فهرست

تابع

تابع (مقدمات و تعاریف)

ابتدا تابع را تعریف می‌کنیم سپس به ویژگی‌های تابع و انواع توابع می‌پردازیم.

مقدمه: اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند آن‌گاه وقتی رابطه‌ای از A به B تعریف می‌شود اعضای این رابطه به صورت زوج مرتب (a,b) خواهند بود که $a \in A$ و $b \in B$.

تعریف تابع: رابطهٔ f از A به B به شرطی تابع است که دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشد:

۱ به هر عضو A، عضوی از B را نسبت دهد.

۲ در f هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفهٔ اول یکسان دیده نشود.

به عبارتی $f: A \to B$ به شرطی بیانگر تابع است که به هر عضو از مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را متناظر کند.

تست اگر $f = \{(۳,m^۲),(m,۴),(۳,m+۲),(-۲,m),(۲,۱)\}$ بیانگر یک تابع باشد، m کدام است؟

۱) $m=-۱$ ۲) $m=-۱,۲$ ۳) $m=۱,-۲$ ۴) $m=-۲$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** قرار است هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ اول برابر نداشته باشند، پس:

$$\begin{matrix}(۳,m^۲)\in f\\(۳,m+۲)\in f\end{matrix} \Rightarrow m^۲ = m+۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}m=-۱\\m=۲\end{cases}$$

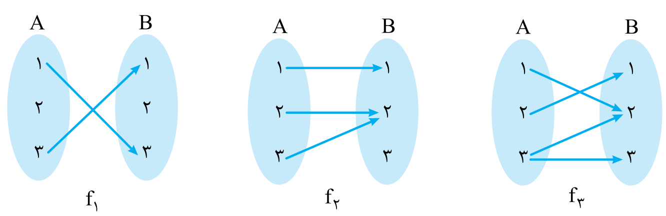
$m=-۱: f=\{(۳,۱),(-۱,۴),(-۲,-۱),(۲,۱)\} \Rightarrow$ $m=-۱$ قابل قبول است

$m=۲: f=\{(۳,۴),(\underline{۲,۴}),(-۲,۲),(\underline{۲,۱})\} \Rightarrow$ $m=۲$ غیر قابل قبول است

پس فقط $m=-۱$ قابل قبول است.

تشخیص تابع از روی نمودار آن

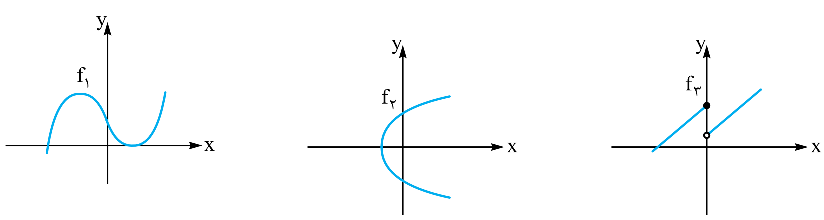
الف) نمودار پیکانی: یک نمودار پیکانی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B به شرطی یک تابع را تعریف می‌کند که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.



در سه شکل فوق فقط $f_۲$ بیانگر یک تابع از A به B است.

تذکر لازم نیست در نمودار پیکانی به هر عضو B یک پیکان وارد شود.

ب) نمودار دستگاه مختصاتی: اگر نمودار یک رابطه در دستگاه مختصات رسم شده باشد به شرطی بیانگر یک تابع است که هر خط قائم $x=k$ نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



در سه شکل فوق فقط $f_۲$ بیانگر یک تابع نیست.

تذکر اگر A یک مجموعهٔ mعضوی و B یک مجموعهٔ nعضوی باشند، تعداد توابع تعریف‌شده از A به B برابر n^m است.

ضابطهٔ تابع

تابع در واقع مانند یک ماشین عمل می‌کند که یک ورودی مانند x را دریافت می‌کند و یک خروجی یکتا مانند y را تحویل می‌دهد به طوری که اگر $f: A \to B$ یک تابع باشد آن‌گاه در این تابع داریم: $f: x \to y$ یا $f(x)=y$ یا $(x,y) \in f$

ضابطهٔ $y=f(x)$ به شرطی تابع است که برای ورودی‌های یکسان الزاماً خروجی یکسان داشته باشد. به عبارتی: $\left.\begin{matrix}(x,y)\in f\\(x,z)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=z$

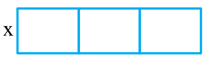
مثلاً $f=\{(x,y)\,|\,x,y\in R, x^۲+y^۳=۴\}$ بیانگر یک تابع است، زیرا: $\left.\begin{matrix}(x,y)\in f \Rightarrow y^۳=۴-x^۲\\(x,z)\in f \Rightarrow z^۳=۴-x^۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow y^۳=z^۳ \Rightarrow y=z$

اما $g=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}, x^۲-y^۲=۹\}$ بیانگر یک تابع نیست، زیرا: $\left.\begin{matrix}(x,y)\in g \Rightarrow y^۲=x^۲-۹\\(x,z)\in g \Rightarrow z^۲=x^۲-۹\end{matrix}\right\}\Rightarrow y^۲=z^۲ \Rightarrow y=\pm z$

می‌توانیم از مثال $(۵,۴)\in g$ و $(۵,-۴)\in g$ نیز به عنوان مثال نقض استفاده کنیم.

مدل‌سازی به کمک مفهوم تابع: در هر تابع یک متغیر ورودی داریم که معمولاً آن را متغیر مستقل و یک متغیر خروجی داریم که معمولاً آن را متغیر وابسته می‌گوییم. گاهی اوقات می‌خواهیم متغیر وابسته را برحسب متغیر مستقل تعریف کنیم و نوع وابستگی آن را معلوم کنیم. در این گونه موارد از ضابطهٔ تابع در یک مدل ریاضی کمک می‌گیریم.

مثال در شکل زیر طول تمام نردهٔ استفاده‌شده ۱۲۰ متر است. مساحت زمین را به عنوان تابع می‌خواهیم برحسب عرض مستطیل نمایش دهیم:

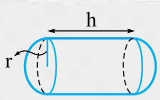


ابتدا عرض مستطیل بزرگ را به عنوان متغیر مستقل x تعریف می‌کنیم. در این صورت اگر طول آن را متغیر دیگری به نام y تعریف کنیم، داریم:

$$۲y+۴x=۱۲۰ \Rightarrow y=۶۰-۲x$$

مساحت مستطیل متغیر وابسته‌ای است که می‌خواهیم آن را برحسب x تعریف کنیم، پس داریم: $S=xy=x(۶۰-۲x) \Rightarrow S(x)=-۲x^۲+۶۰x$

تست **یک مخزن گاز از یک بخش استوانه‌ای شکل و دو نیم‌کره مطابق شکل روبه‌رو ساخته شده است. اگر ارتفاع استوانه سه برابر شعاع نیم‌کره باشد و شعاع نیم‌کره برابر r باشد، حجم مخزن برحسب r برابر کدام تابع است؟**

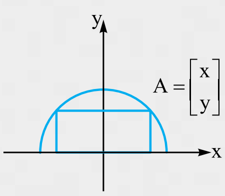


۱) $\frac{۱۷}{۳}\pi r^۳$ ۲) $\frac{۱۵}{۳}\pi r^۳$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}\pi r^۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}\pi r^۳$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر حجم مخزن V باشد، آن‌گاه: $V=$ حجم دو نیم‌کره + حجم استوانه

$$V=\pi r^۲\times h+۲\times\frac{۲\pi}{۳}r^۳=\pi r^۲\times۳r+\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\pi r^۳(۳+\frac{۴}{۳}) \Rightarrow V(r)=\frac{۱۳}{۳}\pi r^۳$$

تست **در شکل زیر، شعاع نیم‌دایره برابر ۴ است و مساحت مستطیل را به صورت تابعی برحسب طول نقطهٔ A نوشته‌ایم. ضابطه تابع کدام است؟**



۱) $S(x)=x\sqrt{۱۶-x^۲}$

۲) $S(x)=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$

۳) $S(x)=۲x\sqrt{۴-x}$

۴) $S(x)=x\sqrt{۴-x}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به آن‌که مرکز دایره $O=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ و شعاع آن ۴ است، ضابطهٔ دایره $x^۲+y^۲=۴^۲$ است، پس ضابطهٔ نیم‌دایرهٔ موردنظر $y=\sqrt{۱۶-x^۲}$ است. لذا مختصات نقطهٔ A به صورت $A=\begin{bmatrix}x\\\sqrt{۱۶-x^۲}\end{bmatrix}$ است. مساحت مستطیل به عنوان تابعی برحسب متغیر مستقل x به صورت مقابل تعریف می‌شود: $S=۲x_A.y_A=۲x\sqrt{۱۶-x^۲} \Rightarrow S(x)=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$

معادلات تابعی و مقادیر تابع: گاهی اوقات در ضابطه یا نمایش یک تابع لازم است مقدار تابع در یک نقطه را به دست آوریم و یا آن‌که در یافتن ضابطهٔ تابع حل یک معادله برای یافتن ضابطه ضرورت پیدا می‌کند در این صورت می‌توانیم مقدار تابع یا ضابطهٔ تابع را به عنوان مجهولی در یک معادله به دست آوریم. مثلاً $f(x)-۳f(۲)=۴x^۲+۲$ است و می‌خواهیم $f(۳)$ را به دست آوریم. ابتدا با قراردادن $x=۲$ داریم:

$$f(۲)-۳f(۲)=۱۸ \Rightarrow f(۲)=-۹$$

پس به این ترتیب:

$$f(x)=۴x^۲+۲-۲۷ \Rightarrow f(x)=۴x^۲-۲۵$$

$$x=۳ \Rightarrow f(۳)=۴\times۹-۲۵=۱۱ \Rightarrow f(۳)=۱۱$$

تست به فرض آن‌که $xf(-x)+۳f(x)=۲x-۵$، مقدار $f(۳)$ چه عددی است؟

۱) ۲ ‏ ۲) -۳ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) -۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ابتدا به جای x اعداد ۳ و ۳- $x=۳$ و $x=-۳$ را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{matrix} x=۳ \to \\ x=-۳ \to \end{matrix}\begin{cases} ۳f(-۳)+۳f(۳)=۱ \\ -۳f(۳)+۳f(-۳)=-۱۱ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۱)} \begin{cases} ۳f(-۳)+۳f(۳)=۱ \\ ۳f(۳)-۳f(-۳)=+۱۱ \end{cases} +$$

$$۶f(۳)=۱۲ \Rightarrow f(۳)=۲$$

در واقع با حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول مقدار $f(۳)$ را به دست آوردیم.

تست هرگاه $f(x)-۲f(-\frac{۱}{x})=۳x-۲$، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

۱) $x+\frac{۲}{x}$ ‏ ۲) $x-۲-\frac{۲}{x}$ ‏ ۳) $۲+\frac{۲}{x}-x$ ‏ ۴) $x-۲-\frac{۱}{x}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر در معادلهٔ داده‌شده به جای x عبارت $-\frac{۱}{x}$ را قرار دهیم، آن‌گاه:

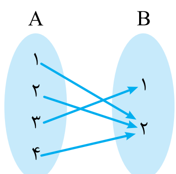
$$f(x)-۲f(-\frac{۱}{x})=۳x-۲ \xrightarrow{x\to -\frac{۱}{x}} f(-\frac{۱}{x})-۲f(x)=-\frac{۳}{x}-۲$$

$$\begin{cases} f(x)-۲f(-\frac{۱}{x})=۳x-۲ \\ ۲\times \; f(-\frac{۱}{x})-۲f(x)=-\frac{۳}{x}-۲ \end{cases} \Rightarrow -۳f(x)=۳x-۲-\frac{۶}{x}-۴ \Rightarrow -۳f(x)=\frac{۳x^۲-۶x-۶}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{-x^۲+۲x+۲}{x}=-x+۲+\frac{۲}{x}$$

دامنهٔ تعریف و برد تابع

اگر $f:A\to B$ یک تابع باشد آن‌گاه دامنهٔ تعریف تابع که با D_f نشان می‌دهیم همان A است به عبارتی $D_f=A$.
دامنهٔ تعریف در توابع حقیقی بزرگ‌ترین زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ می‌باشد که تابع به ازای اعضای آن تعریف شده باشد. مثلاً وقتی صرفاً می‌نویسیم $y=\sqrt{۹-x^۲}$ و مجموعه‌های A و B را معرفی نمی‌کنیم، منظور از دامنهٔ تعریف تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که ضابطهٔ تابع در آن تعریف شده باشد. مثلاً در این مورد خاص $D_f=[-۳,۳]$ خواهد بود. اما در مورد تابع $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$ دامنهٔ تعریف همان $\mathbb{R}$ است.

برد تابع

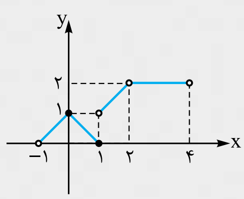


اگر $f:A\to B$ یک تابع باشد آن‌گاه برد f زیرمجموعه‌ای از B است که شامل مؤلفه‌های دوم در زوج‌های مرتب تابع f باشد، به عبارتی:

$$f=\{(۱,۲)(۲,۲)(۳,۱)(۴,۲)\} \Rightarrow D_f=\{۱,۲,۳,۴\}, R_f=\{۱,۲\}$$

$f:A\to B \Rightarrow D_f=A, R_f\subset B$ تابع باشد.

تست نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. بازهٔ اعداد $D_f\cap R_f$ در کدام گزینه آمده است؟



۱) $(۰,۲)$
۲) $[۰,۱)$
۳) $(۰,۴)$
۴) $[۰,۲)$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** برای‌یافتن دامنهٔ تعریف تابع کافی است تابع را بر روی محور xها تصویر کنیم. نقاطی که تصویر را شامل می‌شود دامنهٔ تعریف تابع است، پس $D_f=(-۱,۴)-\{۲\}$ و به همین ترتیب تصویر تابع بر روی محور عرض‌ها، برد تابع است: $R_f=[۰,۲] \Rightarrow D_f\cap R_f=[۰,۲)$

تعیین دامنهٔ تعریف برخی توابع خاص

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند:

۱ $y=\frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{x:q(x)=۰\}$

۲ $y=\sqrt[n]{p(x)} \Rightarrow \begin{cases} n \text{ زوج} \Rightarrow D=\{x:p(x)\geq ۰\} \\ n \text{ فرد} \Rightarrow D=\mathbb{R} \end{cases}$

۳ $y=\log_{q(x)}p(x) \Rightarrow D=\{x:p(x)>۰, q(x)>۰, q(x)\neq ۱\}$

۴ $y=\tan p(x) \Rightarrow D=\{x:p(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$

۵ $y=\cot p(x) \Rightarrow D=\{x:p(x)\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

مثال دامنهٔ تعریف هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱ $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲}\log(x-۲)$ ‏ ‏ ‏ ۲ $f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{\sqrt{۴-x^۲}}$

پاسخ ۱ برای آن‌که دامنهٔ تعریف تابع را به دست آوریم کافی است تک‌تک اجزای تابع تعریف‌شده باشد:

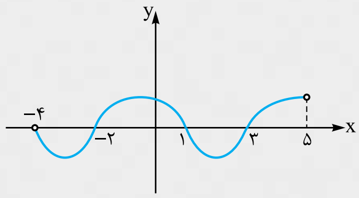
$$\begin{cases}۴x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\\ x-۲>۰ \Rightarrow x>۲\end{cases}\Rightarrow D_f=[۰,۴]\cap(۲,+\infty)=(۲,۴]$$

۲ مانند حالت قبل ابتدا x را چنان می‌یابیم که هر یک از اجزاء تابع تعریف‌شده باشد.

$$۴-x^۲>۰ \Rightarrow x\in(-۲,۲)$$

$$\tan\pi x:\pi x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq k+\frac{۱}{۲}\quad k\in\mathbb{Z}\qquad D_f=(-۲,۲)-\{\pm\frac{۳}{۲},\pm\frac{۱}{۲}\}$$

تست نمودار تابع $y=f(x-۲)$ مطابق شکل مقابل است. دامنهٔ تعریف $y=\log\dfrac{f(x)}{x+۱}$ کدام است؟



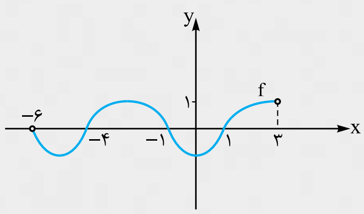
۱) $(۳,۵)\cup(-۴,-۲)$

۲) $(-۶,-۴)\cup(۱,۳)$

۳) $(-۲,۱)$

۴) $(۱,۳)$

پاسخ گزینهٔ «۲» اولاً برای رسم نمودار $f(x)$ کافی است شکل داده‌شده را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم. ثانیاً جدول تعیین علامت $\dfrac{f(x)}{x+۱}$ را رسم می‌کنیم.



x		−۶		−۴		−۱		۱		۳	
$f(x)$	ت.ن	ت ن	−	۰	+	۰	−	۰	+	ت ن	ت.ن
$x+۱$	−		−		−	۰	+		+		+
$\dfrac{f(x)}{x+۱}$	ت.ن	ت ن	+	۰	−	ت ن	−	۰	+	ت ن	ت.ن

$$D_y=(-۶,-۴)\cup(۱,۳)$$

تست هرگاه دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{(۲a-۱)x^۲+۴ax+b-۲}$ بازهٔ $[۲,+\infty)$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) −۲ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ۳) −۱ ‏ ‏ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۳» برای آن‌که $D_f=[۲,+\infty)$ باشد باید عبارت زیر رادیکال از درجهٔ اول باشد. زیرا:

$y=ax^۲+bx+c:\ \Delta<۰\Rightarrow$

x	
y	موافق علامت a

$\Delta=۰\Rightarrow$

x		$-\frac{b}{۲a}$	
	موافق a		موافق a

$\Delta>۰\Rightarrow$

x		$x_۱$		$x_۲$	
y	موافق a		مخالف a		موافق a

پس هیچ‌گاه جواب به صورت $[\alpha,+\infty)$ نیست. به همین جهت $۲a-۱=۰$ یعنی $a=\frac{۱}{۲}$.

عبارت زیر رادیکال به ازای $x=۲$ برابر صفر است، پس: $f(x)=\sqrt{۲x+b-۲}\Rightarrow ۴+b-۲=۰\Rightarrow b=-۲\Rightarrow f(x)=\sqrt{۲x-۴}\Rightarrow ab=-۱$

روش‌های یافتن برد توابع

۱ در تابع $y=f(x)$ ابتدا x را برحسب y پیدا می‌کنیم، سپس دامنهٔ ضابطهٔ به دست آمده را محاسبه می‌کنیم و آن را به عنوان برد f می‌پذیریم.

مثال

$$f(x)=\frac{x^۲+۳x+۱}{x}\Rightarrow y=\frac{x^۲+۳x+۱}{x}\Rightarrow xy=x^۲+۳x+۱$$

$$x^۲+(۳-y)x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{y-۳\pm\sqrt{y^۲-۶y+۹-۴}}{۲}=\frac{y-۳\pm\sqrt{y^۲-۶y+۵}}{۲}$$

$$y^۲-۶y+۵\geq۰\Rightarrow(y-۱)(y-۵)\geq۰\Rightarrow y\geq ۵ \text{ یا } y\leq ۱\Rightarrow R_f=(-\infty,۱]\cup[۵,+\infty)$$

تست برد تابع $y=x+\sqrt{x^۲+۴}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ‏ ‏ ۲) $\mathbb{R}$ ‏ ‏ ۳) $(۰,+\infty)$ ‏ ‏ ۴) $(۱,+\infty)$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم.

$$y-x=\sqrt{x^۲+۴} \Rightarrow y-x \geq ۰ \Rightarrow y \geq x \Rightarrow y^۲+\cancel{x^۲}-۲xy=\cancel{x^۲}+۴ \Rightarrow x=\frac{y^۲-۴}{۲y}$$

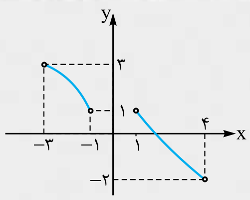
ظاهراً باید تنها $y \neq ۰$ را در نظر گرفت اما شرط $y \geq x$ را در کنار این شرط باید مد نظر داشته باشیم.

$$y \geq x \Rightarrow y \geq \frac{y^۲-۴}{۲y} \Rightarrow y-\frac{y^۲-۴}{۲y} \geq ۰ \Rightarrow \frac{y^۲+۴}{۲y} \geq ۰ \Rightarrow y>۰$$

پس $R_f=(۰,+\infty)$.

۲ گاهی می‌توانیم نمودار تابع را رسم کنیم و به کمک رسم، برد تابع را به دست آوریم.

تست **اگر نمودار f مطابق شکل مقابل باشد، برد تابع $y=۳-۲|f(x)|$ در کدام گزینه آمده است؟**



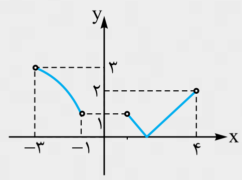
۱) $(-۲,۴]$

۲) $[-۳,۳]$

۳) $(-۳,۳]$

۴) $(-۲,۴)$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اولاً نمودار $y_۱=|f(x)|$ مطابق شکل مقابل است.



تصویر $|f|$ روی محور عرض‌ها بازهٔ $[۰,۳)$ است. پس: $R_{|f|}=[۰,۳) \Rightarrow ۰ \leq |f|<۳ \Rightarrow -۶<-۲|f(x)| \leq ۰$

$$-۳<۳-۲|f(x)| \leq ۳ \Rightarrow R_y=(-۳,۳]$$

۳ به نابرابرهای زیر دقت کنید:

۱ $a>۰: a+\frac{۱}{a} \geq ۲$ ۲ $a<۰: a+\frac{۱}{a} \leq -۲$ ۳ $a,b>۰: a+b \geq ۲\sqrt{ab}$

از این دست نابرابری‌ها زیاد داریم که می‌توانیم به کمک آن‌ها برد توابع را به دست آوریم.

تست **برد تابع $y=x+۲+\frac{۴}{x-۱}$ در کدام گزینه آمده است؟**

۱) $[۷,+\infty)$ ۲) $[۴,+\infty) \cup (-\infty,-۴]$ ۳) $[۷,+\infty) \cup (-\infty,-۱]$ ۴) $[۴,+\infty) \cup (-\infty,-۱]$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** یکی از نابرابری‌های مهم آن است که: $a,b>۰: a+b \geq ۲\sqrt{ab}$

بدین ترتیب اگر تابع را به صورت مقابل بنویسیم داریم: $x+۲+\frac{۴}{x-۱}=x-۱+\frac{۴}{x-۱}+۳$

$$\left.\begin{array}{l} x-۱>۰: x-۱+\frac{۴}{x-۱} \geq ۲\overbrace{\sqrt{(x-۱)\times\frac{۴}{x-۱}}}^{۴} \Rightarrow y \geq ۷ \\ x-۱<۰: x-۱+\frac{۴}{x-۱} \leq \underbrace{-۲\sqrt{(x-۱)\times\frac{۴}{x-۱}}}_{-۴} \Rightarrow y \leq -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow R_f=[۷,+\infty) \cup (-\infty,-۱]$$

تست **برد تابع $y=۳-۲\sqrt{۴x-x^۲}$ در کدام گزینه آمده است؟**

۱) $[۱,۳]$ ۲) $[-۱,۳]$ ۳) $[-۴,۲]$ ۴) $[-۲,۴]$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با فرض آن‌که $۴x-x^۲=۴-(x-۲)^۲$، داریم:

$$(x-۲)^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۴-(x-۲)^۲ \leq ۴ \Rightarrow \sqrt{۴-(x-۲)^۲} \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{۴x-x^۲} \leq ۲ \Rightarrow -۴ \leq -۲\sqrt{۴x-x^۲} \leq ۰ \Rightarrow -۱ \leq ۳-۲\sqrt{۴x-x^۲} \leq ۳$$

پس $R_y=[-۱,۳]$.

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر گوییم هرگاه دو شرط زیر همزمان برقرار باشند:

۱ $D_f=D_g$ ۲ برای هر x از دامنهٔ آن‌ها مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

تست اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۴$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}-۸}{x+k} & x\neq -k\\ m & x=-k\end{cases}$ با هم برابر باشند، مقدار **mk** چه‌قدر است؟

۱) -۲۴ ۲) -۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

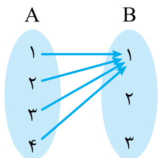
پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به آن‌که $D_f=\mathbb{R}$ پس باید $D_g=\mathbb{R}$ باشد؛ از طرفی $k=-۲$ زیرا:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}{x-۲} & x\neq ۲\\ m & x=۲\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲x+۴ & x\neq ۲\\ m & x=۲\end{cases}$$

$$f(۲)=۱۲\Rightarrow g(۲)=۱۲\Rightarrow m=۱۲,k=-۲\Rightarrow mk=-۲۴$$

انواع تابع

۱) تابع ثابت



$f:A\to B$ را تابع ثابت می‌گوییم هرگاه برد آن تک عضوی باشد. به عنوان مثال $y=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x$ یا $y=\sqrt{[x]+[-x]}$ مثال‌هایی از تابع ثابت هستند و یا تابع مقابل تابع ثابت $f(x)=۱$ است.

تست اگر $f(x)=\dfrac{mx+۴}{x+m}$ تابعی ثابت باشد، $|f(m)|$ چه عددی است؟

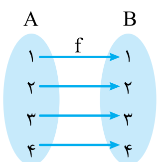
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

پاسخ **گزینهٔ «۲»** برای آن‌که تابع ثابت باشد باید تغییرات x در مقدار آن بی‌تأثیر باشد، به عبارتی:

$$f(x)=\frac{m(x+\frac{۴}{m})}{(x+m)}\Rightarrow x+\frac{۴}{m}=x+m\Rightarrow \frac{۴}{m}=m\Rightarrow m=\pm ۲$$

$$\left.\begin{aligned} m=۲: f(x)=\frac{۲x+۴}{x+۲}=۲\Rightarrow f(۲)=۲\\ m=-۲: f(x)=\frac{-۲x+۴}{x-۲}=-۲\Rightarrow f(-۲)=-۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow |f(m)|=۲$$

۲) تابع همانی



$f:A\to B$ را تابع همانی گوییم هرگاه $\forall x\in A: f(x)=x$؛ به عبارتی به هر عضو از مجموعهٔ A خودش را نسبت می‌دهد.

تست اگر **f** تابعی ثابت و **g** تابعی همانی باشد، به طوری که $f(۳)+۲g(۱)=۸$، مقدار $۲g(۳)-f(۲)$ چه عددی است؟

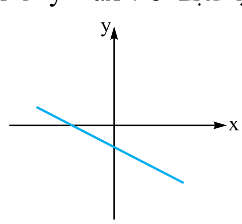
۱) ۷ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۸

پاسخ **گزینهٔ «۳»** چون g تابعی همانی است پس $g(۱)=۱$ لذا $f(۳)=۶$؛ از طرفی f تابع ثابت است، پس: $\forall x\in D_f: f(x)=۶$

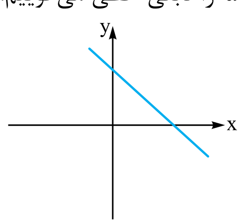
بدین شکل داریم: $۲g(۳)-f(۲)=۲\times ۳-۶=۰$

۳) تابع خطی

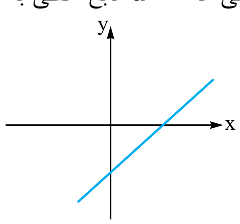
هر تابع با ضابطهٔ $y=ax+b$ که $a,b\in\mathbb{R}$ را تابعی خطی می‌گوییم. در حالتی که $a=۰$ تابع خطی به تابع ثابت $y=b$ تبدیل می‌شود.



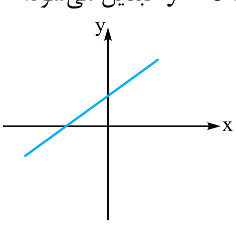
$a<۰, b<۰$



$a<۰, b>۰$



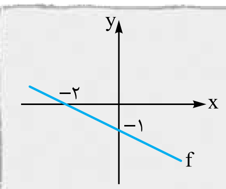
$a>۰, b<۰$



$a>۰, b>۰$

در حالتی که $a>۰$، تابع صعودی اکید و در حالتی که $a<۰$، تابع نزولی اکید خواهد بود.

تست اگر نمودار f شکل مقابل باشد، دامنهٔ تعریف $y=\log(f(2x-3)-f(x-2))$ کدام است؟



۱) $(-\infty,3)$

۲) $(2,+\infty)$

۳) $(-\infty,1)$

۴) $(\frac{3}{2},+\infty)$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا ضابطهٔ تابع خطی f را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-1)\in f \\ B(-2,0)\in f \\ f(x)=ax+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-1 \\ -2a+b=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x-1$$

تابع $y=\log(g(x))$ به شرطی تعریف شده است که $g(x)>0$ باشد. پس:

$$f(2x-3)-f(x-2)>0 \Rightarrow f(2x-3)>f(x-2) \Rightarrow -\frac{1}{2}(2x-3)-1>-\frac{1}{2}(x-2)-1$$

$$\Rightarrow -x+\frac{3}{2}-\cancel{1}>-\frac{1}{2}x+1-\cancel{1} \Rightarrow x<1 \Rightarrow D_y=(-\infty,1)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تعریف تابع و ضابطه

۶۳۶- اگر $f=\{(2m+1,3),(2,m+1),(7,2),(2,m^2-5)\}$ تابع باشد، $f(m-1)$ چه عددی است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 3 ۴) -1

۶۳۷- رابطهٔ $R=\{(3,m^2),(2,1),(-3,m),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ *(سراسری ۸۵)*

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) هیچ مقدار m

۶۳۸- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

۱) $y^2-xy=0$ ۲) $|x-1|+|y+1|=1$ ۳) $|x-1|+|y^2-1|=0$ ۴) $x^2+2xy+y^2=0$

۶۳۹- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

۱) $y^2=x$ ۲) $y^3-y=x$ ۳) $y^3+y^2=x$ ۴) $y^3+3y^2+3y=x$

۶۴۰- در کدام رابطهٔ زیر y تابعی از x است؟

۱) $x[y]=1$ ۲) $y[x]=1$ ۳) $[x]+[y]=1$ ۴) $[x]-[y]=1$

۶۴۱- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

۱) $[x]=[y]$ ۲) $\frac{|y|}{y}=\cos(\pi[x])$ ۳) $|y|=\sin(\frac{\pi x}{|x|})$ ۴) $|y|=\cos(\frac{2\pi x}{|x|})$

۶۴۲- اگر $f=\{(x,y):x^2+4y^2+2x-12y=k\}$ یک تابع غیرتهی باشد، مقدار k کدام است؟

۱) 10 ۲) -10 ۳) 4 ۴) -4

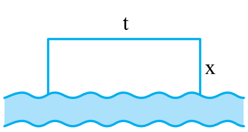
۶۴۳- در کدام رابطهٔ زیر y تابعی از x است؟

۱) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2$ ۲) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1$ ۳) $\frac{|y|}{x}-x=1$ ۴) $1+y^2=x+2y$

۶۴۴- دو تابع f و g به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب بیان‌شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟ *(سراسری ۸۵)*

۱) $f\cup g$ ۲) $f\cap g$ ۳) $f-g$ ۴) fog

۶۴۵- با ۴۸ متر طناب در کنار یک رودخانه، زمینی به شکل مستطیل جدا کرده‌ایم. اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، مساحت مستطیل به صورت تابعی برحسب x کدام است؟ ($x\le t$)



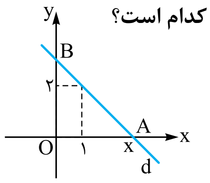
۱) $y=48x-x^2 \;,\; 0<x<48$

۲) $y=48x-2x^2 \;,\; 0<x<24$

۳) $y=48x-x^2 \;,\; 0<x\le 12$

۴) $y=48x-2x^2 \;,\; 0<x\le 16$

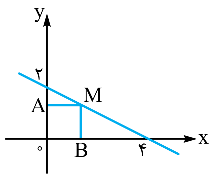
۶۴۶- خط d مطابق شکل از نقطهٔ $(1,2)$ عبور می‌کند. اگر مساحت مثلث OAB تابعی از طول نقطهٔ A باشد ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $\frac{2x^2}{x-1}$ ۲) $\frac{x^2}{x-1}$

۳) $\frac{x^2}{x+1}$ ۴) $\frac{2x^2}{x+1}$

۶۴۷- مساحت مستطیل برحسب طول نقطهٔ M در کدام گزینه آمده است؟



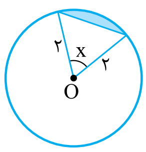
۱) $S=-\frac{1}{2}x^2+4x\ ,\ 0<x<4$ ۲) $S=-\frac{1}{2}x^2+2x\ ,\ 0<x<4$

۳) $S=\frac{1}{2}x^2-2x\ ,\ 0<x<4$ ۴) $S=\frac{1}{2}x^2+4x\ ,\ 0<x<4$

۶۴۸- مخروط قائم به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h در کره‌ای به شعاع $R=5$ محاط شده است، حجم مخروط را به صورت تابعی برحسب h نوشته‌ایم، V کدام است؟

۱) $V=\frac{\pi}{3}h^2(10-h)$ ۲) $V=\frac{\pi}{3}h(25-h^2)$ ۳) $V=\frac{\pi}{3}h(50-h^2)$ ۴) $V=\frac{\pi}{3}h^2(5-h)$

۶۴۹- مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده در شکل مقابل تابعی از زاویهٔ x برحسب رادیان است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $x-\sin x$ ۲) $2(x-\sin x)$

۳) $\frac{1}{2}(x-\sin x)$ ۴) $2x-\sin x$

۶۵۰- اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع $f:A\to A$ وجود دارد که $f(1)=1$؟

۱) 4^5 ۲) 5^4 ۳) 4^4 ۴) 5^5

۶۵۱- اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{a,b,c\}$، چند تابع مانند f از A به B می‌توان نوشت به طوری که $f(2)\neq b$ باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۹ ۳) ۵۴ ۴) ۲۷

۶۵۲- اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $f:A\to A$ یک تابع باشد، تعداد توابعی مانند f که $a+f(a)$ عدد زوج باشد، چه تعداد است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۲۱۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

۶۵۳- اگر $f(x-1)+f(2)=\sqrt{x+1}-4$، مقدار $f(7)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۶۵۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+a & x\le 2 \\ x^2+2x+3 & \\ 2x-2 & x\ge 2\end{cases}$ تابع باشد، حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) ۵ ۴) ۴

۶۵۵- اگر $f(x+\frac{2}{x})=x^3+\frac{8}{x^3}$، مقدار $f(\sqrt{10})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $2\sqrt{10}$ ۳) $3\sqrt{10}$ ۴) $4\sqrt{10}$

۶۵۶- اگر $f(x)+xf(-x)=x+3$، باشد. حاصل $f(3)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۶۵۷- اگر $f(\frac{1}{x})-2f(x)=x^2+\frac{1}{x}$، حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{45}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $-\frac{15}{4}$ ۴) $\frac{45}{4}$

۶۵۸- به فرض آن‌که $f(x)-3f(-\frac{1}{x})=6x+\frac{3}{x}$ مقدار $f(3)$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $-\frac{4}{7}$

دامنهٔ توابع

۶۵۹- دامنهٔ تعریف تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{4x-x^2}-2\sqrt{2x-x^2+3}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۶۰- اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۳}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟ *(سراسری ۹۶)*

۱) $[\frac{۲}{۳},۲]$ ۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ۴) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۶۶۱- دامنهٔ تابع $y=\frac{۱+x}{x^۳+۶x^۲+ax}$ فقط دو عدد حقیقی را شامل نمی‌شود. a کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۹ ۳) -۹ ۴) ۷

۶۶۲- دامنهٔ تابع $y=\frac{x-۱}{۲x^۲+۸x+a}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ می‌باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۶

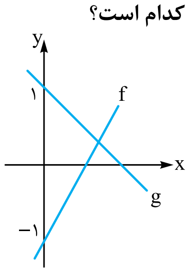
۶۶۳- هرگاه دامنهٔ تعریف $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx+c}$ بازهٔ $[۲,+\infty)$ باشد به طوری که $f(۶)=۴$. مقدار $f(۱۱)$ چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

۶۶۴- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{mx^۲-۴x+۳+m}$ برابر $\mathbb{R}$ است. حدود m کدام است؟

۱) $m\le -۴, m\ge ۱$ ۲) $m\ge ۱$ ۳) $۰<m\le ۱$ ۴) $-۴\le m\le ۱$

۶۶۵- نمودار f و g در شکل زیر رسم شده است. اگر نقطهٔ تلاقی آن‌ها $A(\frac{۲}{۵},\frac{۱}{۵})$ باشد. دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{f(x)g(x)}$ کدام است؟



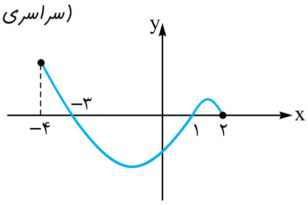
۱) $[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$

۲) $[\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۳}]$

۳) $[\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۲}]$

۴) $[\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۶}]$

۶۶۶- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*



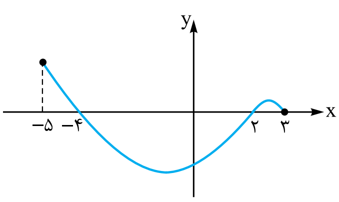
۱) $[۰,۲]$

۲) $[-۳,۲]$

۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$

۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۶۶۷- اگر نمودار f شکل مقابل باشد، دامنهٔ $y=\sqrt{\frac{x-۱}{f(x)}}$ در کدام گزینه آمده است؟



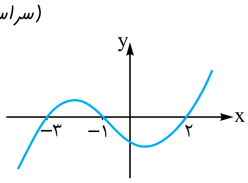
۱) $[۱,۲)\cup(-۵,-۴)$

۲) $(۲,۳)\cup(-۵,-۴)$

۳) $(۲,۳)\cup(-۴,۱]$

۴) $(-۴,۲)$

۶۶۸- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیر نقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)f(x)}$، کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*



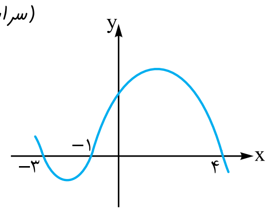
۱) $[-۳,۲]$

۲) $[-۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۱]$

۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۶۶۹- شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۳)*



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۶۷۰- دامنهٔ تعریف $f(x)=\sqrt{۲[x]-[x+۱]}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $[۱,+\infty)$

۶۷۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲-\log(۳-x)}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(-\infty,۱۰۳)$ ۲) $[-۱۰۳,۳)$ ۳) $[-۹۷,۳)$ ۴) $(-\infty,۳)$

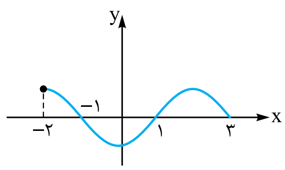
۶۷۲- دامنهٔ تعریف $f(x)=\log_۲(۱-\log(x-۲))$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(۲,۱۰)$ ۲) $(۲,۱۲)$ ۳) $(۲,۴)$ ۴) $(۲,۸)$

۶۷۳- دامنهٔ تابع $y=\log_{(b-x)}(x-a)$ به صورت $(۲,۴)-\{c\}$ می‌باشد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۳

۶۷۴- نمودار f شکل مقابل است. دامنهٔ تعریف $y=\log([x]f(x))$ در کدام گزینه آمده است؟



۱) $(-۲,-۱)\cup(۱,۳)$

۲) $(-۱,۰)$

۳) $(-۱,۰)\cup(۱,۳)$

۴) $(۰,۳)$

تساوی توابع

۶۷۵- دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) $f(x)=\sqrt{x-۲}\times\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۵x+۶}$

۲) $g(x)=۱$ و $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}$

۳) $g(x)=x$ و $f(x)=\sqrt{x^۲}$

۴) $g(x)=\frac{|x|}{x}$ و $f(x)=\frac{x}{|x|}$

۶۷۶- در کدام گزینه، توابع f و g برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۱} \\ g(x)=\sqrt{۲x-۲}+\sqrt{۲x+۲} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۴-x}\times\sqrt{۲+x} \\ g(x)=\sqrt{-x^۲+۲x+۸} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x-۳}} \\ g(x)=\sqrt{\frac{x-۲}{x-۳}} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}{x+۳} \\ g(x)=\frac{x-۱}{x+۳} \end{cases}$

۶۷۷- اگر توابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x^۲+cx+d}{x^۲+ax+b}$ با یکدیگر برابر باشند، $c+d$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۶۷۸- در کدام گزینه، توابع f و g برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{(x-۱)(x+۲)^۲} \\ g(x)=(x+۲)\sqrt{x-۱} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{(x-۱)(x+۲)^۲} \\ g(x)=|x+۲|\sqrt{x-۱} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{(x+۲)(x-۱)^۲} \\ g(x)=|x-۱|\sqrt{x+۲} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{-x^۳} \\ g(x)=x\sqrt{-x} \end{cases}$

۶۷۹- اگر توابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۳+۲x^۲-x-۲}{x^۲-۱} & x\neq\pm۱ \\ \frac{ax+۲}{x+b} & x=\pm۱ \end{cases}$ و $g(x)=x+c$ با هم برابر باشند، $b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۶۸۰- تابع $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}$ با کدام تابع برابر است؟

۱) $g(x)=\frac{1}{[x]+[1-x]}$　۲) $g(x)=\sqrt{-\cos^2 \pi x}$　۳) $g(x)=\sqrt{-\sin^2 \pi x}$　۴) $g(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]$

۶۸۱- توابع $f(x)=\frac{2x+1}{|x+1|-x}$ و $g(x)=ax+|x+a|$ مساوی‌اند. a کدام است؟

۱) 1　۲) -1　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $-\frac{1}{2}$

۶۸۲- کدام‌یک از توابع زیر با تابع $y=\log\frac{x-2}{x}$، برابر است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) $\log(x-2)-\log x$　۲) $\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$　۳) $\frac{1}{2}\log(\frac{x-2}{x})^2$　۴) $2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

برد توابع

۶۸۳- برد تابع $y=\frac{x^2+3x-4}{x-1}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ است. مقدار b کدام است؟

۱) 1　۲) -4　۳) 5　۴) 9

۶۸۴- برد تابع $y=\frac{(x-1)^3(x-2)}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$　۲) $[0,+\infty)$　۳) $(0,+\infty)-\{1\}$　۴) $[0,+\infty)-\{1\}$

۶۸۵- برد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<1, x\neq 0\\ \sqrt{x-2} & x>2\end{cases}$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $\mathbb{R}-[0,1]$　۲) $\mathbb{R}-\{0,1\}$　۳) $(0,+\infty)$　۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

۶۸۶- برد $y=x+\sqrt{x^2-4x+4}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(1,+\infty)$　۲) $[2,+\infty)$　۳) $[0,+\infty)$　۴) $[3,+\infty)$

۶۸۷- برد تابع $f(x)=|x|+2|x-1|$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$　۲) $[1,+\infty)$　۳) $[0,+\infty)$　۴) $[3,+\infty)$

۶۸۸- برد تابع $y=|x|-2|x+1|$ کدام است؟

۱) $[-2,+\infty)$　۲) $(-\infty,-2]$　۳) $[1,+\infty)$　۴) $(-\infty,1]$

۶۸۹- برد تابع $f(x)=\begin{cases}2x-x^2 & x<2\\ 4-x & x\geq 2\end{cases}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1]$　۲) $(-\infty,2]$　۳) $\mathbb{R}$　۴) $(-\infty,4)$

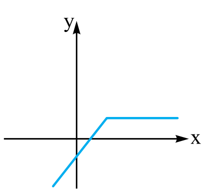
۶۹۰- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\geq 3\\ x^2-2x+2 & 0\leq x<3\\ |x|+2 & x<0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$　۲) $[1,5]$　۳) $[2,+\infty)$　۴) $\mathbb{R}$

۶۹۱- اگر برد تابع $y=x+a\frac{|x|}{x}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $-1<a<1$　۲) $a<0$　۳) $a>0$　۴) $|a|>1$

۶۹۲- نمودار تابع $y=x+a|x+2a|$ به صورت مقابل است. برد این تابع کدام است؟



۱) $[1,+\infty)$

۲) $(-\infty,2]$

۳) $[2,+\infty)$

۴) $(-\infty,1]$

۶۹۳- برد تابع $y=2-3\sqrt{6x-x^2}$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ چه عددی است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۶۹۴- دامنه و برد تابع غیر ثابت $y=a\sqrt{4x-x^2}$ برابر است، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۶۹۵- هرگاه $f(x)=(x-|x|)\sqrt{\frac{4-x}{x}}$، برد تابع f کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $[-2,0]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[-2,2)$

۶۹۶- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$، کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $(0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $(1,3)$

۶۹۷- برد تابع $y=x-[x+\frac{1}{3}]$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{3},1)$ ۲) $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $[-\frac{1}{3},1)$ ۴) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

۶۹۸- اگر $f(x)=x-[x]$، آن‌گاه برد تابع $g(x)=f(2x-3)-2f(x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $[-1,0]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $\{-1,0\}$ ۴) $\{0,1\}$

۶۹۹- برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{[x^2]}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $\{-1,1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\{0,1,-1\}$

۷۰۰- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-1}$ مقدار $f(-\frac{1}{2}f(x))$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) تعریف نشده

۷۰۱- اگر $f(x)=\cos 2x+\cos^2 x$ آن‌گاه برد تابع $y=[f(x)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰۲- برد تابع $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[\frac{1}{2},1]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[\frac{1}{4},1]$

۷۰۳- کدام گزینه عضوی از برد تابع $f(x)=x-2\sqrt{x-2}$ است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

انواع توابع

۷۰۴- هرگاه $f(x)=(2a-1)x^2+(4a+b)x+a-b$ تابعی ثابت باشد. $f(4)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۷۰۵- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد به طوری که $f(3)-4g(2)=5$ مقدار $g^{-1}(2+f(4))$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۷۰۶- اگر f یک تابع خطی و تابع‌ای، با ضابطهٔ $y=\frac{f(x)}{2-3x}$ برابر تابع ثابت ۲ $g(x)=2$، $x\neq\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -8 ۳) -2 ۴) -6

۷۰۷- به فرض آن‌که $f(x)=\frac{a-2x}{5x+3}$ تابعی ثابت باشد. $a+f(2)$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{8}{5}$ ۲) $-\frac{6}{5}$ ۳) -2 ۴) -3

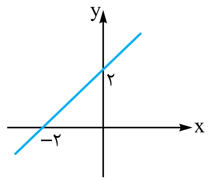
۷۰۸- اگر f تابع ثابت و g تابع همانی و دامنهٔ هر دو $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $f(3)=2g(1)$ آن‌گاه ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3f(x)+g(x)=0$ کدام است؟

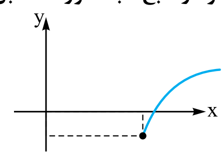
۱) ۲ و -3 ۲) ۳ و -2 ۳) -2 و -3 ۴) ۲ و ۳

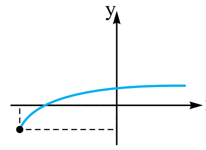
۷۰۹- فرض کنید $f(x)=\frac{|x|}{1+|x|}$ در کدام بازه تابع $y=f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}f(x)$ یک تابع ثابت است؟

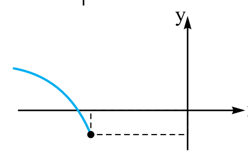
۱) $0<x\leq 1$ ۲) $-1\leq x\leq 1$ ۳) $x>0$ ۴) $x<0$

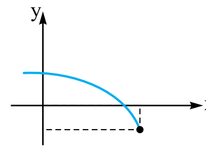
۷۱۰- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=\sqrt{۲+f(x)}-۱$ کدام است؟



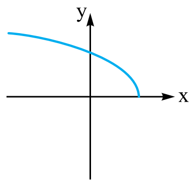
(۱


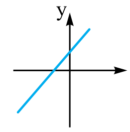
(۲


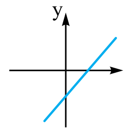
(۳


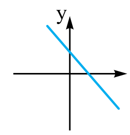
(۴


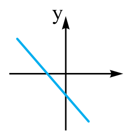
۷۱۱- نمودار تابع $y=\sqrt{ax+b}$ به صورت مقابل است. نمودار خط $y=bx-a$ کدام است؟



(۱


(۲


(۳


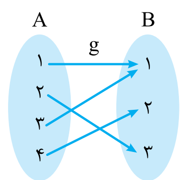
(۴


تابع یک به یک و معکوس

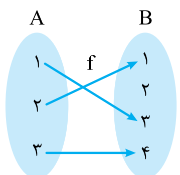
تابع یک‌به‌یک

$f:A\to B$ را تابعی یک‌به‌یک گوییم هرگاه برای $x_۱,x_۲\in A$ شرط زیر برقرار باشد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$$



تابع غیریک‌به‌یک



تابع یک‌به‌یک

تست هرگاه $f=\{(۲,۳),(b,۶),(۲,a),(a+۱,۲a)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، مقدار $b-a$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

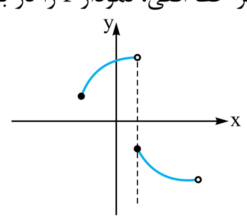
پاسخ **گزینهٔ «۱»** اولاً f باید تابع باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۳)\in f\\(۲,a)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow a=۳$$

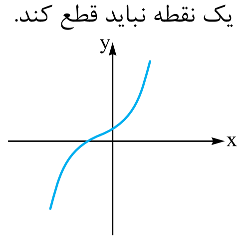
$$\Rightarrow b-a=۱$$

$$\left.\begin{array}{l}(b,۶)\in f\\(a+۱,۲a)=(۴,۶)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow b=۴$$

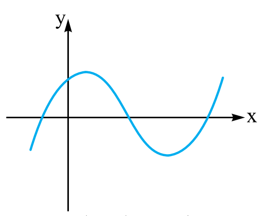
با توجه به تعریف، اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد هر خط افقی، نمودار f را در بیش از یک نقطه نباید قطع کند.



