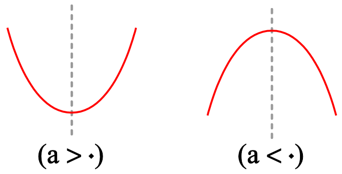
تابع درجه دوم

✓ فرم کلی تابع به صورت $(a \neq ۰)$ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است.

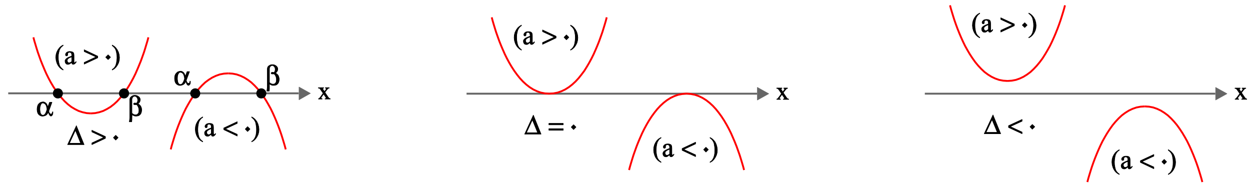
✓ نمودار این تابع همواره نسبت به خط تقارن $x = \frac{-b}{۲a}$ متقارن است و رأس تابع **سهمی** در نقطه‌ای به همان طول است.



رأس $\begin{cases} x_S = \frac{-b}{۲a} \\ y_S = \frac{-\Delta}{۴a} \end{cases}$ یا جای‌گذاری

✓ اگر $a > ۰$ تابع دارای مینیمم است. و اگر $a < ۰$ تابع دارای ماکزیمم است. مقدار ماکزیمم یا مینیمم یا با جای‌گذاری x رأس در معادله یا $\frac{-\Delta}{۴a}$ می‌توان یافت.

✓ اگر $\Delta > ۰$ یا $\Delta = ۰$ یا $\Delta < ۰$ سهمی تابع درجه دو و با محور x ها دو نقطهٔ تقاطع و یک نقاطع (مماس) یا بدون تقاطع است.



همواره مثبت یا همواره منفی

همواره نامنفی یا همواره نامثبت

$\begin{cases} \text{جمع: } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \text{ضرب: } \alpha\beta = \frac{c}{a} \\ \text{فاصله: } |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \end{cases}$

مثال ۱ **سهمی $y = (۱ - m)x^۲ + ۲(m - ۳)x - ۱$ به ازای کدام مقادیر m همواره پایین محور x ها است؟**

۱) $۱ < m < ۵$ ۲) $۲ < m < ۵$ ۳) $۲ < m < ۴$ ۴) $۲ < m < ۶$

مثال ۲ **سهمی‌های زیر را رسم کنید.**

۱) $y = x^۲ - ۴x + ۱$

۲) $y = -۴x^۲ + ۸x + ۲$

✓ برخی مواقع به کمک صفرشوندگی و ایدهٔ تقارن در سهمی رسم سهمی در حالت تجزیه شده راحت‌تر انجام می‌شود:

مثال ۳ **سهمی‌های زیر را رسم کنید:**

۱) $y = x^۲ - ۴x$

۲) $y = (x - ۱)(x + ۳)$

✓ در حالت مربع کامل، رأس دارای طولی است که در صفرشوندگی پرانتز مربع کامل به دست می‌آید.

