $f(-2)$  را حساب می‌کنیم:

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$$

پس این عبارت بر  $x + 2$  بخش پذیر است.

لذا گزینه «۳» درست است.

۱۵۹. **گزینه ۲**

با توجه به فرض مسئله، روابط  $f(1) = 0$  و  $f(-2) = 33$  برای چندجمله‌ای گزینه صحیح می‌بایست صدق کنند، بنابراین همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. **گزینه «۱»:**

$$f(1) = 1^2 - 5(1) + 4 = 0, f(-2) = (-2)^2 - 5(-2) + 4 = 18$$

پس این گزینه نادرست است.

**گزینه «۲»:**

$$f(1) = 1^2 - 1 \cdot (1) + 9 = 9, f(-2) = (-2)^2 - 1 \cdot (-2) + 9 = 33$$

این گزینه درست است.

**گزینه «۳»:**

$$f(1) = 1^2 - 4(1) + 3 = 0, f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 3 = 15$$

پس این گزینه نیز نادرست است.

**گزینه «۴»:**

$$f(1) = 1^2 - 9(1) + 8 = 0, f(-2) = (-2)^2 - 9(-2) + 8 = 30$$

پس این گزینه هم نادرست است.

۱۶۰. **گزینه ۴** با توجه به این که  $f(-1) = 2$ ، با جای گذاری  $-1$  در  $f(x)$  مقدار  $m$  را به دست آورده و سپس باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای بر  $x - 1$  یا همان  $f(1)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-1) = 2 \Rightarrow 2(-1)^4 + m(-1) + 2 = 2 \Rightarrow -m = -2 \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^4 + 2x + 2$$

$$x - 1 \text{ باقی مانده بر } f(1) = 2(1)^4 + 2(1) + 2 = 6$$

۱۶۱. **گزینه ۳** با استفاده از اطلاعات مسئله می‌توان گفت:  $f(-2) = 0$  و  $f(1) = 3$ . با جای گذاری  $-2$  و  $1$  در چندجمله‌ای، مقادیر  $m$  و  $n$  را به دست آورده و سپس باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای بر  $x - 3$  یا همان  $f(3)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^2 + m(-2) + n = 0 \Rightarrow -2m + n = 8 \quad (1)$$



از دل  $f(x)$  یک  $(x-1)$  بیرون کشیدیم. حال برای آن که  $f(x)$  بر  $(x-1)^2$  بخش پذیر باشد:

باید پرانتز دوم یا همان  $g(x) = ax^2 + (a+4)x + a - 10$  نیز بر  $x-1$  بخش پذیر شود یعنی رابطه  $g(1) = 0$  باید برقرار باشد:

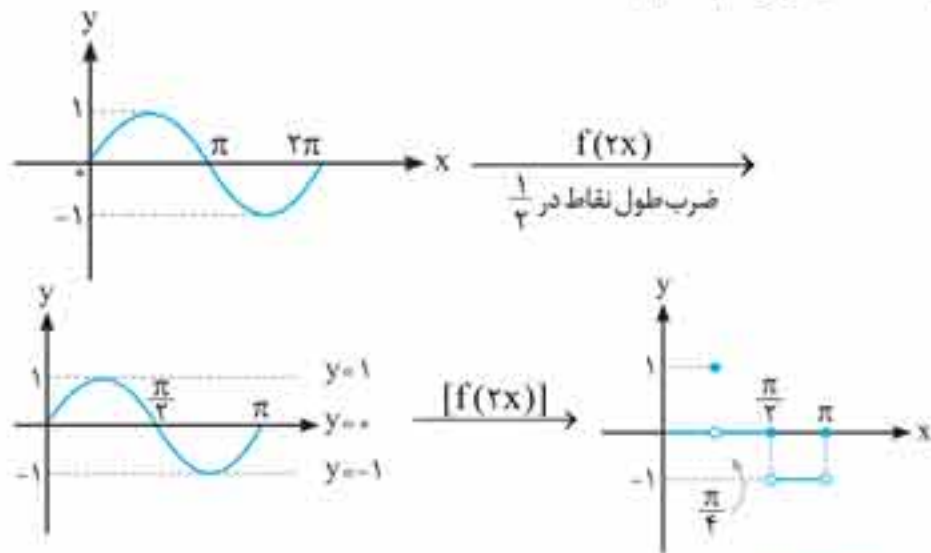
$$g(1) = 0 \Rightarrow a(1)^2 + (a+4)(1) + a - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۲۱۰. گزینه ۳