تابع یک‌به‌یک



تابع یک‌به‌یک



تابع غیر یک‌به‌یک

تست اگر $f(x)=ax+|x-۳|$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $|a|\le ۱$ ۲) $a>۰$ ۳) $|a|\ge ۲$ ۴) $|a|>۱$

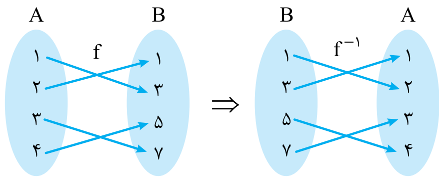
پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر بپذیریم f یک تابع با ۲ ضابطه است، برای $x\le ۳$ یک تابع خطی و برای $x>۳$ تابع خطی دیگری خواهد بود. پس باید هر دو یک‌به‌یک باشند و به لحاظ یکنوایی مثل هم باشند؛ یعنی یا هر دو ضابطهٔ خطی صعودی اکید و یا هر ۲ ضابطهٔ خطی نزولی اکید باشند. پس باید ۲ شیب تابع خطی هم‌علامت باشند.

$$\left.\begin{array}{l}x>۳:f(x)=(a+۱)x-۳\\x\le ۳:f(x)=(a-۱)x+۳\end{array}\right.\Rightarrow (a+۱)(a-۱)>۰\Rightarrow a>۱\ \text{یا}\ a<-۱$$

معکوس (وارون) تابع

اگر $f:A\to B$ تابعی یک‌به‌یک باشد می‌گوییم f تابعی وارون‌پذیر است و تعریف می‌کنیم $f^{-1}:B\to A$ به طوری که:

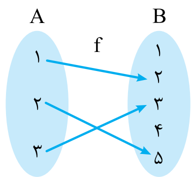
$$f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=\alpha$$



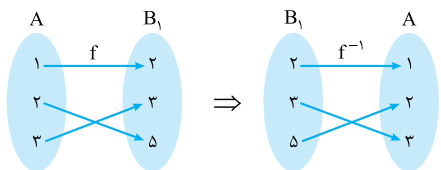
f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر

به عنوان مثال $f(1)=3$ پس $f^{-1}(3)=1$.

در این مثال ابتدا ۱ و ۴ را از B حذف می‌کنیم.



تابع به دست آمده با f برابر خواهد بود.



دقت کنید حذف اعضای اضافی در B در تعریف تابع هیچ اشکالی ندارد.

تست به فرض آن‌که $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+3}$، مقدار $f^{-1}(2+f(10))$ چه عددی است؟

۱) -16 ۲) 5 ۳) $\dfrac{16}{9}$ ۴) 16

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ۲ راه داریم:

راه اول: ابتدا ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم، پس کافی است x را برحسب y به دست آوریم.

$$y=\frac{4x-1}{x+3}\Rightarrow xy+3y=4x-1\Rightarrow xy-4x=-1-3y\Rightarrow x(y-4)=-1-3y\Rightarrow x=\frac{3y+1}{4-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{4-x}$$

حالا عبارت خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$f(10)=\frac{39}{13}=3\Rightarrow f^{-1}(2+f(10))=f^{-1}(5)=\frac{15+1}{-1}=-16$$

راه دوم: ابتدا $f(10)$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$$f(10)=3\Rightarrow f^{-1}(2+3)=f^{-1}(5)$$

فرض کنیم $f^{-1}(5)=\alpha$ آن‌گاه $f(\alpha)=5$؛ پس:

$$\frac{4\alpha-1}{\alpha+3}=5\Rightarrow 4\alpha-1=5\alpha+15\Rightarrow \alpha=-16\Rightarrow f^{-1}(2+f(10))=-16$$

نکته اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد آن‌گاه وارون‌پذیر نیست لذا گاهی اوقات می‌توانیم با محدودکردن دامنهٔ تعریف تابع، از آن یک تابع جدید و یک‌به‌یک بسازیم و سپس معکوس آن را به دست آوریم.

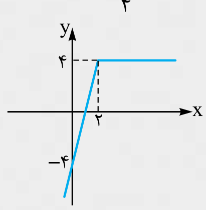
تست تابع $f(x)=2x-|4-2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}x+1\,,\ x\ge 4$ ۲) $\frac{1}{4}x-1\,,\ x\le 4$ ۳) $\frac{1}{4}x-1\,,\ x\ge 4$ ۴) $\frac{1}{4}x+1\,,\ x\le 4$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر نمودار f را رسم کنیم مشخص می‌شود که f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر نمی‌باشد.

$$f(x)=2x-|2x-4|$$

$$f(x)=\begin{cases}4 & x>2\\ 4x-4 & x\le 2\end{cases}$$



دقت کنید تابع ثابت، تابعی وارون‌پذیر نیست. پس با فرض $x\le 2$ تابع وارون‌پذیر خواهد بود بدین ترتیب: $f(x)=4x-4$ و $x\le 2\,,\ R_f=(-\infty,4]$

تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است:

$$y=4x-4\Rightarrow x=\frac{y+4}{4}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1$$

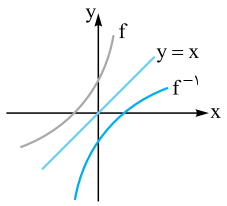
اما f تابع خطی صعودی اکید است، پس:

$$D_f=(-\infty,2]\Rightarrow R_f=(-\infty,4]$$

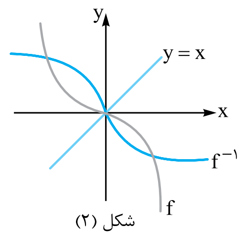
از آن‌جایی که $D_{f^{-1}}=R_f$، پس ضابطهٔ معکوس f به صورت $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1\,,\ x\le 4$ است.

نکته نمودار دکارتی دو تابع وارون‌پذیر $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ هم می‌باشند.

اگر تابع وارون‌پذیر f نیمساز ناحیه‌های اول و سوم را در نقطهٔ $A(\alpha,\alpha)$ قطع کند آن‌گاه f^{-1} هم از این نقطه عبور می‌کند پس نقاط تلاقی f با نیمساز ناحیه‌های اول و سوم برخی از نقاط تلاقی f با f^{-1} را نشان می‌دهد. ولی لزوماً همهٔ نقاط تلاقی f با f^{-1} روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم نیست. (مانند شکل (۲))

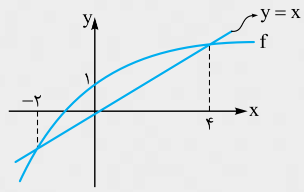


شکل (۱)



شکل (۲)

تست شکل روبه‌رو نمودار $y=f(x)$ است. دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) $[۱,۴]$
۲) $[-۲,۴]$
۳) $[-۲,۱]$
۴) $\mathbb{R}-(-۲,۴)$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** برای یافتن دامنهٔ تعریف کافی است نامعادلهٔ $x-f^{-1}(x)\geq ۰$ را حل کنیم. اگر دقت کنیم نمودار f^{-1} قابل رسم است و در بازهٔ $[-۲,۴]$ در شرط $f^{-1}(x)\leq x$ صدق می‌کند. پس همین بازهٔ $[-۲,۴]$ دامنهٔ تعریف است.

تست اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۵}{x-۲}$ باشد، نقاط تلاقی f با f^{-1} در کدام گزینه آمده است؟

۱) $x=-۱$ و $x=۵$ ۲) $x=۱$ و $x=-۵$ ۳) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در این‌جا رسم نمودار قدری مشکل است پس بهتر است ضابطهٔ f^{-1} را به دست آوریم.

$$y=\frac{۲x+۵}{x-۲}\Rightarrow xy-۲y=۲x+۵\Rightarrow xy-۲x=۲y+۵\Rightarrow x=\frac{۲y+۵}{y-۲}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۲x+۵}{x-۲}$$

دقت کنید f^{-1} بر f منطبق است. پس نقاط تلاقی یا نقاط مشترک آن‌ها $\mathbb{R}-\{۲\}$ است. دقت کنید که اگر f را با نیمساز ناحیه‌های اول و سوم تلاقی می‌دادیم فقط به دو نقطهٔ $x=-۱$ و $x=۵$ می‌رسیدیم. پس یافتن ضابطه مناسب‌تر است.

با توجه به مقدمات گفته‌شده و تست حل‌شده، بهتر است در این‌گونه سؤالات ضابطهٔ f^{-1} را به دست آوریم و با f تلاقی دهیم و یا این‌که از نمودار f یا f^{-1} کمک بگیریم.

نکته در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ که آن را هموگرافیک می‌نامیم $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ ضابطهٔ معکوس آن است. به همین جهت وقتی $a+d=۰$ باشد آن‌گاه f و f^{-1} بر هم منطبق می‌شوند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تابع یک به یک

۷۱۲- اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟ *(سراسری ۸۶)*

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۷۱۳- تابع $f=\{(۲,a+۱),(b,۰),(۲,a^۲-۱),(۱,۳)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۱۴- اگر $f=\{(۱,m),(۱,m^۲-۳m),(m,۴),(۰,۳)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، m کدام است؟

۱) $m=۰,۴$ ۲) فقط $m=۰$ ۳) فقط $m=۴$ ۴) m یافت نمی‌شود.

۷۱۵- تابع $f(x)=ax^۲+۳x-۱+a$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۱۶- تابع $y=x^۲+ax+۱$ در بازهٔ $(-\infty,۲]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) −۲ ۴) −۴

۷۱۷- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x-۲\dfrac{|x|}{x}$ ۲) $y=x-|x-۳|$ ۳) $y=۲x+|x|$ ۴) $y=x+۲|x-۱|$

۷۱۸- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=|x+۲|+۴x$ ۲) $y=|x+۲|+|۴x|$ ۳) $y=|x+۲|+x$ ۴) $y=|x+۲|+|x|$

۷۱۹- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x\geq ۲ \\ x+a & x<۲ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. حدود a کدام است؟

۱) $a\geq -۲$ ۲) $a\leq -۲$ ۳) $a\geq ۲$ ۴) $a\leq ۲$

۷۲۰- حدود a برای آن‌که تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<-۱ \\ ۲ax+۱ & -۱\leq x\leq ۱ \\ -x^۲-۱ & x>۱ \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام است؟

۱) $۰<a\leq \frac{۳}{۲}$ ۲) $۰<a\leq \frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}\leq a\leq \frac{۱}{۲}, a\neq ۰$ ۴) $-\frac{۱}{۲}\leq a<۰$

۷۲۱- تابع $y=\frac{mx-m+۱}{x+۲}$ یک‌به‌یک است. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) ۳

تابع معکوس (وارون)

۷۲۲- به فرض آن‌که $f=\{(۱,۲),(a+۱,۲a),(b,۴),(۱,a)\}$ تابعی معکوس‌پذیر باشد، $f^{-۱}(۴)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲۳- اگر تابع $y=x^۳+ax^۲+a-۳$ معکوس‌پذیر باشد، منحنی معکوس آن از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۲,۵)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۵,۲)$

۷۲۴- تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ معکوس‌پذیر است. کدام تابع زیر حتماً معکوس‌ناپذیر است؟

۱) $y=f(۲x-۱)$ ۲) $y=f(x)+f(-x)$ ۳) $y=|f(x)|$ ۴) $y=f(x)-f(-x)$

۷۲۵- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$، مقدار $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۸)*

۱) تعریف‌نشده ۲) -۵ ۳) -۲ ۴) -۸

۷۲۶- اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$، حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۲۷- به فرض آن‌که $۱+f(۱-۳x)=g(۲x+۳)$ و $f^{-۱}(۳)=۴$، مقدار $g^{-۱}(۴)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۷۲۸- اگر $f(۲x)=۱-۳g(\frac{۳}{x})$ و $g^{-۱}(۲)=۲$، آن‌گاه $f^{-۱}(-۵)$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲۹- با فرض $f(x)=g(۱-\frac{۳}{x})$ و $g^{-۱}(x)=۲+\frac{۳}{x}$، مقدار $f^{-۱}(۳)$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۳

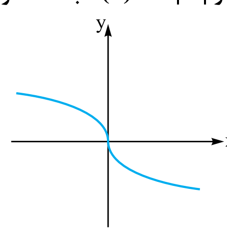
۷۳۰- اگر $f(x)=g^۳(x)+g(x)$ و $g^{-۱}(x)=\sqrt{x+۷}$، حاصل $f^{-۱}(۱۰)$ کدام است؟

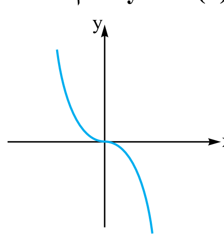
۱) ۹ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) -۳

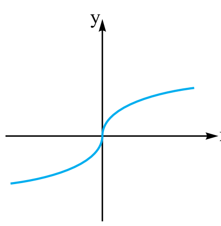
۷۳۱- اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$، حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟ *(سراسری ۸۹)*

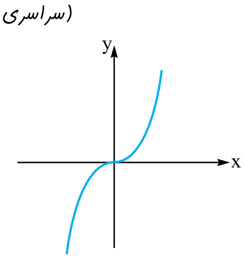
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳۲- اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۵)*

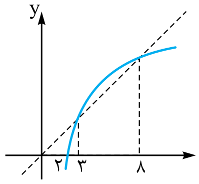
۱)


۲)


۳)


۴)


۷۳۳- شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۴)*



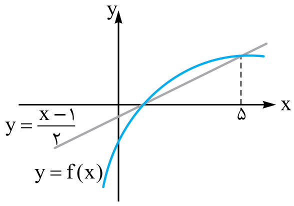
۱) $(۰,۲]$

۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$

۴) $[۳,۸]$

۷۳۴- اگر نمودار f مطابق شکل مقابل باشد، دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=\sqrt{۲x+۱-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟



۱) $[۱,۵]$

۲) $[۰,۲]$

۳) $[-\frac{۱}{۲},۵]$

۴) $[۰,۵]$

۷۳۵- اگر $f(x)=۴-۲^{۲x}$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-۱}(x)}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۶ با کمی تغییر)*

۱) $[۲,۳]$ ۲) $[۳,۴]$ ۳) $[۰,۳]$ ۴) $[۰,۴]$

۷۳۶- ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ به کدام صورت است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $y=x^۲-۴x+۵\,,\,x\le ۲$ ۲) $y=-x^۲+۴x-۵\,,\,x\le ۲$

۳) $y=x^۲-۴x+۵\,,\,x\ge ۱$ ۴) $y=-x^۲+۴x-۵\,,\,x\ge ۱$

۷۳۷- ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)=۳-\sqrt{۲-x}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x^۲-۶x+۷\,,\,x\le ۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=x^۲-۶x+۷\,,\,x\ge ۳$

۳) $f^{-۱}(x)=-x^۲+۶x-۷\,,\,x\le ۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=-x^۲+۶x-۷\,,\,x\ge ۳$

۷۳۸- در بازه‌ای که تابع $f(x)=x-|۳-x|$ معکوس‌پذیر است، ضابطهٔ معکوس آن کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۲}\,,\,x\in\mathbb{R}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}\,,\,x\in\mathbb{R}$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۲}\,,\,x\le ۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}\,,\,x\le ۳$

۷۳۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x-|۴-۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $\frac{۱}{۴}x+۱\,,\,x\ge ۴$ ۲) $\frac{۱}{۴}x-۱\,,\,x\le ۴$ ۳) $\frac{۱}{۴}x-۱\,,\,x\ge ۴$ ۴) $\frac{۱}{۴}x+۱\,,\,x\le ۴$

۷۴۰- اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳\,;\,x\ge ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۷۴۱- با فرض $f(x)=۳x+۱$، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f^{-۱}(۳x-۱)-۲x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۲}{۳}]$ ۲) $(-\infty,-\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۲}{۳},+\infty)$ ۴) $[\frac{۲}{۳},+\infty)$

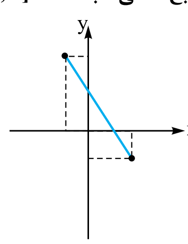
۷۴۲- اگر f یک تابع خطی با شیب مثبت و $f^{-۱}(f^{-۱}(x))=۴x+۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

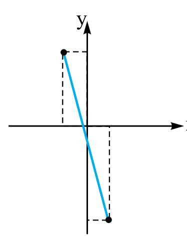
۱) $\frac{x-۱}{۲}$ ۲) $۲x+۱$ ۳) $۲x-۱$ ۴) $\frac{x+۱}{۲}$

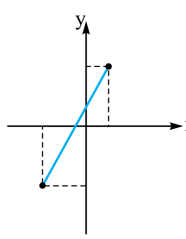
۷۴۳- قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

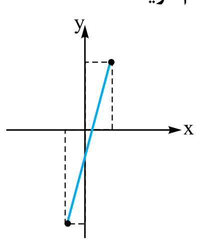
۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۷۴۴- تابع خطی f با دامنهٔ $[-۳,۳]$ مفروض است هرگاه $f(۱)=۵$ و $f^{-۱}(۱)=۰$، نمودار $y=f^{-۱}(x)-f(x)$ در کدام گزینه آمده است؟

۱)


۲)


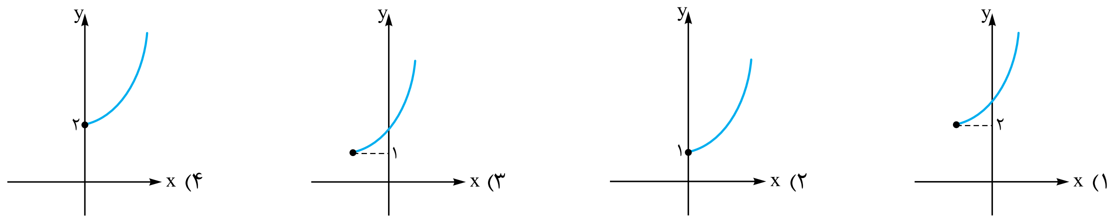
۳)


۴)


۷۴۵- اگر $f(x)=x+4\sqrt{x}$ و $f^{-1}(x)=8+x+a\sqrt{x+b}$، آن‌گاه $a+b$ چه‌قدر است؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) 3 ۴) صفر

۷۴۶- فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\ ,\ x\geq 2$، نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



۷۴۷- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $-x^2$ ۲) x^2 ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۷۴۸- ضابطهٔ معکوس $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $f^{-1}(x)=x\sqrt{|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۲) $f^{-1}(x)=x\sqrt{|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

۳) $f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

۴) $f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۷۴۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}\ ,\ x^2\neq 1$، $f(0)=0$، ضابطهٔ وارون آن برابر کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $xf(x)$ ۴) $-xf(x)$

۷۵۰- اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) x^2-1 ۴) صفر

۷۵۱- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۷۵۲- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ باشد، حاصل $f^{-1}(\tan x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\frac{\cos x}{|\cos x|}\cdot\sin x$ ۴) $\frac{|\sin x|}{\sin x}\cdot\cos x$

۷۵۳- ضابطهٔ وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\ ,\ |x|<1$

۲) $f^{-1}(x)=\frac{1-|x|}{x}\ ,\ |x|>1$

۳) $f^{-1}(x)=\frac{x}{|x|-1}\ ,\ |x|>1$

۴) $f^{-1}(x)=\frac{|x|-1}{x}\ ,\ |x|<1$

۷۵۴- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-x)\ ,\ x\in\mathbb{R}$ ۳) $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ ,\ x>0$ ۴) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-x)\ ,\ x>0$

۷۵۵- نمودار معکوس تابع $f(x)=\frac{mx+3}{x+m-2}$ بر نمودار خود تابع منطبق است. مقدار m کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۷۵۶- تابع $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟ (سراسری ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیر متقاطع

۷۵۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ (سراسری ۹۶)

۱) -4 و -1 ۲) 4 و -1 ۳) -4 و 1 ۴) 4 و 1

اعمال اصلی و ترکیب توابع

اعمال بر روی تابع

بعد از آن‌که با مفهوم تابع و انواع آن آشنا شدیم می‌خواهیم جمع، ضرب، تفریق و تقسیم دو تابع را تعریف کنیم.

اگر f و g دو تابع باشند به طوری که اشتراک دامنهٔ تعریف آن‌ها غیرتهی باشد، آن‌گاه: $D_{f+g}=D_f\cap D_g$ و $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

در واقع برای x مشترک از دامنهٔ تعریف آن‌ها، مقادیر دو تابع را با هم جمع می‌کنیم. به همین ترتیب سایر توابع را تعریف می‌کنیم.

$(f\times g)(x)=f(x).g(x)$ و $D_{f.g}=D_f\cap D_g$ $\qquad$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ و $D_{f-g}=D_f\cap D_g$

$(f\div g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ و $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=۰\}$

تست اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۰,۳)\}$ و $g=\{(۰,۲),(۱,۳),(۳,۱)\}$، برد تابع $(f-g)\times g^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{۲,۰\}$ ۲) $\{-۳,۰,۳\}$ ۳) $\{۱,۳\}$ ۴) $\{۰,-۳\}$

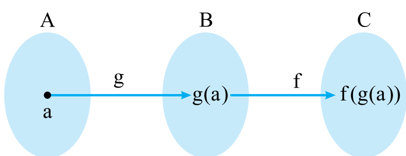
پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$\begin{cases}D_f=\{۱,۲,۳,۰\}\\ D_g=\{۰,۱,۳\}\end{cases}\Rightarrow D_{f-g}=\{۰,۱,۳\}\Rightarrow f-g=\{(۰,۳-۲),(۱,۲-۳),(۳,۱-۱)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}f-g=\{(۰,۱),(۱,-۱),(۳,۰)\}\\ g^{-۱}=\{(۲,۰),(۳,۱),(۱,۳)\}\end{array}\right\}\Rightarrow (f-g)\times g^{-۱}=\{(۳,۰),(۱,-۳)\}$$

پس برد آن $\{۰,-۳\}$ است.

ترکیب توابع



اگر $g:A\to B$ و $f:B\to C$ دو تابع باشند، آن‌گاه می‌توانیم به کمک آن‌ها تابع جدیدی را که آن را تابع مرکب می‌نامیم، به صورت مقابل تعریف کنیم.

تابع $fog:A\to C$ با تعریف $fog(a)=f(g(a))$ را تابع مرکب می‌نامیم و داریم:

$$D_{fog}=\{x:x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

به مثال زیر دقت کنید.

مثال

$g=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$ و $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$

$g(۱)=۳,f(۳)=۳\Rightarrow fog(۱)=f(g(۱))=f(۳)=۳\Rightarrow (۱,۳)\in fog$

$g(۲)=۱,f(۱)=۲\Rightarrow fog(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۲\Rightarrow (۲,۲)\in fog$

$g(۳)=۲,f(۲)=۱\Rightarrow fog(۳)=f(g(۳))=f(۲)=۱\Rightarrow (۳,۱)\in fog$

$\Rightarrow fog=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$

به همین ترتیب اگر بررسی کنیم آن‌گاه به دست می‌آید که: $gof=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$

تست هرگاه $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$، آن‌گاه تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$ ۲) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$

۳) $\{(۱,۱),(۲,۲),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ابتدا $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را تک‌تک به دست می‌آوریم، سپس آن‌ها را با هم ترکیب می‌کنیم.

$g^{-۱}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$ $\qquad$ $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\}$

دقت کنید جابه‌جایی در ترکیب توابع برقرار نیست؛ یعنی باید به همان ترتیب عمل کنیم، پس: $g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

اگر ضابطهٔ دو تابع f و g داده شده باشد می‌توانیم ترکیب آن‌ها را به دست آوریم. مثلاً اگر $f(x)=\dfrac{۲}{x}-۲$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ آن‌گاه:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲}{g(x)}-۲=\frac{۲}{\frac{x}{x+۱}}-۲=\frac{۲x+۲}{x}-۲=۲+\frac{۲}{x}-۲=\frac{۲}{x}$$

تست اگر $f(x)=۳-|۳-x|$، ضابطهٔ $fof(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $۶-f(x)$ ۴) $f(x)-۶$

پاسخ گزینهٔ «۱» ابتدا ضابطهٔ f را به صورت $f(x)=۳-|x-۳|$ می‌نویسیم و توجه می‌کنیم که: $f(x)\le ۳$

$$fof(x)=f(f(x))=۳-|\underbrace{f(x)-۳}_{-}|=۳-(۳-f(x))=f(x)$$

نکته با داشتن f و g می‌توانیم fog و gof را به دست آوریم. اما گاهی با داشتن fog و g می‌توانیم f را بیابیم و یا آن‌که با داشتن f و fog می‌توانیم g را بیابیم.

تست هرگاه $g(x)=۲x-۳$ و $(fog)(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$، ضابطهٔ $gof(x)$ کدام است؟

۱) $۲x^۲-۴x-۳$ ۲) $۲x^۲-۴x+۷$ ۳) $۲x^۲-۲x+۱۰$ ۴) $۲x^۲-۲x-۳$

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا با داشتن g و fog، ضابطهٔ f را می‌یابیم.

$$fog(x)=۴(x^۲-۴x+۵) \Rightarrow f(۲x-۳)=۴(x^۲-۴x+۵)$$

$$۲x-۳=t \Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲} \Rightarrow f(t)=۴((\frac{t+۳}{۲})^۲-۴(\frac{t+۳}{۲})+۵)$$

$$\Rightarrow f(t)=t^۲+۶t+۹-۸t-۲۴+۲۰ \Rightarrow f(t)=t^۲-۲t+۵ \Rightarrow f(x)=x^۲-۲x+۵$$

حالا با داشتن ضابطه‌های f و g ضابطهٔ gof را به دست می‌آوریم.

$$gof(x)=g(f(x))=۲f(x)-۳=۲x^۲-۴x+۱۰-۳=۲x^۲-۴x+۷$$

نکته برای‌یافتن دامنهٔ fog هم می‌توانیم fog را تشکیل دهیم سپس دامنهٔ آن را به دست آوریم (به شرط آن‌که دامنه را قبل از ساده‌کردن ضابطهٔ آن به دست آوریم) و هم می‌توانیم از تعریف دامنهٔ تابع مرکب استفاده کنیم.

تست اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\log(x^۲+۱۵x)$، دامنهٔ fog شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به تعریف داریم:

$$D_{fog}=\{x : x\in D_g , g(x)\in D_f\}$$

$x^۲+۱۵x>۰ \Rightarrow x>۰$ یا $x<-۱۵$

$$g(x)\in D_f \Rightarrow g(x)\le ۲ \Rightarrow \log(x^۲+۱۵x)\le ۲ \Rightarrow x^۲+۱۵x\le ۱۰۰ \Rightarrow x^۲+۱۵x-۱۰۰\le ۰$$

$$(x+۲۰)(x-۵)\le ۰ \Rightarrow -۲۰\le x\le ۵ \Rightarrow D_{fog}=[-۲۰,-۱۵)\cup(۰,۵]$$

تعداد اعداد صحیح در دامنهٔ تعریف آن، ۱۰ عدد صحیح است.

تست اگر f تابعی معکوس‌پذیر باشد و تعریف کنیم $g(۲x)=۱-۳f(\frac{۳}{x})$ به طوری که $f^{-۱}(۲)=-۳$، مقدار $g^{-۱}(-۵)$ چه عددی است؟

۱) -۵ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۵

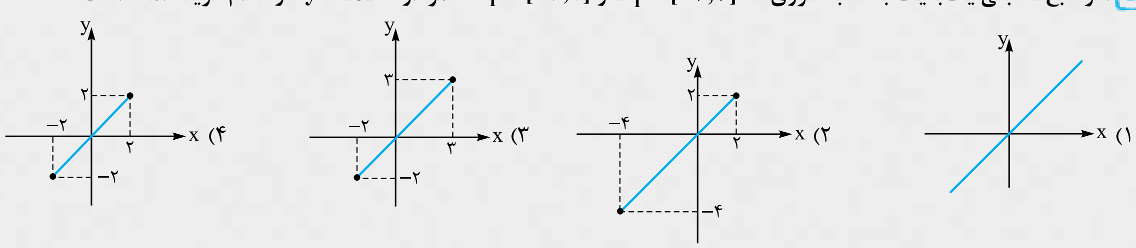
پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به مفاهیم تابع معکوس و تابع مرکب داریم: $f^{-۱}(۲)=-۳ \Rightarrow f(-۳)=۲$

با فرض $x=-۱$ داریم: $g(-۲)=۱-۳f(-۳) \Rightarrow g(-۲)=۱-۳(۲)=-۵ \Rightarrow g^{-۱}(-۵)=-۲$

نکته اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه داریم:

۱ $(fog)^{-۱}(a)=(g^{-۱}of^{-۱})(a)=g^{-۱}(f^{-۱}(a))$ ۲ $fof^{-۱}(a)=a \quad a\in R_f$ ۳ $f^{-۱}of(a)=a \quad a\in D_f$

تست اگر تابع f تابعی یک‌به‌یک باشد به طوری که $D_f=[-۲,۳]$ و $R_f=[-۴,۲]$، نمودار $y=fof^{-۱}$ در کدام گزینه آمده است؟



پاسخ گزینهٔ «۲» می‌دانیم اگر f تابعی معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه ترکیب هر تابع معکوس‌پذیر با معکوس همان تابع، تابعی همانی است. همان‌طور که در نکتهٔ فوق اشاره شد: $fof^{-۱}(x)=x$ و $x\in R_f$. پس جواب تست تابع همانی است به طوری که در بازهٔ $[-۴,۲]$ همانی باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴ عمل اصلی روی توابع

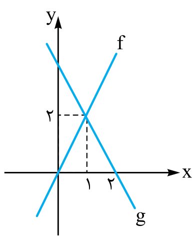
۷۵۸- اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۰),(۳,۲),(۴,۱)\}$ و $g=\{(۳,۱),(۲,۱),(۴,۲)\}$، تابع $\frac{g}{f}+g$ کدام است؟

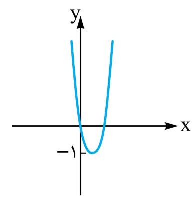
۱) $\{(۳,\frac{۳}{۲}),(۲,۱),(۴,۴)\}$ ۲) $\{(۳,۱),(۴,۴)\}$ ۳) $\{(۳,۱),(۲,۱),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۳,\frac{۳}{۲}),(۴,۴)\}$

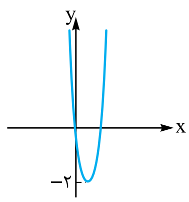
۷۵۹- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x}$ و $g(x)=\sqrt{x}-۱$، دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

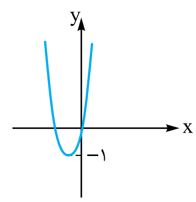
۱) $[۰,۴]$ ۲) $[۰,۴]-\{۱\}$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $(۱,۴]$

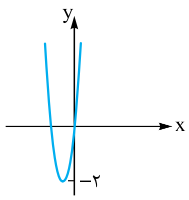
۷۶۰- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. نمودار تابع $f.(f-g)$ کدام است؟



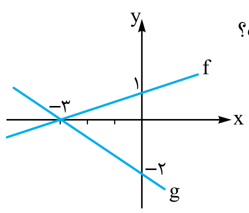
۱)


۲)


۳)


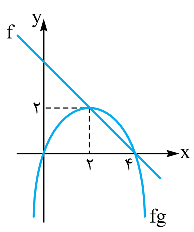
۴)


۷۶۱- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. به ازای کدام مقدار a، $x=۲$ ریشهٔ معادلهٔ $(f-g)(x)=ax$ است؟



۱) ۲/۵
۲) ۱/۵
۳) ۴/۵
۴) ۳/۵

۷۶۲- نمودار تابع f و سهمی fg به صورت مقابل است. ضابطهٔ $f+g$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}x$
۲) $-\frac{۱}{۲}x$
۳) $\frac{۱}{۲}x+۴$
۴) $-\frac{۱}{۲}x+۴$

۷۶۳- اگر $f(x)=۲-|x+۱|$ و $g(x)=x+|x|$، آن‌گاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۷۶۴- اگر $f(x)=x+|x|$ و $g(x)=|x+۱|+۱$، آن‌گاه برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) $[۰,۱)$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

ترکیب توابع

۷۶۵- اگر $f=\{(۲,۳),(۱,۲),(-۱,۲),(۳,۳)\}$ و $g=\{(۲,۲),(۳,۱),(-۱,۳)\}$، آن‌گاه دامنهٔ fog و برد gof چند عضو مشترک دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۶۶- اگر $f=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(۵,-۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ یک تابع باشد، تابع fof کدام است؟

۱) $\{(-۳,۴),(۵,۴)\}$ ۲) $\{(-۳,۴),(۲,۴)\}$ ۳) $\{(-۳,۴),(۵,۴),(-۲,۴)\}$ ۴) $\{(-۳,۴),(-۲,۴)\}$

۷۶۷- به فرض آن‌که $f=\{(1,3),(2,5)(3,2),(0,1)\}$ و $g(x)=x-4$ اگر $gof(a)=fog(4)$، مقدار a چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۶۸- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد، عدد a کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۷۶۹- تابع $f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ و $g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4,1)\in gof$ و $(4,2)\in fog$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $(3,4)$ ۲) $(4,3)$ ۳) $(4,5)$ ۴) $(5,4)$

۷۷۰- اگر $f(x)=2x^2+4$ و $fog(x)=4x^2+6x$، مقدار $g(-2)$ کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۷۷۱- اگر $g(x)=2x+3$ و $fog(x)=\frac{x}{x+1}$، مقدار $f(-5)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

۷۷۲- اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (سراسری ۸۶)

ورودی $\Rightarrow 2x-2 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow$ خروجی

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷۳- هرگاه $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=3x+2$، مقدار a کدام باشد تا $fog(2)=gof(a)$ برقرار باشد؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{8}{9}$

۷۷۴- اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$، نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟ (سراسری ۹۲)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

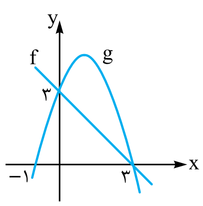
۷۷۵- اگر $f(x)=8-x$ و $g(x)=x^2+2x$، کدام خط هم تابع fog و هم تابع gof را قطع می‌کند؟

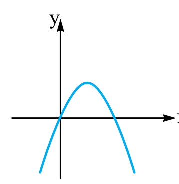
۱) $y=10$ ۲) $y=-2$ ۳) $y=3$ ۴) $y=-6$

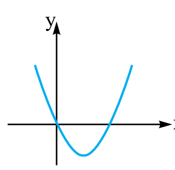
۷۷۶- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، جواب معادلهٔ $fog(x)=gof(x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۷)

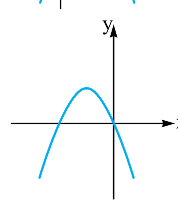
۱) $-1,-7$ ۲) $1,-7$ ۳) $-1,7$ ۴) $1,7$

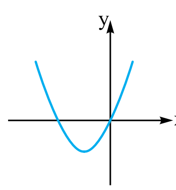
۷۷۷- نمودار تابع خطی f و تابع سهمی g در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع fog کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷۷۸- اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=x+a$، آن‌گاه به ازای چه مقدار a نمودار توابع fog و f فقط در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع‌اند؟

۱) صفر ۲) -3 ۳) -5 ۴) -7

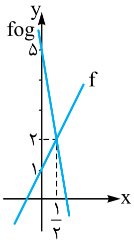
۷۷۹- هرگاه $f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=\sqrt{4x+4}$، مساحت ناحیهٔ محدود به $y=gof(x)$ و خط $y=k$ برابر ۹ است، مقدار k کدام است؟

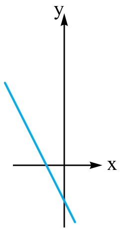
۱) ۳ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) ۴

۷۸۰- اگر $f(x)=2-|x-2|$، ضابطهٔ تابع fof کدام است؟ (سراسری ۹۰)

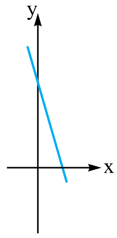
۱) x ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $2-f(x)$

۷۸۱- نمودار توابع fog و f به صورت مقابل است. نمودار g کدام است؟

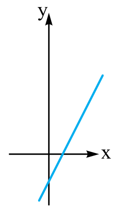




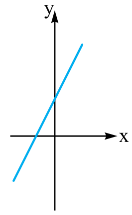
۴)



۳)



۲)



۱)

۷۸۲- اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $fog(x)=x^۴+۴x^۲$، آن‌گاه $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $x^۲+۲x$ ۲) $x^۲+۲$ ۳) $x^۲-۲$ ۴) $x^۲-۲x$

۷۸۳- به فرض آن‌که $g(x)=۲x-۱$ و $fog(x)=۴x^۲-۱$، ضابطهٔ gof کدام است؟

۱) $x^۲+۲x+۲$ ۲) $x^۲+۲x$ ۳) $۲x^۲+۴x-۱$ ۴) $۲x^۲+۴x+۱$

۷۸۴- اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(f(x))=۸x^۲+۲۲x+۲۰$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $۲x^۲-۷x+۳$ ۲) $۲x^۲-۳x+۷$ ۳) $۴x^۲-۲x+۱۳$ ۴) $۴x^۲-۴x+۱۱$

۷۸۵- اگر $g(x)=۲x-۳$ و $fog(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$ باشند، $f(x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۳)*

۱) $x^۲-۴x+۳$ ۲) $x^۲-۴x+۵$ ۳) $x^۲-۲x+۵$ ۴) $x^۲-۲x+۳$

۷۸۶- اگر $f(x)=۲(x-۱)^۲$ و $gof(x)=۶x-۳x^۲$، آن‌گاه ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟

۱) $۳+\frac{۳x}{۲}$ ۲) $۲-\frac{۲x}{۳}$ ۳) $۳-\frac{۳x}{۲}$ ۴) $۲+\frac{۲x}{۳}$

۷۸۷- اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) $x^۲-x+۳$ ۲) $x^۲-۲x-۱$ ۳) $x^۲-۲x+۱$ ۴) $x^۲-x+۱$

۷۸۸- اگر $f(۲x-۱)=۴x^۲+۱$ باشد، ضریب $x^۲$ در ضابطهٔ $fof(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۷۸۹- اگر $f(x)=\frac{x}{۱+x}$ و $gof=fo\frac{۱}{f}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-x}$ ۲) $\frac{x}{۱-x}$ ۳) $\frac{x}{x+۱}$ ۴) $\frac{۱}{x+۱}$

۷۹۰- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $g(x)=\frac{۲x}{۲x-۱}$، آن‌گاه مجموع اعضای دامنهٔ fog کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

۷۹۱- هرگاه $g(x)=۳x-۱$ و $gof(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$، دامنهٔ تابع fog در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$

۷۹۲- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$، دامنهٔ fog بازهٔ $[a,b]$ است. بیشترین مقدار $b-a$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۷۹۳- اگر $f(x-۱)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنهٔ $y=f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[۲,۴]$ ۴) $[-۴,-۲]$

۷۹۴- هرگاه دامنهٔ تعریف تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[-۲,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})-۳f(۲x+۱۰)$ کدام بازه است؟

۱) $[-۴,-۳]$ ۲) $[-۶,۳]$ ۳) $[-۶,۸]$ ۴) $[-۴,۲]$

۷۹۵- اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ *(سراسری ۹۶)*

۱) $[۰,۱)$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$

۷۹۶- اگر $f(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ *(سراسری ۹۶)*

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$

۷۹۷- با فرض $f(x)=\sqrt{۳x-x^۲-۲}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x+۱}{x}}$، دامنهٔ تعریف تابع fog کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۳},+\infty)$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۳}]$ ۳) $(۰,۳]$ ۴) $[۳,+\infty)$

۷۹۸- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$، دامنهٔ تعریف تابع gof کدام است؟ *(سراسری ۸۷)*

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰,۸\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

۷۹۹- با فرض $f(x)=\sqrt{(۲x-۵)(۵-x)}$ و $g(x)=[x]$، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $[۳,۵]$ ۲) $[۳,۶)$ ۳) $[۳,۶]$ ۴) $(۱,۵]$

۸۰۰- اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ *(سراسری ۹۴)*

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

۸۰۱- هرگاه $f(x)=\sqrt{۲-\log_۳(x-۲)}$، دامنهٔ $y=f(x+۳)$ کدام است؟

۱) $(-۱,۷]$ ۲) $(-۱,۸]$ ۳) $(۵,۱۴]$ ۴) $[۱,۱۱]$

۸۰۲- اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\log(x^۲-۱۵x)$، دامنهٔ تعریف تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۶

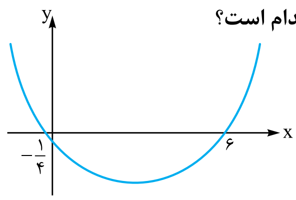
۸۰۳- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ و تابع $g(x)=\tan x\,,|x|<\frac{\pi}{۲}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع fog کدام است؟ *(سراسری ۸۷)*

۱) $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ ۳) $[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$ ۴) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

۸۰۴- اگر $h(x)=\log(\sqrt{۱-x^۲}+۱)$ ، $f(x)=h(۲x-۱)$ و $g(x)=\frac{x^۲}{۱+x^۲}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,+\infty)$

۸۰۵- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر $g(x)=x-\sqrt{x}$، آن‌گاه مجموع ریشه‌های معادلهٔ $fog(x)=۰$ کدام است؟

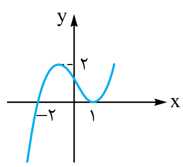


۱) $\frac{۳۷}{۹}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) ۱۳

۸۰۶- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ *(سراسری ۹۴)*

۱) ۴ و $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ و ۹ ۳) $\frac{۱}{۴}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

۸۰۷- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار $y=fof$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰۸- اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x-۳)$، مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟

۱) $(-۵,۱)$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,۵)$ *(سراسری ۹۱)*

۸۰۹- دو تابع $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+x-۲$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x))=-۲$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\varnothing$

۸۱۰- اگر $g(x)=۲x-۳$ و $fog(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$، تابع $f(x)$ در کدام بازه معکوس‌پذیر است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-۵,۲]$ ۴) $\mathbb{R}$

۸۱۱- دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}og(a)=۶$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ *(سراسری ۹۳)*

۸۱۲- دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$ *(سراسری ۹۶)*

۸۱۳- دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}of^{-1}(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۱۴- با فرض آن‌که $f=\{(۳,۲),(۵,-۳),(m,n-۱)\}$ و $g=\{(۴,۳),(k,۱),(۳,n)\}$ هرگاه $(۲,-۲)\in g^{-1}of$ باشد، مقدار $f^{-1}og(۳)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۲

۸۱۵- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1}of)-f$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) $\{-۱,۴\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۲,-۱\}$

۸۱۶- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

۸۱۷- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟ (سراسری ۹۳)

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۴

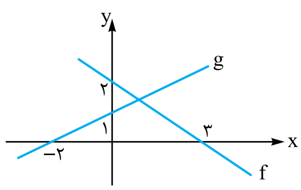
۸۱۸- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(۸)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۸۱۹- اگر $g^{-1}(x)=۳x+۹$ و $fog(x)=\frac{۲x}{x+۱}$، آن‌گاه $f^{-1}(۳)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) -۳ ۴) -۴

۸۲۰- نمودار توابع خطی f و g به شکل مقابل است. مقدار $f^{-1}og(۲)$ چه عددی است؟



۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) ۰
۳) -۲
۴) $-\frac{۱}{۲}$

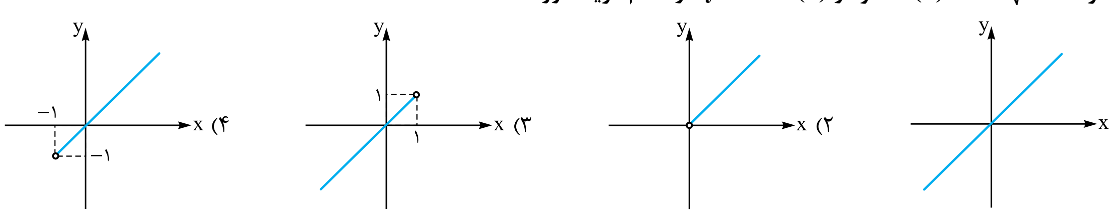
۸۲۱- اگر $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$ باشد، نمودار توابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ در کدام بازه بر هم منطبق‌اند؟

۱) $(-\infty,+\infty)$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $[-۱,۲]$

۸۲۲- اگر $f(x)=۲x+۱$ با دامنهٔ تعریف $[-۱,۴]$ داده شده باشد و $g(x)=fof^{-1}(x)$ و $h(x)=f^{-1}of(x)$ باشند، دامنهٔ $h(x)-g(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۴]$ ۲) $[-۱,۹]$ ۳) $[۱,۴]$ ۴) $[۱,۹]$

۸۲۳- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۱}$، نمودار $y=fof^{-1}(x)$ در کدام گزینه آورده شده است؟



۸۲۴- اگر $f(x)=\frac{۳x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x+۲}{x+a}$، مقدار a کدام باشد تا $fog(x)=x$ برقرار باشد؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۱

۸۲۵- اگر $f(x)=\frac{۳x+۶}{۴x-۳}$، جواب معادلهٔ $fof(x)+f^{-1}(۳x)=x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

۸۲۶- اگر $f(x)=\frac{۲-x^۳}{x^۳+۳}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{۲x-۱}$، آن‌گاه ضابطهٔ $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

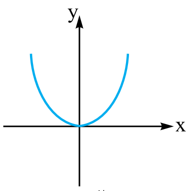
۱) $\frac{۳+۲x}{۲-۲x}$ ۲) $\frac{۳-۲x}{۲+۲x}$ ۳) $\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$ ۴) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}$

تبدیل نمودار تابع

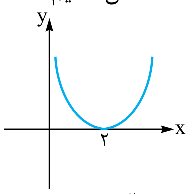
انتقال‌های عمودی و افقی

اگر $k > ۰$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم به کمک نمودار $y = f(x)$ هر یک از نمودارهای $y = f(x-k)$، $y = f(x+k)$، $y = f(x)+k$ و $y = f(x)-k$ را با انتقال عمودی یا افقی رسم کنیم بدین ترتیب که:

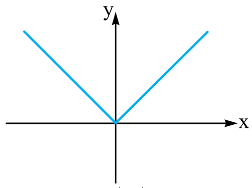
الف برای رسم نمودار $y = f(x-k)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت راست انتقال دهیم.