$y = k(x - \alpha)^۲ + \beta$

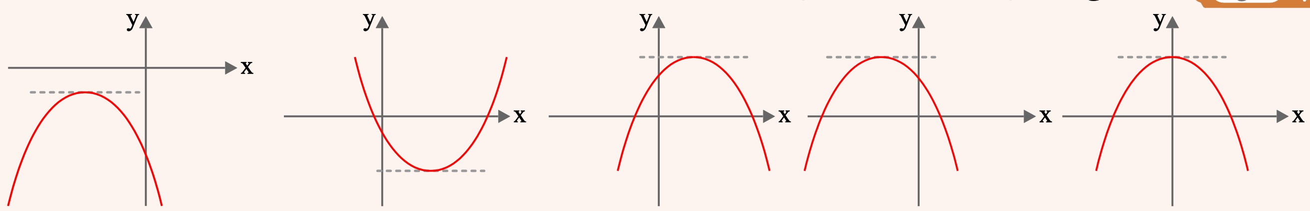
مثال ۴ **سهمی‌های زیر را رسم کنید.**

۱) $y = -۲(x - ۱)^۲ + ۳$

۲) $y = (x + ۲)^۲ - ۳$

✓ برای تشخیص علامت ضرایب a، b و c
- a از رو به بالا یا رو به پایین بودن سهمی
- b از علامت شیب در برخورد با محور عرض‌ها
- c از علامت محل برخورد با محور عرض‌ها

مثال ۵ در سهمی‌های زیر علامت a، b و c چگونه است؟



تابع جزء صحیح و توابع مرتبط:

✓ از دید مقداریابی برای هر عدد صحیح n داریم: $n \le x < n+1 \Rightarrow [x]=n$

✓ جدول مقداریابی جزء صحیح:

x	...	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x < 2$	$2 \le x < 3$	...
[x]	...	-۱	۰	۱	۲	...

مثال ۶ حاصل هر عبارات زیر کدام است؟

$[\log_3 12] =$ .... $[\sqrt[3]{127}]$ .... $[\sqrt{3}+\sqrt{2}]$ .... $[\frac{-3}{5}] =$ ....

✓ ساده‌ترین قاعدهٔ محاسباتی جزء صحیح این است که:

«از درون براکت، چیزی خارج یا وارد نمی‌شود مگر عدد صحیح با جمع»

مثال ۷ کدام موارد صحیح است؟

۳) $[x+y]=[x]+[y]$

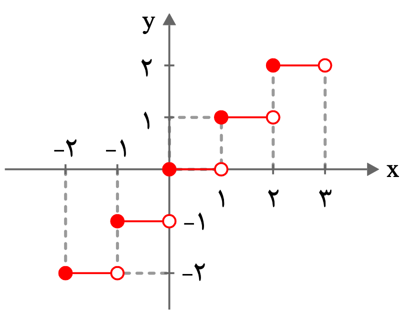
۲) $[x]=\sqrt{[x]}$

) $[x^2]=[x]^2$

۵) $[|x|]=|[x]|$

) $[x+n]=[x]+n \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

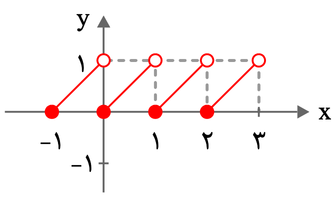
✓ ساده ترین تابع جزء صحیح: **تابع پله‌ای** $f(x)=[x]$ است.



✓ **تابع دندانه اره‌ای:** $f(x)=x-[x]$

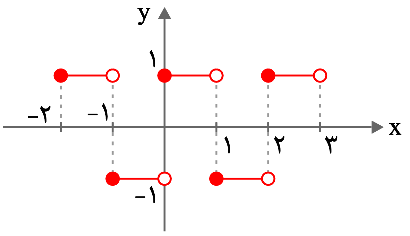
دورهٔ تناوب $T=1$ است و برد آن $[0,1)$ است:

پس: $0 \le x-[x] < 1$ و $T=1$



✓ **تابع مربعی:** $f(x)=(-1)^{[x]}$

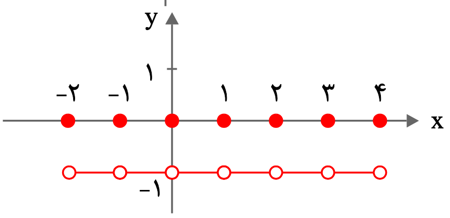
دارای دورهٔ تناوب برابر ۲ است. $(T=2)$



✓ **تابع پاره‌خطی** $f(x)=[x]+[-x]$

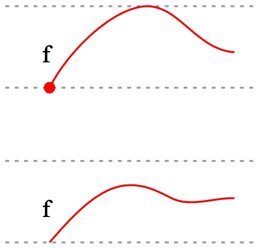
دارای دورهٔ تناوب $T=1$ است.

$$[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



✓ **رسم توابع دارای کل براکت:** $y=[f(x)]$

تابع خام $f(x)$ را رسم کنید و بین هر دو خط افقی $y=0,\pm1,\pm2,\dots$ به سمت پایین سایه بزنید.