**نکته:** برای رسم نمودار  $y = [f(x)]$  ابتدا نمودار  $y = f(x)$  را رسم کرده، سپس خطوط افقی  $y = n (n \in \mathbb{Z})$  را که نمودار  $f$  را قطع می کنند رسم می کنیم. پس از آن هر بخشی از نمودار  $f$  را که بین دو خط  $y = n$  و  $y = n+1$  قرار داده روی خط  $y = n$  تصویر می کنیم.

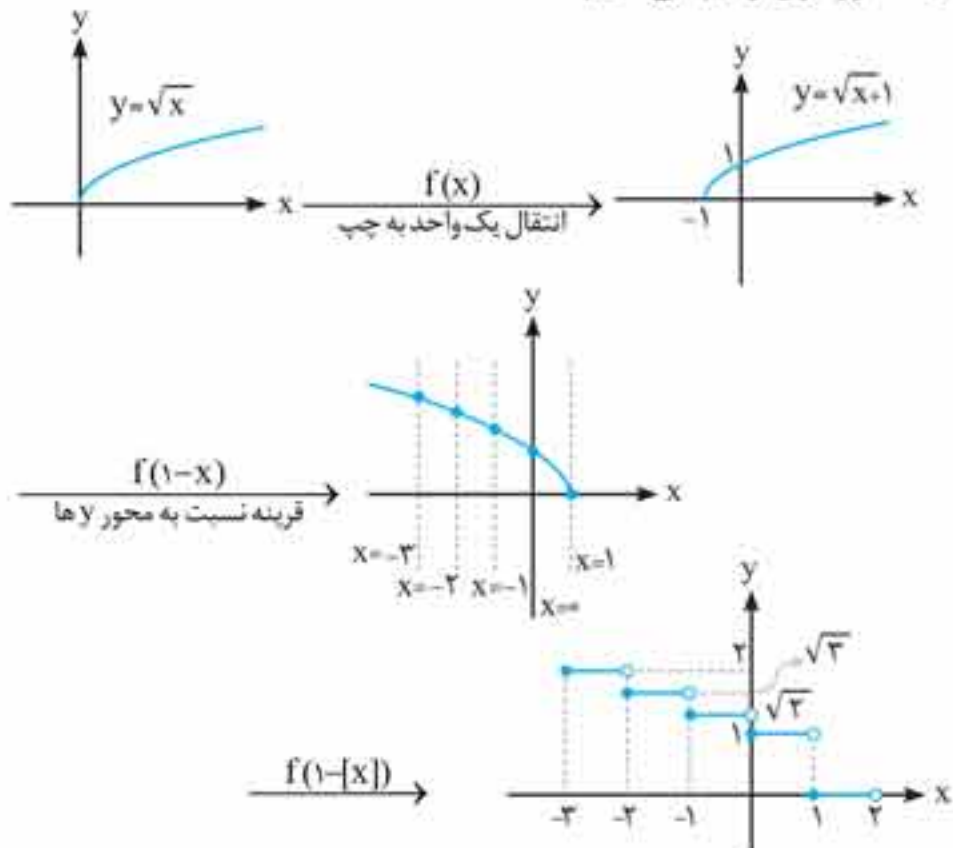
باید نمودار  $y = \sin 2x$  را رسم کرده و سپس با استفاده از روش فوق  $[\sin 2x]$  را رسم کنیم.



۲۱۱. روش اول

**نکته:** برای رسم نمودار  $y = f([x])$  ابتدا  $y = f(x)$  را رسم می کنیم، سپس خطوط عمودی  $x = n (n \in \mathbb{Z})$  را که نمودار تابع  $y = f(x)$  را قطع می کنند رسم می کنیم، سپس در نقطه تلاقی این خطوط عمودی با نمودار پاره خطی افقی به طول ۱ به سمت راست رسم می کنیم.