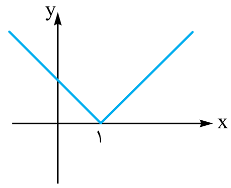
$y = x^۲$



$y = (x-۲)^۲$

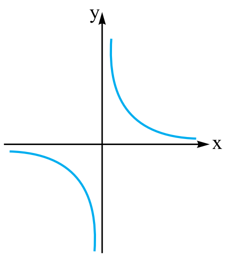


$y = |x|$

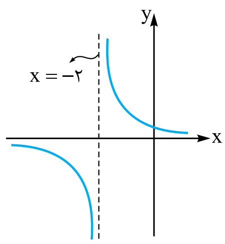


$y = |x-۱|$

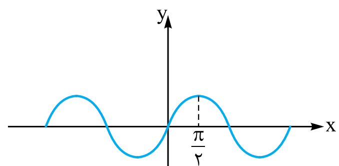
ب برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت چپ انتقال دهیم.



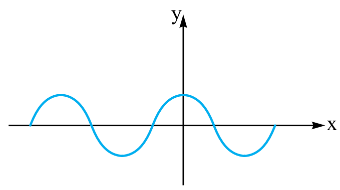
$y = \frac{۱}{x}$



$y = \frac{۱}{x+۲}$

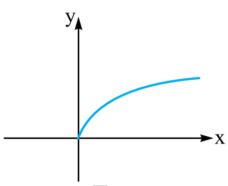


$y = \sin x$

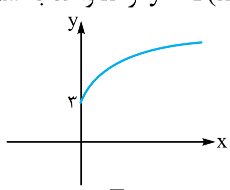


$y = \sin(x + \frac{\pi}{۲}) = \cos x$

پ برای رسم نمودار $y = f(x)+k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

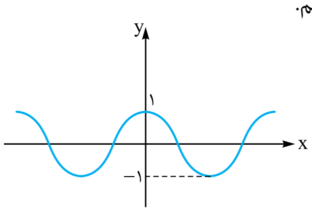


$y = \sqrt{x}$

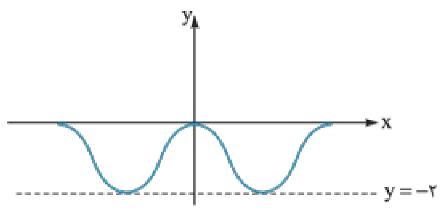


$y = ۳ + \sqrt{x}$

ت برای رسم نمودار $y = f(x)-k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

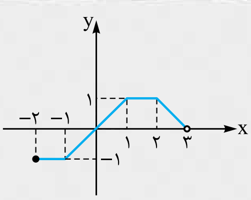


$y = \cos x$

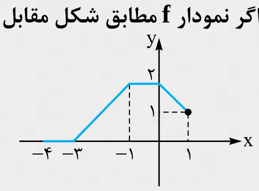


$y = (\cos x) - ۱$

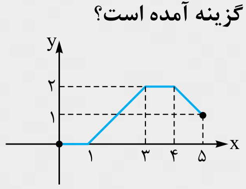
تست اگر نمودار f مطابق شکل مقابل باشد، نمودار $y = ۱ + f(x-۲)$ در کدام گزینه آمده است؟



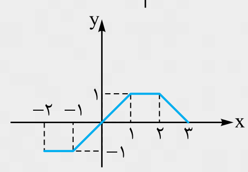
۱)



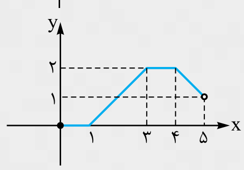
۲)



۳)



۴)



پاسخ **گزینهٔ «۴»** کافی است نمودار f را ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

تست اگر نمودار $f(x)=|x-۳|+۲$ را ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم به تابع $y=g(x)$ خواهیم رسید. دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در نقطه با کدام طول یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** برای رسیدن به نمودار g کافی است در ضابطهٔ f متغیر x را به $x+۲$ تبدیل کنیم و سپس ضابطهٔ به دست آمده را با ۱ جمع کنیم. در این صورت داریم:

$$g(x)=|x+۲-۳|+۲+۱=|x-۱|+۳$$

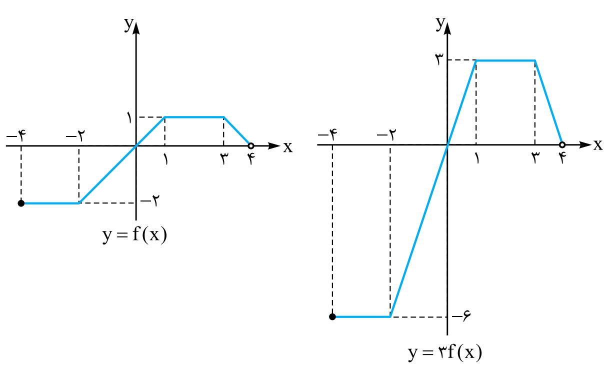
$$f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ |x-۳|+۲=|x-۱|+۳\ \Rightarrow\ |x-۳|-|x-۱|=۱$$

$$\begin{cases} x\ge ۳ & \Rightarrow\ x-۳-x+۱=۱\ \text{غ ق ق} \\ ۱\le x\le ۳ & \Rightarrow\ -x+۳-x+۱=۱\ \Rightarrow\ x=+\frac{۳}{۲} \\ x\le ۱ & \Rightarrow\ -x+۳+x-۱=۱\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

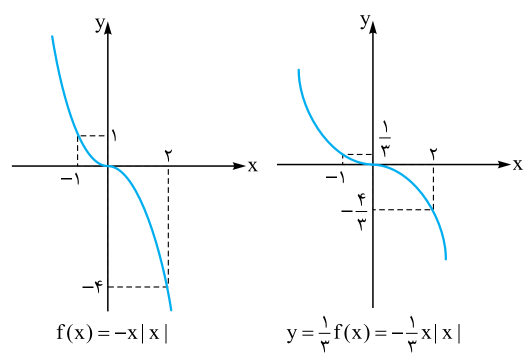
تا این‌جا یا انتقال افقی به سمت چپ یا راست بود که نمودار $f(x\pm k)$ از روی نمودار f به دست می‌آمد و یا انتقال قائم بود که نمودار $y=f(x)\pm k$ از روی نمودار f به دست می‌آمد.

انبساط و انقباض عمودی

اگر $k>۰$ باشد، برای رسم نمودار $y=kf(x)$ به کمک نمودار $y=f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k>۱$ باشد، در واقع نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.



(۱)



(۲)

در رسم نمودار $y=kf(x)$ دقت کنید دامنهٔ تعریف آن با دامنهٔ تعریف $y=f(x)$ برابر است اما اگر $R_f=[a,b]$ باشد، آن‌گاه $R_{kf}=[ka,kb]$ $(k>۰)$ است.

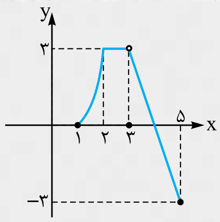
در حالتی که $R_f=[a,+\infty)$ باشد، آن‌گاه $R_{kf}=[ka,+\infty)$ و اگر $R_f=(-\infty,+\infty)$ باشد، آن‌گاه $R_{kf}=(-\infty,+\infty)$.

تست هرگاه $A(۲,۳)$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد پس از تبدیل نمودار $y=f(x)$ به $y=۳-۲f(x-۴)$ نقطهٔ A به کدام نقطه متناظر می‌شود؟

۱) $(-۳,۶)$ ۲) $(۳,-۶)$ ۳) $(۹,۳)$ ۴) $(۶,-۳)$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر مراحل را پشت سر هم و به ترتیب انجام دهیم به نقطهٔ موردنظر خواهیم رسید. پس ابتدا نمودار را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و $A(۲,۳)$ به نقطهٔ $A_۱(۶,۳)$ روی نمودار $y=f(x-۴)$ متناظر می‌شود. با یک انبساط عرضی A به $A_۲(۶,۶)$ روی نمودار $y=۲f(x-۴)$ متناظر می‌شود. نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم که ضابطهٔ جدید $y=-۲f(x-۴)$ و نقطهٔ $A_۳(۶,-۶)$ به دست می‌آیند، حال کافی است با یک انتقال عمودی به نمودار $y=۳-۲f(x-۴)$ برسیم و در نهایت نقطهٔ $A_۴(۶,-۳)$ جواب خواهد بود.

تست اگر نمودار $y = ۳f(x - ۲)$ مطابق شکل مقابل باشد، $D_f \cap R_f$ (اشتراک دامنه و برد تابع f) کدام است؟



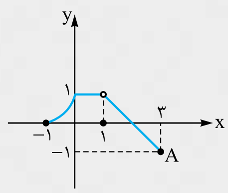
۱) $[-۱,۱]$

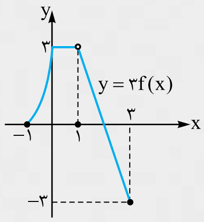
۲) $[-۱,۳]$

۳) $[-۳,۱) - \{۱\}$

۴) $[-۱,۱) - \{۱\}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** برای رسم $y = f(x)$ ابتدا با انتقال ۲ واحد به سمت چپ به نمودار $y = ۳f(x + ۲ - ۲) = ۳f(x)$ می‌رسیم سپس با یک انقباض عمودی به شکل $y = \frac{۱}{۳} \times ۳f(x) = f(x)$ به نمودار $y = f(x)$ می‌رسیم. دقت کنید در این مثال اگر دو مرحلهٔ فوق را جابه‌جا می‌کردیم، همچنان به یک نمودار می‌رسیدیم ولی در برخی مواقع اگر ترتیب تبدیل نمودار تغییر کند نتایج یکسان به دست نمی‌آید. دقت کنید $A(۳,-۱)$ خواهد بود.

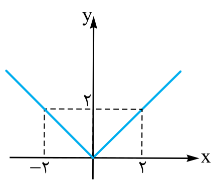




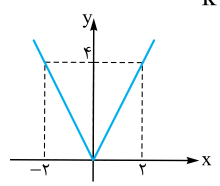
در این صورت $R_f = [-۱,۱]$ و $D_f = [-۱,۳]$ پس $D_f \cap R_f = [-۱,۱]$.

انبساط و انقباض افقی

اگر $k > ۰$ باشد و نمودار $y = f(x)$ رسم شده باشد برای رسم نمودار $y = f(kx)$ در حالتی که $۰ < k < ۱$ است از انبساط افقی استفاده می‌کنیم و اگر $k > ۱$ باشد، از انقباض افقی استفاده می‌کنیم، مثلاً اگر $D_f = [a,b]$ آن‌گاه $D_{f(kx)} = [\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ خواهد بود و به همین جهت لفظ انبساط یا انقباض طولی استفاده می‌شود. در واقع $A(x_۰,y_۰)$ از نمودار تابع $y = f(x)$ به نقطهٔ $A'(\frac{x_۰}{k},y_۰)$ در نمودار تابع $y = f(kx)$ تبدیل می‌شود. مانند شکل مقابل:



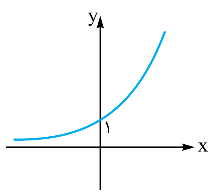
$y = |x|$



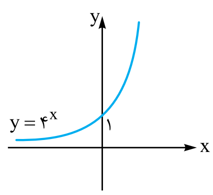
$y = |۲x|$

در این حالت انقباض افقی صورت گرفته است.

با توجه به آن‌که $|۲x| = ۲|x|$، می‌توانیم بگوییم در این مورد انقباض افقی منطبق بر انبساط عرضی شده است.

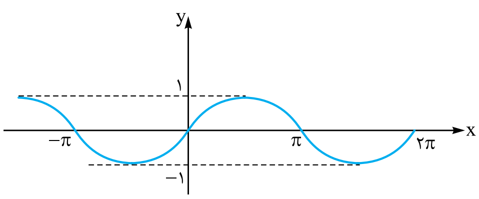


$f(x) = ۲^x$

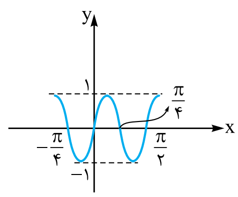


$y = ۴^x = ۲^{۲x} = f(۲x)$

به کمک انقباض طولی نمودار $y = ۴^x$ از روی $y = ۲^x$ رسم شده است.



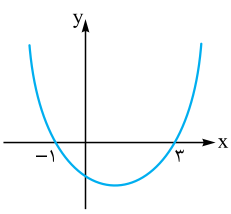
$y = \sin x$



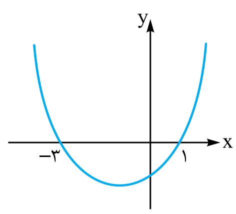
$y = \sin ۴x$

در رسم $y = f(kx)$ دقت کنید برد تابع $y = f(kx)$ با برد تابع $y = f(x)$ با هم برابرند اما دامنهٔ تعریف آن‌ها فرق می‌کند.

نکته نمودار $y = f(-x)$ قرینهٔ نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها می‌باشد.



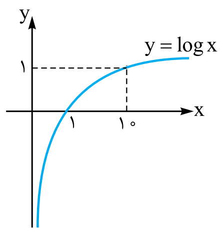
$y = f(x)$

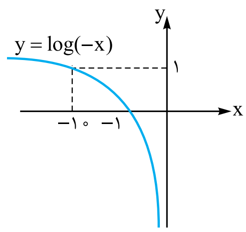


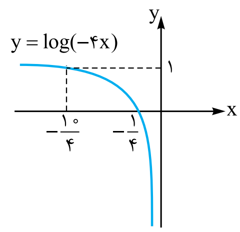
$y = f(-x)$

برای رسم نمودار $y=f(-kx)$ ابتدا با یک انبساط یا انقباض افقی از نمودار $y=f(x)$ به نمودار $y=f(kx)$ می‌رسیم، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. البته در این مورد خاص می‌توانیم ابتدا $y=f(-x)$ را رسم کرده سپس با یک انبساط یا انقباض طولی به $y=f(-kx)$ برسیم.

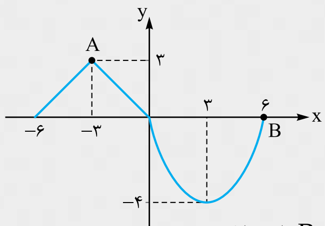
می‌خواهیم نمودار $y=\log(-4x)$ را رسم کنیم.







تست نمودار f در شکل زیر رسم شده است. هرگاه نمودار $y=3-2f(-2x)$ به کمک آن رسم شود فاصلهٔ دو نقطهٔ متناظر A و B روی نمودار جدید، چه عددی است؟



۱) ۷

۲) ۸

۳) ۷/۵

۴) ۸/۵

پاسخ **گزینهٔ «۳»** لازم نیست تمام نمودار $y=3-2f(-2x)$ را رسم کنیم. بلکه کافی است نقاط متناظر A و B را پیدا کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}\in f \Rightarrow A_1=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\in f(-x) \Rightarrow A_2=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{bmatrix}\in f(-2x) \Rightarrow A_3=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-6\end{bmatrix}\in -2f(-2x)$$

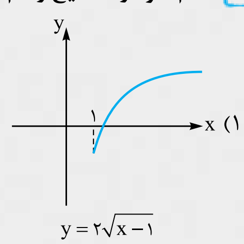
$$\Rightarrow A_4=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{bmatrix}\in 3-2f(-2x) \Rightarrow A=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix} \Rightarrow A_4=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{bmatrix}$$

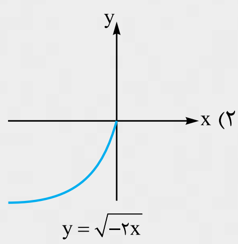
$$B=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}\in f \Rightarrow B_1=\begin{bmatrix}-6\\0\end{bmatrix}\in f(-x) \Rightarrow B_2=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}\in f(-2x) \Rightarrow B_3=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}\in -2f(-2x)$$

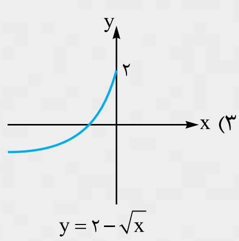
$$\Rightarrow B_4=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}\in 3-2f(-2x) \Rightarrow B=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} \Rightarrow B_4=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$$

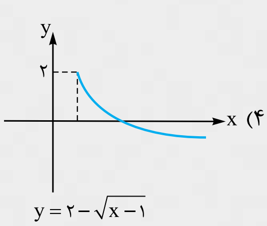
جواب این سؤال فاصلهٔ بین A_4 و B_4 است: $A_4B_4=\sqrt{(\frac{9}{2})^2+6^2}=\frac{15}{2}$

تست کدام نمودار، صحیح رسم شده است؟

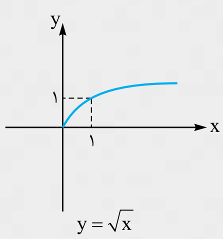


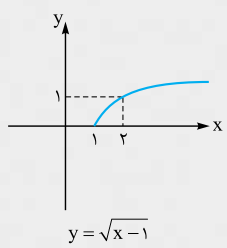


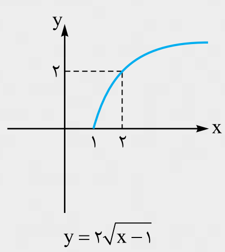




پاسخ **گزینهٔ «۴»** گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم.

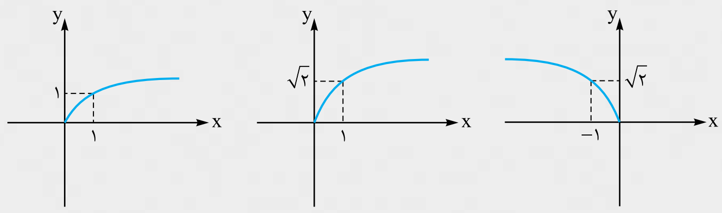






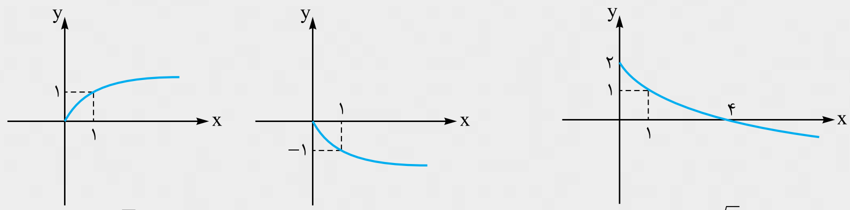
۱

۲)



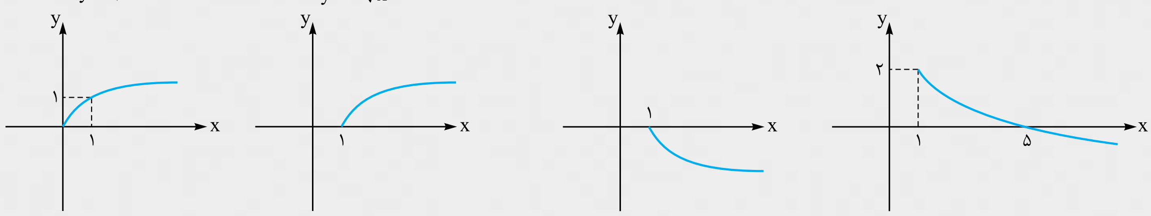
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt{۲x}$ $y=\sqrt{-۲x}$

۳)



$y=\sqrt{x}$ $y=-\sqrt{x}$ $y=۲-\sqrt{x}$

۴)



$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt{x-۱}$ $y=-\sqrt{x-۱}$ $y=۲-\sqrt{x-۱}$

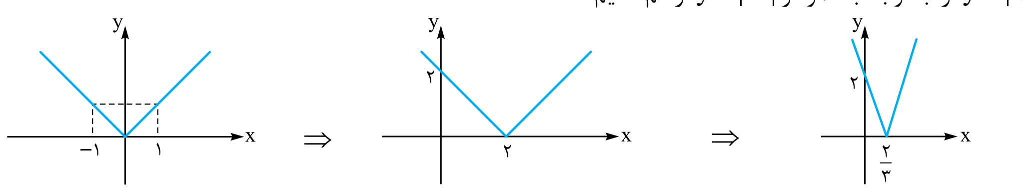
رسم $y=f(ax+b)$ به کمک نمودار $y=f(x)$

اگر $A(x_{\circ},y_{\circ})$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد آن‌گاه $A'(\frac{x_{\circ}-b}{a},y_{\circ})$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(ax+b)$ است، زیرا:

$$f(a(\frac{x_{\circ}-b}{a})+b)=f(x_{\circ}-b+b)=f(x_{\circ})=y_{\circ} \Rightarrow (\frac{x_{\circ}-b}{a},y_{\circ})\in f(ax+b)$$

در واقع برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا نمودار $f(x+b)$ را رسم می‌کنیم، سپس با یک انبساط یا انقباض افقی نمودار $f(ax+b)$ را رسم می‌کنیم.

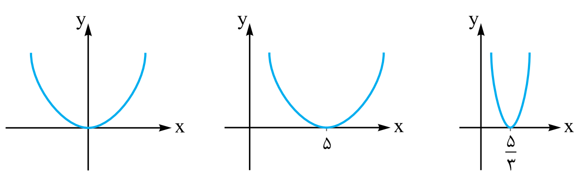
می‌خواهیم نمودار $y=|۳x-۲|$ را با توجه به نمودار $y=|x|$ رسم کنیم.



$y=|x|$ $\Rightarrow$ $y=|x-۲|$ (انتقال افقی) $\Rightarrow$ $y=|۳x-۲|$ (انقباض افقی)

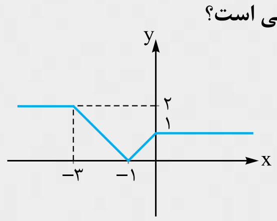
نمودار $y=(۵-۳x)^۲$ را به کمک $y=x^۲$ رسم می‌کنیم.

می‌دانیم $(۵-۳x)^۲=(۳x-۵)^۲$، پس نمودار $y=(۳x-۵)^۲$ را رسم می‌کنیم.



$y=x^۲$ $y=(x-۵)^۲$ $y=(۳x-۵)^۲$

تست اگر نمودار $y=f(x+۲)$ مطابق شکل زیر باشد، نمودار $y=-۲f(۴-۲x)$ در کدام بازه یک خط با شیب منفی است؟



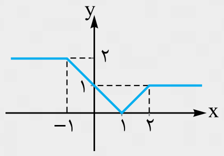
۱) $[۱,\frac{۳}{۲}]$

۲) $[-\frac{۳}{۲},-۱]$

۳) $[\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}]$

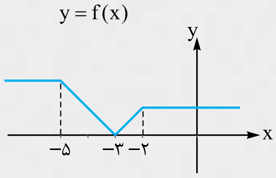
۴) $[-۵,-۳]$

پاسخ گزینهٔ «۳» ابتدا نمودار را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x)$ به دست آید.

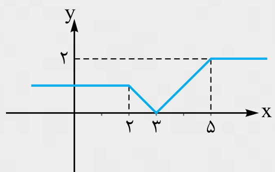


$y=f(x)$

سپس $f(x+4)$ را رسم می‌کنیم، پس f را ۴ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

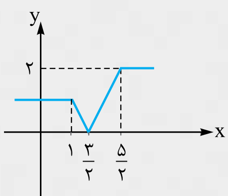


حال $f(-x+4)$ را رسم می‌کنیم، برای این منظور نمودار f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم.



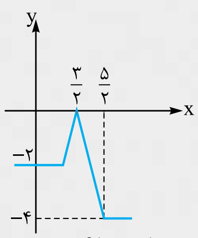
$y=f(-x+4)$

با یک انقباض افقی نمودار $f(-2x+4)$ را رسم می‌کنیم.



$y=f(4-2x)$

اکنون f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و با یک انبساط عمودی نمودار $-2f(4-2x)$ را رسم می‌کنیم.



$y=-2f(4-2x)$

در بازهٔ $[\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$ نمودار یک خط با شیب منفی است.

نکته برای رسم $y=f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم. پس اگر نمودار $y=f(-x)$ بر روی نمودار $y=f(x)$ منطبق باشد، یعنی محور عرض‌ها محور تقارن نمودار $y=f(x)$ بوده است و برعکس؛ مانند:

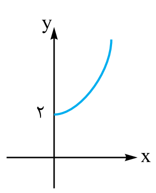
$f(x)=\cos x \Rightarrow f(-x)=f(x)$

$f(x)=x^2 \Rightarrow f(-x)=f(x)$

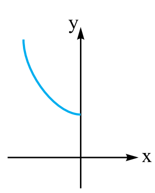
نکته اگر بخواهیم نمودار $y=-f(-x)$ را از روی نمودار f رسم کنیم باید ابتدا نمودار f را نسبت به یکی از دو محور طول‌ها یا عرض‌ها قرینه کنیم و سپس f را نسبت به محور دیگر قرینه کنیم.

پس در واقع $-f(-x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به مبدأ مختصات است.

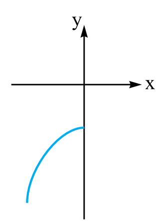
لذا اگر نمودار $y=f(x)$ و $y=-f(-x)$ بر هم منطبق باشد، یعنی مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار f است.



$y=f(x)$



$y=f(-x)$



$y=-f(-x)$

مانند:

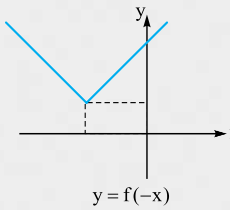
$f(x)=\sin x \Rightarrow -f(-x)=-\sin(-x)=\sin x$

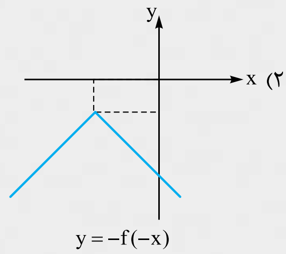
پس $O=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ مرکز تقارن $y=\sin x$ است.

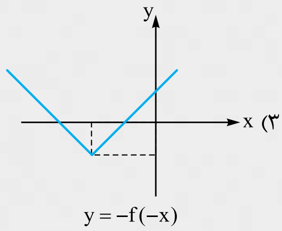
$f(x)=x^3 \Rightarrow -f(-x)=-(-x)^3=x^3=f(x)$

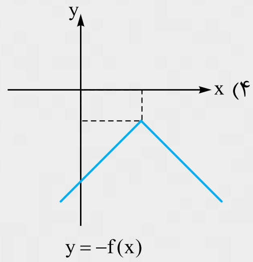
پس $O=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ مرکز تقارن $y=x^3$ است.

تست اگر $f(x)=|x-2|+1$ نمودار کدام تابع صحیح رسم نشده است؟

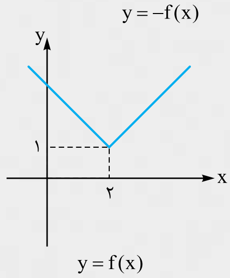




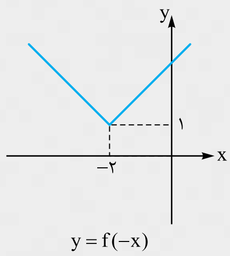




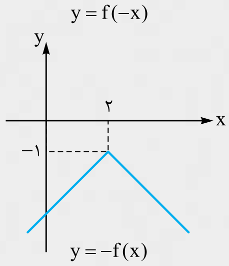
پاسخ **گزینهٔ «۳»** نمودار $y=|x|$ را رسم کرده و نمودار $y=|x-2|+1$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.



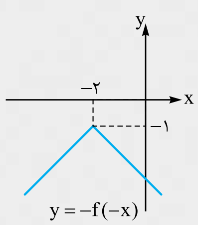
$f(-x)$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور yها می‌باشد.



$-f(x)$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها می‌باشد.



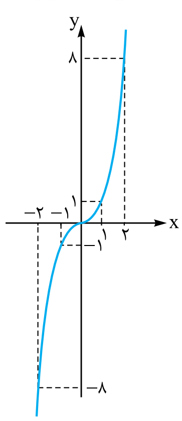
برای رسم $y=-f(-x)$، یا $f(-x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم یا $-f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



پس ۳ صحیح رسم نشده است.

رسم چندجمله‌ای درجه سوم

قبلاً با نمودارهای $y=ax+b$ و $y=ax^2+bx+c$ که $a\neq 0$ به ترتیب به عنوان خط و سهمی آشنا شده‌ایم حال می‌خواهیم ابتدا نمودار $y=x^3$ و سپس نمودار تابع درجه‌سوم را در حالت‌های خاص رسم کنیم.

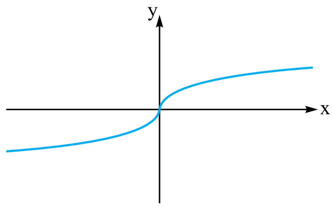


نمودار $y=x^3$ مطابق شکل مقابل است.

همان‌طور که مشخص است این تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است.

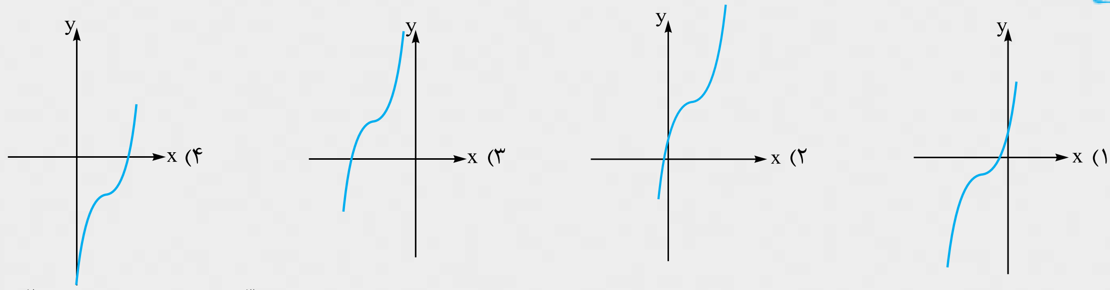
به طوری که: $f(x)=x^3 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

با قرینه‌کردن نمودار $y = x^{۳}$ نسبت به خط $y = x$ می‌توانیم نمودار $y = \sqrt[۳]{x}$ را رسم کنیم.



$y = \sqrt[۳]{x}$

تست نمودار $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x + ۴$ شبیه کدام گزینه است؟



پاسخ **گزینهٔ «۲»** با کمی دقت معلوم می‌شود که:

$$y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱ + ۵ = (x - ۱)^{۳} + ۵$$

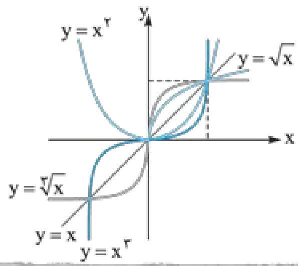
به همین جهت کافی است نمودار $y = x^{۳}$ را یک واحد به سمت راست و ۵ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

نکته وقتی $۰ < x < ۱$ با مقایسهٔ نمودار توابع در می‌یابیم که:

$$۰ < \cdots < x^{۳} < x^{۲} < x < \sqrt{x} < \sqrt[۳]{x} < \cdots < ۱$$

همان‌طور وقتی $x > ۱$ داریم:

$$\cdots > x^{۳} > x^{۲} > x > \sqrt{x} > \sqrt[۳]{x} > \cdots > ۱$$



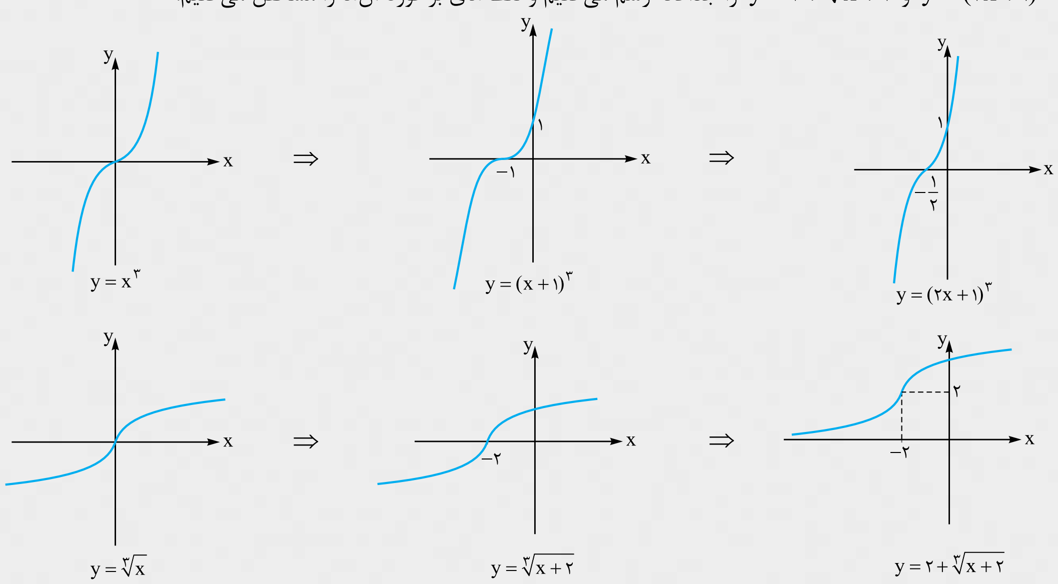
تست دو منحنی $f(x) = ۸x^{۳} + ۱۲x^{۲}$ و $g(x) = ۱ - ۶x + \sqrt[۳]{x + ۲}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) فقط در یک نقطه با طول مثبت برخورد دارند.
۲) فقط در یک نقطه با طول منفی برخورد دارند.
۳) هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.
۴) در سه نقطه با هم تلاقی دارند.

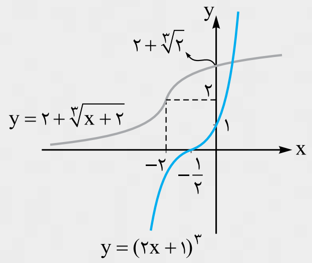
پاسخ **گزینهٔ «۱»** در واقع بحث روی تعداد و علامت‌های ریشه‌های $f(x) = g(x)$ است. پس معادله را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$۸x^{۳} + ۱۲x^{۲} = ۱ - ۶x + \sqrt[۳]{x + ۲} \Rightarrow ۸x^{۳} + ۱۲x^{۲} + ۶x + ۱ = ۲ + \sqrt[۳]{x + ۲} \Rightarrow (۲x + ۱)^{۳} = ۲ + \sqrt[۳]{x + ۲}$$

در این حالت ۲ نمودار $y = (۲x + ۱)^{۳}$ و $y = ۲ + \sqrt[۳]{x + ۲}$ را جداگانه رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم.



حال اگر دو نمودار نهایی را در یک دستگاه کنار هم رسم کنیم، داریم:



مشخص است که دو نمودار در یک نقطه با طول مثبت یکدیگر را قطع می‌کنند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

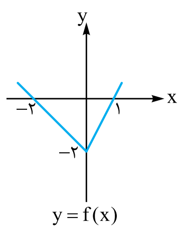
تبدیل نمودار تابع

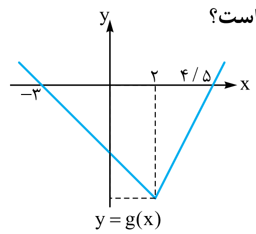
۸۲۷- هرگاه $f(x)=|x|$ را دو واحد به سمت چپ و k واحد به سمت پایین انتقال دهیم، آن‌گاه شکل حاصل، شکل اول را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، مقدار k کدام است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۳ ۴) ± ۴

۸۲۸- نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)=f(x+a)+b$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) -۵
۴) ۵





۸۲۹- نمودار تابع $y=a+۲^{x-۱}$ از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نمی‌کند. حداکثر a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۴

۸۳۰- نمودار تابع $y=|x-۲|$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و سپس ۴ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. مساحت بین نمودار حاصل و نمودار اولیه چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳۱- نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ *(سراسری ۹۳)*

۱) $-۳/۵$ ۲) -۳ ۳) $-۲/۵$ ۴) -۲

۸۳۲- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=۵-|x-۱|$ و $y=|x|$ کدام است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸۳۳- اگر $f(x)=\log x$ را یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، شکل حاصل شکل اولیه را در نقطهٔ A قطع می‌کند. طول نقطهٔ A کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۹}$ ۴) دو شکل متقاطع نیستند.

۸۳۴- نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۲,۵)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۲,۶)$

۸۳۵- نمودار تابع $y=x^۲-x-۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی، سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $(-۵,۲)$ ۲) $(-۵,۳)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۲,۵)$

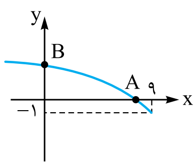
۸۳۶- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) -۲ ۲) $۰/۵$ ۳) ۱ ۴) $۱/۵$

۸۳۷- نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک بار ۳ واحد به سمت بالا و یک بار a واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. دو منحنی به دست آمده نقطهٔ تقاطع ندارند. حدود a کدام است؟ ($a>۰$ است.)