+ مثال ۸ تابع $y=[x^2]$ با فرض $-2\le x\le 2$ را رسم کنید.

✓ برای رسم توابع شامل براکت معمولاً درون براکت را بین دو عدد صحیح فرض می‌کنیم و از شر براکت خلاص می‌شویم.

+ مثال ۹ توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=(x-1)[x] \quad -1\le x\le 2$

۲) $f(x)=x^2[2x] \quad 0\le x<1$

توابع قدرمطلق ساده

✓ با توجه به تعریف قدرمطلق که:

$$|u|=\begin{cases} u & u\ge 0 \\ -u & u<0\end{cases}$$

برای رسم توابع که شامل جزئی از قدرمطلق هستند، کافی است با توجه به تعیین علامت قدرمطلق و خلاصی از آن، تابع را در ناحیه‌های خاص رسم کنیم.

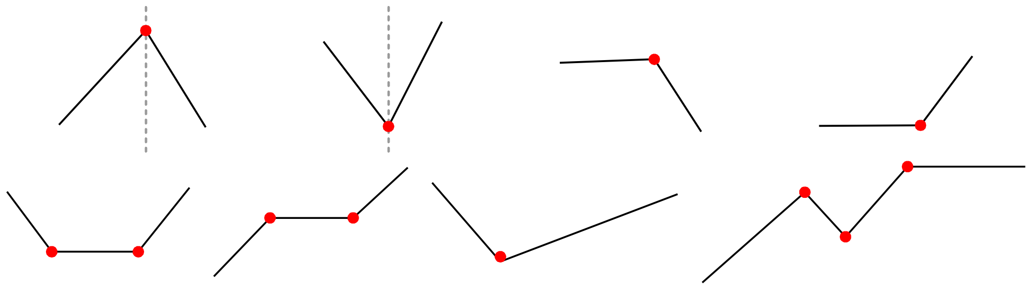
+ مثال ۱۰ توابع زیر را رسم کنید:

۱) $f(x)=(x-1)|x-3|$

۲) $f(x)=|x-2|[x] \quad 0\le x<3$

۳) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|+2}$

✓ در حالت توابع درجه یک قدرمطلق‌دار، شکستگی‌ها در محل ریشه قدر رخ خواهد داد و تیپ چنین نمودارهایی به صورت‌های زیر است:



مثال ۱۱ توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}+x$

۲) $f(x)=|x-۲|-۲|x+۱|$

۳) $f(x)=|x+۱|+|x-۲|$

۴) $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$

✓ اگر کل تابع درون قدرمطلق بود، ابتدا خام تابع را رسم می‌کنیم سپس قسمت پایین محور xها را به سمت بالا قرینه می‌کنیم.

$$y=|\underset{\substack{\uparrow\\ \text{خام}}}{f(x)}|$$

مثال ۱۲ توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=|x^{۲}-۴x|$

۲) $f(x)=||x-۱|+x-۲|$

✓ اگر تابع $f(x)$ را بتوانیم رسم کنیم برای رسم تابع $y=f(|x|)$ کافی است سمت چپ محور xها پاک شود و سپس سمت راست به چپ قرینه شود.

مثال ۱۳ تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=x^{۲}-۴|x|$

۲) $f(x)=[|x|]$

۳) $f(x)=|x|-[|x|]$

۴) $f(x)=x^{۲}+۲|x|-۱$