ابتدا نمودار  $y = \sqrt{1-x}$  را رسم کرده و سپس نمودار  $\sqrt{1-[x]}$  مطابق با دستور فوق رسم می کنیم:



$$= \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} = t^2-t+1 \Rightarrow A = (t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}} A = (\frac{1+\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{17}{4} + \frac{3}{4} = 5$$

روش دوم (با دنباله هندسی)

اگر توجه کنید می بینید که صورت کسر دنباله هندسی با جمله اول  $a=1$  و قدر نسبت  $q=-t$  می باشد و ۹ جمله دارد و مخرج کسر دنباله هندسی با جمله اول  $a=1$  و قدر نسبت  $q=-t^3$  می باشد و ۳ جمله دارد. از سال گذشته به یاد داریم که مجموع دنباله هندسی از رابطه روبرو پیروی می کند:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-(-t)^9)}{1-(-t)} = \frac{1+t^9}{1+t} = t^2-t+1$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}} = (t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 5$$

۲۰۷. گزینه ۴ برای آن که  $f$  بر  $x+2$  بخش پذیر باشد، داریم:  $f(-2) = 0$  بنابراین با جای گذاری  $x = -2$ ، مقدار  $f(x)$  برابر با صفر است و می توان  $a$  را به دست آورد:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^4 + a(-2)^2 - 8(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 4a + 16 = 0 \Rightarrow 32 - 4a = 0 \Rightarrow a = 8$$

برای حل معادله  $f(x) = 0$  خواهیم داشت:

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - 8x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{به کمک تقسیم چندجمله ای ها}} \text{عبارت را بر } x+2 \text{ تقسیم می کنیم} \rightarrow x(x+2)(x^2+2x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \sqrt{5} - 1, -\sqrt{5} - 1$$

بنابراین کوچک ترین ریشه معادله  $f(x) = 0$ ،  $-\sqrt{5} - 1$  است.

۲۰۸. گزینه ۴

باقی مانده تقسیم  $x^4 + ax^2 - bx + 4$  بر  $x^2 - 2x + 1$  برابر  $(x-1)^2$  با صفر است. با صفر قرار دادن مقسوم علیه داریم:  $x^2 \equiv 2x - 1$  لذا خواهیم داشت:

$$x^4 + ax^2 - bx + 4 \equiv (2x-1)^2 + a(2x-1) - bx + 4 \equiv 4x^2 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4$$

$$\xrightarrow{x^2 \equiv 2x-1} 4(2x-1) - 4x + 1 + 2ax - a - bx + 4 \equiv (2a - b + 4)x + (1 - a)$$

$$\xrightarrow{R(x)=0} (2a - b + 4)x + (1 - a) = 0$$

$$\Rightarrow 2a - b + 4 = 0, 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1, b = 6$$

۲۰۹. ابتدا عبارت را ساده تر می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + 4x^2 - 14x + 10 - a \\ &= a(x^2 - 1) + 4x^2 - 14x + 10 \\ &= a(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1)(4x - 10) \\ &= (x-1)(ax^2 + (a+4)x + a - 10) \end{aligned}$$



۲۱۴. گزینه ۳ فرض کنیم:  $y = g(x)$  و  $x$  را بر حسب  $y$  بدست می آوریم:

$$y = g(x) \Rightarrow y = \frac{f(3x)}{3} \Rightarrow 3y = f(3x) \Rightarrow 3x = f^{-1}(3y) \\ \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(3y)}{3}$$

با توجه به این که  $y = g(x)$  پس  $g^{-1}(y) = x$  پس:

$$g^{-1}(y) = \frac{f^{-1}(3y)}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(3x)}{3}$$

۲۱۵. روش اول

$$x^2 + ax + 1 = (x^2 - 3x + b)(x + \frac{1}{b})$$

فرض کنید:

$$\Rightarrow x^2 + ax + 1 = x^2 + (\frac{1}{b} - 3)x + (b - \frac{3}{b})x + 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} - 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ b - \frac{3}{b} = a \Rightarrow \frac{1}{3} - 9 = a \Rightarrow a = -\frac{26}{3} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = -8$$

روش دوم کفایت مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده عبارت  $x^2 \equiv 3x - b$  را بدست آوریم. حال این عبارت را به جای  $x^2$  در  $x^2 + ax + 1 = x(x^2) + ax + 1$  مقسوم جای گذاری می کنیم:

$$= x(3x - b) + ax + 1 = (a - b)x + 3x^2 + 1 \\ = (a - b)x + 3(3x - b) + 1$$

$$= (a - b + 9)x - 3b + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b + 9 = 0 \\ -3b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{26}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a + 2b = -\frac{26}{3} + \frac{2}{3} = -8$$

۲۱۶. گزینه ۲ ترکیب دو تابع زمانی اکیداً نزولی است که یکی از آن ها اکیداً صعودی و دیگری اکیداً نزولی باشد. با توجه به این که  $f(x) = -x^2 + 2$  اکیداً نزولی است. می توان گفت که  $g(x)$  باید اکیداً صعودی باشد.