۱) $۳\le a<۹$ ۲) $۰<a<۹$ ۳) $۳\le a$ ۴) $۹<a$

۸۳۸- شکل مقابل فقط به کمک انتقال و قرینه‌یابی از روی نمودار $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B تا یکدیگر کدام است؟



۱) $\sqrt{۷۰}$ ۲) ۱۰ ۳) $\sqrt{۲۶}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$

۸۳۹- برد تابع f برابر $[-۱,۳]$ است. برد تابع $y=۲-f(x+۳)$ کدام است؟

۱) $[-۴,۰]$ ۲) $[-۱,۳]$ ۳) $[-۵,-۱]$ ۴) $[-۲,۱]$

۸۴۰- نمودار کدام تابع زیر از انبساط افقی نمودار $y=\sin x$ در راستای محور xها به دست می‌آید؟

۱) $\sin ۲x$ ۲) $\sin\frac{۱}{۲}x$ ۳) $۲\sin x$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sin x$

۸۴۱- به ازای کدام مقادیر ناصفر a و b، نمودار $y=af(bx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید؟

۱) $a>۱$ ۲) $b>۱$ ۳) $۰<a<۱$ ۴) $۰<b<۱$

۸۴۲- در کدام تابع $y=f(kx)$ و $y=kf(x)$ بر هم منطبق هستند؟ $(k\ne ۰,۱)$

۱) $f(x)=|۳x|$ ۲) $f(x)=[۲x]$ ۳) $f(x)=۴x-۱$ ۴) $f(x)=(x-۱)^۲-(x+۱)^۲$

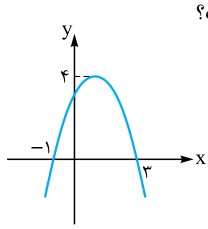
۸۴۳- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n>۱$ باشد، معادلهٔ $n(۲x-[۲x])=۱$ در بازهٔ $(۰,۵)$ چند جواب دارد؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱۰

۸۴۴- نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد، نقطهٔ متناظر با A بر روی نمودار $y=۳-f(۲x+۲)$ کدام است؟

۱) $(۰,۰)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(۰,-۶)$ ۴) $(-۱,-۶)$

۸۴۵- نمودار سهمی f به صورت زیر است. اگر $A(\alpha,\beta)$ رأس سهمی $y=۱-۲f(۲+۳x)$ باشد، حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۳}$

۲) $\frac{۳۵}{۳}$

۳) ۲۱

۴) ۲۸

۸۴۶- اگر $A(۲,-۱)$ رأس سهمی $y=f(x-۱)$ باشد، رأس سهمی $y=۳-f(۲-x)$ کدام نقطه است؟

۱) $(-۵,-۲)$ ۲) $(-۵,۴)$ ۳) $(۱,۴)$ ۴) $(۱,-۲)$

۸۴۷- نقطهٔ $A(۳,۰)$ روی نمودار $y=۲f(۲-x)$ با کدام نقطه از منحنی $y=۲+۴f(۲x-۱)$ متناظر است؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۴)$ ۳) $(۳,۴)$ ۴) $(-۳,۲)$

۸۴۸- با توجه به اتحاد $۲\cos^۲ x=۱+\cos ۲x$ نمودار $\cos^۲ x$ با کدام عملیات از روی نمودار $y=\cos x$ به دست می‌آید؟

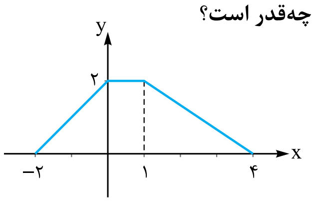
۱) انقباض در راستای محور xها ـ انتقال در راستای محور yها به سمت بالا ـ انقباض در راستای محور yها

۲) انقباض در راستای محور xها ـ انتقال در راستای محور yها به سمت بالا ـ انبساط در راستای محور yها

۳) انبساط در راستای محور xها ـ انتقال در راستای محور yها به سمت بالا ـ انقباض در راستای محور yها

۴) انبساط در راستای محور xها ـ انتقال در راستای محور yها به سمت بالا ـ انبساط در راستای محور yها

۸۴۹- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $y=۳f(۲x-۱)$ و محور xها چه‌قدر است؟



۱) ۱۰/۵

۲) ۲۱

۳) ۳۶

۴) ۷۲

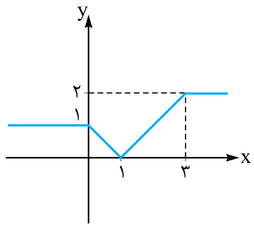
۸۵۰- اگر $f(x)=x^۲+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$ باشند، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=۳$ کدام است؟

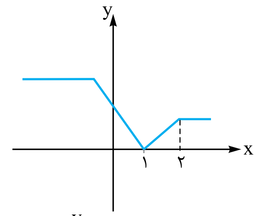
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۶ *(سراسری ۹۵)*

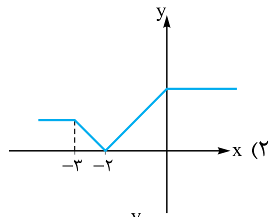
۸۵۱- اگر $f(x)=|x|-۱$ باشد، آن‌گاه مساحت محدود به نمودار تابع $y=-f(۲x-۲)+۱$ و محور xها چه‌قدر است؟

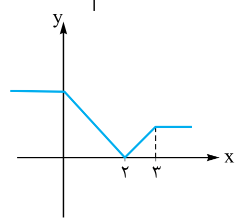
۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

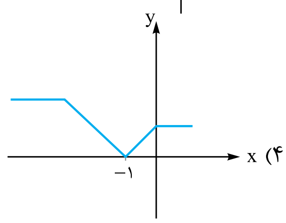
۸۵۲- نمودار $y=f(x-۱)$ مطابق شکل مقابل است. نمودار $y=f(۲-x)$ در کدام گزینه آمده است؟



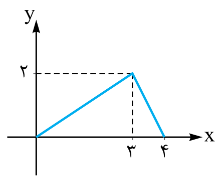
۱) 

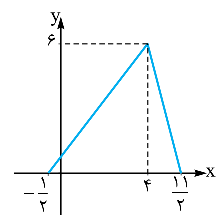
۲) 

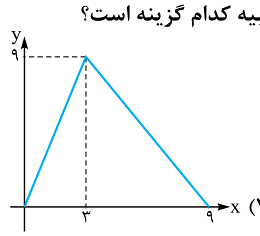
۳) 

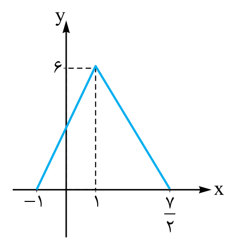
۴) 

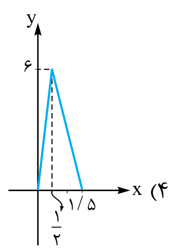
۸۵۳- اگر نمودار f مطابق شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=۳f(\frac{۲x+۱}{۳})$ شبیه کدام گزینه است؟



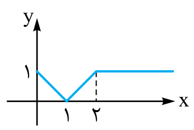
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

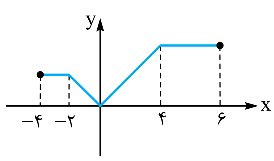
۸۵۴- نمودار تابع f شکل مقابل است. دامنهٔ توابع $y=f(x-۱)$ و $y=f(۱-x)$ چند عضو مشترک دارد؟ ($D_f=[۰,+\infty)$)



۱) ۱ ۲) ۲

۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۸۵۵- اگر نمودار $y=f(x-۱)$ شکل زیر باشد، تابع $y=f(۲-\frac{x}{۲})$ در کدام بازه نزولی اکید است؟



۱) $[-۱۰,-۶]$

۲) $[-۶,۲]$

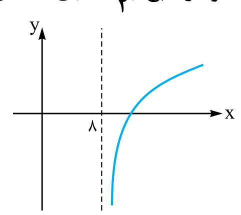
۳) $[-۶,۹]$

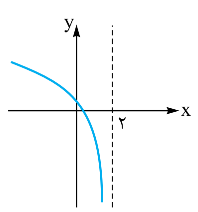
۴) $[-۲,۶]$

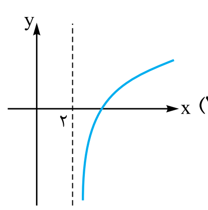
۸۵۶- مجموع صفرهای $f(x)$ و $f(۲-۳x)$ به ترتیب برابر ۴- و ۸ است. تعداد صفرهای f کدام است؟

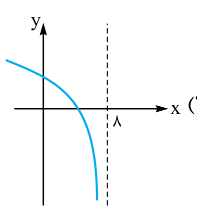
۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

۸۵۷- نمودار تابع $y=\log(۴-\frac{x}{۲})$ به کدام صورت زیر است؟

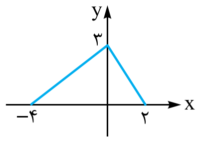
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

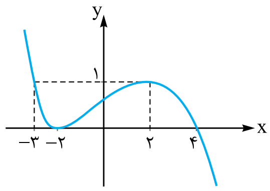
۸۵۸- نمودار f به صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ بین $y = f(x-|x|)$ و محور xها و خط $x = ۴$ چه‌قدر است؟



۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۸۵۹- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. مجموع صفرهای تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq ۲ \\ ۱ - f(۲x+۲) & x < ۲ \end{cases}$ کدام است؟



۱) ۲/۵

۲) ۱/۵

۳) ۳

۴) ۴

۸۶۰- اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+۲|}$، دامنهٔ تابع $y = f(-x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $x \leq -۱$ ۲) $x \geq -۱$ ۳) $x \leq ۱$ ۴) $x \geq ۱$

۸۶۱- اگر $f(x) = \sqrt{۲x - x^۲}$، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

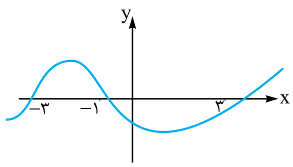
۸۶۲- اگر دامنهٔ تعریف $y = f(۲-x)$ بازهٔ $[۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تعریف $y = ۳ + ۲f(x-۴)$ کدام بازه است؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[۲,۵]$ ۳) $[۴,۶/۵]$ ۴) $[۵,۷]$

۸۶۳- اگر دامنهٔ تعریف $y = ۲f(۱-\frac{x}{۲})$ بازهٔ $[-۱,۳]$ باشد، دامنهٔ تعریف $y = ۳ + f(x-۲)$ کدام است؟

۱) $[-۲,۶]$ ۲) $[-۶,۲]$ ۳) $[-\frac{۵}{۲},-\frac{۱}{۲}]$ ۴) $[\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲}]$

۸۶۴- نمودار تابع $y = f(x-۲)$ به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(-x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



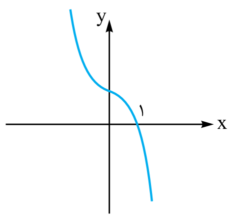
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) بی‌شمار

۸۶۵- نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{(x+۱)f(۳-x)}$ کدام است؟



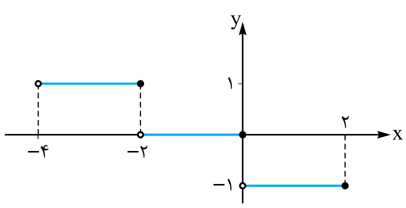
۱) $[-۱,۲]$

۲) $\mathbb{R} - (-۱,۲)$

۳) $[۲,+\infty)$

۴) $(-\infty,-۱]$

۸۶۶- با فرض $f(x) = [x]$، نمودار تابع مقابل مربوط به کدام تابع زیر است؟



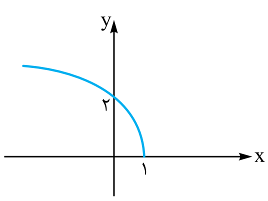
۱) $-[\frac{۱}{۲}x]$

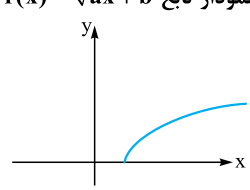
۲) $[-\frac{۱}{۲}x]$

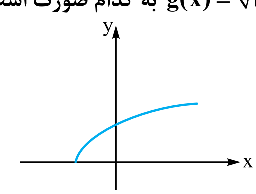
۳) $-[۲x]$

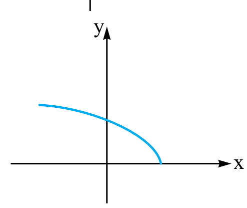
۴) $[-۲x]$

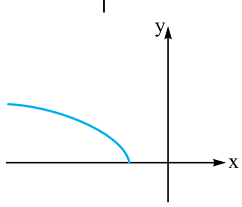
۸۶۷- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x) = \sqrt{bx+a}$ به کدام صورت است؟



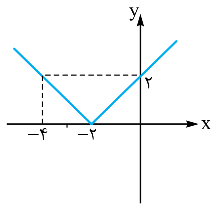
۱)


۲)


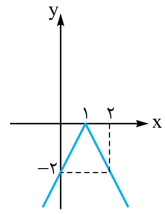
۳)


۴)


۸۶۸- با توجه به نمودارهای مقابل، ضابطهٔ g کدام است؟



$y=f(x)$



$y=g(x)$

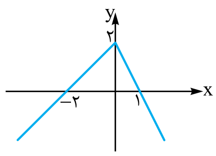
۱) $f(4-2x)$

۲) $f(4-\frac{1}{2}x)$

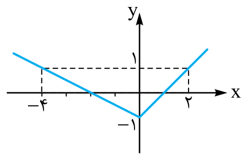
۳) $-f(2x-4)$

۴) $-f(\frac{1}{2}x-4)$

۸۶۹- نمودار توابع $y=f(x)$ و $g(x)=a-f(bx)$ به صورت زیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟



$y=f(x)$



$y=g(x)$

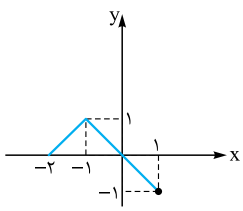
۱) $-0/5$

۲) 3

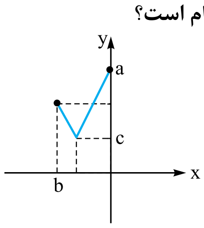
۳) $1/5$

۴) -2

۸۷۰- نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=2-f(2x+1)$ به صورت زیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟



$y=f(x)$



$y=2-f(2x+1)$

۱) 2

۲) $2/5$

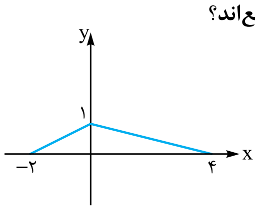
۳) 3

۴) $1/5$

۸۷۱- شرط $f(x+4)=f(4-x)$ برای کدام تابع برقرار است؟

۱) $f(x)=x^2-8x$ ۲) $f(x)=x^2+8x$ ۳) $f(x)=x^2-16x$ ۴) $f(x)=x^2+16x$

۸۷۲- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. به ازای چه مقادیری از a نمودار دو تابع $f(x)$ و $f(2x+a)$ متقاطع‌اند؟



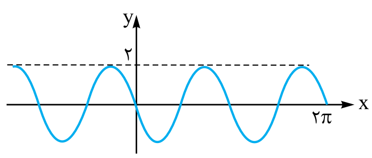
۱) $-\frac{5}{2}\le a\le 4$

۲) $-10\le a\le 8$

۳) $-3\le a\le 2$

۴) $-\frac{9}{2}\le a\le 6$

۸۷۳- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\sin(ax)$ به صورت مقابل است. ab کدام است؟



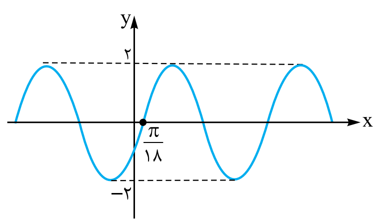
۱) -2

۲) 2

۳) 4

۴) -4

۸۷۴- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\sin(ax-\frac{\pi}{6})$ است. $a+b$ کدام است؟



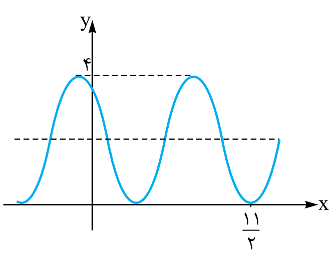
۱) 5

۲) 1

۳) 3

۴) 4

۸۷۵- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\cos\pi(ax+\frac{1}{4})+2$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{5}{2}$

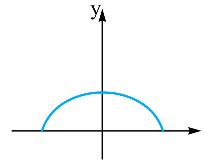
۳) 3

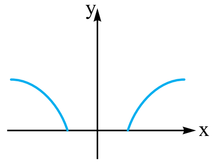
۴) 4

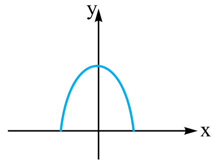
۸۷۶- با کدام ضابطهٔ $f(x)$، همواره تساوی $(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟ (سراسری ۹۱)

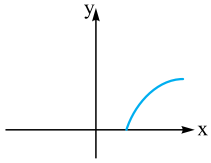
۱) $\sin \pi x$
۲) $\cos \pi x$
۳) $\sin 2\pi x$
۴) $\cos 2\pi x$

۸۷۷- نمودار تابع $y = \sqrt{2-|x|}$ به کدام صورت زیر است؟

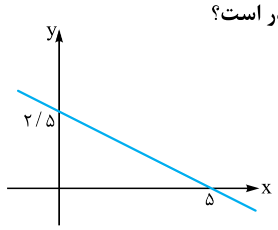
۱) 

۲) 

۳) 

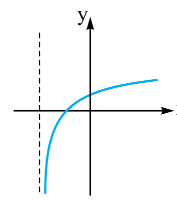
۴) 

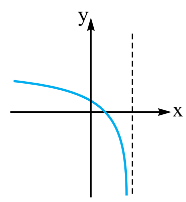
۸۷۸- نمودار $f(x)$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $y = 2f(3|x|+1)$ و محور xها چه‌قدر است؟

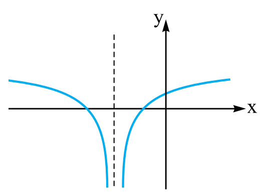


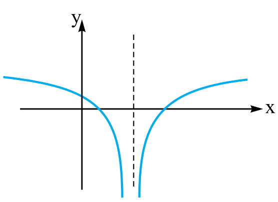
۱) ۶
۲) ۳۶
۳) ۱۸
۴) $\frac{16}{3}$

۸۷۹- نمودار تابع $y = \log(x^2+4x+4)$ کدام است؟

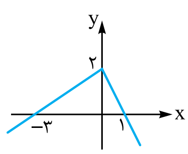
۱) 

۲) 

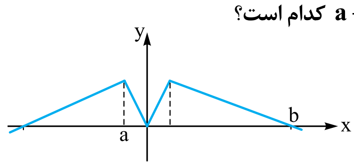
۳) 

۴) 

۸۸۰- نمودار توابع $f(x)$ و $g(x) = f(1-|\frac{x}{2}|)$ به صورت زیر است. مقدار $a-b$ کدام است؟



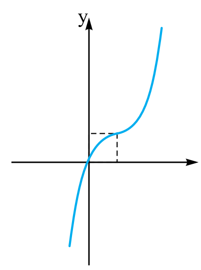
$y = f(x)$

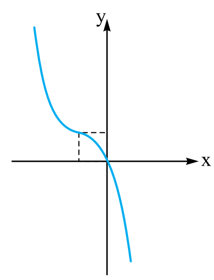


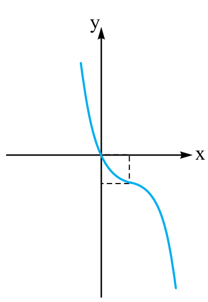
$y = g(x)$

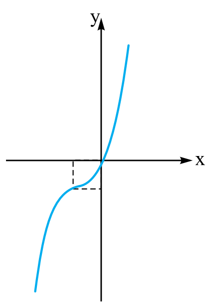
۱) $\frac{5}{2}$
۲) -10
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۶

۸۸۱- نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ به کدام صورت زیر است؟

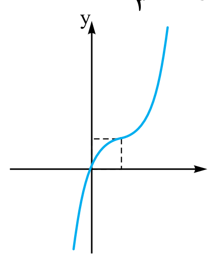
۱) 

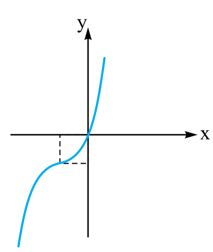
۲) 

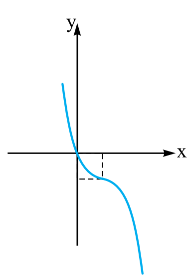
۳) 

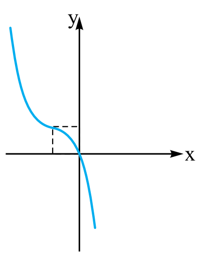
۴) 

۸۸۲- نمودار $f(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

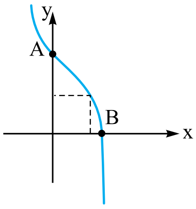
۳) 

۴) 

۸۸۳- نمودار وارون تابع $y=x(x^{۲}-۶x+۱۲)-۷$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۸۸۴- نمودار تابع $y=۹-۳x+۳x^{۲}-x^{۳}$ به صورت مقابل است. شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



۱) $-۴/۵$

۲) -۶

۳) -۳

۴) -۸

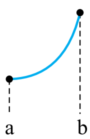
توابع یکنوا

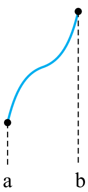
توابع اکیداً یکنوا

تابع f در بازهٔ I از دامنهٔ تعریف آن $(I\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی است، هرگاه: $\forall a,b\in I: a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

به عبارتی با افزایش طول نقطه در این بازه مقدار تابع هم افزایش می‌یابد.

توابع مقابل در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی هستند.

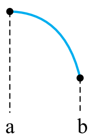


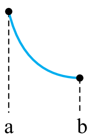


تابع f در بازهٔ I از دامنهٔ تعریف آن $(I\subseteq D_f)$ اکیداً نزولی است، هرگاه:

$\forall a,b\in I: a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

با افزایش طول نقطه از این بازه مقدار تابع کاهش می‌یابد. مانند توابع مقابل:



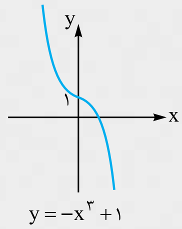


تابعی را که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.

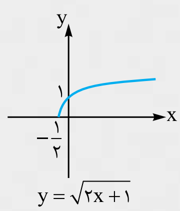
تست کدام‌یک از توابع زیر روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا نمی‌باشد؟

۱) $y=\sqrt[۳]{x-۲}$ ۲) $y=\sqrt{۲x+۱}$ ۳) $y=-x^{۳}+۱$ ۴) $y=x^{۲}+۲x$

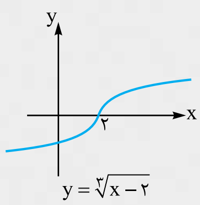
پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر نمودار توابع را رسم کنیم، می‌توانیم وضعیت یکنوایی آن‌ها را بررسی کنیم:



y اکیداً نزولی است.

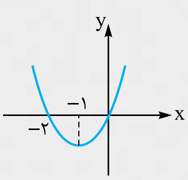


y اکیداً صعودی است.

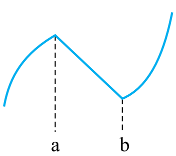


y اکیداً صعودی است.

$y=x^{۲}+۲x$ در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-\infty,-۱]$ اکیداً نزولی است اما در $\mathbb{R}$ غیر یکنوا است.



نکته ممکن است یک تابع در تمام $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا نباشد اما محدودکردن دامنهٔ تعریف آن به بازه‌های کوچک‌تر، تابع تکه‌تکه یکنوای اکید شود مثلاً g در شکل مقابل در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[b,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



نکته اگر f و g توابع اکیداً یکنوا باشند جدول زیر روابط آن‌ها را به لحاظ یکنوایی نشان می‌دهد.

تابع / وضعیت	f	g	$f+g$	$f-g$	$f\times g$	$\frac{f}{g}$	fog	f^{-1}
f و g هر دو مثبت	ص	ص	ص	-	ص	-	ص	ص

تابع / وضعیت	f	g	$f+g$	$f-g$	$f\times g$	$\frac{f}{g}$	fog	f^{-1}
f و g هر دو مثبت	ن	ن	ن	-	ن	-	ص	ن
f و g هر دو مثبت	ص	ن	-	ص	-	-	ن	ص
f و g هر دو مثبت	ن	ص	-	ن	-	ن	ن	ن

◄ در جدول فوق «ص» به معنای اکیداً صعودی و «ن» به معنای اکیداً نزولی است و قسمت‌های خالی به این معنا است که به طور قطعی نمی‌توان در مورد یکنوایی آن نظر داد.

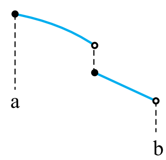
تذکر علامت f و g فقط برای تشخیص اکیداً یکنوایی توابع $f.g$ و $\frac{f}{g}$ لازم است. علامت‌های مختلف f و g، وضعیت یکنوایی توابع $f.g$ و $\frac{f}{g}$ می‌تواند تغییر کند ولی وضعیت یکنوایی سایر توابع بدون تغییر می‌ماند.

◄ تابع یکنوا

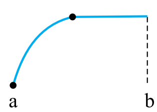
اگر $I\subseteq D_f$ آن‌گاه f روی بازهٔ I صعودی است، هرگاه: $\forall a,b\in I: a<b \Rightarrow f(a)\le f(b)$

و f روی بازهٔ I نزولی است، هرگاه: $\forall a,b\in I: a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$

مانند شکل:



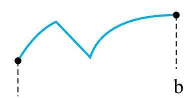
f در بازهٔ (a,b) نزولی است.



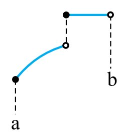
f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی است.

نکته ۱ اگر f در بازهٔ $[a,b]$ ثابت باشد بر این بازه هم صعودی است و هم نزولی.

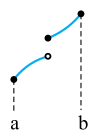
نکته ۲ هر تابع یکنوای اکید، یکنوا هم می‌باشد ولی لزوماً هر تابع یکنوا، یکنوای اکید نیست.



f نه صعودی است، نه اکیداً صعودی



f صعودی اما اکیداً صعودی نمی‌باشد.



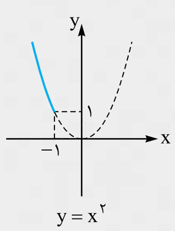
f صعودی و اکیداً صعودی است.

تست اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ g(x) & x>-1\end{cases}$ **تابعی نزولی باشد، ضابطهٔ g کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $y=|x|$ ۲) $y=-x^2$

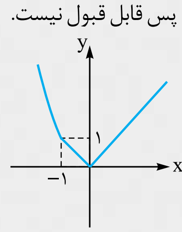
۳) $y=-|x|-x$ ۴) $y=x+|x|$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اولاً g باید نزولی باشد، ثانیاً $g(-1)\le 1$؛ زیرا:

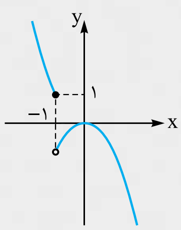


کافی است گزینه‌ها را یکی یکی بررسی کنیم.

در ① تابع $y=|x|$ برای $x>-1$ نزولی نمی‌باشد پس قابل قبول نیست.

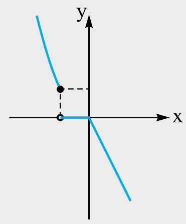


در ② تابع $y=-x^2$ غیر قابل قبول است.



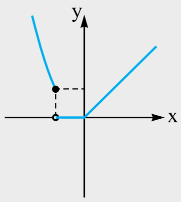
③ جواب است. به کمک رسم نمودار علت آن مشخص می‌شود.

$$y=-|x|-x=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -2x & x>0\end{cases}$$



④ هم غیر قابل قبول است. زیرا:

$$y=|x|+x=\begin{cases}2x & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

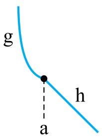


یکنوایی توابع چندضابطه‌ای: در بررسی یکنوایی یا اکیداً یکنوایی توابع چندضابطه‌ای، پیوستگی تابع نقش مهمی دارد. بدین ترتیب که:

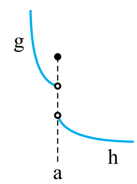
الف اگر f یک تابع چندضابطه‌ای باشد و در تک‌تک ضابطه‌ها نزولی اکید باشد با شرط پیوستگی در دامنه‌اش نزولی اکید است،

مانند شکل:

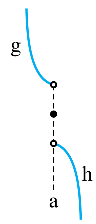
$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le a\\ h(x) & x>a\end{cases}$$



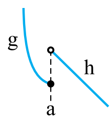
ب اگر f یک تابع چندضابطه‌ای باشد و در تک‌تک ضابطه‌ها نزولی اکید باشد اما غیر پیوسته باشد باید در نقاط ناپیوستگی مراقب حد چپ، حد راست و مقدار تابع در این نقاط باشیم. مانند شکل‌های زیر:



در این حالت تابع f غیر یکنوا است.



در این حالت تابع اکیداً نزولی است.

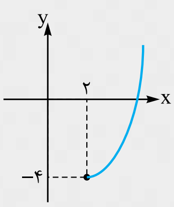


g و h تک‌تک نزولی اکید هستند اما تابع f در کل غیر یکنوا است.

تست اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-4x & x\ge 2\\ ax+2b & x<2\end{cases}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(2,1)$ ۲) $(3,-6)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(4,0)$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** تابع $y=x^2-4x$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



کافی است $y=ax+2b$ یک تابع اکیداً صعودی باشد و البته مقدار آن به ازای $x=2$ کم‌تر یا مساوی -4 باشد.

پس اولاً $a>0$ ثانیاً: $y(2)=2a+2b\le -4 \Rightarrow a+b\le -2$

گزینهٔ قابل قبول، ② است.

تست اگر $f(x)=kx+|3x-6|$، حدود k کدام باشد تا f^{-1} اکیداً یکنوا باشد؟

۱) $|k|>1$ ۲) $k\neq 0$ ۳) $|k|\le 3$ ۴) $|k|>3$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** برای آن‌که f^{-1} یکنوای اکید باشد لازم است f یکنوای اکید باشد. پس f را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم اما دقت کنید f تابعی پیوسته است لذا اگر تک‌تک ضابطه‌ها مثلاً اکیداً صعودی باشند، f هم اکیداً صعودی خواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases}(k+3)x-6 & x\ge 2\\ (k-3)x+6 & x<2\end{cases}$$

در تابع خطی علامت شیب خط وضعیت یکنوایی را مشخص می‌کند.

f اکیداً صعودی است. $\begin{cases}k+3>0\\ k-3>0\end{cases}\Rightarrow k>3$

f اکیداً نزولی است. $\begin{cases}k+3<0\\ k-3<0\end{cases}\Rightarrow k<-3$

پس با شرط $|k|>3$ تابع f اکیداً یکنوا خواهد بود.

گاهی اوقات در حل معادلات یا نامعادلات می‌توانیم از یکنوایی تابع استفاده کنیم.

تست **مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\log_{۲}(۲x+۵) \leq \log_{۲}(۳-۴x)$ در کدام گزینه آمده است؟**

۱) $[-\frac{۱}{۳},۱)$ ۲) $(-\frac{۵}{۲},-\frac{۱}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۴})$ ۴) $(-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۴})$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا شرط آن که هر کدام از آن‌ها تعریف شده باشد را در نظر می‌گیریم. با توجه به صعودی اکید بودن تابع لگاریتم در مبنای ۲، نامعادله را حل می‌کنیم به عبارتی:

$$۳-۴x>۰ \Rightarrow x<\frac{۳}{۴}$$
$$۲x+۵>۰ \Rightarrow x>-\frac{۵}{۲}$$
$$, \quad ۳-۴x \leq ۲x+۵ \Rightarrow ۶x \geq -۲ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۳}$$

بدین ترتیب اشتراک جواب‌های به دست آمده جواب نامعادله است.

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} \leq x < \frac{۳}{۴}$$

تست **اگر تابع f نزولی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $f(۳)=۰$؛ دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{(x-۲)f(x+۱)}$ کدام است؟**

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $[۲,+\infty)$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** چون f نزولی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و $f(۳)=۰$ است، داریم:

x		۳	
f(x)	+	۰	−

$\Rightarrow$

x		۲	
f(x+۱)	+	۰	−
(x−۲)	−	۰	+
(x−۲)f(x+۱)	−	۰	−

$$\Rightarrow D_y=\{۲\}$$

چند نکته در مورد توابع اکیداً یکنوا

۱ هر تابع اکیداً یکنوا یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

تست **کدام تابع یک‌به‌یک است؟**

۱) $y=x^{۳}-x$ ۲) $y=x^{۲}+x$ ۳) $y=x^{۳}+\sqrt{x}$ ۴) $y=x^{۳}-\sqrt{x}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** گفتیم مجموع دو تابع اکیداً صعودی تابعی اکیداً صعودی است. توابع $f(x)=x^{۳}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی هستند، پس تابع $f+g$ اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است. برای سایر گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

۱ $x=۰,۱,-۱ \Rightarrow y=۰$

۲ $x=۰,-۱ \Rightarrow y=۰$

۴ $x=۰,۱ \Rightarrow y=۰$

۲ اگر تابع f اکیداً صعودی باشد معکوس خود را فقط بر روی خط $y=x$ (نیمساز ربع‌های اول و سوم) قطع می‌کند و طول محل‌های برخورد از معادلهٔ $f(x)=x$ به دست می‌آید.

تست **تابع $f(x)=x^{۳}+۲x$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ **گزینهٔ «۱»** چون $y=x^{۳}$ و $y=۲x$ توابعی اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها اکیداً صعودی است، در نتیجه تابع f معکوس خود را فقط بر روی خط $y=x$ قطع می‌کند. با حل معادلهٔ مقابل تعداد نقاط برخورد را می‌یابیم:

$$f(x)=x \Rightarrow x^{۳}+۲x=x \Rightarrow x^{۳}+x=۰ \Rightarrow x(x^{۲}+۱)=۰ \Rightarrow x=۰$$

پس تابع f و $f^{-۱}$ فقط در $x=۰$ متقاطع‌اند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توابع یکنوای اکید

۸۸۵- تابع $f=\{(۲,۳),(۳,۵),(۵,a),(۷,۱۲-a)\}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

۱) $۵ \leq a$ ۲) $۵ \leq a \leq ۶$ ۳) $۶ \leq a$ ۴) $۶ \leq a \leq ۷$

۸۸۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^{۳} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی چگونه است؟ *(سراسری ۸۷)*

۱) یک‌به‌یک ـ اکیداً صعودی ۲) یک‌به‌یک ـ نزولی ۳) یک‌به‌یک ـ غیریکنوا ۴) غیر یک‌به‌یک ـ غیریکنوا

۸۸۷- تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ نزولی و $f(۳a+۱)<f(۳-a)$ است. حدود a کدام است؟

۱) $a<\frac{۱}{۲}$ ۲) $a>\frac{۱}{۲}$ ۳) $a\leq\frac{۱}{۲}$ ۴) $a\geq\frac{۱}{۲}$

۸۸۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+۱ & x\geq ۰ \\ \frac{۱}{x} & x<۰ \end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی چگونه است؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) یک‌به‌یک ـ نزولی ۲) یک‌به‌یک ـ صعودی ۳) یک‌به‌یک ـ غیریکنوا ۴) غیر یک‌به‌یک ـ غیریکنوا

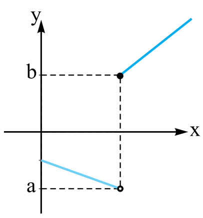
۸۸۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۸۹۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۸۹۱- نمودار f مطابق شکل مقابل است. اگر $y=|f|$ تابعی اکیداً صعودی باشد، کدام شرط برقرار است؟



۱) $a+b\leq ۰$

۲) $b-a\geq ۰$

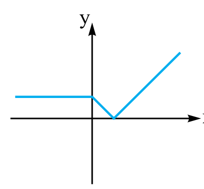
۳) $b+a\geq ۰$

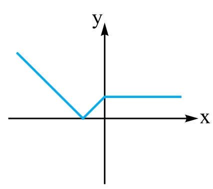
۴) $a-b\geq ۰$

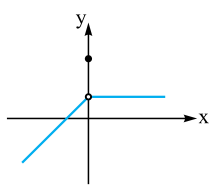
۸۹۲- تابع $y=۲\sin(\pi x)$ در کدام بازهٔ زیر صعودی است؟

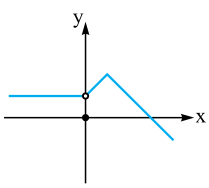
۱) $(۱,۲)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$

۸۹۳- تابع $y=f(|x|)$ یکنوا است. نمودار $y=f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

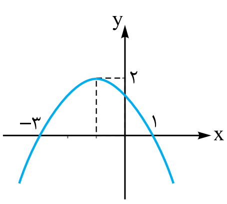
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸۹۴- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر تابع $y=۲f(x)+ax^{۲}$ اکیداً یکنوا باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۵}{۲}$

۸۹۵- با فرض $f(x)=۳x-۲$، نمودار تابع $y=(x+۱)f(x)$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸۹۶- تابع $f(x)=۲x|x-۳|$ در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید است. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۸۹۷- در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^{۲}-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۸۹۸- فرض کنید $f(x)=|x|+|x-۲|$، اگر تابع $y=ax+f(x)$ صعودی باشد، حداقل مقدار a چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹۹- تابع $y=|x-۳|+b|x-۲|$ در بازهٔ $(-\infty,۳)$ نزولی است. حدود b کدام است؟

۱) $-۱\le b$ ۲) $|b|\le ۱$ ۳) $b\le ۱$ ۴) $|b|\ge ۱$

۹۰۰- تابع $f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\le ۱\\ g(x) & x>۱\end{cases}$ اکیداً یکنوا است. ضابطهٔ $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲-x$ ۲) $x-۲$ ۳) $۳x-۱$ ۴) $۱-۳x$

۹۰۱- به ازای چه مقادیری از a تابع $y=ax-|۲x+۱|$ اکیداً صعودی است؟

۱) $|a|>۲$ ۲) $a>۲$ ۳) $|a|<۲$ ۴) $a<-۲$

۹۰۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$ در یک بازه صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه، کدام است؟ *(سراسری ۹۴)*

۱) $-x+۷$ و $x>۸$ ۲) $\frac{۱}{۳}x+۲$ و $x>۳$ ۳) $x+۷$ و $x>-۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}x-۱$ و $-۴<x<۸$

۹۰۳- نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟ *(سراسری ۹۳)*

۱) $y=-x+۶\,;\,x<-۴$ ۲) $y=-x+۵\,;\,x>۲$

۳) $y=-\frac{۱}{۲}x+۱\,;\,-۴<x<۳$ ۴) $y=-\frac{۱}{۲}x+۱\,;\,-۴\le x\le ۱۰$

۹۰۴- تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟ *(سراسری ۹۴)*

۱) $۱-\sqrt{۱+x}\,;\,x<۰$ ۲) $۱-\sqrt{۱-x}\,;\,x<۱$

۳) $۱+\sqrt{۱-x}\,;\,۰<x<۱$ ۴) $۱-\sqrt{۱-x}\,;\,۰<x<۱$

۹۰۵- تابع f با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $f(x-۱)<f(۵-x)$ کدام است؟

۱) $x>۳$ ۲) $۳<x\le ۵$ ۳) $۰<x<۵$ ۴) $x\ge ۵$

۹۰۶- تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲x-۱)-f(x+۱)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۲]$

۹۰۷- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\log(x^۲-۳x)<\log(۲x-۴)$ بازهٔ (a,b) است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰۸- اگر $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$ حدود x کدام باشد تا نابرابری $fof(x)<f(-x)$ برقرار باشد؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,۱]$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۲},۱]$

۹۰۹- در تابع f به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ می‌دانیم $f(x)<f(x+۱)$ است. در مورد تابع f کدام گزینه صحیح است؟

۱) تابع f صعودی اکید است. ۲) تابع f نزولی اکید است.

۳) تابع f صعودی است. ۴) تابع f ممکن است نه صعودی باشد و نه نزولی

۹۱۰- اگر $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{x-۲}-۱$ دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{x^۳f(x+۱)}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰,\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[۰,\frac{۳}{۲}]$

۹۱۱- اگر $f(x)=۲^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(\frac{۱}{x})-f(x)}$ به کدام صورت است؟ *(سراسری ۹۳)*

۱) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۲) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

۳) $[-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

۹۱۲- f تابعی حقیقی و صعودی اکید است به طوری که $f(۲)=۰$. اگر دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{(x+۳)f(x-k)}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار k کدام عدد است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) -۱

۹۱۳- تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ نزولی اکید است. اگر دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{(ax+b)f(۲-x)}$ تک‌عضوی باشد، کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟

۱) $f(\frac{۲a-b}{a})=۰$ و $a>۰$ ۲) $f(\frac{۲a-b}{a})=۰$ و $a<۰$ ۳) $f(\frac{۲a+b}{a})=۰$ و $a>۰$ ۴) $f(\frac{۲a+b}{a})=۰$ و $a<۰$

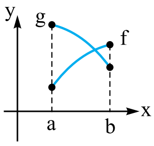
۹۱۴- اگر تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، صعودی و تابع g با دامنهٔ $\mathbb{R}$، نزولی باشد کدام تابع زیر در دامنهٔ خود ممکن است یکنوا نباشد؟

۱) fog ۲) gog ۳) $f+g$ ۴) $f-g$

۹۱۵- کدام تابع زیر یکنوا نیست؟

۱) $y=x+[x]$ ۲) $y=\log(1+x^3)$ ۳) $y=x^3-x$ ۴) $y=|x|\sqrt{x}$

۹۱۶- نمودار توابع f و g در بازهٔ $[a,b]$ به صورت مقابل است. کدام تابع در بازهٔ $[a,b]$ صعودی اکید است؟



۱) $f+g$ ۲) $\frac{f}{g}$

۳) $\frac{g}{f}$ ۴) $g-f$

۹۱۷- اگر تابع $f(x)$ یکنوا (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) باشد، کدام تابع زیر حتماً یکنوا است؟

۱) $y=\frac{1}{f(x)}$ ۲) $y=f^2(x)$ ۳) $y=f(x)+f(-x)$ ۴) $y=f(x)-f(-x)$

۹۱۸- تابع $f(x)=x^3+\sin^2 x$ در بازهٔ L اکیداً صعودی است. در مورد وضعیت تابع $g(x)=\cos^2 x-x^3$ در بازهٔ L چه می‌توان گفت؟

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است.

۳) نه صعودی است نه نزولی ۴) هم صعودی است و هم نزولی

۹۱۹- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x-[\frac{x}{3}]$ ۲) $y=x+[-\frac{x}{3}]$ ۳) $y=x-[-\frac{x}{3}]$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

۹۲۰- کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۲) $g(x)=x-\sqrt{x}$ ۳) $h(x)=2x+\frac{1}{x}$ ۴) $p(x)=\frac{x}{x^2+1}$

۹۲۱- تابع $f(x)=x^3+2x$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) قطع نمی‌کند.

۹۲۲- مجموع طول نقاط برخورد تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x$ با معکوسش کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -3 ۴) صفر

۹۲۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{8}(x+1)^3$ نمودار معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) هیچ

۶۳۶- گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix}(۲,m+۱)\in f\\(۲,m^{۲}-۵)\in f\end{matrix}\right\} \Rightarrow m^{۲}-۵=m+۱$$

$$\Rightarrow m^{۲}-m-۶=۰ \Rightarrow (m-۳)(m+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}m=۳\\m=-۲\end{cases}$$

اگر $m=۳$ باشد زوج مرتب $(۲m+۱,۳)$ به صورت $(۷,۳)$ خواهد بود در این صورت چون $(۷,۳)$ و $(۷,۲)$ عضو این مجموعه هستند، f تابع نیست.

اگر $m=-۲$ باشد، داریم:

$$f=\{(-۳,۳),(۲,-۱),(۷,۲)\} \Rightarrow f(m-۱)=f(-۳)=۳$$

۶۳۷- گزینه ۲

$$\begin{cases}(۳,m^{۲})\in f\\(۳,m+۲)\in f\end{cases} \Rightarrow m^{۲}=m+۲ \Rightarrow m^{۲}-m-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}m=۲\\m=-۱\end{cases}$$

اگر $m=۲$ باشد دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,۴)$ عضو R هستند و این رابطه تابع نخواهد بود.

پس $m=-۱$ است. $R=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}$

۶۳۸- گزینه ٤ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ اگر $x=۱$ باشد، داریم: $y^{۲}-y=۰ \Rightarrow \begin{cases}y=۰\\y=۱\end{cases}$

پس y تابعی از x نیست.

۲ اگر $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، داریم: $|\frac{۱}{۲}-۱|+|y+۱|=۱ \Rightarrow |y+۱|=\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases}y+۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}\\y+۱=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

پس y تابعی از x نیست.

۳ اگر $x=۱$ باشد:

$$|۱-۱|+|y^{۲}-۱|=۰ \Rightarrow |y^{۲}-۱|=۰ \Rightarrow y=\pm۱$$

پس y تابعی از x نیست.

۴ به کمک اتحاد مربع داریم:

$$x^{۲}+۲xy+y^{۲}=(x+y)^{۲}=۰ \Rightarrow y=-x$$

پس y تابعی از x است.

۶۳۹- گزینه۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) اگر x هر عدد مثبت باشد، برای y دو مقدار قرینهٔ هم ایجاد می‌شود.

مثلاً اگر $x=۱$ باشد: $y^۲=۱ \Rightarrow y=\pm۱$

(۲) اگر $x=۰$ باشد: $y^۳-y=۰ \Rightarrow y(y^۲-۱)=۰ \Rightarrow y=۰, y=\pm۱$

(۳) اگر $x=۰$ باشد: $y^۳+y^۲=۰ \Rightarrow y^۲(y+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=-۱ \end{cases}$

(۴) به کمک اتحاد مکعب $(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$ سمت چپ تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y^۳+۳y^۲+۳y+۱-۱=x \Rightarrow (y+۱)^۳-۱=x$$

$$\Rightarrow (y+۱)^۳=x+۱ \Rightarrow y+۱=\sqrt[۳]{x+۱} \Rightarrow y=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$$

چون به ازای هر x، فقط یک عدد ایجاد می‌شود، پس y تابعی از x است.

۶۴۰- گزینه۲ (۱) نادرست است، زیرا اگر $x=۱$ باشد، $۱\le y<۲$ خواهد بود.

(۳) نادرست است، زیرا اگر مثلاً $x=۰$ باشد، $۱\le y<۲$ خواهد بود.

(۴) نادرست است، زیرا اگر $x=۰$ باشد، $-۱\le y<۰$ است.

اما (۲) صحیح است، زیرا y تابعی از x است: $y[x]=۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{[x]}$

۶۴۱- گزینه۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) اگر $x=۰$ باشد، آن‌گاه $[y]=۰$ است و $۰\le y<۱$ خواهد بود، پس به ازای هر x بی‌نهایت y وجود دارد. پس y تابعی از x نیست.

(۲) می‌دانیم $[x]\in\mathbb{Z}$ است. اگر فرض کنیم $[x]=k\ (k\in\mathbb{Z})$، پس $\cos(k\pi)$ یا برابر ۱ است (اگر k زوج باشد) و یا برابر ۱− (اگر k فرد باشد). پس:

$$k=\text{زوج} \Rightarrow \frac{|y|}{y}=۱ \Rightarrow |y|=y \quad (۱)$$

$$k=\text{فرد} \Rightarrow \frac{|y|}{y}=-۱ \Rightarrow |y|=-y \quad (۲)$$

در هر حالت (۱) y هر عدد دلخواه مثبت و در حالت (۲)، y هر عدد دلخواه منفی است. پس y تابعی از x نیست.

(۳) اگر $x>۰$ باشد، $\frac{x}{|x|}=۱$ و اگر $x<۰$ باشد، $\frac{x}{|x|}=-۱$ است.

بنابراین $\sin\pi$ و $\sin(-\pi)$ ایجاد می‌شود که هر دو برابر صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} x>۰ \Rightarrow |y|=۰ \\ x<۰ \Rightarrow |y|=۰ \end{cases} \Rightarrow y=۰$$

پس به ازای هر x $(x\neq۰)$ خروجی تابع صفر است. پس y تابع ثابت صفر است.

(۴) اگر $x>۰$ باشد، داریم:

$$\frac{x}{|x|}=۱ \Rightarrow |y|=\cos۲\pi \Rightarrow |y|=۱ \Rightarrow y=\pm۱$$

پس به ازای هر $x>۰$، $y=\pm۱$ است. پس y تابعی از x نیست.

۶۴۲- گزینه۲ به کمک اتحاد مربع داریم:

$$x^۲+۴y^۲+۲x-۱۲y=k \Rightarrow (x^۲+۲x)+(۴y^۲-۱۲y)=k$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲-۱+(۲y-۳)^۲-۹=k$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(۲y-۳)^۲=k+۱۰$$

اگر $k+۱۰>۰$ باشد، f تابع نیست و اگر $k+۱۰<۰$ باشد f مجموعهٔ تهی خواهد شد. (زیرا مجموع مربعات دو عدد برابر یک عدد منفی نمی‌شود) پس باید $k+۱۰=۰$ باشد و در نتیجه $k=-۱۰$ است.

۶۴۳- گزینه۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) اگر فرض کنیم $\frac{x}{y}=t$ است داریم:

$$t+\frac{۱}{t}=۲ \xrightarrow[t\neq۰]{\times t} t^۲+۱=۲t \Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)^۲=۰ \Rightarrow t=۱ \Rightarrow \frac{x}{y}=۱ \Rightarrow y=x$$

$\Rightarrow$ y تابعی از x است.

(۲) اگر فرض کنیم $\frac{x}{y}=t$ است، داریم:

$$t-\frac{۱}{t}=۱ \xrightarrow[t\neq۰]{\times t} t^۲-۱=t \Rightarrow t^۲-t-۱=۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow x=(\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲})y$$

در این حالت y تابعی از x نیست، زیرا مثلاً اگر $x=۱$ باشد دو مقدار $\frac{۲}{۱\pm\sqrt{۵}}$ برای y وجود دارد.

(۳) $$\frac{|y|}{x}=x+۱ \xrightarrow[x\neq۰]{\times x} |y|=x^۲+x$$

اگر $x=۱$ باشد داریم $|y|=۲$ و در نتیجه $y=\pm۲$ است. پس y تابعی از x نیست.

(۴) معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم: $y^۲-۲y+۱-x=۰$

معادلهٔ فوق یک معادلهٔ درجهٔ ۲ برحسب متغیر y است، اگر $x=۱$ انتخاب شود ۲ مقدار زیر برای y وجود دارد:

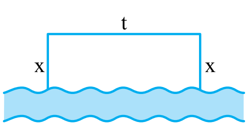
$$x=۱ \Rightarrow y^۲-۲y=۰ \Rightarrow y(y-۲)=۰$$

$\Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=۲ \end{cases} \Rightarrow$ y تابعی از x نیست.

۶۴۴- گزینه۱ اگر تابع f شامل زوج مرتبی مانند (a,b) و تابع g شامل زوج مرتبی مانند (a,c) باشد به طوری که $b\neq c$ باشد رابطهٔ $f\cup g$ شامل هر دو زوج مرتب (a,b) و (a,c) است. در این صورت $f\cup g$ نمی‌تواند یک تابع باشد.

به کمک برهان خلف به راحتی می‌توان نشان داد روابط fog، $f\pm g$ و $f\cap g$ تابع هستند.

۶۴۵- گزینه۴



$$\Rightarrow \underset{\text{مساحت}}{\underset{\downarrow}{y}}=xt$$

$$\text{محیط}=۲x+t=۴۸ \Rightarrow t=۴۸-۲x$$

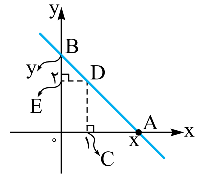
$$\Rightarrow y=x(۴۸-۲x)=۴۸x-۲x^۲$$

از طرفی چون $t\ge x$ است، داریم:

$$t=۴۸-۲x \xrightarrow{t\ge x} x\le۴۸-۲x \Rightarrow ۳x\le۴۸$$

$$\Rightarrow x\le۱۶ \Rightarrow ۰<x\le۱۶$$

۶۴۶- گزینه ۲ با توجه به شکل دو مثلث ACD و BED مشابه‌اند. پس داریم:

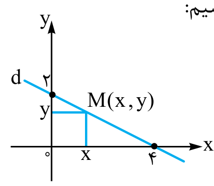


$$\frac{AC}{DE}=\frac{CD}{EB} \Rightarrow \frac{x-۱}{۱}=\frac{۲}{y-۲}$$

$$\Rightarrow \frac{y-۲}{۲}=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow y-۲=\frac{۲}{x-۱}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲}{x-۱}+۲=\frac{۲x}{x-۱} \Rightarrow S=\frac{xy}{۲}=\frac{x}{۲}\times\frac{۲x}{x-۱}=\frac{x^۲}{x-۱}$$

۶۴۷- گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ خط d را می‌نویسیم:



$$\begin{cases}(۴,۰)\in d\\(۰,۲)\in d\end{cases}\Rightarrow \text{شیب } d=\frac{۲-۰}{۰-۴}=-\frac{۱}{۲}$$

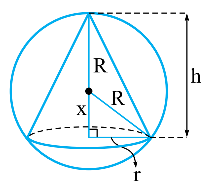
$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

اگر مختصات طول نقطهٔ M واقع بر خط d را x فرض کنیم، مختصات عرض آن برابر $-\frac{۱}{۲}x+۲$ است. پس:

$$S=xy=x(-\frac{۱}{۲}x+۲)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x$$

با توجه به شکل و مثبت‌بودن مساحت باید $۰<x<۴$ باشد.

۶۴۸- گزینه ۱ با توجه به شکل اگر شعاع کره R و شعاع قاعدهٔ مخروط r باشد، داریم:



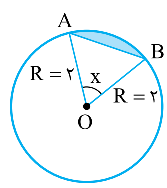
$$\begin{cases}h=R+x \xrightarrow{R=۵} x=h-۵\\ x^۲+r^۲=R^۲ \xrightarrow{R=۵} r^۲=۲۵-x^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow r^۲=۲۵-(h-۵)^۲=۲۵-(h^۲-۱۰h+۲۵)=۱۰h-h^۲$$

می‌دانیم حجم مخروط برابر است با $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ پس:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(۱۰h-h^۲)h=\frac{\pi}{۳}(۱۰-h)h^۲$$

۶۴۹- گزینه ۲ اگر x برحسب رادیان باشد $\frac{x}{۲\pi}$ کسری که نشان می‌دهد قطع OAB چه کسری از مساحت کل دایره است چون مساحت دایره برابر $\pi R^۲$ است، پس:



$$S_{\text{قطاع } OAB}=\frac{x}{۲\pi}\times\pi R^۲=\frac{x}{۲}\times R^۲$$

در هر مثلث به اضلاع a و b که α زاویهٔ بین این دو ضلع باشد مساحت برابر $\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ است، پس:

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{۱}{۲}OA\times OB\times\sin x$$

$$\xrightarrow{OA=OB=R} S_{\overset{\Delta}{AOB}}=\frac{۱}{۲}R^۲\sin x$$

چون $R=۲$ است:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{قطاع } OAB}-S_{\overset{\Delta}{OAB}}=۲x-۲\sin x=۲(x-\sin x)$$

۶۵۰- گزینه ۲ با توجه به آن‌که $f:A\to A$ تعریف شده است. دامنهٔ تابع f مجموعه A و برد آن نیز زیرمجموعهٔ مجموعه A است. پس تابع f شامل ۵ زوج مرتب است، چون $f(۱)=۱$ است، پس $(۱,۱)\in f$ است و در نتیجه:

$$f=\{(۱,۱),(۲,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۲,۳,۴,۵}}{\bigcirc}),(۳,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۲,۳,۴,۵}}{\bigcirc}),(۴,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۲,۳,۴,۵}}{\bigcirc}),(۵,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۲,۳,۴,۵}}{\bigcirc})\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد تابع}=۵^۴$$

تذکر اگر در تابع f داشته باشیم $f:A\to B$، $D_f=A$ است و $R_f\subset B$ است.

۶۵۱- گزینه ۳ در تابع f داریم $f:A\to B$. پس $A=D_f$ و $R_f\subset B$ است. در نتیجه تابع f شامل ۴ زوج مرتب است که در آن $f(۲)\neq b$ است؛ یعنی $(۲,b)\notin f$ است. پس:

$$f=\{(۱,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۳ حالت}\\ \downarrow\\ a,b,c}}{\bigcirc}),(۲,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۲ حالت}\\ \downarrow\\ a,c}}{\bigcirc}),(۳,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۳ حالت}\\ \downarrow\\ a,b,c}}{\bigcirc}),(۴,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۳ حالت}\\ \downarrow\\ a,b,c}}{\bigcirc})\}$$

$$\text{تعداد توابع}=۳\times۲\times۳\times۳=۲\times۳^۳=۵۴$$

۶۵۲- گزینه ۱ با توجه به تعریف تابع f، $D_f=A$ است و $R_f\subset A$ است. پس تابع f شامل ۵ زوج مرتب است که با توجه به آن $a+f(a)$ زوج است باید جمع دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب عضو این تابع زوج باشد:

$$f=\{(۱,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۳ حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۳,۵}}{\bigcirc}),(۲,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۲ حالت}\\ \downarrow\\ ۲,۴}}{\bigcirc}),(۳,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۳ حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۳,۵}}{\bigcirc}),(۴,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۲ حالت}\\ \downarrow\\ ۲,۴}}{\bigcirc}),(۵,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۳ حالت}\\ \downarrow\\ ۱,۳,۵}}{\bigcirc})\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد توابع}=۳\times۲\times۳\times۲\times۳=۴\times۲۷=۱۰۸$$

۶۵۳- گزینه ۴ ابتدا به جای x در دو طرف تساوی ۳ قرار می‌دهیم تا $f(۲)$ را به دست آوریم:

$$x=۳ \Rightarrow f(۳-۱)+f(۲)=\sqrt{۳+۱}-۴$$

$$\Rightarrow ۲f(۲)=۲-۴ \Rightarrow ۲f(۲)=-۲ \Rightarrow f(۲)=-۱$$

$$\Rightarrow f(x-۱)-۱=\sqrt{x+۱}-۴$$

برای محاسبهٔ $f(۷)$ کافی است در تابع بالا به جای x، ۸ قرار دهیم:

$$x=۸ \Rightarrow f(۸-۱)-۱=\sqrt{۸+۱}-۴$$

$$\Rightarrow f(۷)-۱=۳-۴ \Rightarrow f(۷)=۰$$

۶۵۴- گزینه ۲ چون f تابع است، باید مقدار عبارت $\frac{x^۲+۲x+a}{x^۲+۲x+۳}$ و $۲x-۲$ به ازای $x=۲$ یکسان باشد:

$$\xrightarrow{x=۲} \frac{۴+۴+a}{۴+۴+۳}=۲ \Rightarrow \frac{۸+a}{۱۱}=۲ \Rightarrow a=۱۴$$

چون $\sqrt{۲}-۱<۲$ است، پس برای محاسبهٔ $f(\sqrt{۲}-۱)$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم. به کمک مربع‌سازی ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و سپس $\sqrt{۲}-۱$ را به جای x قرار می‌دهیم:

$$x\leq ۲: f(x)=\frac{x^۲+۲x+۱۴}{x^۲+۲x+۳}=\frac{(x+۱)^۲+۱۳}{(x+۱)^۲+۲}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}-۱)=\frac{(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲+۱۳}{(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲+۲}=\frac{۱۵}{۴}$$

۶۵۵- گزینه۴ اگر فرض کنیم $x+\frac{۲}{x}=t$ است به کمک اتحاد $(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$ داریم:

$$(x+\frac{۲}{x})^۳=t^۳ \Rightarrow x^۳+\frac{۸}{x^۳}+\underbrace{۳\times x\times\frac{۲}{x}}_{۶}\underbrace{(x+\frac{۲}{x})}_{t}=t^۳$$

$$\Rightarrow x^۳+\frac{۸}{x^۳}+۶t=t^۳ \Rightarrow x^۳+\frac{۸}{x^۳}=t^۳-۶t \Rightarrow f(t)=t^۳-۶t$$

اگر $t=\sqrt{۱۰}$ باشد، داریم:

$$f(\sqrt{۱۰})=\sqrt{۱۰}^۳-۶\sqrt{۱۰}=۱۰\sqrt{۱۰}-۶\sqrt{۱۰}=۴\sqrt{۱۰}$$

تذکر $\sqrt{۱۰}$ در برد تابع $y=x+\frac{۲}{x}$ قرار دارد.

۶۵۶- گزینه۱ در تساوی زیر یک بار به جای x، ۳ و یک بار ۳- قرار می‌دهیم و دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)+xf(-x)=x+۳$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x=۳} f(۳)+۳f(-۳)=۶\\ \xrightarrow{x=-۳} f(-۳)-۳f(۳)=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(۳)+۳f(-۳)=۶\\ \underline{-۳f(-۳)+۹f(۳)=۰}\end{cases}$$

$$۱۰f(۳)=۶ \Rightarrow f(۳)=\frac{۳}{۵}$$

۶۵۷- گزینه۳ در تساوی زیر یک بار به جای x، ۲ و یک بار $\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{۱}{x})-۲f(x)=x^۲+\frac{۱}{x}$$

$$\xrightarrow{x=۲} f(\frac{۱}{۲})-۲f(۲)=۴+\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} f(۲)-۲f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}+۲$$

به کمک حل دستگاه زیر، $f(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(\frac{۱}{۲})-۲f(۲)=\frac{۹}{۲}\\ f(۲)-۲f(\frac{۱}{۲})=\frac{۹}{۴}\end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases}\cancel{۲f(\frac{۱}{۲})}-۴f(۲)=۹\\ \underline{f(۲)-\cancel{۲f(\frac{۱}{۲})}=\frac{۹}{۴}}\end{cases}$$

$$۳f(۲)=۹+\frac{۹}{۴}$$

$$\xrightarrow{\div(-۳)} f(۲)=-۳-\frac{۳}{۴}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۶۵۸- گزینه۱ در معادلهٔ زیر یک بار به جای x، ۳ و بار دیگر $-\frac{۱}{۳}$ قرار می‌دهیم و دستگاه ایجادشده را حل می‌کنیم:

$$f(x)-۳f(-\frac{۱}{x})=۶x+\frac{۳}{x}$$

$$\begin{cases}x=۳ \Rightarrow f(۳)-۳f(-\frac{۱}{۳})=۱۸+۱\\ x=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(-\frac{۱}{۳})-۳f(۳)=-۲-۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}f(۳)-۳f(-\frac{۱}{۳})=۱۹\\ f(-\frac{۱}{۳})-۳f(۳)=-۱۱\end{cases}$$

دو معادلهٔ فوق را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}\longrightarrow f(۳)-\cancel{۳f(-\frac{۱}{۳})}=۱۹\\ \xrightarrow{\times ۳} \underline{\cancel{۳f(-\frac{۱}{۳})}-۹f(۳)=-۳۳}\end{cases} \oplus$$

$$f(۳)-۹f(۳)=-۱۴$$

$$\Rightarrow -۸f(۳)=-۱۴ \Rightarrow f(۳)=\frac{۷}{۴}$$

۶۵۹- گزینه۳ باید توابع زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$\begin{cases}۴x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x(۴-x)\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq ۴ \quad (۱)\\ \underbrace{۲x-x^۲+۳}_{-(x^۲-۲x-۳)}\geq ۰ \Rightarrow -(x+۱)(x-۳)\geq ۰\\ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۳ \quad (۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} \Rightarrow D_f=[۰,۴]\cap[-۱,۳]=[۰,۳]$$

پس دامنهٔ تابع f شامل ۴ عدد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ است.

۶۶۰- گزینه۴ اعداد زیر رادیکال با فرجهٔ فرد هر عدد حقیقی می‌توانند باشند. پس فقط محدودیت را فرجهٔ ۴ ایجاد کرده است. باید مقادیر زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نامنفی باشد:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۲}{x^۲}\geq\frac{۹}{۲}$$

چون $x^۲\geq ۰$ است با شرط آن‌که $x\neq ۰$ است دو طرف نامعادله را در $۲x^۲$ ضرب می‌کنیم:

$$۹x^۲\leq ۴ \Rightarrow x^۲\leq\frac{۴}{۹} \Rightarrow |x|\leq\frac{۲}{۳} \Rightarrow -\frac{۲}{۳}\leq x\leq\frac{۲}{۳}$$

اما $x\neq ۰$ است، پس:

$$D=[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$$

۶۶۱- گزینه۲ چون دامنهٔ تابع شامل ۲ عدد حقیقی نمی‌شود، پس مخرج دارای ۲ ریشهٔ حقیقی است:

$$x^۳+۶x^۲+ax=۰ \Rightarrow x(x^۲+۶x+a)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ \text{یا}\\ x^۲+۶x+a=۰\end{cases}$$

معادلهٔ بالا دارای یک ریشهٔ $x=۰$ است. پس باید معادلهٔ $x^۲+۶x+a=۰$ فقط یک ریشه داشته باشد، در نتیجه Δ آن برابر صفر است:

$$\Delta=۳۶-۴a=۰ \Rightarrow ۴a=۳۶ \Rightarrow a=۹$$

۶۶۲- گزینه۴ چون دامنهٔ این تابع به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ است پس مخرج کسر به ازای فقط یک، که همان b باشد، صفر می‌شود. پس تابع درجه‌دوم مخرج ریشهٔ مضاعف b دارد. پس Δ مخرج برابر صفر است.

$$\Delta=۸^۲-۸a=۰ \Rightarrow ۸a=۶۴ \Rightarrow a=۸$$

$$\Rightarrow A=۲x^۲+۸x+۸=۲(x^۲+۴x+۴)=۲(x+۲)^۲$$

$$\Rightarrow A=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow b=-۲ \Rightarrow a+b=۸-۲=۶$$

۶۶۳- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ $(۲,+\infty]$ است، پس تابع زیر رادیکال نمی‌تواند یک تابع درجه‌دوم باشد، زیرا اگر این تابع یک ریشه داشته باشد علامت عبارت قبل و بعد از ریشه یکسان است. (اگر ضریب $x^۲$ مثبت باشد مثبت است و اگر منفی باشد منفی است). پس تابع زیر رادیکال یک تابع درجه اول است و $a=۰$ است. از طرفی ۲ ریشهٔ این معادله است:

$$A=bx+c \xrightarrow[A=۰]{x=۲} ۲b+c=۰$$

از طرفی $f(۶)=۴$ است، پس: $f(۶)=\sqrt{۶b+c}=۴ \Rightarrow ۶b+c=۱۶$

پس از حل دستگاه زیر b و c را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۲b+c=۰\\ ۶b+c=۱۶\end{cases} \Rightarrow ۴b=۱۶ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow c=-۸$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{۴x-۸} \Rightarrow f(۱۱)=\sqrt{۴۴-۸}=\sqrt{۳۶}=۶$$

۶۶۴- گزینهٔ ۲ برای آن‌که عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ همواره نامنفی باشد باید $\Delta\le۰$ و $a>۰$ باشد.

اگر عبارت درجه‌دوم زیر رادیکال همواره نامنفی باشد دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است. پس باید:

$$\begin{cases}\Delta=(-۴)^۲-۴m(۳+m)\le۰ \xrightarrow{\div۴} ۴-m(۳+m)\le۰\\ \Rightarrow -m^۲-۳m+۴\le۰\\ m>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-m^۲-۳m+۴\le۰ \Rightarrow -(m^۲+۳m-۴)\le۰\\ \Rightarrow -(m+۴)(m-۱)\le۰\\ m>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m\le-۴ \text{ یا } m\ge۱\\ m>۰\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m\ge۱$$

۶۶۵- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ توابع خطی f و g را می‌نویسیم. تابع f از نقاط $(۰,-۱)$ و $(\frac{۲}{۵},\frac{۱}{۵})$ و تابع g از نقاط $(۰,۱)$ و $(\frac{۲}{۵},\frac{۱}{۵})$ عبور می‌کند، پس:

$$f \text{ شیب}=\frac{-۱-\frac{۱}{۵}}{۰-\frac{۲}{۵}}=\frac{-\frac{۶}{۵}}{-\frac{۲}{۵}}=۳ \Rightarrow f(x)=۳x+b$$

$$\xrightarrow{(۰,-۱)\in f} b=-۱ \Rightarrow f(x)=۳x-۱$$

$$g \text{ شیب}=\frac{\frac{۱}{۵}-۱}{\frac{۲}{۵}-۰}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{\frac{۲}{۵}}=-۲ \Rightarrow g(x)=-۲x+b$$

$$\xrightarrow{(۰,۱)\in g} b=۱ \Rightarrow g(x)=-۲x+۱$$

در نتیجه: $y=\sqrt{f(x).g(x)}=\sqrt{(۳x-۱)(-۲x+۱)}$

باید زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$(۳x-۱)(-۲x+۱)\ge۰ \Rightarrow x\in[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$$

۶۶۶- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۴,۲]$ است که در این بازه ریشه‌های -۳، ۲ و ۱ دارد. بــه کمک جدول تعیین علامت تابع f می‌توانیم مجموعه جواب نامعادلهٔ $xf(x)\ge۰$ را به دست آوریم:

x		−۴		−۳		۰		۱		۲	
f(x)	ت‌ن		+		−		−		+		ت‌ن
x	−		−		−		+		+		+
xf(x)	ت‌ن		−		+		−		+		ت‌ن

$$xf(x)\ge۰ \Rightarrow x\in[-۳,۰]\cup[۱,۲]$$

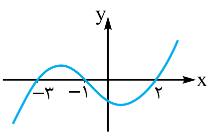
۶۶۷- گزینهٔ ۳ بایــد عبــارت زیــر رادیــکال نامنفی باشــد. پــس باید $\frac{x-۱}{f(x)}\ge۰$ باشد. با توجه به نمودار تابع f و به کمک جدول تعیین علامت زیر می‌توانیم این نامعادله را حل کنیم:

تابع f بالای محور xها است — تابع f زیر محور xها است

		−۵		−۴		۱		۲		۳	
f(x)	ت‌ن		+		−		−		+		ت‌ن
x−۱	−		−		−		+		+		+
$\frac{x-۱}{f(x)}$	ت‌ن		−	ت‌ن	+		−	ت‌ن	+	ت‌ن	ت‌ن

$$\Rightarrow D=(-۴,۱]\cup(۲,۳)$$

۶۶۸- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f، $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و سپس دامنهٔ این تابع $y=\sqrt{(x+۱)f(x)}$ را به دست می‌آوریم:

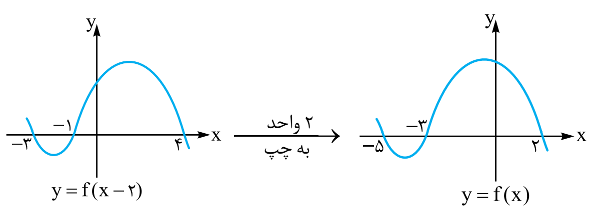


		−۳		−۱		۲	
f(x)	−		+		−		+
x+۱	−		−		+		+
	+		−		−		+

$$(x+۱)f(x)\ge۰ \Rightarrow x\in(\mathbb{R}-(-۳,۲))\cup\{-۱\}$$

تذکر چون در صورت سؤال گفته شده است، تابع f تابع غیرنقطه‌ای است (هر چند هیچ تعریفی از چنین تابعی در کتاب‌های درسی وجود ندارد.) احتمالاً منظور طراح حذف -۱ از دامنه بوده است و جواب را $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ در نظر گرفته است.

۶۶۹- گزینهٔ ۴ اگــر تابــع f را ۲ واحــد به ســمت راســت ببریــم تابع $y=f(x-۲)$ ایجاد می‌شود. پس اگر تابع $y=f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ ببریم، نمودار تابع f ایجاد می‌شود:



باید $xf(x) \geq 0$ باشد پس به کمک جدول تعیین علامت این نامعادله را حل می‌کنیم:

f در این بازه‌ها زیر محور xها است — f در این بازه‌ها بالای محور xها است

		-5		-3		0		2	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$		$+$		$-$
x	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$xf(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

$$xf(x)\geq 0 \Rightarrow x\in[-5,-3]\cup[0,2]$$

۶۷۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد $[x+k]=[x]+k$ است. پس $[x+1]=[x]+1$.

برای تعیین دامنه، باید تابع زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$2[x]-[x+1]\geq 0 \Rightarrow 2[x]-([x]+1)\geq 0$$

$$\Rightarrow 2[x]-[x]-1\geq 0 \Rightarrow [x]\geq 1$$

جزءصحیح اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۱، از ۱ بزرگ‌ترند پس $x\geq 1$ است.

۶۷۱- گزینهٔ ۳ اولاً باید تابع ورودی لگاریتم مثبت باشد و ثانیاً تابع زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$\begin{cases} 3-x>0 \Rightarrow x<3 \quad (1) \\ 2-\log(3-x)\geq 0 \Rightarrow \log(3-x)\leq \underset{\log 100}{\underset{\downarrow}{2}} \\ \Rightarrow \log(3-x)\leq \log 100 \Rightarrow 3-x\leq 100 \\ \Rightarrow -97\leq x \quad (2) \end{cases}$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} \Rightarrow (-\infty,3)\cap[-97,+\infty)=[-97,3)$$

تذکر اگر $a>1$ باشد و داشته باشیم $\log_a c<\log_a b$ داریم $c<b$ است و برعکس.

۶۷۲- گزینهٔ ۲ اگر $y=\log_a g(x)$ باشد باید $g(x)>0$ باشد، پس:

$$f(x)=\log_2(\underbrace{1-\log\underbrace{(x-2)}_{(1)}}_{(2)})$$

$$\begin{cases} (1): x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ (2): 1-\log(x-2)>0 \Rightarrow \log(x-2)<1 \\ \Rightarrow \log(x-2)<\log 10 \Rightarrow x-2<10 \Rightarrow x<12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} (-\infty,12)\cap(2,+\infty)=(2,12)$$

۶۷۳- گزینهٔ ۱ در تابع $y=\log_{g(x)} f(x)$ باید $f(x)>0$ و $g(x)>0$ و $g(x)\neq 1$ باشد. پس:

$$\begin{cases} x-a>0 \Rightarrow a<x \\ b-x>0 \Rightarrow x<b \\ b-x\neq 1 \Rightarrow x\neq b-1 \end{cases} \Rightarrow \underset{2}{\underset{\downarrow}{a}}<x<\underset{4}{\underset{\downarrow}{b}}$$

پس $a=2$ و $b=4$ است در نتیجه:

$$x\neq 4-1=3 \Rightarrow c=3 \Rightarrow a+b+c=2+4+3=9$$

۶۷۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم باید جلوی لگاریتم عددی مثبت باشد پس باید:

$$[x]f(x)>0$$

به کمک جدول تعیین علامت این معادله را حل می‌کنیم. با توجه به شکل تابع f می‌توانیم علامت $f(x)$ را تعیین کنیم. از طرفی می‌دانیم اگر $0\leq x<1$ باشد $[x]=0$ است و به‌ازای $x>1$، $[x]>0$ و به‌ازای $x<0$، $[x]<0$ است. پس:

		-2		-1		0		1		3	
$f(x)$	تن		$+$		$-$		$-$		$+$		تن
$[x]$	$-$		$-$		$-$		صفر		$+$		$+$
$[x]f(x)$	تن		$-$		$+$		صفر		$+$		تن

$$[x]f(x)>0 \Rightarrow x\in(-1,0)\cup(1,3)$$

۶۷۵- گزینهٔ ۴ توابع f و g زمانی برابرند که اولاً $D_f=D_g$ و ثانیاً $f(x)=g(x)$. در هر گزینه برابری دو تابع را بررسی می‌کنیم.

(۱) $$\begin{cases} D_f=[3,+\infty) \\ D_g=(-\infty,2]\cup[3,+\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow f\neq g$$

(۲) $$\begin{cases} D_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow f\neq g$$

(۳) $$\begin{cases} D_f=[0,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow f\neq g$$

(۴) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x} & x>0 \\ \dfrac{-x}{x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x} & x>0 \\ \dfrac{-x}{x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

پس در ۴ $f=g$ است.

۶۷۶- گزینهٔ ۲ باید $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ باشد. پس به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱)

$$D_f:\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq 1$$

$$D_g:\begin{cases} 2x-2\geq 0 \\ 2x+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq 1$$

$$\Rightarrow D_f=D_g$$

اما واضح است $f(x)\neq g(x)$ است. $(g(x)=\sqrt{2}\, f(x))$ مثلاً:

$$f(1)=\sqrt{2},\ g(1)=2 \Rightarrow f(1)\neq g(1)$$

(۲)

$$D_f:\begin{cases}4-x\ge 0\Rightarrow x\le 4\\ x+2\ge 0\Rightarrow x\ge -2\end{cases}\Rightarrow D_f=[-2,4]$$

$$D_g:-x^2+2x+8\ge 0\Rightarrow -(x-4)(x+2)\ge 0\Rightarrow D_g=[-2,4]$$

پس دامنه‌های f و g برابرند. از طرفی ضابطه‌های آن‌ها نیز یکسان است:

$$f(x)=\sqrt{4-x}\times\sqrt{2+x}=\sqrt{(4-x)(2+x)}=\sqrt{-x^2+2x+8}$$

پس $f=g$ است.

(۳)

$$D_f:\begin{cases}x-2\ge 0\\ x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x>3\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x>3$$

$$D_g:\frac{x-2}{x-3}\ge 0\Rightarrow x<2 \text{ یا } x>3$$

$$\Rightarrow D_f\ne D_g\Rightarrow f\ne g$$

(۴) می‌دانیم $\sqrt{a^2}=|a|$ است. پس:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x+3}=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x+3}=\frac{|x-1|}{x+3}\Rightarrow f(x)\ne g(x)$$

پس ضابطهٔ f و g یکسان نیست، در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

۶۷۷- گزینهٔ ۲ $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ است. پس باید $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ باشد.

در نتیجه مخرج کسر y باید یک ریشهٔ مضاعف ۱ داشته باشد. یعنی:

$$x^2+ax+b=(x-1)^2\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$$

حال باید ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}\\ g(x)=\dfrac{x^2+cx+d}{(x-1)^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{x+2}{x-1}=\frac{x^2+cx+d}{(x-1)^2}$$

$$\xrightarrow[x\ne 1]{\times(x-1)^2}(x+2)(x-1)=x^2+cx+d$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=x^2+cx+d$$

چون تساوی فوق باید همواره برقرار باشد، پس $c=1$ و $d=-2$ است. در نتیجه $c+d=-1$ است.

۶۷۸- گزینهٔ ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم. باید $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ باشد.

(۱) و (۲)

$$D_f:(x-1)(x+2)^2\ge 0\Rightarrow D_f=[1,+\infty)\cup\{-2\}$$

$$D_g:x-1\ge 0\Rightarrow D_g=[1,+\infty)$$

توجه کنید که در تابع f اگر $x=-2$ باشد، زیر رادیکال صفر می‌شود. پس $x=-2$ هم عضو دامنهٔ f است. تابع g در (۱) و (۲) یکسان است، زیرا اگر $x\ge 1$ باشد $x+2>0$ است و احتیاجی به قدرمطلق نیست. پس مشکل عدم تساوی توابع f و g در (۱) و (۲) عدم تساوی دامنهٔ این توابع است.

(۳)

$$\begin{cases}D_f:(x+2)(x-1)^2\ge 0\Rightarrow D_f=[-2,+\infty)\\ D_g:x+2\ge 0\Rightarrow D_g=[-2,+\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=D_g$$

توجه کنید که در دامنهٔ تابع f درست است که $x=1$ هم باعث صفرشدن زیر رادیکال می‌شود، اما $1\in[-2,+\infty)$ است و دامنه بدون تغییر است.

چون در بازهٔ $[-2,+\infty)$، $x-1$ می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد، پس $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$ است. در نتیجه $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ است. پس $f=g$ است.

(۴)

$$D_f:-x^3\ge 0\Rightarrow x\le 0\Rightarrow D_f=(-\infty,0]$$

$$D_g:-x\ge 0\Rightarrow x\le 0\Rightarrow D_g=(-\infty,0]$$

اما ضابطهٔ f و g یکسان نیست. زیرا:

$$f(x)=\sqrt{-x^3}=\sqrt{-x\times x^2}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{-x}=|x|\sqrt{-x}$$

پس $f(x)\ge 0$ است، در حالی که $g(x)\le 0$ است. مثلاً $f(-1)=1$ است، ولی $g(-1)=-1$ است.

۶۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ f را به ازای $x\ne\pm 1$ ساده می‌کنیم:

$$x\ne\pm 1: f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}=\frac{(x^3-x)+(2x^2-2)}{x^2-1}$$

$$=\frac{x(x^2-1)+2(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2-1}=x+2$$

پس اگر $x\ne\pm 1$ باشد، $f(x)=x+2$ است، چون $f(x)=g(x)$ است، پس $c=2$ است. از طرفی باید $f(1)=g(1)$ و $f(-1)=g(-1)$ نیز باشد، پس:

$$\begin{cases}f(1)=\dfrac{a+2}{1+b}\\ g(1)=3\end{cases}\Rightarrow\frac{a+2}{b+1}=3\Rightarrow a+2=3b+3\Rightarrow a-3b=1$$

$$\begin{cases}f(-1)=\dfrac{-a+2}{b-1}\\ g(-1)=1\end{cases}\Rightarrow\frac{-a+2}{b-1}=1\Rightarrow -a+2=b-1$$

$$\Rightarrow -a-b=-3$$

از حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases}a-3b=1\\ -a-b=-3\end{cases}\Rightarrow -4b=-2\Rightarrow b=\frac{1}{2},\ a=\frac{5}{2}$$

پس $b+c=\frac{1}{2}+2=2/5$.

۶۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. پس اگر $x\notin\mathbb{Z}$ زیر رادیکال منفی خواهد شد و اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد زیر رادیکال صفر خواهد شد. پس $D_f=\mathbb{Z}$ است و $f(x)=0$ است. حال دامنه و ضابطهٔ توابع در هر گزینه را پیدا می‌کنیم.

(۱) چون ۱ عدد صحیح است از جزء صحیح خارج می‌شود و مخرج به صورت مقابل است:

$$[x]+[1-x]=[x]+[-x]+1$$

اگر $x\in\mathbb{Z}$، $[x]+[-x]=۰$ است و اگر $x\notin\mathbb{Z}$، $[x]+[-x]=-۱$ است. پس اگر $x\notin\mathbb{Z}$ مخرج صفر می‌شود. در نتیجه $D_g=\mathbb{Z}$ است. اما اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد $g(x)=۱$ است و چون $f(x)=۰$ است، f و g برابر نیستند.

(۲) $-\cos^۲\pi x\le ۰$ است. چون زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس باید $\cos\pi x=۰$ باشد.

$$\cos\pi x=۰ \Rightarrow \pi x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k+۱}{۲}$$

پس دامنهٔ g، اعداد صحیح نمی‌باشد. در نتیجه $D_f\ne D_g$، پس $f\ne g$.

(۳) $-\sin^۲\pi x\le ۰$ است. چون زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس باید $-\sin\pi x=۰$ باشد.

$$\sin\pi x=۰\Rightarrow \pi x=k\pi \Rightarrow x=k\quad (k\in\mathbb{Z})$$

پس $D_g=\mathbb{Z}$ است و اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد، $-\sin^۲\pi x=۰$ است و در نتیجه $g(x)=۰$ است. پس $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)=۰$ است، پس $f=g$ است.

(۴) $D_g=\mathbb{R}$ است. پس $f\ne g$ نیست. هر چند چون $۰\le\frac{x^۲}{x^۲+۱}<۱$ است، $g(x)=۰$ است.

۶۸۱- گزینهٔ ۱ **راه اول:** صورت و مخرج تابع f را در مزدوج مخرج یعنی $|x+۱|+x$ ضرب می‌کنیم: $(x\ne-\frac{۱}{۲})$

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{|x+۱|-x}\times\frac{|x+۱|+x}{|x+۱|+x}=\frac{(۲x+۱)(x+|x+۱|)}{|x+۱|^۲-x^۲}$$

چون $|x+۱|^۲=(x+۱)^۲$ است، داریم:

$$f(x)=\frac{(۲x+۱)(x+|x+۱|)}{(x+۱)^۲-x^۲}=\frac{(۲x+۱)(x+|x+۱|)}{۲x+۱}$$

$$\overset{x\ne-\frac{۱}{۲}}{=\!=}x+|x+۱|$$

پس $a=۱$ است.

تذکر $f(-\frac{۱}{۲})=۰$ است و به ازای $a=۱$، $g(-\frac{۱}{۲})=۰$ است پس همواره به ازای $a=۱$ دو تابع f و g برابرند.

راه دوم: با عددگذاری می‌توانیم a را حساب کنیم. $f(۰)=۱$ است پس باید $g(۰)=۱$ باشد:

$$g(۰)=|a|=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

از طرفی $f(-\frac{۱}{۲})=۰$ است پس باید $g(-\frac{۱}{۲})=۰$ باشد:

$$g(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}a+|-\frac{۱}{۲}+a|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۱\Rightarrow g(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}+|-\frac{۱}{۲}|=۰\\ a=-۱\Rightarrow g(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}+|-\frac{۳}{۲}|=۲\end{cases}$$

پس باید $a=۱$ باشد.

۶۸۲- گزینهٔ ۴ دو تابع زمانی با یکدیگر برابرند که اولاً دامنهٔ آن‌ها و ثانیاً ضابطهٔ آن‌ها برابر باشند.

دامنهٔ تابع $y=\log\frac{x-۲}{x}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x-۲}{x}>۰\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$$

گزینه‌ای پاسخ صحیح است که دامنهٔ آن با دامنهٔ تابع فوق یکسان و ضابطهٔ آن برابر باشد:

(۱) $y=\log(x-۲)-\log x\Rightarrow\begin{cases}x-۲>۰\\ \text{و}\\ x>۰\end{cases}$

$\Rightarrow x>۲\Rightarrow$ دامنه‌ها یکسان نیست.

(۲) $y=\log\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}\Rightarrow\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}>۰$

$$\Rightarrow\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)}>۰\xrightarrow{x\ne-۲}\frac{x-۲}{x}>۰$$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)-\{-۲\}$$

پس دامنه‌ها یکسان نیست.

(۳) $y=\frac{۱}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})^۲$

$(\frac{x-۲}{x})^۲>۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{۰,۲\}$ دامنه‌ها یکسان نیست.

(۴) $y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}$

$$\sqrt{\frac{x-۲}{x}}>۰\Rightarrow\frac{x-۲}{x}>۰\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$$

از طرفی می‌دانیم $n\log_b a=\log_b a^n$، پس:

$$۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}=\log(\sqrt{\frac{x-۲}{x}})^۲=\log\frac{x-۲}{x}$$

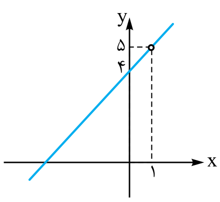
پس ضابطه‌ها نیز یکسان است.

۶۸۳- گزینهٔ ۳ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۳x-۴}{x-۱}=\frac{(x+۴)(x-۱)}{x-۱}$$

با فرض آن‌که $x\ne۱$ باشد داریم: $f(x)=x+۴$

تابع f یک تابع خطی است که $x=۱$ عضوی از دامنهٔ آن نیست. پس با توجه به یک‌به‌یک بودن این تابع ۵ عضوی از برد این تابع نیست. این مطلب را با توجه به شکل این تابع بهتر درک کنیم:



۶۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم و سپس ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-۱)^۳(x-۲)}{x^۲-۳x+۲}$$

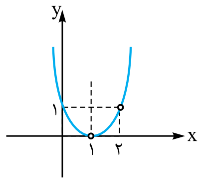
$$D_f:x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲\}$$

$$f(x)=\frac{(x-۱)^۳(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)}\xrightarrow{x\ne۱,۲}f(x)=(x-۱)^۲$$

حال با فرض آن‌که $x \neq ۱,۲$ است نمودار این سهمی را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل $R_f = (۰,+\infty)$.

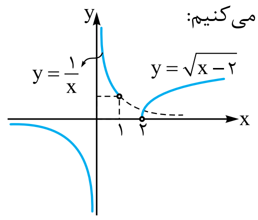


تذکر دقت داشته باشید نباید ۱ را از برد تابع حذف کنید، زیرا عدد ۱ توسط $x=۰$ تولید شده است.

۶۸۵- گزینهٔ ۴ نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل تابع f، برد تابع f شامل همهٔ اعداد حقیقی به‌جز صفر است:

$$R_f = \mathbb{R}-\{۰\}$$



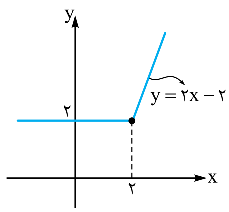
۶۸۶- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x+\sqrt{x^۲-۴x+۴} = x+\sqrt{(x-۲)^۲} = x+|x-۲|$$

تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+x-۲ & x\ge ۲ \\ x-x+۲ & x<۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x\ge ۲ \\ ۲ & x<۲ \end{cases}$$

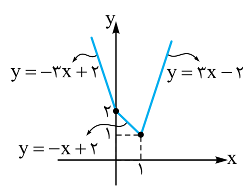


با توجه به شکل $R_f = [۲,+\infty)$ است.

۶۸۷- گزینهٔ ۲ تابع f را به کمک بازه‌بندی به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس آن را رسم می‌کنیم:

$$|x|=\begin{cases} x & x\ge ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases} \text{ و } |x-۱|=\begin{cases} x-۱ & x\ge ۱ \\ -x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+۲(x-۱) & x>۱ \\ x-۲(x-۱) & ۰\le x\le ۱ \\ -x-۲(x-۱) & x<۰ \end{cases}$$



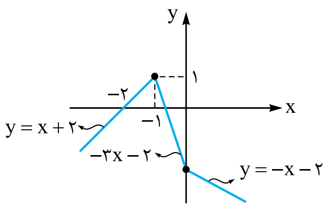
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۳x-۲ & x>۱ \\ -x+۲ & ۰\le x\le ۱ \\ -۳x+۲ & x<۰ \end{cases}$$

با توجه به شکل، برد تابع f بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

۶۸۸- گزینهٔ ۴ به کمک بازه‌بندی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

$$|x|-۲|x+۱|=\begin{cases} x-۲(x+۱) & x>۰ \\ -x-۲(x+۱) & -۱\le x\le ۰ \\ -x+۲(x+۱) & x<-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} -x-۲ & x>۰ \\ -۳x-۲ & -۱\le x\le ۰ \\ x+۲ & x<-۱ \end{cases}$$

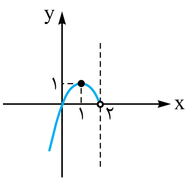


با توجه به شکل، برد این تابع بازهٔ $(-\infty,۱]$ است.

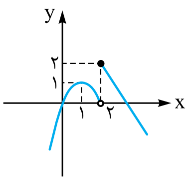
۶۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا سهمی با ضابطهٔ $g(x)=۲x-x^۲$ را در بازهٔ $x<۲$ رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{-۲} = ۱ \\ g(۲) = ۴-۴ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_S = f(۱) = ۱ \Rightarrow \text{رأس} \begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$$



حال نمودار خط $y=۴-x$ را به ازای $x\ge ۲$ به نمودار فوق اضافه می‌کنیم:

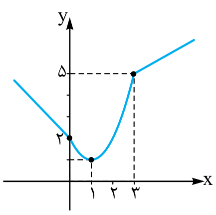


پس برد این تابع بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.

۶۹۰- گزینهٔ ۱ باید نمودار این تابع را رسم کنیم. در بازهٔ $[۰,۳)$، تابع f یک سهمی است. پس ابتدا رأس این سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = ۱$$

$$\Rightarrow y_S = ۱-۲+۲ = ۱ \Rightarrow S(۱,۱)$$

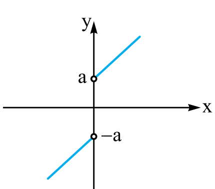


دقت کنید که وقتی $x<۰$ است $|x|=-x$ است و باید خط $y=-x+۲$ را رسم کنیم. با توجه به شکل $R_f=[۱,+\infty)$ است.

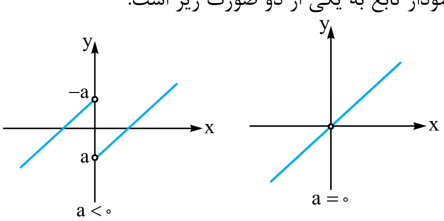
۶۹۱- گزینهٔ ۲ اگر $x\ge ۰$ باشد $|x|=x$ و اگر $x<۰$ باشد $|x|=-x$ است پس تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases} x+a\frac{x}{x} & x>۰ \\ x+\frac{a(-x)}{x} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} x+a & x>۰ \\ x-a & x<۰ \end{cases}$$

اگر $a>۰$ باشد نمودار تابع به صورت مقابل است که در این حالت برد تابع $\mathbb{R}$ نیست.

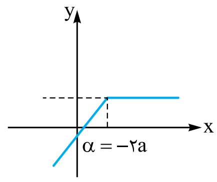


اگر $a\le ۰$ باشد نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:



پس اگر $a<۰$ باشد برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است. دقت کنید که اگر $a=۰$ باشد مطابق شکل بالا برد تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ است.

۶۹۲- گزینه۲ با توجه به شکل تابع $y=x+a|x+۲a|$ شامل دو خط است که در $x=\alpha$ تغییر شیب داده است. با توجه به آن‌که عبارت داخل قدرمطلق در ریشهٔ خود تغییر علامت می‌دهد، پس $\alpha=-۲a$ است.



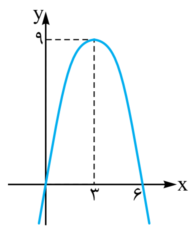
با توجه به شکل تابع f در بازهٔ $x\ge -۲a$ تابع ثابت است، داریم:

$$y=x+a|\underbrace{x+۲a}_{+}|=x+a(x+۲a)=x+ax+۲a^۲$$

$$=(a+۱)x+۲a^۲ \Rightarrow a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$

پس اگر $a=-۱$ باشد تابع در بازهٔ $x\ge ۲$ برابر تابع ثابت $y=۲$ است و در بازهٔ $x<۲$ برابر $y=۲x$ است، پس برد آن با توجه به شکل بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.