۲۱۷. روش اول

با توجه به این که:  $x^2 - 3x^2 + 3x = (x-1)^2 + 1$  داریم:

$$y = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-1} = x-1 \\ \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به کمک مقدارهی گزینه های نادرست را

رد می کنیم:

نقطه  $(0,0)$  در خود تابع صدق می کند، بنابراین در وارون آن نیز باید صدق کند، پس گزینه های «۱» و «۴» رد می شوند:

$$f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$$

نقطه  $(1,1)$  در خود تابع صدق می کند، بنابراین در وارون آن نیز باید صدق کند، پس گزینه «۳» رد می شود:

$$f(1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 1$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

روش دوم با توجه به ضابطه تابع دامنه آن به صورت زیر است:

$$D_f: (-\infty, 2)$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

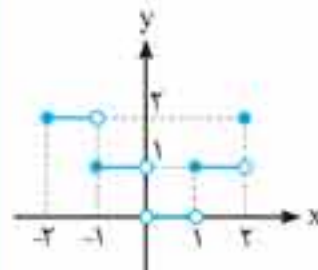
$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y = 2$$

که این شرایط فقط در گزینه «۴» موجود است.

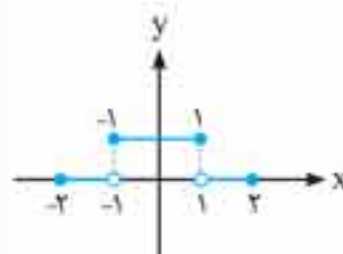
۲۱۲. گزینه ۲ با توجه به این که  $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$  در بازه  $(0, 2]$

نمودار  $f(x) = [x]$  و در بازه  $[-2, 0)$  نمودار  $f(x) = -[x]$  را رسم می کنیم. (لازم به ذکر است نمودار نقطه  $x = 0$  تعریف نشده است) برای رسم  $f(x) = -[x]$  کافی است نمودار  $y = [x]$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم.



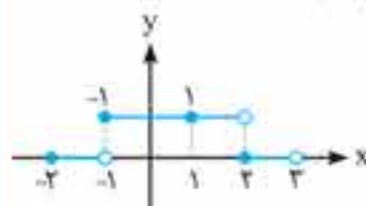
۲۱۳. گزینه ۴ تک تک گزینه ها را رسم می کنیم تا به گزینه صحیح برسیم:

گزینه «۱»:  $y = [f(x)]$  به غیر از بازه  $[-1, 1]$  بقیه نمودار روی محور  $x$  ها تصویر می شود، پس این گزینه صحیح نیست.

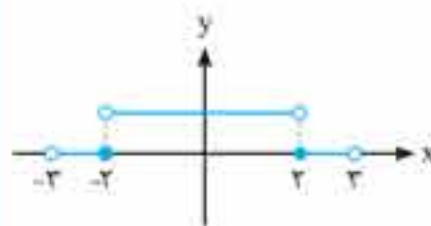


گزینه «۲»:  $y = [f(|x|)]$  چون نمودار نسبت به محور  $y$  ها متقارن است، پس  $f(x) = f(-x)$ . لذا این نمودار با نمودار قبل فرقی ندارد.

گزینه «۳»:  $y = f([x])$  خطوط  $x = n (n \in \mathbb{Z})$  را رسم کرده و از نقاط تقاطع یک واحد به سمت راست می رویم.



گزینه «۴»: کفایت نمودار گزینه قبل را رسم کرده و قسمت های چپ در  $y$  ها را حذف و به جای آن، قسمت های سمت راست محور  $y$  ها را قرینه کنیم.



همان طور که دیده می شود  $g(x)$  بخشی از نمودار  $f([|x|])$  است.