۶۹۳- گزینه۳ ابتدا برد سهمی $f(x)=۶x-x^۲$ را به دست می‌آوریم:



$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{-۲}=۳$$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}}=۶\times۳-۳^۲=۹$$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,۹] \Rightarrow f(x)\le ۹$$

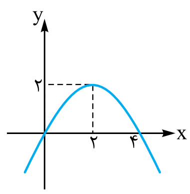
$$\Rightarrow ۰\le\sqrt{۶x-x^۲}\le\sqrt{۹}$$

$$\Rightarrow ۰\le\sqrt{۶x-x^۲}\le ۳ \xrightarrow{\times(-۳)} -۹\le -۳\sqrt{۶x-x^۲}\le ۰$$

$$\xrightarrow{+۲} -۷\le ۲-۳\sqrt{۶x-x^۲}\le ۲ \Rightarrow \begin{cases} a=-۷ \\ b=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow b-a=۲-(-۷)=۹$$

۶۹۴- گزینه۲ ابتدا برد سهمی $f(x)=۴x-x^۲$ را به دست می‌آوریم:



$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}}=۸-۴=۴ \Rightarrow R_f=(-\infty,۴]$$

دامنهٔ تابع $g(x)=a\sqrt{۴x-x^۲}$ به صورت زیر است:

$$۴x-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x(۴x)\ge ۰ \Rightarrow x\in[۰,۴]$$

چون $D_g=R_g$ است، پس باید برد تابع g نیز بازهٔ $[۰,۴]$ باشد. پس داریم:

$$۴x-x^۲\le ۴ \Rightarrow ۰\le\sqrt{۴x-x^۲}\le ۲$$

$$\xrightarrow[a>۰]{\times a} ۰\le a\sqrt{۴x-x^۲}\le ۲a \Rightarrow R_f=[۰,۲a]=[۰,۴]$$

$$\Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

۶۹۵- گزینه۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{۴-x}{x}\ge ۰ \Rightarrow x\in(۰,۴] \Rightarrow D_f=(۰,۴]$$

چون باید $۰\le x<۴$ باشد پس $|x|=x$ است و در نتیجه $x-|x|=۰$ است. پس تابع f در بازهٔ $(۰,۴]$ تابع ثابت صفر است و در نتیجه برد آن فقط شامل عضو صفر است:

$$D_f=(۰,۴] \Rightarrow f(x)=۰$$

۶۹۶- گزینه۲ **راه اول:** ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲-x}{x}\ge ۰ \Rightarrow x\in(۰,۲]$$

چون اعضای دامنهٔ f مثبت‌اند پس در این بازه $|x|=x$. پس:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$$

چون $x>۰$ است، می‌توانیم ضابطهٔ f را به صورت زیر بنویسیم:

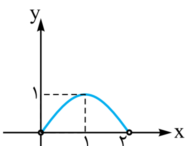
$$f(x)=۲\sqrt{x^۲\times\frac{۲-x}{x}}=۲\sqrt{۲x-x^۲}$$

با فرض $g(x)=۲x-x^۲$، ابتدا برد تابع g را به دست می‌آوریم. g یک سهمی رو به پایین است در نتیجه:

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=۱ \Rightarrow R_g=(-\infty,۱] \Rightarrow g(x)\le ۱$$

$$\xrightarrow{۰<x\le ۲} ۰\le\sqrt{g(x)}\le ۱ \Rightarrow ۰\le ۲\sqrt{g(x)}\le ۲ \Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

در بازهٔ $(۰,۲]$ نمودار تابع g به صورت زیر است:



$$\xrightarrow{۰<x\le ۲} ۰\le\sqrt{g(x)}\le ۱$$

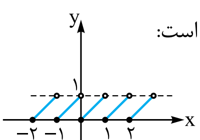
راه دوم: از گزینه‌ها می‌توانیم استفاده کنیم. صفر عضو بازه‌های ۱، ۳ و ۴ نیست. اما $f(۲)=۰$ است؛ یعنی تابع f صفر را ایجاد می‌کند و صفر عضوی از برد f است. پس تنها گزینهٔ صحیح ۲ است.

۶۹۷- گزینه۲ می‌دانیم $۰\le t-[t]<۱$ است. در نتیجه اگر $t=x+\frac{۱}{۳}$ باشد، داریم:

$$۰\le\underbrace{(x+\frac{۱}{۳})}_{t}-[\underbrace{x+\frac{۱}{۳}}_{t}]<۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le x-[x+\frac{۱}{۳}]<\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le y<\frac{۲}{۳}$$

تذکر نمودار تابع $y=x-[x]$ به صورت زیر است:



۶۹۸- گزینه۳ اگر $k\in\mathbb{Z}$ داریم $[x+k]=[x]+k$ پس:

$$f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x-۳]=۲x-۳-[۲x]+۳$$

$$=۲x-[۲x] \Rightarrow g(x)=۲x-[۲x]-۲x+۲[x]$$

$$=-[۲x]+۲[x]=-([۲x]-۲[x])$$

از طرفی $[۲x-۲[x]]=[۲x]-۲[x]$ زیرا $-۲[x]$ عددی صحیح است می‌تواند از جزءصحیح خارج شود، پس:

$$g(x)=-[۲x-۲[x]]=-[۲(x-[x])]$$

می‌دانیم $۰\le x-[x]<۱$ است، پس $۰\le\underbrace{۲x-۲[x]}_{\alpha}<۲$ است پس جزءصحیح α یا برابر صفر است یا ۱:

$$\Rightarrow [۲x-۲[x]]=۰ \text{ یا } ۱$$

پس برد $g(x)=-[۲x-۲[x]]$ برابر مجموعهٔ $\{-۱,۰\}$ است.

۶۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم، اولاً تابع زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس: $۱-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x\in[-۱,۱]$

از طرفی مخرج کسر نباید صفر باشد پس محدوده‌ای که $[x^۲]=۰$ را به دست می‌آوریم. می‌دانیم اگر $-۱<x<۱$ باشد $۰\le x^۲<۱$ است و $[x^۲]=۰$ است، پس داریم: $x\notin(-۱,۱)$. در نتیجه:

$$D_f=[-۱,۱]-(-۱,۱)=\{-۱,۱\}$$

پس دامنهٔ تابع f شامل ۲ عضو ۱ و ۱- است که به ازای آن‌ها $f(x)=۰$ است. پس برد f فقط شامل عدد صفر است: $R_f=\{۰\}$

۷۰۰- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\sin\pi x-۱\ge۰ \Rightarrow \sin\pi x\ge۱$$

چون حداکثر مقدار تابع $y=\sin\pi x$ برابر ۱ است پس اعدادی عضو دامنهٔ تابع f هستند که به ازای آن‌ها $\sin\pi x=۱$ باشد. پس این معادله را حل می‌کنیم:

$$\sin\pi x=۱ \Rightarrow \underset{(k\in\mathbb{Z})}{\pi x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}} \xrightarrow{\div\pi} x=۲k+\frac{۱}{۲}$$

پس هر عددی که ۰/۵ واحد از یک عدد زوج بزرگ‌تر باشد عضو دامنهٔ این تابع است.

از طرفی می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. پس چون دامنهٔ تابع f اعداد غیرصحیح است (اعداد زوج + $\frac۱۲$) پس در این حالت:

$$f(x)=\underbrace{[x]+[-x]}_{-۱}+\underbrace{\sqrt{\sin\pi x-۱}}_{۰} \Rightarrow f(x)=-۱$$

پس $f(-\frac{۱}{۲}f(x))=-۱$ است.

تذکر چون باید $\sin\pi x=۱$ باشد، پس تابع $y=\sqrt{\sin\pi x-۱}$ همواره برابر تابع ثابت صفر است.

۷۰۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $\cos(۲x)=۲\cos^۲x-۱$ پس:

$$f(x)=۲\cos^۲x-۱+\cos^۲x=۳\cos^۲x-۱$$

از طرفی $-۱\le\cos x\le۱$ است پس $۰\le\cos^۲x\le۱$ است. در نتیجه:

$$۰\le۳\cos(۲x)\le۳ \xrightarrow{-۱} -۱\le۳\cos^۲x-۱\le۲$$
$$\Rightarrow -۱\le f(x)\le۲$$

پس $[f(x)]$ برابر اعداد صحیح ۲,۱,۰,۱- است. پس برد تابع $y=[f(x)]$ شامل ۴ عدد صحیح است.

۷۰۲- گزینهٔ ۲ به کمک اتحاد مربع داریم:

$$\sin^۴x+\cos^۴x=(\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱})^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x$$
$$=۱-۲(\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac۱۲\sin(۲x)})^۲=۱-\frac۱۲\sin^۲۲x$$

می‌دانیم $-۱\le\sin۲x\le۱$ است، پس $۰\le\sin^۲۲x\le۱$ است. پس:

$$-\frac۱۲\le-\frac۱۲\sin^۲۲x\le۰ \xrightarrow{+۱} \frac۱۲\le۱-\frac۱۲\sin^۲۲x\le۱$$
$$\Rightarrow \frac۱۲\le y\le۱ \Rightarrow R=[\frac۱۲,۱]$$

۷۰۳- گزینهٔ ۳ به کمک مربع‌سازی، تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$t=\sqrt{x-۲}\Rightarrow x=t^۲+۲\Rightarrow f(x)=t^۲+۲-۲t$$
$$=t^۲-۲t+۲=(t-۱)^۲+۱$$
$$\xrightarrow{t=\sqrt{x-۲}} f(x)=(\sqrt{x-۲}-۱)^۲+۱$$

عبارت $p=(\sqrt{x-۲}-۱)^۲\ge۰$ است (به ازای $x\ge۲$ همهٔ مقادیر نامنفی ایجاد می‌شود. در $x=۳$، حداقل مقدار p یعنی صفر ایجاد می‌شود) پس: $(\sqrt{x-۲}-۱)^۲+۱\ge۱\Rightarrow R_f=[۱,+\infty)$

پس در بین گزینه‌ها عدد ۲ در برد تابع f است.

۷۰۴- گزینهٔ ۲ درجهٔ تابع ثابت برابر صفر است. پس باید ضریب $x^۲$ و x برابر صفر باشد:

$$\begin{cases}۲a-۱=۰ \Rightarrow a=\frac۱۲\\ ۴a+b=۰ \xrightarrow{a=\frac۱۲} b=-۲\end{cases}$$

پس: $f(x)=a-b=\frac۱۲+۲=\frac۵۲ \Rightarrow f(۴)=\frac۵۲$

۷۰۵- گزینهٔ ۴ چون g تابعی همانی است پس $g(۲)=۲$ است. در نتیجه:

$$f(۳)-۴\underbrace{g(۲)}_{۲}=۵\Rightarrow f(۳)=۵+۸=۱۳$$

چون f تابعی ثابت است پس مقدار این تابع به ازای هر عددی برابر ۱۳ است و این تابع به صورت $f(x)=۱۳$ است. در نتیجه:

$$g^{-۱}(۲+\underbrace{f(۴)}_{۱۳})=g^{-۱}(۱۵)=۱۵$$

چون $g(۱۵)=۱۵$ است، پس $g^{-۱}(۱۵)$ برابر ۱۵ خواهد بود.

۷۰۶- گزینهٔ ۲ چون تابع f یک تابع خطی است پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=ax+b$ است. پس: $y=\frac{ax+b}{۲-۳x}$

چون تابع فوق برابر تابع ثابت $y=۲$ است. پس به ازای همهٔ اعداد عضو دامنهٔ آن خروجی برابر ۲ دارد. پس تساوی زیر همواره باید برقرار باشد:

$$\frac{ax+b}{۲-۳x}=۲\xrightarrow{x\ne\frac۲۳}ax+b=-۶x+۴$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=-۶\\b=۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۶x+۴\Rightarrow f(۲)=-۱۲+۴=-۸$$

۷۰۷- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم تابع برابر تابع ثابت k است. به ازای هر x که $x\ne-\frac۳۵$ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{a-۲x}{۵x+۳}=k\Rightarrow a-۲x=۵kx+۳k$$

باید به ازای هر x ($x\ne-\frac۳۵$) تساوی فوق برقرار باشد، پس:

$$\begin{cases}۵k=-۲\Rightarrow k=-\frac۲۵\\ ۳k=a \xrightarrow{k=-\frac۲۵} a=-\frac۶۵\end{cases}$$

پس $f(x)=-\frac۲۵$ است. در نتیجه: $a+f(۲)=-\frac۶۵-\frac۲۵=-\frac۸۵$

۷۰۸- گزینه ۱ چون f تابعی ثابت است ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=k$ و چون g تابعی همانی است ضابطهٔ آن به صورت $g(x)=x$ است. پس:

$$\begin{cases} f(۳)=k \\ g(۱)=۱\end{cases} \xrightarrow{f(۳)=۲g(۱)} k=۲$$

پس تابع f برابر تابع ثابت $y=۲$ است. در نتیجه:

$$x^۲-۳f(x)+g(x)=۰ \Rightarrow x^۲-۳\times۲+x=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=-۳\\x=۲\end{cases}$$

۷۰۹- گزینه ۴

$$f(x)=\frac{|x|}{۱+|x|} \Rightarrow f(\frac{۱}{x})=\frac{|\frac{۱}{x}|}{۱+|\frac{۱}{x}|}=\frac{\frac{۱}{|x|}}{۱+\frac{۱}{|x|}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{|x|}}{\frac{|x|+۱}{|x|}} \xrightarrow{x\neq۰} f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{|x|+۱}$$

$$\Rightarrow g(x)=f(\frac{۱}{x})+\frac{۱}{x}f(x)=\frac{۱}{|x|+۱}+\frac{۱}{x}\times\frac{|x|}{|x|+۱}$$

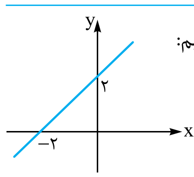
اگر $x<۰$ باشد $|x|=-x$ است و تابع g برابر تابع ثابت $y=۰$ است:

$$x<۰ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۱-x}+\frac{۱}{\cancel{x}}\times\frac{\overset{-۱}{\cancel{-x}}}{۱-x}=۰$$

اما اگر $x>۰$ باشد تابع g تابع ثابت نخواهد بود:

$$g(x)=\frac{۱}{۱+x}+\frac{۱}{x}\times\frac{x}{۱+x}=\frac{۲}{۱+x}$$

۷۱۰- گزینه ۲ معادلهٔ تابع خطی f را می‌نویسیم:



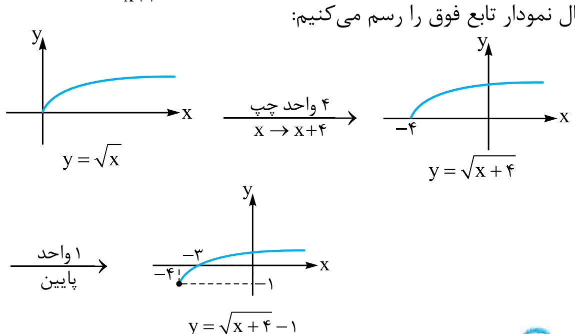
۲ = عرض از مبدأ و $۱=\frac{۲-۰}{۰-(-۲)}$ = شیب

$$\Rightarrow f(x)=x+۲$$

پس:

$$y=\sqrt{۲+\underbrace{f(x)}_{x+۲}}-۱=\sqrt{x+۴}-۱$$

حال نمودار تابع فوق را رسم می‌کنیم:



پس ۲ صحیح است.

۷۱۱- گزینه ۱ در تابع رادیکالی $y=\sqrt{ax+b}$ اگر دامنهٔ تابع به صورت $(-\infty,-\frac{b}{a}]$ باشد، حتماً a منفی است:

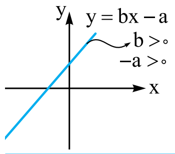
$$ax+b\ge۰ \Rightarrow ax\ge-b \xrightarrow{a<۰} x\le-\frac{b}{a}$$

اگر $a>۰$ باشد دامنهٔ تابع به صورت $[-\frac{b}{a},+\infty)$ است که با توجه به شکل داده شده $a<۰$ است.

از طرفی با توجه به شکل، ریشهٔ تابع یعنی $-\frac{b}{a}$ مثبت است پس:

$$-\frac{b}{a}>۰ \xrightarrow{a<۰} -b<۰ \Rightarrow b>۰$$

پس $a<۰$ و $b>۰$ است. پس در خط $y=bx-a$ شیب (b) مثبت و عرض از مبدأ $(-a)$ مثبت است. پس نمودار آن به صورت مقابل است:



۷۱۲- گزینه ۴ چون $(۳,۲),(۳,a^۲-a)\in f$ هستند، باید:

$$a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}a=۲\\a=-۱ \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

اگر $a=-۱$ باشد آن‌گاه $(-۱,۵),(-۱,۴)\in f$ هستند که در این صورت f تابع نیست. پس $a=۲$ است.

از طرفی چون $(۳,۲),(b,۲)\in f$ هستند پس باید $b=۳$ باشد تا f یک‌به‌یک باشد. در نتیجه دوتایی (a,b) به صورت $(۲,۳)$ است.

۷۱۳- گزینه ۱ اولاً f یک تابع است، پس چون $(۲,a+۱)$ و $(۲,a^۲-۱)$ عضو تابع‌اند باید $a^۲-۱=a+۱$ باشد:

$$a^۲-۱=a+۱ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=۲\\a=-۱\end{cases}$$

اگر $a=۲$ باشد تابع f یک‌به‌یک نیست، زیرا:

$$\begin{cases}(۲,a+۱)\in f\\(۱,۳)\in f\end{cases} \xrightarrow{a=۲} (۲,۳)\in f \Rightarrow (۲,۳),(۱,۳)\in f$$

$\Rightarrow$ f یک‌به‌یک نیست.

اگر $a=-۱$ باشد تابع f به این صورت است: $f=\{(۲,۰),(b,۰),(۱,۳)\}$

برای آن‌که f یک‌به‌یک باشد باید $b=۲$ باشد. پس $a+b=۱$ است.

۷۱۴- گزینه ۴ اولاً f یک تابع است، پس:

$$\begin{cases}(۱,m)\in f\\(۱,m^۲-۳m)\in f\end{cases} \Rightarrow m^۲-۳m=m$$

$$\Rightarrow m^۲-۴m=۰ \Rightarrow \begin{cases}m=۰\\m=۴\end{cases}$$

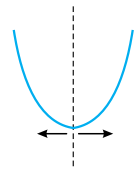
اگر $m=۰$ باشد تابع f به این صورت است: $f=\{(۱,۰),(۰,۴),(۰,۳)\}$ که در این صورت چون دارای زوج‌های مرتب $(۰,۳)$ و $(۰,۴)$ است یک‌به‌یک نیست. اگر $m=۴$ باشد تابع f به صورت زیر است:

$$f=\{(۱,۴),(۴,۴),(۰,۳)\}$$

که در این صورت نیز چون دارای زوج مرتب‌های $(۱,۴)$ و $(۴,۴)$ است یک‌به‌یک نیست. پس هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود که تابع f را به تابعی یک‌به‌یک تبدیل کند.

۷۱۵- گزینه ۲ می‌دانیم هر چندجمله‌ای درجه‌دوم یک سهمی است و سهمی‌ها یک‌به‌یک نیستند. پس f نباید یک سهمی باشد. پس لازم است ضریب $x^۲$ در آن صفر باشد. در نتیجه $a=۰$ است. در این صورت $f(x)=۳x-۱$ است که f تابعی خطی و یک‌به‌یک است. پس $f(۱)=۲$ می‌شود.

تذکر توابع خطی که شیب آن‌ها غیر صفر باشد یک‌به‌یک‌اند.



۷۱۶- گزینهٔ ۴ اگر x_S طول رأس یک سهمی باشد، سهمی در هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $[x_S , +\infty)$ یا $(-\infty , x_S]$ یک‌به‌یک است:

چون تابع $y = x^۲ + ax + ۱$ در بازهٔ $(-\infty , ۲]$ یک‌به‌یک است پس $x = ۲$، همان طول رأس سهمی است:

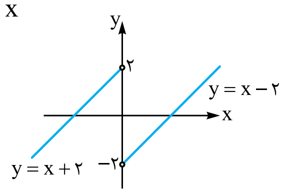
$$x_S = -\frac{a}{۲} = ۲ \Rightarrow a = -۴$$

پس حداکثر مقدار a برابر ۴- است.

۷۱۷- گزینهٔ ۳ هر گزینه را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم:

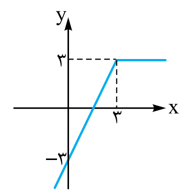
① $y = x - ۲\frac{|x|}{x} = \begin{cases} x - \frac{۲x}{x} & x > ۰ \\ x + \frac{۲x}{x} & x < ۰ \end{cases}$

$\Rightarrow y = \begin{cases} x - ۲ & x > ۰ \\ x + ۲ & x < ۰ \end{cases}$



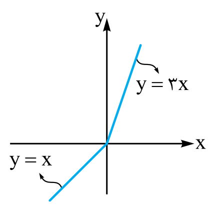
② $y = x - |x - ۳| = \begin{cases} x - (x - ۳) & x \ge ۳ \\ x + (x - ۳) & x < ۳ \end{cases}$

$\Rightarrow y = \begin{cases} ۳ & x \ge ۳ \\ ۲x - ۳ & x < ۳ \end{cases}$



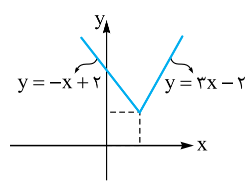
③ $y = ۲x + |x| = \begin{cases} ۲x + x & x \ge ۰ \\ ۲x - x & x < ۰ \end{cases}$

$\Rightarrow y = \begin{cases} ۳x & x \ge ۰ \\ x & x < ۰ \end{cases}$



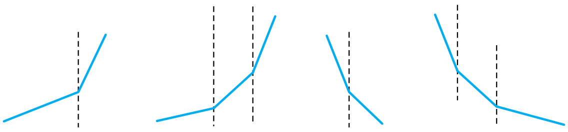
④ $y = x + ۲|x - ۱| = \begin{cases} x + ۲(x - ۱) & x \ge ۱ \\ x - ۲(x - ۱) & x < ۱ \end{cases}$

$\Rightarrow y = \begin{cases} ۳x - ۲ & x \ge ۱ \\ -x + ۲ & x < ۱ \end{cases}$

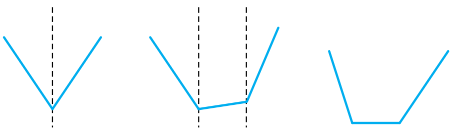


پس با توجه به شکل‌ها تابع ③ یک‌به‌یک است.

۷۱۸- گزینهٔ ۱ توابع هر ۴ گزینه توابعی پیوسته هستند که ضابطهٔ آن‌ها در هر بازه یک خط است. اگر شیب خطوط در همهٔ بازه‌ها مثبت یا در همهٔ بازه‌ها منفی باشد، تابع قطعاً یک‌به‌یک است. مانند شکل‌های زیر:

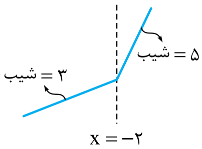


اما اگر در یکی از بازه‌ها شیب خط مثبت (یا صفر) و در یکی از بازه‌های دیگر شیب خط منفی (یا صفر) باشد تابع دیگر یک‌به‌یک نیست. مانند شکل‌های زیر:

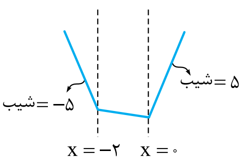


با توجه به این نکته به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

در ① وقتی $x > -۲$ است شیب خط ۵ و وقتی $x < -۲$ است شیب خط ۳ است. پس شیب خط تغییر علامت نمی‌دهد و قطعاً این تابع یک‌به‌یک است.



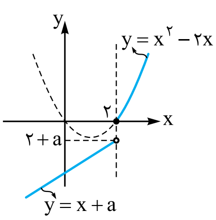
در ② وقتی $x > ۰$ است شیب خط ۵ و وقتی $x < -۲$ است شیب خط ۵- است پس در این تابع چون شیب خط‌ها تغییر علامت می‌دهند یک‌به‌یک نیست.



در ③ وقتی $x < -۲$ است $y = -۲$ می‌باشد که تابعی ثابت است و در نتیجه y یک‌به‌یک نیست.

در ④ وقتی $x > ۰$ است شیب خط ۲ و وقتی $x < -۲$ است شیب خط ۲- است. پس این تابع نیز غیریک‌به‌یک است.

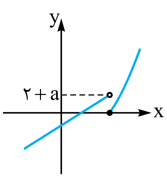
۷۱۹- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



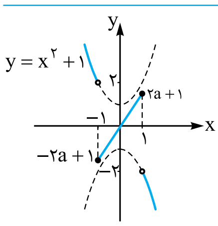
با توجه به شکل برای آن‌که تابع f یک‌به‌یک باشد لازم است مقدار تابع $y = x + a$ به ازای $x = ۲$ (یعنی $۲ + a$) مثبت نباشد:

$$۲ + a \le ۰ \Rightarrow a \le -۲$$

تذکر اگر $a > -۲$ باشد نمودار تابع به صورت مقابل خواهد بود که در این صورت یک‌به‌یک نیست.



۷۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



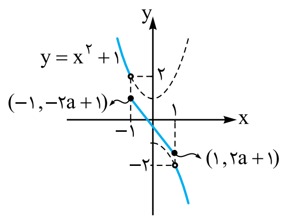
مطابق شکل اگر خط $y = ۲ax + ۱$ دارای شیب مثبت باشد، بیشترین مقدار آن یعنی در بازهٔ $[-۱,۱]$، برابر $f(۱) = ۲a + ۱$ است و

کم‌ترین مقدار آن برابر $f(-۱)=-۲a+۱$ است. مطابق شکل اگر $۲a+۱$ کوچک‌تر یا مساوی ۲ و $-۲a+۱$ بزرگ‌تر یا مساوی -۲ بیشتر باشد، تابع f یک‌به‌یک است:

$$a>۰\begin{cases}۲a+۱\le ۲ \Rightarrow ۲a\le ۱ \Rightarrow a\le \frac{۱}{۲}\\ -۲a+۱\ge -۲ \Rightarrow ۲a\le ۳ \Rightarrow a\le \frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a\le \frac{۱}{۲} \xrightarrow{a>۰} ۰<a\le \frac{۱}{۲}$$

اگر شیب خط $y=۲ax+۱$ منفی باشد $(a<۰)$، نمودار تابع f به صورت مقابل است:



در این حالت اگر تابع f یک‌به‌یک باشد باید:

$$a<۰\begin{cases}-۲a+۱\le ۲ \Rightarrow -۱\le ۲a \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le a\\ -۲\le ۲a+۱ \Rightarrow -۳<۲a \Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le a\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۱}{۲}\le a \xrightarrow{a<۰} -\frac{۱}{۲}\le a<۰$$

پس:
$$\begin{cases}a>۰: ۰<a\le \frac{۱}{۲}\\ a<۰: -\frac{۱}{۲}\le a<۰\end{cases} \Rightarrow a\in[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]-\{۰\}$$

اگر $a=۰$ باشد، تابع f در بازهٔ $[-۱,۱]$ تابع ثابت $y=۱$ است و یک‌به‌یک نیست.

۷۲۱- $\boxed{\text{گزینه ۱}}$ هر تابع به صورت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $\frac{a}{c}\ne\frac{b}{d}$ باشد یک تابع یک‌به‌یک است. (به این توابع هموگرافیک گویند) اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد، f یک تابع ثابت است که ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=\frac{a}{c}\quad (x\ne-\frac{d}{c})$ است. پس باید داشته باشیم:

$$y=\frac{\overset{a}{\overset{\uparrow}{m}}x\overset{b}{\overset{\uparrow}{-m+۱}}}{\underset{\underset{c}{\downarrow}}{۱}x\underset{\underset{d}{\downarrow}}{+۲}} \Rightarrow \frac{m}{۱}\ne\frac{-m+۱}{۲} \Rightarrow ۲m\ne -m+۱$$

$$\Rightarrow ۳m\ne ۱ \Rightarrow m\ne \frac{۱}{۳}$$

۷۲۲- $\boxed{\text{گزینه ۳}}$ می‌دانیم تابعی معکوس‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. اولاً f تابع است، در نتیجه:

$$\begin{cases}(۱,۲)\in f\\ (۱,a)\in f\end{cases} \xrightarrow{\text{f تابع است}} a=۲$$

در نتیجه تابع f به صورت مقابل است: $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(b,۴)\}$

برای آن‌که f یک‌به‌یک باشد لازم است $(۳,۴)=(b,۴)$ باشد، پس $b=۳$ است. پس $(۳,۴)\in f$ و $(۴,۳)\in f^{-۱}$ است. در نتیجه $f^{-۱}(۴)=۳$ است.

۷۲۳- $\boxed{\text{گزینه ۴}}$ تابع $(a\ne ۰)$ $f(x)=x^۳+ax^۲$ یک تابع غیر یک‌به‌یک است. زیرا دارای ۲ ریشهٔ صفر و $-a$ است:

$$x^۳+ax^۲=۰ \Rightarrow x^۲(x+a)=۰ \Rightarrow x=۰, x=-a$$

در نتیجه اگر تابع f بخواهد یک‌به‌یک شود لازم است $a=۰$ باشد. در این صورت $f(x)=x^۳$ تابعی یک‌به‌یک است.

پس تابع $y=x^۳+ax^۲+a-۳$ نیز اگر $a\ne ۰$ باشد به ازای $x=۰$ و $x=-a$ خروجی یکسان $a-۳$ را دارد. در نتیجه لازم است $a=۰$ باشد. در این حالت ضابطهٔ تابع به صورت $g(x)=x^۳-۳$ درمی‌آید و ضابطهٔ معکوس آن به صورت زیر است:

$$y=x^۳-۳ \Rightarrow x^۳=y+۳ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۳}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۳}$$

که با توجه به گزینه‌ها این تابع از نقطهٔ $(۵,۲)$ عبور می‌کند.

۷۲۴- $\boxed{\text{گزینه ۲}}$ ① همواره تابعی معکوس‌پذیر است، اگر (α,β) و (γ,β) عضو این تابع باشند، آن‌گاه $\alpha=\gamma$ باشد. در حالت کلی ترکیب دو تابع یک‌به‌یک تابعی یک‌به‌یک است.

$$g(x)=f(۲x-۱) \Rightarrow \begin{cases}g(\alpha)=f(۲\alpha-۱)=\beta\\ g(\gamma)=f(۲\gamma-۱)=\beta\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{چون f یک‌به‌یک است}} ۲\alpha-۱=۲\gamma-۱ \Rightarrow \alpha=\gamma$$

به عنوان مثال اگر $f(x)=۲x$ باشد، $g(x)=f(۲x-۱)=۴x-۲$ است که تابعی یک‌به‌یک است.

② قطعاً این تابع یک‌به‌یک نیست. زیرا به ازای هر دو ورودی که قرینهٔ هم باشند خروجی یکسان دارد:

$$g(x)=f(x)+f(-x) \Rightarrow \begin{cases}g(\alpha)=f(\alpha)+f(-\alpha)\\ g(-\alpha)=f(-\alpha)+f(\alpha)\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(\alpha)=g(-\alpha) \Rightarrow$$ g یک‌به‌یک نیست.

③ ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد. مثلاً اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد که همگی اعضای برد آن مثبت یا همگی منفی باشند، تابع $|f|$ تابعی یک‌به‌یک است، مانند توابع $y=۲^x$ و $y=-۳^x$.

④ نیز ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد. مثلاً اگر $f(x)=۲x$ باشد، $f(-x)=-۲x$ است و داریم $y=f(x)-f(-x)=۴x$ که این تابع یک‌به‌یک است.

۷۲۵- $\boxed{\text{گزینه ۳}}$ اگر $f^{-۱}(۴)=\alpha$ باشد آن‌گاه $f(\alpha)=۴$ است. پس:

$$f(\alpha)=-\alpha+\sqrt{-۲\alpha}=۴ \Rightarrow \sqrt{-۲\alpha}=\alpha+۴ \quad (*)$$

$$\xrightarrow{-۴\le\alpha\le۰} \alpha^۲+۸\alpha+۱۶=-۲\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+۱۰\alpha+۱۶=۰ \Rightarrow (\alpha+۲)(\alpha+۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-۲\\ \alpha=-۸ \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$\alpha=-۸$ به این دلیل غیرقابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند.

پس $\alpha=-۲$ است. از طرفی α همان $f^{-۱}(۴)$ است. پس $f^{-۱}(۴)=-۲$ است.

تذکر البته برای حل معادلهٔ $(*)$ می‌توانستیم از گزینه‌ها نیز کمک بگیریم. واضح است که $\alpha=-۲$ جواب این معادله است.

۷۲۶- گزینه۴ اگر $g^{-1}(۱۶)=\alpha$ باشد پس $g(\alpha)=۱۶$ است. چون $g(x)=f(۳x-۴)$ است، پس:

$$g(\alpha)=f(۳\alpha-۴)\xrightarrow{g(\alpha)=۱۶} f(۳\alpha-۴)=۱۶$$

پس $f^{-1}(۱۶)=۳\alpha-۴$ است. چون $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ است، پس:

$$f^{-1}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۲۰ \Rightarrow f^{-1}(۱۶)=۳\alpha-۴=۲۰$$

$$\Rightarrow ۳\alpha=۲۴\Rightarrow \alpha=۸ \xrightarrow{g^{-1}(۱۶)=\alpha} g^{-1}(۱۶)=۸$$

۷۲۷- گزینه۱ با توجه به آن‌که $f^{-1}(۳)=۴$ است، داریم $f(۴)=۳$.
اگر در تساوی زیر به جای x قرار دهیم ۱-، $f(۴)$ ایجاد می‌شود و داریم:

$$۱+f(۱-۳x)=g(۲x+۳)\xrightarrow{x=-۱} ۱+f(۴)=g(۱)$$

$$\xrightarrow{f(۴)=۳} g(۱)=۴\Rightarrow g^{-1}(۴)=۱$$

۷۲۸- گزینه۳ چون $g^{-1}(۲)=۲$ است پس $g(۲)=۲$ است. اگر در تساوی زیر به جای x قرار دهیم ۱/۵، $g(۲)$ ایجاد می‌شود، در نتیجه:

$$f(۲x)=۱-۳g(\frac{۳}{x})\xrightarrow{x=۱/۵} f(۳)=۱-۳g(۲)$$

$$\xrightarrow{g(۲)=۲} f(۳)=۱-۳\times۲=-۵\Rightarrow f(۳)=-۵\Rightarrow f^{-1}(-۵)=۳$$

۷۲۹- گزینه۲ اگر فرض کنیم $f^{-1}(۳)=\alpha$ است پس $f(\alpha)=۳$ است.
در نتیجه اگر در تساوی زیر به جای x قرار دهیم α، داریم:

$$f(x)=g(۱-\frac{۳}{x})\xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha)=g(۱-\frac{۳}{\alpha})$$

$$\xrightarrow{f(\alpha)=۳} g(۱-\frac{۳}{\alpha})=۳\Rightarrow g^{-1}(۳)=۱-\frac{۳}{\alpha}$$

از طرفی با توجه به تساوی $g^{-1}(x)=۲+\frac{۳}{x}$، داریم: $g^{-1}(۳)=۲+\frac{۳}{۳}=۳$

پس: $۱-\frac{۳}{\alpha}=۳\Rightarrow -\frac{۳}{\alpha}=۲\Rightarrow \alpha=-\frac{۳}{۲}$

۷۳۰- گزینه۳ اگر فرض کنیم $f^{-1}(۱۰)=\alpha$، داریم $f(\alpha)=۱۰$؛ پس:

$$f(\alpha)=g^۳(\alpha)+g(\alpha)=۱۰\Rightarrow g^۳(\alpha)+g(\alpha)-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow (g(\alpha)-۲)(\underbrace{g^۲(\alpha)+۲g(\alpha)+۵}_{\Delta<۰})=۰\Rightarrow g(\alpha)=۲$$

پس $g(\alpha)=۲$ است، در نتیجه $g^{-1}(۲)=\alpha$ است. بنابراین:

$$g^{-1}(x)=\sqrt{x+۷}\Rightarrow g^{-1}(۲)=\sqrt{۲+۷}=۳\Rightarrow g^{-1}(۲)=\alpha=۳$$

پس $f^{-1}(۱۰)=\alpha=۳$ است.

۷۳۱- گزینه۲ اگر فرض کنیم $g^{-1}(۶)=\alpha$، پس $g(\alpha)=۶$ است. در نتیجه:

$$g(\alpha)=f(\alpha)+\sqrt{f(\alpha)}=۶$$

اگر فرض کنیم $\sqrt{f(\alpha)}=t$ است، $f(\alpha)=t^۲$ است و در نتیجه:

$$t^۲+t=۶\Rightarrow t^۲+t-۶=۰\Rightarrow \begin{cases}t=-۳\\ t=۲\end{cases}$$

چون $\sqrt{f(\alpha)}=t$ است، باید $t\ge۰$ باشد. پس $t=-۳$ قابل قبول نیست، در نتیجه: $\sqrt{f(\alpha)}=۲\Rightarrow f(\alpha)=۴$

از طرفی اگر $f(\alpha)=۴$ باشد، $f^{-1}(۴)=\alpha$ است. با توجه به ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ داریم:

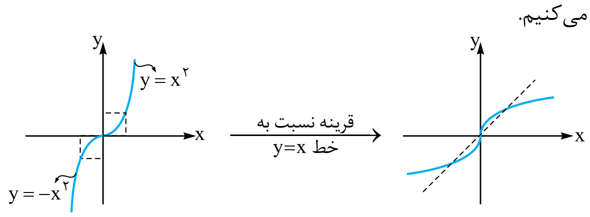
$$f^{-1}(۴)=\sqrt[۳]{۲\times۴}=۲\xrightarrow{f^{-1}(۴)=\alpha}\alpha=۲$$

چون $g^{-1}(۶)=\alpha$ است پس $g^{-1}(۶)=۲$ می‌باشد.

۷۳۲- گزینه۳ تابع f را به صورت ۲ضابطه‌ای می‌نویسیم:

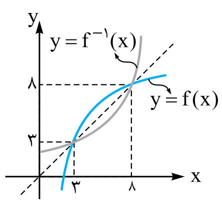
$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x\times x & x\ge۰\\ x\times(-x) & x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

برای رسم تابع f^{-1} از روی نمودار تابع f کافی است نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینه کنیم. پس توابع f و f^{-1} را رسم می‌کنیم.



پس ③ نمودار تابع f^{-1} است.

۷۳۳- گزینه۴ برای رسم تابع f^{-1} از روی تابع f باید قرینهٔ تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. پس ابتدا نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم.



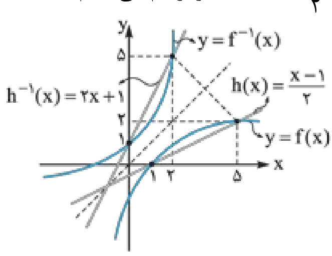
برای تعیین دامنهٔ تابع y باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x-f^{-1}(x)\ge۰\Rightarrow x\ge f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل، بازه‌ای که عرض نقاط تابع $y=x$ بزرگ‌تر یا مساوی عرض نقاط تابع $y=f^{-1}(x)$ است جواب نامعادله است که با توجه به شکل بازهٔ [۳,۸] این ویژگی را دارد.

۷۳۴- گزینه۲ برای رسم تابع f^{-1}، کافی است نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم تقارن دهیم. ضمن این‌که می‌دانیم دامنهٔ تابع f، برد تابع f^{-1} و برد تابع f دامنهٔ تابع f^{-1} است.

پس ابتدا معکوس تابع f و خط $h(x)=\frac{x-۱}{۲}$ را رسم می‌کنیم:



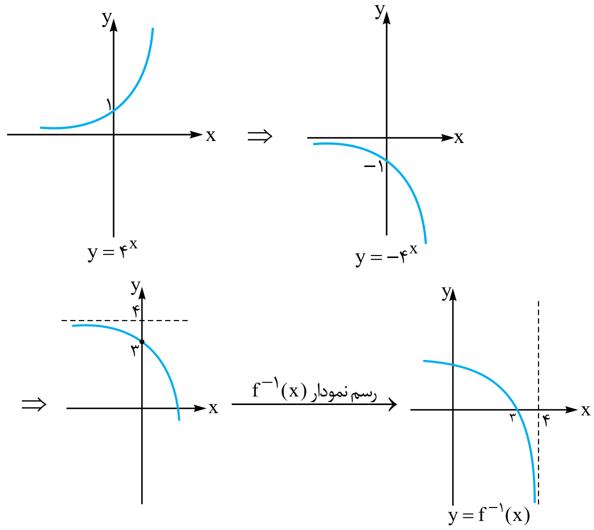
با توجه به شکل، تابع h در بازهٔ [۱,۵] پایین‌تر یا مساوی تابع f است. در این بازه برد هر دو تابع بازهٔ [۰,۲] است. پس در بازهٔ [۰,۲] تابع h^{-1} بالاتر از f^{-1} است (این مطلب را در شکل می‌بینید). در نتیجه: $x\in[۰,۲]\Leftrightarrow ۲x+۱\ge f^{-1}(x)$

از طرفی اعدادی عضو دامنهٔ تابع g هستند که در آن‌ها $۲x+۱-f^{-1}(x)\ge۰$ باشد، در نتیجه باید $۲x+۱\ge f^{-1}(x)$ باشد. پس بازهٔ [۰,۲] دامنهٔ تابع g است.

۷۳۵- گزینهٔ۳ ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۴-۲^{۲x}=۴-(۲^۲)^x=۴-۴^x$$

با توجه به نمودار تابع f می‌توان $f^{-۱}(x)$ را تعیین علامت کرد:



پس تابع $f^{-۱}$ دارای ریشهٔ ۳ است که در بازهٔ $(۳,۴)$ دارای مقادیر منفی و در بازهٔ $(-\infty,۳)$ دارای مقادیر مثبت است. حال به کمک جدول تعیین علامت زیر علامت $xf^{-۱}(x)$ را مشخص می‌کنیم:

		۰		۳		۴	
$f^{-۱}(x)$	+		+	۰	−	ت ن	ت ن
x	−	۰	+		+		+
$xf^{-۱}(x)$	−	۰	+	۰	−		ت ن

$$xf^{-۱}(x)\ge ۰ \Rightarrow x\in[۰,۳]$$

۷۳۶- گزینهٔ۱ x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y$$

$$\xrightarrow[x\ge ۱]{y\le ۲} x-۱=(۲-y)^۲ \Rightarrow x=(۲-y)^۲+۱,\ y\le ۲$$

پس: $f^{-۱}(x)=(۲-x)^۲+۱=x^۲-۴x+۵,\ x\in(-\infty,۲]$

توجه کنید که وقتی $\sqrt{x-۱}\ge ۰$ است، $-\sqrt{x-۱}\le ۰$ است و $۲-\sqrt{x-۱}\le ۲$ است؛ پس $R_f=(-\infty,۲]$ است که $R_f=D_{f^{-۱}}$ است.

۷۳۷- گزینهٔ۳ x را برحسب y مطابق مراحل زیر به دست می‌آوریم:

$$y=۳-\sqrt{۲-x}\Rightarrow \sqrt{۲-x}=۳-y$$

چون سمت چپ تساوی فوق نامنفی است (خروجی رادیکال با فرجهٔ زوج نامنفی است!) پس لازم است $y\le ۳$ باشد تا سمت راست تساوی نیز نامنفی باشد. با این شرط دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y\le ۳: ۲-x=(۳-y)^۲ \Rightarrow x=۲-(۳-y)^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(x)=۲-(۳-x)^۲=-x^۲+۶x-۷ \\ x\le ۳ \end{cases}$$

تذکر می‌توانستیم برای پیداکردن برد تابع f که همان دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است از شکل تابع f و یا نامساوی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt{۲-x}\ge ۰ \Rightarrow -\sqrt{۲-x}\le ۰ \xrightarrow{+۳} \underbrace{۳-\sqrt{۲-x}}_{f(x)}\le ۳$$

$$\Rightarrow f(x)\le ۳ \Rightarrow R_f=(-\infty,۳]=D_{f^{-۱}}$$

۷۳۸- گزینهٔ۳ تابع f را به صورت ۲ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|۳-x|=\begin{cases} -(۳-x) & x>۳ \\ ۳-x & x\le ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+(۳-x) & x>۳ \\ x-(۳-x) & x\le ۳ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۳ & x>۳ \\ ۲x-۳ & x\le ۳ \end{cases}$$

پس تابع f در بازهٔ $x\le ۳$، یک‌به‌یک است. برد تابع f در این بازه به صورت مقابل است: $x\le ۳ \Rightarrow ۲x\le ۶ \Rightarrow \underbrace{۲x-۳}_{f(x)}\le ۳ \Rightarrow f(x)\le ۳$

$$\Rightarrow D_{f^{-۱}}=(-\infty,۳]$$

ضابطهٔ $f^{-۱}$ در بازهٔ معکوس‌پذیرآن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y=۲x-۳ \Rightarrow ۲x=y+۳ \Rightarrow x=\frac{y+۳}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,۳]\to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x)=\dfrac{x+۳}{۲} \end{cases}$$

۷۳۹- گزینهٔ۴ تابع f را به صورت ۲ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=۲x-|۴-۲x|=\begin{cases} ۲x-(۲x-۴) & x>۲ \\ ۲x-(۴-۲x) & x\le ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۴ & x>۲ \\ ۴x-۴ & x\le ۲ \end{cases}$$

تابع f در بازهٔ $(۲,+\infty)$ تابع ثابت $y=۴$ است که یک‌به‌یک نیست.پس این تابع در بازهٔ $(-\infty,+۲]$ یک‌به‌یک است. پس وارون این تابع را در این بازه به دست می‌آوریم: $y=۴x-۴ \Rightarrow x=\frac{y+۴}{۴}$

اگر $x\le ۲$ باشد: $۴x\le ۸ \Rightarrow ۴x-۴\le ۴ \Rightarrow y\le ۴$

پس: $\begin{cases} x=\dfrac{y+۴}{۴} \\ y\le ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(x)=\dfrac{x+۴}{۴}=\dfrac{۱}{۴}x+۱ \\ x\le ۴ \end{cases}$

۷۴۰- گزینهٔ۴ معکوس تابع f را به ازای $x\ge ۱$ به دست می‌آوریم:

$$x^۲-۲x-۳=y \Rightarrow x^۲-۲x=y+۳$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲-۱=y+۳ \Rightarrow (x-۱)^۲=y+۴$$

$$\Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y+۴} \xrightarrow{x\ge ۱} x-۱=\sqrt{y+۴}$$

$$\Rightarrow x=۱+\sqrt{y+۴} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x+۴}$$

حال تابع $f^{-۱}$ و g را تقاطع می‌دهیم:

$$۱+\sqrt{x+۴}=\frac{x-۹}{۲} \Rightarrow ۲+۲\sqrt{x+۴}=x-۹$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱$$

همین حالا با توجه به گزینه‌ها جواب به دست می‌آید. با توجه به گزینه‌ها $x=۲۱$ جواب معادله است.

۷۴۱- گزینهٔ۲ **راه اول**: ابتدا تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=3x+1 \Rightarrow 3x=y-1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(3x-1)=\frac{3x-1-1}{3}=\frac{3x-2}{3}$$

در نتیجه:

$$y=\sqrt{f^{-1}(3x-1)-2x}=\sqrt{\frac{3x-2}{3}-2x}$$

حال دامنهٔ تابع فوق را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3x-2}{3}-2x\ge 0 \xrightarrow{\times 3} 3x-2-6x\ge 0$$

$$\Rightarrow 3x\le -2 \Rightarrow x\le -\frac{2}{3}$$

راه دوم: اگر تابع f تابعی اکیداً صعودی باشد، تابع f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. پس برای محاسبهٔ دامنهٔ این تابع می‌توانیم از این خاصیت استفاده کنیم:

$$f^{-1}(3x-1)-2x\ge 0 \Rightarrow f^{-1}(3x-1)\ge 2x \Rightarrow 3x-1\ge f(2x)$$

$$3x-1\ge 3(2x)+1 \Rightarrow 3x-1\ge 6x+1 \Rightarrow 3x\le -2 \Rightarrow x\le -\frac{2}{3}$$

۷۴۲- گزینهٔ۱ چون f یک تابع خطی با شیب مثبت است، ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=ax+b,(a>0)$ است. در نتیجه ضابطهٔ تابع معکوس f به صورت زیر است:

$$y=ax+b \Rightarrow ax=y-b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$f^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{\frac{x-b}{a}-b}{a}=\frac{\frac{x-b-ab}{a}}{a}$$

$$=\frac{x-b-ab}{a^2} \Rightarrow f^{-1}of^{-1}(x)=\frac{1}{a^2}x-(\frac{b+ab}{a^2})$$

با توجه به آن‌که $f^{-1}of^{-1}(x)=4x+3$ است، پس:

$$\frac{1}{a^2}x-(\frac{b+ab}{a^2})=4x+3 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{a^2}=4 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \xrightarrow{a>0} a=\frac{1}{2}\\ -(\frac{b+ab}{a^2})=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b+\frac{1}{2}b}{\frac{1}{4}}=-3 \Rightarrow 4b+2b=-3 \Rightarrow 6b=-3$$

$$\Rightarrow b=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=ax+b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$$

۷۴۳- گزینهٔ۱ قرینهٔ هر تابع نسبت به خط $y=x$، تابع معکوس آن است. پس کافی است x را برحسب y حساب کنیم:

$$3y-2x=4 \Rightarrow 2x=3y-4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}y-2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3}{2}x-2$$

۷۴۴- گزینهٔ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع f را می‌نویسیم. چون $f^{-1}(1)=0$ است، پس $f(0)=1$ است و در نتیجه تابع f از نقطهٔ (۰,۱) عبور می‌کند.

از طرفی چون $f(1)=5$ است، تابع f از نقطهٔ (۱,۵) عبور می‌کند؛ پس:

$$\begin{cases}(0,1)\in f\\(1,5)\in f\end{cases} \Rightarrow \text{شیب } f=\frac{5-1}{1-0}=4$$

$$\xrightarrow{(0,1)\in f} f(x)=4x+1$$

چون دامنهٔ تابع f بازهٔ [−۳,۳] است، پس برد آن مطابق شکل بازهٔ [−۱۱,۱۳] است. از آن‌جا که دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f است پس $D_{f^{-1}}=[-11,13]$ است. حال ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=4x+1 \Rightarrow 4x=y-1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{4}$$

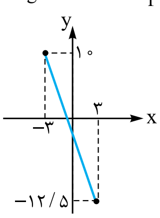
پس:

$$\begin{cases}f:[-3,3]\Rightarrow[-11,13]\\f(x)=4x+1\end{cases} \text{ و } \begin{cases}f^{-1}:[-11,13]\Rightarrow[-3,3]\\f^{-1}(x)=\frac{x-1}{4}\end{cases}$$

$$g(x)=f^{-1}(x)-f(x)=(\frac{x-1}{4})-(4x+1)=-\frac{15}{4}x-\frac{5}{4}$$

$$D_g=D_f\cap D_{f^{-1}}=[-3,3]\cap[-11,13]=[-3,3]$$

چون شیب و عرض از مبدأ خط g منفی است، پس ۲ صحیح است.



۷۴۵- گزینهٔ۴ **راه اول**: به کمک مربع‌سازی و تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$، داریم:

$$f(x)=x+4\sqrt{x}=t^2+4t=(t+2)^2-4$$

$$\Rightarrow y=(\sqrt{x}+2)^2-4 \Rightarrow (\sqrt{x}+2)^2=y+4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+2=\underset{\text{غ‌ق‌ق}}{\pm}\sqrt{y+4}$$

چون سمت چپ تساوی بالا مثبت است پس سمت راست آن نیز باید مثبت باشد، پس:

$$\sqrt{x}+2=\sqrt{y+4} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y+4}-2$$

$$\Rightarrow x=(\sqrt{y+4}-2)^2 \Rightarrow x=y+4-4\sqrt{y+4}+4$$

$$\Rightarrow x=y+8-4\sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x+8-4\sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases}a=-4\\b=4\end{cases} \Rightarrow a+b=0$$

راه دوم: با توجه به ضابطهٔ $f(x)=x+4\sqrt{x}$ داریم $f(0)=0$ و $f(1)=5$؛ پس $f^{-1}(0)=0$ و $f^{-1}(5)=1$ است. در نتیجه:

$$f^{-1}(0)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=8+a\sqrt{b}=0 \Rightarrow a\sqrt{b}=-8$$

$$f^{-1}(5)=1 \Rightarrow f^{-1}(5)=13+a\sqrt{5+b}=1$$

$$\Rightarrow a\sqrt{b+5}=-12 \Rightarrow \frac{a\sqrt{b}}{a\sqrt{b+5}}=\frac{8}{12}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+5}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b}{b+5}=\frac{4}{9} \Rightarrow 9b=4b+20$$

$$\Rightarrow 5b=20 \Rightarrow b=4 \xrightarrow{a\sqrt{b}=-8} a\sqrt{4}=-8 \Rightarrow a=-4$$

$$\Rightarrow a+b=0$$

۷۴۶- گزینهٔ ۴ **راه اول:** اگر $\sqrt{x-1}=t$ و $x\geq 2$ باشد، داریم:

$$t=\sqrt{x-1}\xrightarrow{x\geq 2} t^2=x-1 \Rightarrow x=t^2+1$$

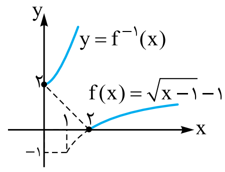
$$\Rightarrow x-2\sqrt{x-1}=t^2+1-2t=(t-1)^2$$

پس: $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|$

اگر $x\geq 2$ باشد، $\sqrt{x-1}\geq 1$ است و در نتیجه $\sqrt{x-1}-1\geq 0$ است. پس:

$$f(x)=|\sqrt{x-1}-1|=\sqrt{x-1}-1,\ x\geq 2$$

حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$ را به دست می‌آوریم تا تابع f^{-1} ایجاد شود:



پس ۴ صحیح است.

راه دوم: چون $f(2)=0$ است پس $f^{-1}(0)=2$ است. تنها گزینه‌ای که این ویژگی را دارد ۴ است.

۷۴۷- گزینهٔ ۳ اگر $x\geq 0$ باشد: $y=\sqrt{x}\xrightarrow[y\geq 0]{x\geq 0} x=y^2$

اگر $x<0$ باشد: $y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[x<0]{y<0} y^2=-x \Rightarrow x=-y^2$

پس: $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x\times x & x\geq 0 \\ -x\times x & x<0 \end{cases}$

با توجه به تعریف $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$، داریم: $f^{-1}(x)=x|x|$

۷۴۸- گزینهٔ ۴ تابع f را با توجه به تعریف $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x}\sqrt{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\frac{x}{x}\sqrt{-x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$$

چون f در $x=0$ پیوسته است می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$$

حال معکوس تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x\geq 0: y=\sqrt{x}\xrightarrow{y\geq 0} x=y^2$$

$$x<0: y=-\sqrt{-x}\xrightarrow{y<0} x=-y^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x\times x & x\geq 0 \\ -x\times x & x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x|x|,\ x\in\mathbb{R}$$

۷۴۹- گزینهٔ ۱ تابع f را به صورت یک تابع سه ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}=\begin{cases} \frac{x}{x}\sqrt{1-x^2} & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ \frac{-x}{x}\sqrt{1-x^2} & -1<x<0 \end{cases}$$

$$x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ -\sqrt{1-x^2} & -1<x<0 \end{cases}$$

حال ضابطهٔ تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$0<x<1: y=\sqrt{1-x^2}\xrightarrow{0<y<1} y^2=1-x^2$$

$$\Rightarrow x^2=1-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}\xrightarrow{0<x<1} x=\sqrt{1-y^2}$$

$$-1<x<0: y=-\sqrt{1-x^2}\xrightarrow{-1<y<0} y^2=1-x^2$$

$$\Rightarrow x^2=1-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}\xrightarrow{-1<x<0} x=-\sqrt{1-y^2}$$

پس: $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ -\sqrt{1-x^2} & -1<x<0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)$

تذکر: به کمک عددگذاری و بررسی گزینه‌ها نیز می‌توانستیم گزینهٔ موردنظر را پیدا کنیم.

۷۵۰- گزینهٔ ۴ اگر $y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد، x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$2y=x+\sqrt{x^2+4} \Rightarrow 2y-x=\sqrt{x^2+4}$$

$$\xrightarrow{2y\geq x} (2y-x)^2=x^2+4$$

$$\Rightarrow 4y^2+\cancel{x^2}-4xy=\cancel{x^2}+4 \Rightarrow 4xy=4y^2-4$$

$$\Rightarrow x=\frac{y^2-1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-x=-f^{-1}(x)$$

پس: $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-x=0$

۷۵۱- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع معکوس f را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

با توجه به ضابطهٔ بالا x و y هم‌علامت‌اند (یا هر دو مثبت یا هر دو منفی یا هر دو صفرند) پس با این شرط x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y^2=\frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2}=\frac{1+x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2}=1+\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}-1 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1-y^2}{y^2} \Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow |x|=\frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}$$

چون x و y هم‌علامت باید باشند (شرط اولیه)، پس:

$$x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

۷۵۲- گزینهٔ ۳ اگر $y=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ باشد، ورودی و خروجی این تابع هم‌علامت‌اند (x و y هم‌علامت) در نتیجه با توجه به این موضوع y را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} \Rightarrow y^۲=\frac{x^۲}{۱-x^۲} \Rightarrow \frac{۱}{y^۲}=\frac{۱-x^۲}{x^۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{x^۲}-۱=\frac{۱}{y^۲} \Rightarrow \frac{۱}{x^۲}=۱+\frac{۱}{y^۲} \Rightarrow \frac{۱}{x^۲}=\frac{y^۲+۱}{y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲=\frac{y^۲}{y^۲+۱} \Rightarrow x=\frac{\pm y}{\sqrt{۱+y^۲}}$$

چون x و y باید هم‌علامت باشند، پس $x=\frac{y}{\sqrt{۱+y^۲}}$ است. پس:

$$f^{-۱}(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow f^{-۱}(\tan x)=\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(\tan x)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}=\frac{\tan x}{\frac{۱}{|\cos x|}}=|\cos x|\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\frac{|\cos x|}{\cos x}\cdot\sin x$$

با توجه به آن‌که $\cos x\neq ۰$ است، پس $\frac{|\cos x|}{\cos x}=\frac{\cos x}{|\cos x|}$ است و در نتیجه ۳ صحیح است.

۷۵۳- گزینهٔ ۱ x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{x}{۱+|x|} \Rightarrow y+|x|y=x \Rightarrow x-|x|y=y$$

پس دو حالت زیر را داریم:

۱ $x\ge ۰$ باشد: $x-xy=y \Rightarrow x(۱-y)=y \Rightarrow x=\frac{y}{۱-y}$

چون باید $x\ge ۰$ باشد پس $\frac{y}{۱-y}\ge ۰$ است، پس $۰\le y<۱$ است.

۲ $x<۰$ باشد: $x+xy=y \Rightarrow x(۱+y)=y \Rightarrow x=\frac{y}{۱+y}$

چون $x<۰$ است باید $\frac{y}{۱+y}<۰$ باشد، پس $-۱<y<۰$ است. در نتیجه:

$$x=\begin{cases}\frac{y}{۱-y} & ۰\le y<۱\\ \frac{y}{۱+y} & -۱<y<۰\end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-x} & ۰\le x<۱\\ \frac{x}{۱+x} & -۱<x<۰\end{cases}$$

با توجه به تعریف $|x|=\begin{cases}x & x\ge ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$، می‌توانیم ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به صورت مقابل بنویسیم: $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-|x|}, |x|<۱$

۷۵۴- گزینهٔ ۳ x را برحسب y حساب می‌کنیم:

$$y=x+\sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow y-x=\sqrt{x^۲+۱}$$
$$\xrightarrow[(*)]{y\ge x} (y-x)^۲=x^۲+۱ \Rightarrow y^۲-۲xy+\cancel{x^۲}=\cancel{x^۲}+۱$$
$$\Rightarrow ۲xy=y^۲-۱ \Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{۲y}=\frac{۱}{۲}(y-\frac{۱}{y})$$

از طرفی باید $y\ge x$ باشد تا بتوان در مرحلهٔ (*) دو طرف تساوی را به توان ۲ رساند (چون باید دو طرف هم‌علامت باشند) پس باید:

$$y\ge x \Rightarrow y\ge\frac{y^۲-۱}{۲y} \Rightarrow \frac{y^۲-۱}{۲y}-y\le ۰$$
$$\Rightarrow \frac{y^۲-۱-۲y^۲}{۲y}\le ۰ \Rightarrow \frac{\overset{\text{منفی}}{\uparrow}{-y^۲-۱}}{۲y}<۰ \Rightarrow y>۰$$

پس: $x=\frac{۱}{۲}(y-\frac{۱}{y}), y>۰ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{x}), x>۰$

۷۵۵- گزینهٔ ۱ **راه اول:** x را برحسب y به دست می‌آوریم و تابع معکوس f را می‌نویسیم:

$$y=\frac{mx+۳}{x+m-۲} \Rightarrow mx+۳=xy+(m-۲)y$$
$$\Rightarrow mx-xy=(m-۲)y-۳$$
$$\Rightarrow x(m-y)=(m-۲)y-۳ \Rightarrow x=\frac{(m-۲)y-۳}{m-y}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{(m-۲)x-۳}{-x+m}=\frac{(۲-m)x+۳}{x-m}$$

برای آن‌که توابع f و $f^{-۱}$ برابر باشند باید داشته باشیم:

$$f(x)=f^{-۱}(x) \Rightarrow \frac{mx+۳}{x+m-۲}=\frac{(۲-m)x+۳}{x-m}$$

تساوی فوق همواره باید برقرار باشد. در نتیجه کافی است:

$$m=۲-m \Rightarrow m=۱$$

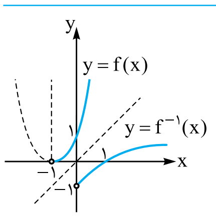
پس: $f(x)=f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{x-۱}$

راه دوم: تابع معکوس تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad\neq cb$) بر خود این تابع زمانی منطبق است که $a=-d$ باشد. پس در این سؤال:

$$m=-(m-۲) \Rightarrow m=۲-m \Rightarrow m=۱$$

۷۵۶- گزینهٔ ۴ **راه اول:** با رسم نمودارهای توابع f و $f^{-۱}$ تعداد نقاط تقاطع آن‌ها را بررسی می‌کنیم: $f(x)=(x+۱)^۲$

با توجه به شکل، توابع f و $f^{-۱}$ با یکدیگر برخورد ندارند.



راه دوم: تابع f یک سهمی است که طول نقطهٔ رأس آن $x=\frac{-b}{۲a}=-۱$ است. این تابع به ازای $x>-۱$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی محل(های) برخورد هر تابع اکیداً صعودی و معکوسش (در صورت وجود) روی خط $y=x$ است. پس تعداد محل‌های برخورد تابع $y=f(x)$ و $y=x$ را به دست می‌آوریم:

$$x^۲+۲x+۱=x \Rightarrow x^۲+x+۱=۰$$
$$\Rightarrow \Delta<۰ \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

چون این معادله جواب ندارد پس توابع f و $f^{-۱}$ با یکدیگر برخورد ندارند.

۷۵۷- گزینهٔ ۲ اگر تابع f خط $y=x$ را قطع کند، تابع $f^{-۱}$ نیز در همان نقطه خط $y=x$ را قطع می‌کند. پس تعدادی از نقاط تقاطع توابع f و $f^{-۱}$ روی خط $y=x$ است.

پس این نقاط را با تقاطع تابع f و $y=x$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{x+4}{x-2}=x \Rightarrow x^2-2x=x+4 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases}x=4\\x=-1\end{cases}$$

چون همین نقاط در گزینه‌ها هستند احتیاجی به محاسبهٔ ضابطهٔ تابع f^{-1} نیست و توابع f و f^{-1} در نقاط دیگری متقاطع نیستند.

۷۵۸- **گزینه ۴** برای ایجاد تابع $\frac{g}{f}$ کافی است در اعضای مشترک دامنهٔ توابع f و g خروجی‌های توابع را بر هم تقسیم کنیم به شرط آن‌که $f(x)\neq 0$ باشد، پس:

$$D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f\,,f(x)\neq 0 \Rightarrow D_{\frac{g}{f}}=\{3,4\}$$

$$\frac{g}{f}=\{(3,\frac{1}{2}),(4,\frac{2}{1})\}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f}+g=\{(3,\frac{1}{2}+1),(4,2+2)\}=\{(3,\frac{3}{2}),(4,4)\}$$

۷۵۹- **گزینه ۲**

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g \mid g(x)\neq 0\}$$

$$D_f=(-\infty,4],D_g=[0,+\infty) \Rightarrow D_f\cap D_g=[0,4]$$

$$g(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[0,4]-\{1\}$$

۷۶۰- **گزینه ۲** معادلهٔ توابع خطی f و g را می‌نویسیم. تابع f تابعی مبدأگذر است که از نقطهٔ $(1,2)$ عبور می‌کند و تابع g خطی است که از نقاط $(2,0)$ و $(1,2)$ عبور می‌کند، پس:

$$f \text{ شیب }=\frac{2-0}{1-0}=2 \Rightarrow f(x)=2x$$

$$g \text{ شیب }=\frac{2-0}{1-2}=-2 \Rightarrow g(x)=-2x+b$$

$$\xrightarrow{g(2)=0} -4+b=0$$

$$\Rightarrow b=4 \Rightarrow g(x)=-2x+4$$

$$\Rightarrow (f.(f-g))(x)=f(x)\times(f-g)(x)$$

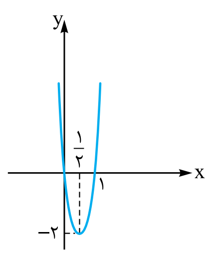
$$=2x(2x-(-2x+4))=2x(4x-4)=8x(x-1)$$

تابع فوق یک سهمی است که دارای ریشه‌های $x=0$ و $x=1$ است که $x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$ است. در نتیجه:

$$y=8x(x-1)$$

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}}=8\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})=-2$$



پس ۲ صحیح است.

۷۶۱- **گزینه ۱** ابتدا ضابطهٔ توابع خطی f و g را می‌نویسیم.

تابع f از نقاط $(-3,0)$ و $(0,1)$ عبور کرده است، پس:

$$f \text{ شیب }=\frac{1-0}{0-(-3)}=\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x+b$$

$$\xrightarrow{(0,1)\in f} b=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x+1$$

تابع g از نقاط $(0,-2)$ و $(-3,0)$ عبور کرده است، پس:

$$g \text{ شیب }=\frac{-2-0}{0-(-3)}=-\frac{2}{3} \Rightarrow g(x)=-\frac{2}{3}x+b'$$

$$\xrightarrow{(0,-2)\in g} b'=-2 \Rightarrow g(x)=-\frac{2}{3}x-2$$

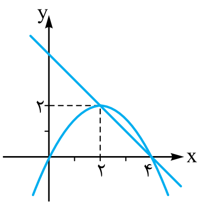
می‌دانیم $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ است. پس:

$$(f-g)(x)=(\frac{1}{3}x+1)-(-\frac{2}{3}x-2)=x+3$$

چون $x=2$ ریشهٔ معادلهٔ $(f-g)(x)=ax$ است پس:

$$x+3=ax \xrightarrow{x=2} 5=2a \Rightarrow a=\frac{5}{2}=2/5$$

۷۶۲- **گزینه ۴** ابتدا ضابطهٔ تابع خطی f و سهمی f.g را می‌نویسیم. تابع خطی f از نقاط $(2,2)$ و $(4,0)$ عبور کرده است. پس:



$$f \text{ شیب }=\frac{2-0}{2-4}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$\Rightarrow f(x)=-x+b$$

$$\xrightarrow{(4,0)\in f} -4+b=0 \Rightarrow b=4 \Rightarrow f(x)=-x+4$$

رأس سهمی f.g نقطهٔ $(2,2)$ است و این سهمی از نقطهٔ $(4,0)$ نیز عبور کرده است. می‌دانیم معادلهٔ هر سهمی با رأس (x_S,y_S) به صورت $y=a(x-x_S)^2+y_S$ است، پس:

$$(f.g)(x)=a(x-2)^2+2 \xrightarrow{(4,0)\in f.g} 4a+2=0$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow (f.g)(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4)+2=-\frac{1}{2}x^2+2x$$

می‌دانیم $(f.g)(x)=f(x).g(x)$، پس با تقسیم ضابطهٔ f.g بر f ضابطهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{(f.g)(x)}{f(x)}=\frac{-\frac{1}{2}x^2+2x}{-x+4}=\frac{-\frac{1}{2}x(x-4)}{-(x-4)}=\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow (f+g)(x)=-x+4+\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}x+4$$

۷۶۳- **گزینه ۳** اگر $x\leq 0$ باشد، $|x|=-x$ است و $g(x)=0$ می‌شود و در نتیجه در این حالت تابع $\frac{f}{g}$ تعریف‌نشده است. پس $x\leq 0$ نمی‌تواند باشد. اگر $x>0$ باشد $|x|=x$ و $|x+1|=x+1$ است و داریم:

$$x>0:(\frac{f}{g})(x)=\frac{2-|x+1|}{x+|x|}=\frac{2-(x+1)}{x+x}$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\frac{1-x}{2x}$$

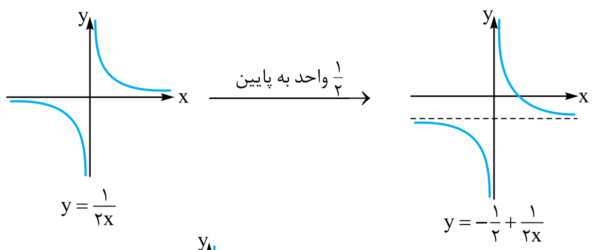
برای محاسبهٔ برد این تابع دو راه داریم:

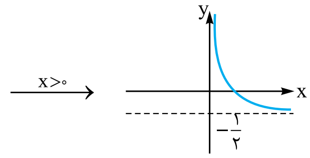
راه اول: تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2x}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}$$

با توجه به ضابطهٔ فوق اگر $x>۰$ باشد، مقادیر این تابع از $-\frac{۱}{۲}$ بیشتر خواهد بود. هر چه x بزرگ‌تر شود مقادیر ایجادشده به $-\frac{۱}{۲}$ نزدیک‌تر می‌شود. پس برد این تابع بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ است. (به ازای $۰<x<۱$ مقادیر تابع بازهٔ $(۰,+\infty)$ خواهد بود.)

راه دوم: در زیر نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲x}$ را که یک تابع هموگرافیک است رسم کرده‌ایم:





$\Rightarrow R_f=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$

راه سوم: x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{۱-x}{۲x} \Rightarrow ۲xy=۱-x \Rightarrow ۲xy+x=۱$$

$$\Rightarrow x(۲y+۱)=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲y+۱}$$

چون $x>۰$ است، باید:

$$\frac{۱}{۲y+۱}>۰ \Rightarrow ۲y+۱>۰ \Rightarrow y>-\frac{۱}{۲}$$

پس: $R_{\frac{f}{g}}=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$

۷۶۴- گزینه ۲ الف) اگر $x\ge ۰$ باشد، x نامنفی و $x+۱$ مثبت است، پس: $x\ge ۰: |x|=x\ ,\ |x+۱|=x+۱$

پس به ازای $x\ge ۰$ ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x+x}{x+۱+۱}=\frac{۲x}{x+۲}$$

برای محاسبهٔ برد تابع در این بازه ۲ راه زیر را داریم:

① $$y=\frac{۲x+۴-۴}{x+۲}=\frac{۲(x+۲)-۴}{x+۲}=۲-\frac{۴}{x+۲}$$

پس با توجه به ضابطهٔ بالا با افزایش x از صفر تا $+\infty$، y از ۰ تا ۲ افزایش می‌یابد (خود ۲ ایجاد نمی‌شود).

پس برد تابع به ازای $x\ge ۰$ بازهٔ $[۰,۲)$ است.

② x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x}{x+۲} \Rightarrow ۲x=xy+۲y \Rightarrow ۲x-xy=۲y$$

$$\Rightarrow x(۲-y)=۲y \Rightarrow x=\frac{۲y}{۲-y}$$

چون $x\ge ۰$ است، باید: $\frac{۲y}{۲-y}\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\le y<۲$

ب) اگر $x<۰$ باشد $|x|=-x$ است و $f(x)=۰$ خواهد بود، پس به ازای $x<۰$ تابع $\frac{f}{g}$ تابع ثابت صفر است.

پس برد تابع بازهٔ $[۰,۲)$ است.

۷۶۵- گزینه ۱ توابع fog و gof را می‌نویسیم:

$$(۲,۲)\in g\ ,\ (۲,۳)\in f \Rightarrow (۲,۳)\in fog$$

$$\begin{cases}(۳,۱)\in g,(۱,۲)\in f \Rightarrow (۳,۲)\in fog\\(-۱,۳)\in g,(۳,۳)\in f \Rightarrow (-۱,۳)\in fog\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog=\{(۲,۳),(۳,۲),(-۱,۳)\}$$

$$\begin{cases}(۲,۳)\in f,(۳,۱)\in g \Rightarrow (۲,۱)\in gof\\(۱,۲)\in f,(۲,۲)\in g \Rightarrow (۱,۲)\in gof\\(-۱,۲)\in f,(۲,۲)\in g \Rightarrow (-۱,۲)\in gof\\(۳,۳)\in f,(۳,۱)\in g \Rightarrow (۳,۱)\in gof\end{cases}$$

$$\Rightarrow gof=\{(۲,۱),(۱,۲),(-۱,۲),(۳,۱)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}D_{fog}=\{۳,۲,-۱\}\\R_{gof}=\{۱,۲\}\end{cases} \Rightarrow D_{fog}\cap R_{gof}=\{۲\}$$

۷۶۶- گزینه ۳

$$\begin{cases}(۳,m^۲)\in f\\(۳,m+۲)\in f\end{cases} \xrightarrow{\text{f تابع است}} m^۲=m+۲$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m=۲ & \text{غ ق ق}\\m=-۱\end{cases}$$

اگر $m=۲$ باشد f شامل دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,۴)$ خواهد بود و در این صورت f تابع نیست، پس $m=-۱$ است و در نتیجه:

$$f=\{(۳,۱),(۲,۱),(۵,-۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}$$

$$fof=\{(-۳,۴),(۵,۴),(-۲,۴)\}$$

۷۶۷- گزینه ۲

$$g(x)=x-۴ \Rightarrow g(۴)=۰ \Rightarrow fog(۴)=f(\underbrace{g(۴)}_{۰})=f(۰)$$

$$\xrightarrow{(۰,۱)\in f} fog(۴)=f(۰)=۱$$

چون $gof(a)=fog(۴)$ است، پس:

$$\begin{cases}g(f(a))=۱\\g(۵)=۱\end{cases} \Rightarrow f(a)=۵ \xrightarrow{(۲,۵)\in f} a=۲$$

۷۶۸- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $f(a)=\alpha$ است، پس $g(\alpha)=۵$ است.

با توجه به آن‌که $(۶,۵)\in g$ است (و البته g یک‌به‌یک است) پس $\alpha=۶$ است. یعنی $f(a)=۶$ است؛ در نتیجه:

$$a+\sqrt{a}=۶ \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a=۴$$

۷۶۹- گزینه ۳ چون $(۴,۱)\in gof$ است پس $g(f(۴))=۱$ است. از طرفی چون $(۴,۵)\in f$ است، پس $f(۴)=۵$ است:

$$\begin{cases}g(f(۴))=۱\\f(۴)=۵\end{cases} \Rightarrow g(۵)=۱$$

از طرفی $(b,۱)\in g$ است. پس $g(b)=۱$ است، در نتیجه:

$$\begin{cases}g(۵)=۱\\g(b)=۱\end{cases} \Rightarrow b=۵$$

(در همین لحظه ما گزینهٔ صحیح را یافتیم! اما a رو هم به دست می‌آوریم!)

از طرفی $(۴,۲)\in fog$ است پس $f(g(۴))=۲$ است و چون $(۳,۲)\in f$ است پس $f(۳)=۲$، در نتیجه:

$$\begin{cases} f(g(۴))=۲\\ f(۳)=۲\end{cases} \xrightarrow{\text{چون مقدار ۲، یک بار در f ایجاد شده}} g(۴)=۳$$

چون $(a,۳)\in g$ است، پس $g(a)=۳$ است و در نتیجه:

$$\begin{cases} g(۴)=۳\\ g(a)=۳\end{cases} \xrightarrow{\text{چون مقدار ۳، یک بار در g ایجاد شده}} a=۴$$

۷۷۰- گزینهٔ ۱

$$f(g(x))=۴x^۲+۶x$$

$$\xrightarrow{x=-۲} f(g(-۲))=۴\times(-۲)^۲+۶(-۲)=۴$$

$$\Rightarrow f(g(-۲))=۴$$

اگر فرض کنیم $g(-۲)=\alpha$ است. پس $f(\alpha)=۴$ است و در نتیجه با توجه به ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲+۴$، داریم: $۲\alpha^۲+۴=۴ \Rightarrow \alpha=۰$

پس $g(-۲)=۰$ است.

۷۷۱- گزینهٔ ۱

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{x}{x+۱}$$

چون به دنبال $f(-۵)$ هستیم باید ببینیم چه عضوی از دامنهٔ تابع g، ۵- را ایجاد می‌کند: $۲x+۳=-۵ \Rightarrow ۲x=-۸ \Rightarrow x=-۴$

پس $g(-۴)=-۵$ است و در نتیجه:

$$f(\underbrace{g(-۴)}_{-۵})=\frac{-۴}{-۴+۱}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow f(-۵)=\frac{۴}{۳}$$

۷۷۲- گزینهٔ ۳ چون خروجی دستگاه $\frac{۴}{۳}$ است. پس باید:

$$\frac{x}{\sqrt{x+۱}}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x=۴$$

۴ خروجی تابع g است. پس: $۲x-۲=۴ \Rightarrow x=۳$

پس ورودی اصلی $x=۳$ است:

$$\xrightarrow{۳} \overset{g}{\boxed{۲x-۲}} \xrightarrow{۴} \overset{f}{\boxed{\frac{x}{\sqrt{x+۱}}}} \longrightarrow \frac{۴}{۳}$$

۷۷۳- گزینهٔ ۴

$$g(x)=۳x+۲ \Rightarrow g(۲)=۸ \Rightarrow fog(۲)=f(\underbrace{g(۲)}_{۸})$$

$$=f(۸) \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x+۱}} f(۸)=\sqrt{۹}=۳ \Rightarrow fog(۲)=۳$$

چون $gof(a)=fog(۲)$ است، پس: $gof(a)=۳ \Rightarrow g(f(a))=۳$

$$\xrightarrow{g(x)=۳x+۲} ۳f(a)+۲=۳ \Rightarrow f(a)=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+۱}=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a+۱=\frac{۱}{۹} \Rightarrow a=-\frac{۸}{۹}$$

۷۷۴- گزینهٔ ۲

$$fog(x)=f(g(x))=(۲g(x)-۳)^۲=(۲(x+۲)-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$

با برابر قرار دادن $fog(x)$ و $f(x)$، طول نقاط برخورد توابع fog و f را به دست می‌آوریم: $fog(x)=f(x)$

$$(۲x+۱)^۲=(۲x-۳)^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۲x-۳ & \text{جواب ندارد}\\ ۲x+۱=۳-۲x \Rightarrow ۴x=۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس دو تابع در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ متقاطع‌اند.

۷۷۵- گزینهٔ ۳

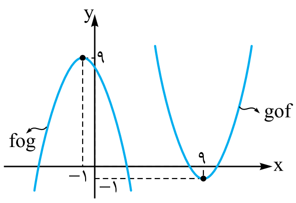
$$fog(x)=f(g(x))=۸-g(x)=۸-x^۲-۲x$$

$$gof(x)=g(f(x))=f^۲(x)+۲f(x)$$

$$=(۸-x)^۲+۲(۸-x)=x^۲-۱۶x+۶۴+۱۶-۲x$$

$$\Rightarrow gof(x)=x^۲-۱۸x+۸۰$$

پس توابع fog و gof یک سهمی‌اند که نمودار آن‌ها به صورت زیر است:



$$fog(x)=-x^۲-۲x+۸$$

$$\Rightarrow fog(x)=-(x+۱)^۲+۹$$

$$\Rightarrow \text{رأس}=(-۱,۹)$$

$$gof(x)=x^۲-۱۸x+۸۰$$

$$\Rightarrow gof(x)=(x-۹)^۲-۱$$

$$\Rightarrow \text{رأس}=(۹,-۱)$$

با توجه به شکل هر خط $y=k$ که در آن $-۱\le k\le ۹$ باشد هر دو تابع fog و gof را قطع می‌کند. که در بین گزینه‌ها $y=۳$ این ویژگی را دارد.

۷۷۶- گزینهٔ ۱

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲g(x)-۱}{g(x)+۲}=\frac{۲(x+۴)-۱}{x+۴+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}$$

$$gof(x)=g(f(x))=f(x)+۴=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴$$

$$=\frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$$

پس باید معادلهٔ مقابل را حل کنیم: $\frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$

$$\Rightarrow (۲x+۷)(x+۲)=(۶x+۷)(x+۶)$$

$$۲x^۲+۱۱x+۱۴=۶x^۲+۴۳x+۴۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰ \xrightarrow{\div ۴} x^۲+۸x+۷=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱\\ x=-۷ \end{cases}$$

تذکر می‌توانستیم در همان مرحلهٔ تشکیل معادله از گزینه‌ها کمک بگیریم و معادله را حل نکنیم، مثلاً $x=-۱$ تساوی را برقرار می‌کند، پس ۲ و ۴ نادرست‌اند و $x=۷$ تساوی را برقرار نمی‌کند، پس ۱ صحیح است.

۷۷۷- گزینهٔ ۲ تابع f، تابعی خطی است که از نقاط $(۳,۰)$ و $(۰,۳)$ عبور می‌کند، پس ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\text{f شیب}=\frac{۳-۰}{۰-۳}=-۱ \xrightarrow{(۰,۳)\in f} f(x)=-x+۳$$

مطابق شکل سهمی g دارای ریشه‌های ۳ و ۱- است پس ضابطهٔ آن بر $x-۳$ و $x+۱$ بخش‌پذیر است و از نقطهٔ $(۰,۳)$ عبور می‌کند. پس ضابطهٔ آن به صورت مقابل است:

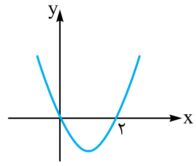
$$g(x)=a(x-۳)(x+۱) \xrightarrow{g(۰)=۳} a\times(-۳)\times۱=۳$$

$$\Rightarrow a=-۱ \Rightarrow g(x)=-(x-۳)(x+۱)$$

در نتیجه: $fog(x)=f(g(x))=-g(x)+3=(x-3)(x+1)+3$

$=x^2-2x-3+3 \Rightarrow fog(x)=x^2-2x=x(x-2)$

پس نمودار آن به صورت مقابل است:



۷۷۸- گزینه ۴

$$\begin{cases} f(x)=x^2+3x \\ g(x)=x+a \end{cases} \Rightarrow fog(x)=g^2(x)+3g(x)$$

$$=(x+a)^2+3(x+a) \Rightarrow fog(x)=x^2+2ax+a^2+3x+3a$$

$$=x^2+(2a+3)x+a^2+3a$$

چون نمودار توابع fog و f در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع‌اند پس $fog(2)=f(2)$ است، پس:

$$fog(2)=2^2+(2a+3)\times 2+a^2+3a=a^2+7a+10$$

$$f(2)=2^2+3\times 2=10 \Rightarrow a^2+7a+10=10 \Rightarrow a^2+7a=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{غ‌ق‌ق} \\ a=-7 \end{cases}$$

اگر $a=0$ باشد، ضابطهٔ تابع fog به صورت $fog(x)=x^2+3x$ درمی‌آید که در این حالت توابع fog و f منطبق‌اند. پس $a=-7$ قابل قبول است.

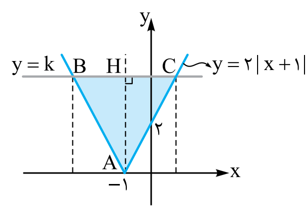
۷۷۹- گزینه ۳

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{4f(x)+4}=\sqrt{4(x^2+2x)+4}$$

$$=\sqrt{4(x^2+2x+1)}=2\sqrt{(x+1)^2}=2|x+1|$$

$$\Rightarrow gof(x)=2|x+1|$$

نمودار تابع $y=2|x+1|$ را رسم می‌کنیم و با خط $y=k$ تقاطع می‌دهیم. با حل معادلهٔ زیر طول نقاط B و C را به دست می‌آوریم:



$$2|x+1|=k \xrightarrow{k>0} |x+1|=\frac{k}{2}$$

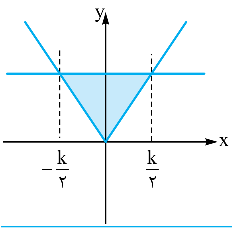
$$\xrightarrow{k>0} \begin{cases} x+1=\frac{k}{2} \Rightarrow x=\frac{k}{2}-1 \\ x+1=-\frac{k}{2} \Rightarrow x=-\frac{k}{2}-1 \end{cases}$$

پس طول پاره‌خط BC برابر است با:

$$BC=(\frac{k}{2}-1)-(-\frac{k}{2}-1)=k \Rightarrow S_{ABC}=\frac{BC\times AH}{2}$$

$$=\frac{k\times k}{2}=\frac{k^2}{2}=9 \Rightarrow k^2=18 \xrightarrow{k>0} k=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

تذکر اگر تابع $y=2|x+1|$ را ۱ واحد به سمت راست انتقال دهیم تابع $y=2|x|$ ایجاد می‌شود که مساحت حاصل از این منحنی در تقاطع با خط $y=k$ همان مساحتی است که $y=k$ در تقاطع با تابع $y=2|x+1|$ می‌سازد. پس می‌توانستیم برای راحتی کار مساحت بین منحنی $y=2|x|$ و $y=k$ را به دست آوریم.



۷۸۰- گزینه ۳

$$f(x)=2-|x-2| \Rightarrow fof(x)=2-|f(x)-2|$$

$$\Rightarrow fof(x)=2-|2-|x-2|-2|=2-|-|x-2||$$

چون $|a|=|-a|$ است، پس $|-|x-2||=|x-2|$ است، پس:

$$fof(x)=2-|x-2|=f(x)$$

۷۸۱- گزینه ۳ توابع f و fog توابعی خطی هستند. پس ابتدا ضابطهٔ این توابع را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (\frac{1}{2},2)\in f \\ (0,1)\in f \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } f=\frac{2-1}{\frac{1}{2}-0}=2$$

$$\xrightarrow{(0,1)\in f} f(x)=2x+1$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2},2)\in fog \\ (0,5)\in fog \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } fog=\frac{5-2}{0-\frac{1}{2}}=\frac{3}{-\frac{1}{2}}=-6$$

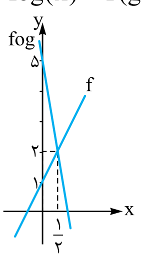
$$\xrightarrow{(0,5)\in fog} fog(x)=-6x+5$$

چون $f(x)=2x+1$ است، پس $fog(x)=f(g(x))=2g(x)+1$ است. از طرفی $fog(x)=-6x+5$ می‌باشد، پس:

$$2g(x)+1=-6x+5$$

$$\Rightarrow 2g(x)=-6x+4$$

$$\Rightarrow g(x)=-3x+2$$



چون شیب g منفی و عرض از مبدأ آن مثبت است پس نمودار آن ۳ است.

۷۸۲- گزینه ۲

$$fog(x)=f(g(x))=(g(x))^2-4$$

چون $fog(x)=x^4+4x^2$ است، پس:

$$(g(x))^2-4=x^4+4x^2 \Rightarrow (g(x))^2=x^4+4x^2+4$$

$$\Rightarrow (g(x))^2=(x^2+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x)=x^2+2 \\ \text{یا} \\ g(x)=-(x^2+2) \end{cases}$$

پس در بین گزینه‌ها، ۲ می‌تواند ضابطه‌ای برای تابع g باشد.

۷۸۳- گزینه ۳ **راه اول:** اگر فرض کنیم $g(x)=2x-1=t$ است، داریم:

$$\begin{cases} x=\frac{t+1}{2} \\ f(g(x))=4x^2-1 \end{cases} \Rightarrow f(t)=4(\frac{t+1}{2})^2-1$$

$$=t^2+2t \Rightarrow f(x)=x^2+2x$$

راه دوم: اگر $g(x)=2x-1=t$ باشد، $4x^2-1$ را برحسب t به صورت مقابل به دست می‌آوریم:

$$t=2x-1 \xrightarrow{\text{توان}} t^2=4x^2-4x+1$$
$$\xrightarrow{+2t} t^2+2t=4x^2-4x+1+2(2x-1)$$
$$\Rightarrow t^2+2t=4x^2-1 \Rightarrow f(t)=t^2+2t \Rightarrow f(x)=x^2+2x$$

حال $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(f(x))=2f(x)-1=2(x^2+2x)-1=2x^2+4x-1$$

۷۸۴- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $f(x)=t$ است، داریم:

$$2x+3=t \Rightarrow x=\frac{t-3}{2}$$

پس: $g(t)=8x^2+22x+20$

$$\xrightarrow{x=\frac{t-3}{2}} g(t)=8(\frac{t-3}{2})^2+22(\frac{t-3}{2})+20$$
$$=2(t-3)^2+11(t-3)+20=2t^2-12t+18+11t-33+20$$
$$\Rightarrow g(t)=2t^2-t+5 \Rightarrow g(x)=2x^2-x+5$$

پس ضابطهٔ fog به صورت زیر است:

$$f(g(x))=2g(x)+3=4x^2-2x+13$$

۷۸۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $g(x)=t$ باشد، داریم:

$$2x-3=t \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

پس: $f(g(x))=4(x^2-4x+5)$

$$\Rightarrow f(t)=4((\frac{t+3}{2})^2-4(\frac{t+3}{2})+5)$$
$$=(t+3)^2-8(t+3)+20=t^2+6t+9-8t-24+20$$
$$=t^2-2t+5 \Rightarrow f(x)=x^2-2x+5$$

۷۸۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $2(x-1)^2=t$، سعی می‌کنیم خروجی تابع fog را برحسب t بنویسیم:

$$t=2(x-1)^2 \Rightarrow t=2(x^2-2x+1)$$
$$\xrightarrow{\times\frac{3}{2}} \frac{3}{2}t=3(x^2-2x+1) \Rightarrow \frac{3}{2}t=3x^2-6x+3$$
$$\Rightarrow 6x-3x^2=3-\frac{3}{2}t$$

پس با توجه به آن‌که $6x-3x^2=3-\frac{3}{2}t$ است، داریم:

$$g(\underbrace{f(x)}_{t})=\underbrace{6x-3x^2}_{3-\frac{3}{2}t} \Rightarrow g(t)=3-\frac{3}{2}t \Rightarrow g(x)=3-\frac{3}{2}x$$

۷۸۷- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=2x-3$ است، داریم:

$$2x=t+3 \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

پس: $f(t)=4(\frac{t+3}{2})^2-14(\frac{t+3}{2})+13=(t+3)^2-7(t+3)+13$

$$\Rightarrow f(t)=t^2+6t+9-7t-21+13=t^2-t+1$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2-x+1$$

۷۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع f را به دســت می‌آوریم. اگر t عضوی از دامنهٔ f باشد، فرض می‌کنیم $2x-1=t$ و داریم:

$$2x-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{2} \Rightarrow f(\underbrace{2x-1}_{t})=4(\frac{t+1}{2})^2+1$$
$$\Rightarrow f(t)=t^2+2t+2$$
$$\Rightarrow fof(t)=(t^2+2t+2)^2+2(t^2+2t+2)+2$$
$$=t^4+4t^3+10t^2+12t+10$$
$$\Rightarrow fof(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x+10$$

پس ضریب x^2 در ضابطهٔ $fof(x)$ برابر ۱۰ است.

۷۸۹- گزینهٔ ۴

$$(fo\frac{1}{f})(x)=f((\frac{1}{f})(x))=\frac{\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f(x)}}=\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{f(x)+1}{f(x)}} \overset{f(x)\neq 0}{=} \frac{1}{f(x)+1}$$

پس با توجه به تساوی $gof(x)=(fo\frac{1}{f})(x)$، داریم:

$$g(\underbrace{f(x)}_{\alpha})=\frac{1}{\underbrace{f(x)}_{\alpha}+1} \Rightarrow g(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{x+1}$$

۷۹۰- گزینهٔ ۴

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid \underset{\frac{2x}{2x-1}}{\underset{\downarrow}{g(x)}}\in D_f\}$$
$$D_f=\{1,2,3\}$$

پس باید ببینیم چه اعضایی از دامنهٔ تابع g، مقادیر ۱، ۲ و ۳ را ایجاد می‌کنند:

$\frac{2x}{2x-1}=1 \Rightarrow 2x=2x-1 \Rightarrow$ جواب ندارد

$$\frac{2x}{2x-1}=2 \Rightarrow 2x=4x-2 \Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow x=1$$
$$\frac{2x}{2x-1}=3 \Rightarrow 2x=6x-3 \Rightarrow -4x=-3 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow D_{fog}=\{1,\frac{3}{4}\} \Rightarrow$ مجموع اعضای دامنه $=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}=1/75$

۷۹۱- گزینهٔ ۳

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in \mathbb{R}\}=D_f$$

با توجه به آن‌که D_g همهٔ اعداد حقیقی است پس دامنهٔ تابع f همان دامنهٔ تابع gof است:

$$D_f=D_{gof}=\mathbb{R}-\{-1\}$$

حال دامنهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{-1\} \Rightarrow g(x)\neq -1 \Rightarrow 3x-1\neq -1$$
$$3x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}-\{0\}$$

۷۹۲- گزینهٔ ۳

$$D_{fog}=\{x\in \underset{[2,+\infty)}{\underset{\downarrow}{D_g}} \mid \underset{\sqrt{x-2}}{\underset{\downarrow}{g(x)}}\in \underset{(-\infty,4]}{\underset{\downarrow}{D_f}}\}$$
$$\Rightarrow D_{fog}=\{2\le x \mid \sqrt{x-2}\le 4\} \Rightarrow \sqrt{x-2}\le 4$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-2\le 16 \Rightarrow x\le 18$$
$$\Rightarrow D_{fog}=\{2\le x \mid x\le 18\}=[2,18]$$
$$\Rightarrow b-a=18-2=16$$

۷۹۳- گزینه۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را ۲ واحد به سمت چپ ببریم (یعنی به جای x قرار دهیم $x+2$) نمودار تابع $g(x+2)=f(x+1)$ ایجاد می‌شود. پس ابتدا دامنهٔ تابع $g(x)=f(x-1)$ را تعیین می‌کنیم:

$$g(x)=f(x-1)=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow 2x-x^2\ge 0$$
$$\Rightarrow x(2-x)\ge 0 \Rightarrow 0\le x\le 2 \Rightarrow D_g=[0,2]$$

اگر از هر یک از اعضای دامنهٔ تابع $g(x)=f(x-1)$، ۲ واحد کم کنیم دامنهٔ تابع $k(x)=f(x+1)$ به دست می‌آید، پس: $D_k=[-2,0]$

۷۹۴- گزینه۱ اگر فرض کنیم $h(x)=f(\frac{x}{2})$ و $k(x)=f(2x+10)$، با توجه به دامنهٔ تابع f، ابتدا دامنهٔ توابع h و k را محاسبه می‌کنیم، پس باید:

$$D_h: \frac{x}{2}\in D_f \Rightarrow -2\le \frac{x}{2}\le 4 \xrightarrow{\times 2} -4\le x\le 8$$
$$\Rightarrow D_h=[-4,8]$$
$$D_k: (2x+10)\in D_f \Rightarrow -2\le 2x+10\le 4$$
$$\xrightarrow{-10} -12\le 2x\le -6 \xrightarrow{\div 2} -6\le x\le -3$$
$$\Rightarrow D_k=[-6,-3]$$

دامنهٔ تابع $g(x)=f(\frac{x}{2})-3f(2x+10)$ برابر $D_h\cap D_k$ است. پس:

$$D_g=[-4,8]\cap[-6,-3]=[-4,-3]$$

۷۹۵- گزینه۲

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}, D_g: x-x^2\ge 0 \Rightarrow D_g=[0,1]$$

پس باید $f(x)\in[0,1]$، در نتیجه: $0\le \frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\quad 0\le \frac{1+x^2}{1-x^2} \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2>0 \\ \Rightarrow x\in(-1,1) \\ (2)\quad \frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1 \end{cases}$$

چون شرط برقراری نامعادلهٔ (۱) آن است که $1-x^2>0$ باشد، پس با فرض آن‌که $x\in(-1,1)$ است می‌توان دو طرف نامساوی (۲) را در $1-x^2$ ضرب کرد:
$1+x^2\le 1-x^2 \Rightarrow 2x^2\le 0 \Rightarrow x=0$

پس $x=0$ تنها عضو دامنهٔ تابع است.

۷۹۶- گزینه۲

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$D_f=\mathbb{R}, D_g: x-x^2\ge 0 \Rightarrow x\in[0,1]$$

پس باید: $f(x)\in[0,1] \Rightarrow 0\le f(x)\le 1 \Rightarrow 0\le \frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1$

چون $1+x^2$ مثبت است، می‌توان آن را در طرفین نامساوی بالا ضرب کرد:

$$\xrightarrow{\times(1+x^2)} 0\le 1-x^2\le 1+x^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 0\le 1-x^2 \Rightarrow -1\le x\le 1 \quad (1) \\ 1-x^2\le 1+x^2 \Rightarrow 0\le 2x^2 \Rightarrow x\in\mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x\in[-1,1]$$

۷۹۷- گزینه۱

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$D_g: \frac{x+1}{x}\ge 0, x\ne 0 \Rightarrow x\le -1 \text{ یا } x>0$$
$$D_f: -x^2+3x-2\ge 0 \Rightarrow -(x-1)(x-2)\ge 0 \Rightarrow 1\le x\le 2$$
$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\le -1 \text{ یا } x>0 \mid 1\le\sqrt{\frac{x+1}{x}}\le 2\}$$
$$\Rightarrow 1\le \underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}_{g(x)}\le 2 \xrightarrow{\text{توان۲}} 1\le \frac{x+1}{x}\le 4$$
$$\Rightarrow 1\le 1+\frac{1}{x}\le 4 \xrightarrow{-1} 0\le \frac{1}{x}\le 3$$

برای برقراری نامساوی فوق لازم است $x>0$ باشد. پس با این فرض می‌توان طرفین نامساوی را در x ضرب کرد:

$$\xrightarrow{\times x} 0\le 1\le 3x \Rightarrow 1\le 3x \Rightarrow \frac{1}{3}\le x$$
$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\le -1 \text{ یا } x>0 \mid \frac{1}{3}\le x\}=[\frac{1}{3},+\infty)$$

۷۹۸- گزینه۱

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$D_f: x+|x|\ge 0 \Rightarrow |x|\ge -x$$

$\Rightarrow$ همواره برقرار است چه x مثبت، چه منفی و چه صفر

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$D_g: x^2-4x\ne 0 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

پس باید ببینیم به ازای چه اعدادی، $f(x)$ برابر صفر یا ۴ است:

$$\sqrt{x+|x|}=0 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0: \sqrt{2x}=0 \Rightarrow x=0 \\ x<0: \sqrt{x-x}=0 \quad \text{همواره برقرار} \end{cases}$$

پس به ازای $x\le 0$، $f(x)=0$ است. پس کل این اعداد نامثبت عضو دامنهٔ تابع gof نیستند.

$$\sqrt{x+|x|}=4 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0: \sqrt{2x}=4 \Rightarrow x=8 \\ x<0: \sqrt{0}=4 \quad \text{امکان‌ناپذیر} \end{cases}$$

پس $x=8$ عضو دامنهٔ gof نیست. در نتیجه:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{f(x)\in\mathbb{R}-\{0,4\}}_{x>0, x\ne 8}\}=(0,8)\cup(8,+\infty)$$

۷۹۹- گزینه۲

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$D_g=\mathbb{R}$$
$$D_f: (2x-5)(5-x)\ge 0 \Rightarrow x\in[\frac{5}{2},5]$$
$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} \mid [x]\in[\frac{5}{2},5]\} \Rightarrow \frac{5}{2}\le [x]\le 5$$

با توجه به نامساوی فوق، چون $[x]$ عددی صحیح است پس نمی‌تواند $\frac{5}{2}$ را ایجاد کند و کم‌ترین عدد صحیحی که می‌تواند در این بازه ایجاد کند ۳ است، پس باید: $3\le [x]\le 5 \Rightarrow 3\le x<6 \Rightarrow D_{fog}=[3,6)$

تذکر اگر $[x]=5$ باشد، آن‌گاه $5\le x<6$ است.

۸۰۰- گزینهٔ ۴

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_g: x^۲+۲x>۰ \Rightarrow x<-۲$ یا $x>۰$

$D_f: ۳-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۳$

چون باید $g(x)\in D_f$ باشد، پس:

$g(x)\le ۳ \Rightarrow \log_۲(x^۲+۲x)\le ۳$

$\xrightarrow{\text{چون پایه از ۱ بزرگ‌تر است}} x^۲+۲x\le ۲^۳$

$\Rightarrow x^۲+۲x-۸\le ۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۲)\le ۰\Rightarrow x\in[-۴,۲]$

پس xهایی از در D_g که عضو بازهٔ $[-۴,۲]$ باشند مجموعه اعضای دامنهٔ fog را تشکیل می‌دهند:

$((-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty))\cap[-۴,۲]=[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

۸۰۱- گزینهٔ ۲

ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم. پس باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$D_f:\begin{cases} x-۲>۰\Rightarrow x>۲ \quad (۱)\\ ۲-\log_۳(x-۲)\ge ۰\Rightarrow \log_۳(x-۲)\le ۲\\ \Rightarrow x-۲\le ۳^۲\Rightarrow x\le ۱۱ \quad (۲)\end{cases}$$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D_f=(۲,۱۱]$

اعداد حقیقی مانند x عضو دامنهٔ تابع $k(x)=f(x+۳)$ هستند که $(x+۳)\in D_f$ باشد، پس باید:

$۲<x+۳\le ۱۱ \xrightarrow{-۳} -۱<x\le ۸\Rightarrow D_k=(-۱,۸]$

تذکر در واقع اگر فرض کنیم $g(x)=x+۳$، شما باید دامنهٔ تابع fog را با فرض آن‌که $D_f=(۲,۱۱]$، تعیین کنید.

۸۰۲- گزینهٔ ۱

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_g: x^۲-۱۵x>۰ \Rightarrow x(x-۱۵)>۰\Rightarrow x<۰$ یا $x>۱۵$

$D_f=(-\infty,۲]$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x<۰ \text{ یا } x>۱۵ \mid \log(x^۲-۱۵x)\le ۲\}$

$\Rightarrow \log(x^۲-۱۵x)\le \underset{\log ۱۰۰}{\underset{\downarrow}{۲}} \Rightarrow x^۲-۱۵x\le ۱۰۰$

$\Rightarrow x^۲-۱۵x-۱۰۰\le ۰\Rightarrow (x-۲۰)(x+۵)\le ۰\Rightarrow -۵\le x\le ۲۰$

$\Rightarrow D_{fog}=((-\infty,۰)\cup(۱۵,+\infty))\cap[-۵,۲۰]$

$=[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$

پس D_{fog} شامل ۱۰ عدد صحیح ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۱−، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰ است.

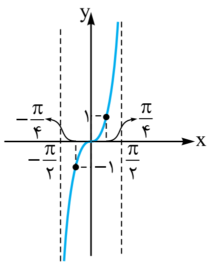
۸۰۳- گزینهٔ ۳

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$

$\Rightarrow D_{fog}=\{-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\mid \tan x\in[-۱,۱]-\{۰\}\}$

پس باید $-۱\le \tan x\le ۱$ باشد و البته $\tan x\ne ۰$ باشد. پس مطابق نمودار این تابع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ داریم:



$-۱\le \tan x\le ۱\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}\le x\le \frac{\pi}{۴}$

$\tan x\ne ۰\Rightarrow x\ne ۰$

پس:

$D_{fog}=\{-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\mid -\frac{\pi}{۴}\le x\le \frac{\pi}{۴}, x\ne ۰\}=[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$

۸۰۴- گزینهٔ ۱

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}, D_h: ۱-x^۲\ge ۰\Rightarrow -۱\le x\le ۱$

$D_f: -۱\le ۲x-۱\le ۱\Rightarrow ۰\le ۲x\le ۲\xrightarrow{\div ۲} ۰\le x\le ۱$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x^۲}{۱+x^۲}\in[۰,۱]\}$

پس باید: $۰\le \frac{x^۲}{۱+x^۲}\le ۱ \xrightarrow[\times(۱+x^۲)]{۱+x^۲>۰} ۰\le x^۲\le ۱+x^۲$

$$\begin{cases}۰\le x^۲ \Rightarrow \text{همواره صحیح}\\ x^۲\le ۱+x^۲ \Rightarrow \text{همواره صحیح}\end{cases}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}$

۸۰۵- گزینهٔ ۲

تابع f دارای ۲ ریشهٔ ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ است؛ یعنی $f(-\frac{۱}{۴})=f(۶)=۰$ است.

پس برای به دست آوردن ریشه‌های تابع fog باید به دنبال اعضایی از دامنهٔ g باشیم که به ازای آن‌ها $g(x)=۶$ و یا $g(x)=-\frac{۱}{۴}$ بشود:

$x-\sqrt{x}=۶\xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲-t=۶\Rightarrow t^۲-t-۶=۰$

$\Rightarrow (t-۳)(t+۲)=۰$

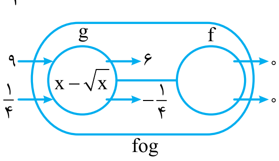
$$\Rightarrow\begin{cases}t=۳\Rightarrow \sqrt{x}=۳\Rightarrow x=۹\\ t=-۲ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲-t=-\frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow t^۲-t+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow (t-\frac{۱}{۲})^۲=۰\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$

پس $fog(۹)=۰$ و $fog(\frac{۱}{۴})=۰$ است و تابع fog دارای ریشه‌های ۹ و $\frac{۱}{۴}$ است که جمع آن‌ها برابر $\frac{۳۷}{۴}$ می‌شود. در شکل روبه‌رو شماتیک تابع fog آورده شده است:



۸۰۶- گزینهٔ ۲

چون تابع f محور xها را در دو نقطهٔ ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند، داریم:

$f(۶)=f(-\frac{۱}{۴})=۰$

تابع fog، زمانی محور xها را قطع می‌کند که $fog(x)=0$ باشد؛ یعنی در نقاطی که به ازای طول آن‌ها (xهایی که) $g(x)=6$ یا $g(x)=-\frac{1}{4}$ باشد:

$$fog(x)=0 \Rightarrow \{x\in D_g \mid f(g(x))=0\}$$

$$\begin{cases} x-\sqrt{x}=6 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} x=9 \\ x-\sqrt{x}=-\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\{\frac{1}{4},9\}$$

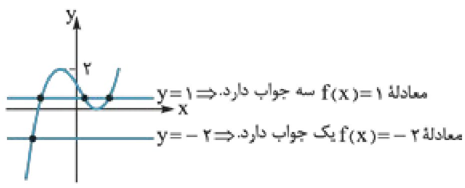
۸۰۷- **گزینه ۴** باید ببینیم معادلهٔ $f(f(x))=0$ چند جواب دارد.

با توجه به شکل، ریشه‌های تابع f، ۱ و ۲- هستند. پس باید دید به ازای چند x، $f(x)=0$ یا $f(x)=-2$ است:

$$f(f(x))=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=1 \Rightarrow f(f(x))=f(1) \Rightarrow f(f(x))=0 \\ f(x)=-2 \Rightarrow f(f(x))=f(-2) \Rightarrow f(f(x))=0 \end{cases}$$

پس باید دید معادلات $f(x)=1$ و $f(x)=-2$ چند جواب دارند. برای پیداکردن تعداد جواب‌های این دو معادله از روش هندسی استفاده می‌کنیم:



پس با توجه به شکل، تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(f(x))=0$ برابر ۴ است.

۸۰۸- **گزینه ۲** ابتدا $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

		-2		1	
x^2+x-2	$+$		$-$		$+$

پس تابع f در بازهٔ $(-2,1)$ زیر محور xها قرار می‌گیرد. پس اگر بخواهیم بدانیم به ازای چه ورودی‌هایی تابع fog زیر محور xها است باید اعضایی از دامنهٔ g را بیابیم که $-2<g(x)<1$ باشد: $A=\{x\in \underbrace{D_g}_{\mathbb{R}} \mid f(g(x))<0\}$

$$\Rightarrow -2<\frac{1}{2}(x-3)<1 \Rightarrow -4<x-3<2 \Rightarrow -1<x<5$$

پس در بازهٔ $(-1,5)$ تابع fog زیر محور xها است.

۸۰۹- **گزینه ۲** با توجه به معادلهٔ $g(f(x))=-2$ باید اعدادی از دامنهٔ تابع g را بیابیم که خروجی ۲- ایجاد می‌کنند:

$$x^2+x-2=-2 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x=0,-1$$

پس باید بررسی کنیم که به ازای چه xهایی $f(x)=0$ یا $f(x)=-1$ است. اما می‌دانیم $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ است. یعنی تابع f همواره یا خروجی صفر دارد و یا ۱-. پس به ازای هر عدد حقیقی تابع f صفر و ۱- ایجاد کرده و به g تحویل می‌دهد و چون g به ازای ۱- و صفر، همواره مقدار ۲- را ایجاد می‌کند پس مجموعهٔ جواب‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.

۸۱۰- **گزینه ۱** اگر فرض کنیم $2x-3=t$ است، داریم:

$$2x-3=t \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

$$f(g(x))=4(x^2-4x+5)$$

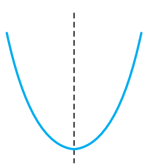
$$\Rightarrow f(t)=4((\frac{t+3}{2})^2-4(\frac{t+3}{2})+5)$$

$$\Rightarrow f(t)=4(\frac{(t+3)^2}{4}-2(t+3)+5)$$

$$=(t+3)^2-8(t+3)+20 \Rightarrow f(t)=t^2-2t+5$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-2x+5$$

تابع f یک سهمی به شکل مقابل است:



$x=1$

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=1$$

پس تابع f در هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $[1,+\infty)$ یا $(-\infty,1]$ یک‌به‌یک است. پس با توجه به گزینه‌ها در بازهٔ $[1,+\infty)$ یک‌به‌یک است.

۸۱۱- **گزینه ۴** وقتی $f^{-1}(\alpha)=\beta$ است، داریم $f(\beta)=\alpha$. پس:

$$f^{-1}(\underbrace{g(a)}_{\alpha})=6 \Rightarrow f(6)=g(a)$$

از طرفی چون $f(x)=2x-5$ است، پس:

$$f(6)=2\times6-5=7 \xrightarrow{f(6)=g(a)} g(a)=7$$

با توجه به تابع g، $(4,7)\in g$ است یعنی $g(4)=7$ است. پس $a=4$ است.

۸۱۲- **گزینه ۲** اگر $f^{-1}(\alpha)=\beta$ باشد، $f(\beta)=\alpha$ است. پس وقتی $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، داریم $f(6)=g(2a)$. چون $(6,3)\in f$ است پس $f(6)=3$ و در نتیجه $g(2a)=3$ خواهد بود. پس:

$$g(2a)=\frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow 2a=6a-3 \Rightarrow -4a=-3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۸۱۳- **گزینه ۲**

$$g^{-1}of^{-1}(a)=8 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(a))=8$$

$$\Rightarrow g(8)=f^{-1}(a)$$

از طرفی $g(8)=\sqrt{40+9}=7$ است، پس:

$$f^{-1}(a)=7 \Rightarrow f(7)=a \xrightarrow{(7,3)\in f} a=3$$

۸۱۴- **گزینه ۳** اگر $(2,-2)\in g^{-1}of$ باشد داریم $g^{-1}(f(2))=-2$ در نتیجه $g(-2)=f(2)$ است. چون دامنهٔ تابع g مجموعهٔ $\{4,k,3\}$ است و با توجه به آن‌که $g(-2)$ موجود است پس $-2\in D_g$ است پس $k=-2$ است. از طرفی دامنهٔ تابع f مجموعهٔ $\{3,5,m\}$ است که با توجه به آن‌که $f(2)$ موجود است پس $2\in D_f$، در نتیجه $m=2$ است. پس:

$$g=\{(4,3),(-2,1),(3,n)\}$$

$$f=\{(3,2),(5,-3),(2,n-1)\}$$

با توجه به تساوی $g(-2)=f(2)$، داریم:

$$\begin{cases} g(-2)=1 \\ f(2)=n-1 \end{cases} \Rightarrow n-1=1 \Rightarrow n=2$$

پس:

$$f^{-1}og(3)=f^{-1}(\underbrace{g(3)}_{n=2})=f^{-1}(2)=3$$

۸۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توابع g^{-1} و $g^{-1}of$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g^{-1}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

$$\begin{cases} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g^{-1}} ۴ \Rightarrow (۱,۴)\in g^{-1}of \\ ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۴ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g^{-1}} ۵ \Rightarrow (۴,۵)\in g^{-1}of \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

اگر فرض کنیم $h=g^{-1}of$، ابتدا دامنهٔ تابع $h-f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{h-f}=D_h\cap D_f=\{۱,۴\}$$
$$h-f=\{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\}=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

پس برد تابع $h-f$ مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است.

۸۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع gof^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$
$$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$$
$$gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

تابع gof^{-1} را اگر h بنامیم باید تابع $\frac{g}{h}$ را حساب کنیم که از آن‌جا که $h\neq ۰$ است، دامنهٔ این تابع $D_g\cap D_h$ است. پس: $D_h\cap D_g=\{۴,۵\}$

$$\frac{g}{h}=\{(۵,\frac{۶}{۳}),(۴,\frac{۲}{۱})\}=\{(۵,۲),(۴,۲)\}$$

۸۱۷- گزینهٔ ۱ اگر $g^{-1}(\alpha)=\beta$ باشد، $g(\beta)=\alpha$ است. پس چون $g^{-1}(f(a))=۳$ است داریم $g(۳)=f(a)$. چون $(۳,-۲)\in g$ است پس $g(۳)=-۲$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} g(۳)=-۲ \\ g(۳)=f(a) \end{cases} \Rightarrow f(a)=-۲$$

a عددی است که تابع f به ازای آن مقداری منفی ایجاد کرده است. با توجه به ضابطهٔ تابع f، پس $a<۰$ است:

$$f(a)=-\sqrt{-a}=-۲ \Rightarrow \sqrt{-a}=۲ \Rightarrow a=-۴$$

۸۱۸- گزینهٔ ۴ $g^{-1}of^{-1}(۸)=g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۸)}_{\alpha})$

ابتدا $f^{-1}(۸)$ را حساب می‌کنیم، اگر $f^{-1}(۸)=\alpha$ باشد، $f(\alpha)=۸$ است:

$$\frac{۲}{۵}\alpha-۴=۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}\alpha=۱۲ \Rightarrow \alpha=۳۰$$

حالا باید $g^{-1}(۳۰)$ را حساب کنیم، اگر $g^{-1}(۳۰)=\beta$ باشد داریم $g(\beta)=۳۰$ پس: $\beta^۳+\beta=۳۰ \Rightarrow \beta=۳$

۸۱۹- گزینهٔ ۴ **راه اول:** اگر فرض کنیم $f^{-1}(۳)=\alpha$ داریم $f(\alpha)=۳$.

از طرفی: $fog(x)=\frac{۲x}{x+۱} \Rightarrow f(g(x))=\frac{۲x}{x+۱}$

با فرض آن‌که $g(\beta)=\alpha$ باشد، داریم:

$$f(\underbrace{g(\beta)}_{\alpha})=\frac{۲\beta}{\beta+۱} \xrightarrow{f(\alpha)=۳} f(\alpha)=\frac{۲\beta}{\beta+۱}=۳$$
$$\Rightarrow ۲\beta=۳\beta+۳ \Rightarrow \beta=-۳$$

در نتیجه $g(-۳)=\alpha$ است، پس $g^{-1}(\alpha)=-۳$ است. از طرفی با توجه به تساوی $g^{-1}(x)=۳x+۹$ داریم:

$$g^{-1}(\alpha)=۳\alpha+۹ \xrightarrow{g^{-1}(\alpha)=-۳} ۳\alpha+۹=-۳$$
$$\Rightarrow ۳\alpha=-۱۲ \Rightarrow \alpha=-۴ \Rightarrow f^{-1}(۳)=\alpha=-۴$$

راه دوم: در حالت کلی داریم $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$؛ پس ابتدا معکوس تابع $y=\frac{۲x}{x+۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲x}{x+۱} \Rightarrow yx+y=۲x \Rightarrow ۲x-yx=y$$
$$\Rightarrow x(۲-y)=y \Rightarrow x=\frac{y}{۲-y}$$
$$\Rightarrow (fog)^{-1}(x)=\frac{x}{۲-x}$$

پس: $g^{-1}of^{-1}(x)=\frac{x}{۲-x} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{x}{۲-x}$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۳))=-۳ \Rightarrow ۳f^{-1}(۳)+۹=-۳ \Rightarrow f^{-1}(۳)=-۴$$

۸۲۰- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ هر یک از توابع خطی f و g را می‌نویسیم:

$\begin{cases} (۳,۰)\in f \\ (۰,۲)\in f \end{cases} \Rightarrow$ شیب $f=\frac{۲-۰}{۰-۳}=-\frac{۲}{۳}$

$$\xrightarrow{(۰,۲)\in f} f(x)=-\frac{۲}{۳}x+۲$$

$\begin{cases} (۰,۱)\in g \\ (-۲,۰)\in g \end{cases} \Rightarrow$ شیب $g=\frac{۱-۰}{۰-(-۲)}=\frac{۱}{۲}$

$$\xrightarrow{(۰,۱)\in g} g(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$$
$$\Rightarrow g(۲)=\frac{۱}{۲}\times ۲+۱=۲ \Rightarrow f^{-1}(g(۲))=f^{-1}(۲)$$

اگر $f^{-1}(۲)=\alpha$ باشد $f(\alpha)=۲$ است، پس:

$$f(\alpha)=-\frac{۲}{۳}\alpha+۲=۲ \Rightarrow -\frac{۲}{۳}\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=۰ \Rightarrow f^{-1}(۲)=۰$$

۸۲۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $fof^{-1}(x)=x$ است به طوری که $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}$ و $f^{-1}of(x)=x$ است به طوری که $D_{f^{-1}of}=D_f$.

پس توابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ هر دو همانی هستند اما دامنهٔ آن‌ها الزاماً یکسان نیست:

$$\begin{cases} D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f \\ D_{f^{-1}of}=D_f \end{cases}$$

پس نمودار این توابع در بازه‌هایی که D_f و R_f اشتراک داشته باشند بر هم منطبق است.

$$f(x)=۲-\sqrt{x+۱} \Rightarrow \begin{matrix} D_f=[-۱,+\infty) \\ R_f=(-\infty,۲] \end{matrix}$$
$$\Rightarrow D_f\cap R_f=[-۱,۲]$$

۸۲۲- گزینه ۱ توابـع fof^{-1} و $f^{-1}of$ توابعی همانی هســتند که دامنهٔ fof^{-1} برابر $R_f = D_{f^{-1}}$ است. ولی دامنهٔ $f^{-1}of$ برابر D_f است.

پس ابتدا برد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l} f(x)=۲x+۱ \\ D_f=[-۱,۴] \end{array} \xrightarrow{\text{چون f خطی است}} R_f=[-۱,۹]$$

پس:

$$D_{fof^{-۱}} = R_f = [-۱,۹]$$
$$D_{f^{-۱}of} = D_f = [-۱,۴]$$

از طرفی می‌دانیم دامنهٔ تابع $h \pm g$ برابر $D_h \cap D_g$ است. پس:

$$D_{h-g} = D_h \cap D_g = [-۱,۴] \cap [-۱,۹] = [-۱,۴]$$

۸۲۳- گزینه ۲ می‌دانیم $fof^{-۱}(x)=x$ است که دامنهٔ آن $D_{f^{-۱}}$ است. از طرفی می‌دانیم $D_{f^{-۱}} = R_f$ است. پس $fof^{-۱}$ یک تابع همانی است که دامنهٔ آن همان برد تابع f است.

چون $\sqrt{x^۲+۱} > |x|$ است پس تابع f مقادیر منفی نمی‌تواند ایجاد کند پس ۱، ۳ و ۴ نادرست‌اند. در نتیجه ۲ صحیح است.

برای محاسبهٔ برد تابع f می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم. (که البته در این سؤال لازم به محاسبهٔ برد با توجه به گزینه‌ها نبود!)

$$y = x+\sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow \underbrace{y-x=\sqrt{x^۲+۱}}_{(۱)}$$

$$\xrightarrow[(*)]{y>x} (y-x)^۲ = x^۲+۱$$

$$\Rightarrow y^۲-۲xy+\cancel{x^۲} = \cancel{x^۲}+۱ \Rightarrow ۲xy = y^۲-۱ \Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{۲y}$$

از طرفی طبق شرط (*) باید $y > x$ باشد در غیر این صورت دو طرف رابطهٔ (۱) مختلف‌العلامت خواهند بود. پس باید:

$$\underset{\frac{y^۲-۱}{۲y}}{\underset{\downarrow}{x}} < y \Rightarrow \frac{y^۲-۱}{۲y} < y \Rightarrow \frac{y^۲-۱}{۲y} - y < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{y^۲-۱-۲y^۲}{۲y} < ۰ \Rightarrow \frac{\overset{\text{منفی}}{\overset{\uparrow}{-y^۲-۱}}}{۲y} < ۰$$

$$\xrightarrow{-y^۲-۱<۰} y>۰$$

پس برد تابع f بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

۸۲۴- گزینه ۲ **راه اول:** اگـر توابـع f و g معکوس یکدیگر باشـند به ازای هـر $x \in D_g$، داریم $fog(x)=x$ و بـه ازای هر $x \in D_f$، داریم $gof(x)=x$. پس معکوس تابع f را به دسـت می‌آوریم و با تابع g برابر قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{۳x+۲}{x-۱} \Rightarrow ۳x+۲ = xy-y$$

$$\Rightarrow ۳x-xy = -y-۲ \Rightarrow x(۳-y) = -y-۲$$

$$\Rightarrow x = \frac{-y-۲}{۳-y} = \frac{y+۲}{y-۳}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۲}{x-۳} \Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(x) = \dfrac{x+۲}{x-۳} \\ g(x) = \dfrac{x+۲}{x+a} \end{cases} \Rightarrow a=-۳$$

راه دوم: تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{۳\dfrac{x+۲}{x+a}+۲}{\dfrac{x+۲}{x+a}-۱} = \frac{\dfrac{۳x+۶+۲x+۲a}{x+a}}{\dfrac{x+۲-x-a}{x+a}}$$

$$= \frac{۵x+۶+۲a}{۲-a} \xrightarrow{fog(x)=x} \frac{۵x+۶+۲a}{۲-a} = x$$

$$\Rightarrow \boxed{۵}x+\overset{\circ}{\cancel{۶+۲a}} = \boxed{(۲-a)}x \Rightarrow \begin{cases} ۲-a=۵ \\ ۶+۲a=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-۳$$

۸۲۵- گزینه ۱ در تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (که $ad \neq bc$) اگر $a=-d$ باشد، $f^{-۱}(x)=f(x)$ است. از طرفی به ازای هر $x \in D_f$ داریم $f^{-۱}of(x)=x$. در تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۶}{۴x-۳}$ چون $a=-d$ است پس $f(x)=f^{-۱}(x)$ است و در نتیجه $fof(x)$ برابر $f^{-۱}of(x)$ است:

$$\begin{cases} fof(x)=f^{-۱}of(x)=x \\ f(x)=f^{-۱}(x) \Rightarrow f^{-۱}(۳x)=f(۳x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow fof(x)+f^{-۱}(۳x) = x+f(۳x) \Rightarrow x+f(۳x)=x$$

$$\Rightarrow f(۳x)=۰ \Rightarrow f(۳x)=\frac{۹x+۶}{۱۲x-۳}=۰ \Rightarrow ۹x+۶=۰$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

۸۲۶- گزینه ۲ می‌دانیم $(fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$. پس ابتدا تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲-g^۳(x)}{g^۳(x)+۳} = \frac{۲-(۲x-۱)}{(۲x-۱)+۳}$$

$$=\frac{-۲x+۳}{۲x+۲} \Rightarrow fog(x)=\frac{-۲x+۳}{۲x+۲}$$

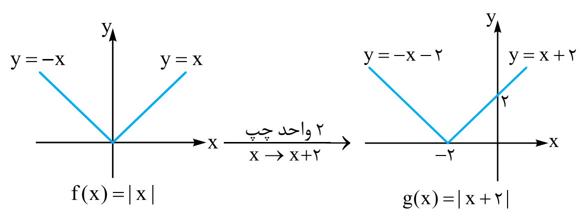
حال معکوس تابع فوق را که همان تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ است، به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{-۲x+۳}{۲x+۲} \Rightarrow -۲x+۳ = ۲xy+۲y$$

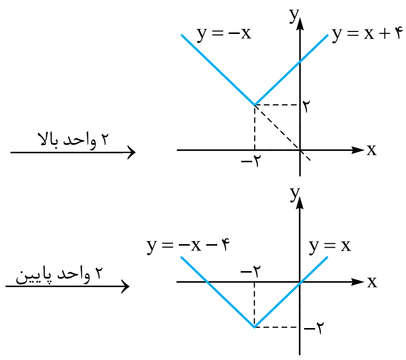
$$\Rightarrow ۲xy+۲x = ۳-۲y \Rightarrow x(۲y+۲)=۳-۲y \Rightarrow x=\frac{۳-۲y}{۲y+۲}$$

$$\Rightarrow (fog)^{-۱}(x) = g^{-۱}of^{-۱}(x) = \frac{۳-۲x}{۲x+۲}$$

۸۲۷- گزینه ۲

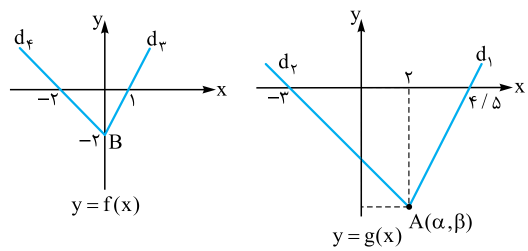


با توجه به شکل توابع f و g، اگر تابع g را ۲ واحد پایین و یا ۲ واحد بالا ببریم بر یکی از شاخه‌های تابع f منطبق خواهد شد.



پس $k = \pm ۲$ است.

۸۲۸- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودارهای f و g می‌توان فهمید تابع g از انتقال تابع f به سمت راست و به سمت پایین ایجاد شده است. چون عمل انتقال با عدم تغییر در شیب‌های خطوط همراه است، پس شیب خط d_1 با شیب خط d_3 و شیب خط d_2 با شیب خط d_4 برابر است. پس مختصات A به صورتی که در ستون بعدی آمده به دست می‌آید:



d_3 شیب $= ۲ \xrightarrow{m_{d_3}=m_{d_1}} \frac{\beta-۰}{\alpha-۴/۵}=۲$

d_4 شیب $= -۱ \xrightarrow{m_{d_4}=m_{d_2}} \frac{\beta-۰}{\alpha-(-۳)}=-۱$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=۲\alpha-۹\\ \beta=-\alpha-۳\end{cases} \Rightarrow ۲\alpha-۹=-\alpha-۳$$

$$\Rightarrow ۳\alpha=۶ \Rightarrow \alpha=۲ \Rightarrow \beta=-۵$$

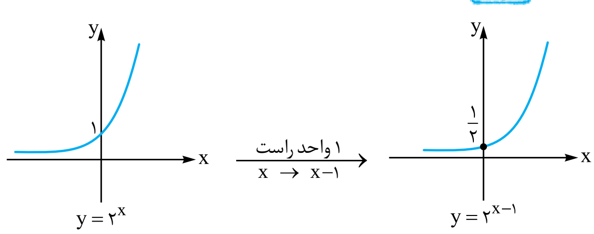
پس مختصات A به صورت $(۲,-۵)$ است. اما نقطهٔ A، نقطهٔ متناظر B روی نمودار تابع f بوده و مختصات B به صورت $(۰,-۲)$ است. پس از انتقال ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین B به A تبدیل می‌شود.

$$B(۰,-۲) \xrightarrow[x \to x-۲]{\text{۲ واحد راست}} (۲,-۲)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} A(۲,-۵)$$

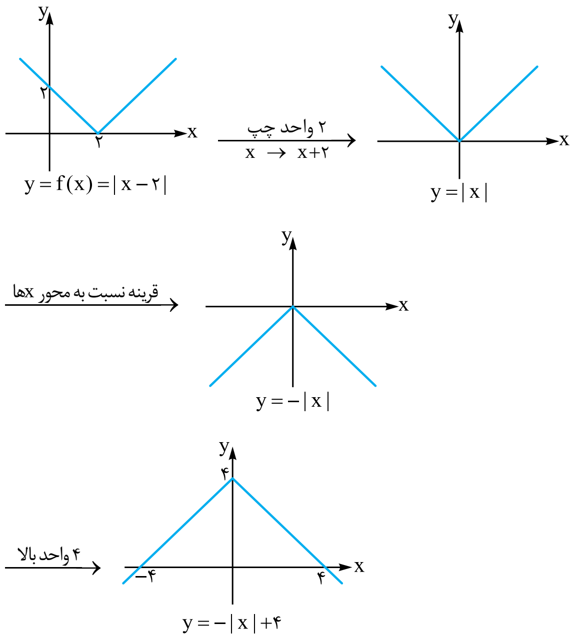
پس $a=-۲$ و $b=-۳$ است و $a+b=-۵$ است.

۸۲۹- گزینهٔ ۱ نمودار تابع $y=۲^{x-۱}$ را رسم می‌کنیم:

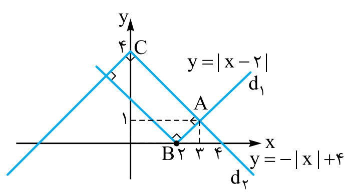


پس با توجه به شکل، اگر حداقل $\frac{۱}{۲}$ واحد نمودار تابع $y=۲^{x-۱}$ را پایین بیاوریم تابع از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند. پس حداکثر مقدار a برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.

۸۳۰- گزینهٔ ۲ اگر $f(x)=|x-۲|$ باشد، مراحل زیر را طی می‌کنیم:



حال نمودار ایجادشده را با نمودار f در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به شیب خطوط مختصات A برابر $(۳,۱)$ است. البته می‌توان با تقاطع دو خط d_1 و d_2 نیز مختصات این نقطه را به دست آورد:

$$x>۰ \Rightarrow |x-۲|=x-۲\,,\ -|x|+۴=-x+۴$$

$$\Rightarrow x-۲=-x+۴ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۱$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از C برابر طول مستطیل و فاصلهٔ A از B برابر عرض آن است.

$$\begin{matrix}A(۳,۱)\\ B(۲,۰)\end{matrix} \Rightarrow AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲} \quad (۱)$$

$$\begin{matrix}A(۳,۱)\\ C(۰,۴)\end{matrix} \Rightarrow AC=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} S=\sqrt{۲}\times ۳\sqrt{۲}=۶$$

۸۳۱- گزینهٔ ۲ وقتی نمودار تابع $f(x)=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را ۴ واحد به سمت چپ می‌بریم تابع $y=f(x+۴)=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲$ ایجاد می‌شود. (به جای x قرار داده‌ایم $x+۴$) حال اگر این تابع را ۱ واحد بالا ببریم تابع زیر ایجاد می‌شود:

$$y=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲+۱=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$$

حال محل تقاطع توابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ و $y=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$ را به دست می‌آوریم:

$$|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱=|\frac{۱}{۲}x|-۲$$

بهتر است معادله را حل نکنیم و در این‌جا از گزینه‌ها کمک بگیریم. گزینه‌ای که تساوی را برقرار می‌کند پاسخ صحیح است:

(۱) $$x=-۳/۵ \Rightarrow \begin{cases}|-\frac{۷}{۴}+۲|-۱=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴}\\ |-\frac{۷}{۴}|-۲=\frac{۷}{۴}-۲=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

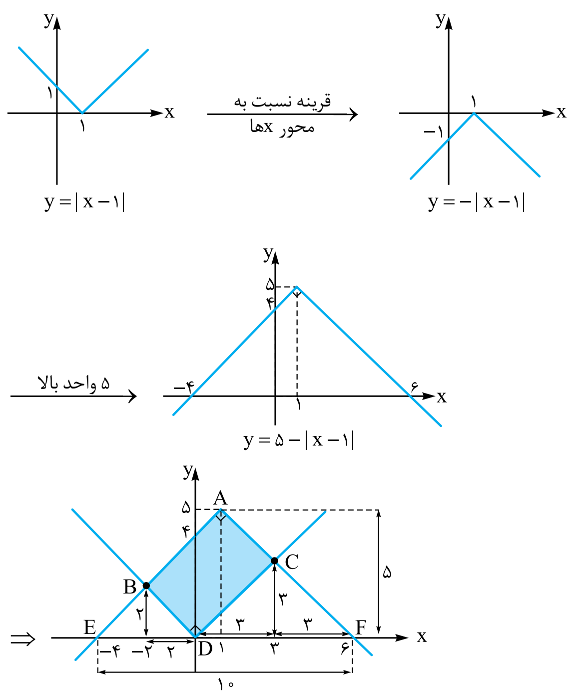
پس $x=-۳/۵$ جواب معادله نیست.

(۲) $$x=-۳ \Rightarrow \begin{cases}|-\frac{۳}{۲}+۲|-۱=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}\\ |-\frac{۳}{۲}|-۲=\frac{۳}{۲}-۲=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

پس $x=-۳$ جواب معادله است.

به همین ترتیب $x=-۲/۵$ و $x=-۲$ را نیز می‌توان بررسی کرد که خواهیم دید تساوی را برقرار نمی‌کنند.

۸۳۲- گزینه ۴ نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که قدرمطلق شیب‌ها برابر ۱ است، پس طول قاعده و ارتفاع مثلث‌های EDB و DFC مطابق شکل قابل محاسبه است؛ پس:

$$S_{ABDC}=S_{AFE}-S_{EDB}-S_{DFC}$$
$$=\frac{۱۰\times۵}{۲}-\frac{۴\times۲}{۲}-\frac{۶\times۳}{۲}=۱۲$$

۸۳۳- گزینه ۳ اگر تابع $f(x)=\log x$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا ببریم تابع $g(x)=\log(x-۱)+۱$ ایجاد می‌شود.

در نتیجه از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ نقطهٔ تقاطع دو منحنی به دست می‌آید:

$$\log(x-۱)+۱=\log x \Rightarrow \log x-\log(x-۱)=۱$$
$$\Rightarrow \log\frac{x}{x-۱}=۱ \Rightarrow \frac{x}{x-۱}=۱۰ \Rightarrow ۱۰x-۱۰=x$$
$$\Rightarrow ۹x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۹}$$

تذکر دقت کنید $\frac{۱۰}{۹}$ در دامنهٔ هر دو تابع f و g قرار دارد.

۸۳۴- گزینه ۱ وقتی تابع را ۳ واحد به سمت راست می‌بریم یعنی به جای x قرار می‌دهیم $x-۳$:

$$f(x)=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵$$

و وقتی تابع f را دو واحد به سمت پایین می‌بریم ضابطهٔ تابع جدید به صورت $g(x)=f(x)-۲$ خواهد بود.

$$g(x)=f(x)-۲=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵-۲$$
$$\Rightarrow g(x)=-(x^۲-۶x+۹)+(۲x-۶)+۳$$
$$\Rightarrow g(x)=-x^۲+۸x-۱۲$$

در بازه‌ای تابع g بالای نیمساز ربع اول است که $g(x)>x$ باشد:

$$-x^۲+۸x-۱۲>x \Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۴)<۰ \Rightarrow ۳<x<۴$$

۸۳۵- گزینه ۱ اگر به جای x قرار دهیم $x+۲$، تابع $y=x^۲-x-۳$ دو واحد به سمت چپ می‌رود. اگر اسم این تابع را f بنامیم داریم:

$$f(x)=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳=x^۲+۳x-۱$$

اگر تابع f را ۹ واحد پایین بیاوریم تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-۹$ داریم:

$$g(x)=f(x)-۹=x^۲+۳x-۱-۹=x^۲+۳x-۱۰$$

حالا باید دید به ازای چه مقادیری از x، $g(x)<۰$ است:

$$x^۲+۳x-۱۰<۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۲)<۰ \Rightarrow x\in(-۵,۲)$$

۸۳۶- گزینه ۳ قرینهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نسبت به محور yها تابع $g(x)=f(-x)=\sqrt{-x}$ (به جای x قرار داده‌ایم $-x$) است.

اگر تابع g را ۲ واحد به سمت راست ببریم. تابع $g(x-۲)=\sqrt{-(x-۲)}$ (به جای x قرار داده‌ایم $x-۲$) ایجاد می‌شود. پس باید محل تلاقی توابع $y=\sqrt{۲-x}$ و $y=x$ را به دست آوریم:

$$\sqrt{۲-x}=x \xrightarrow[۰\le x\le ۲]{\text{توان ۲}} x^۲=۲-x \Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۲ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$ (سمت راست معادله را منفی می‌کند.)

۸۳۷- گزینه ۲ اگر تابع $y=\sqrt{x}$ را سه واحد به سمت بالا ببریم تابع $y=\sqrt{x}+۳$ ایجاد می‌شود و اگر a واحد به سمت چپ ببریم تابع $y=\sqrt{x+a}$ ایجاد می‌شود. برای آن‌که دو منحنی ایجادشده برخورد نداشته باشند باید معادلهٔ مقابل جواب نداشته باشد: $\sqrt{x}+۳=\sqrt{x+a}$

دو طرف معادلهٔ فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

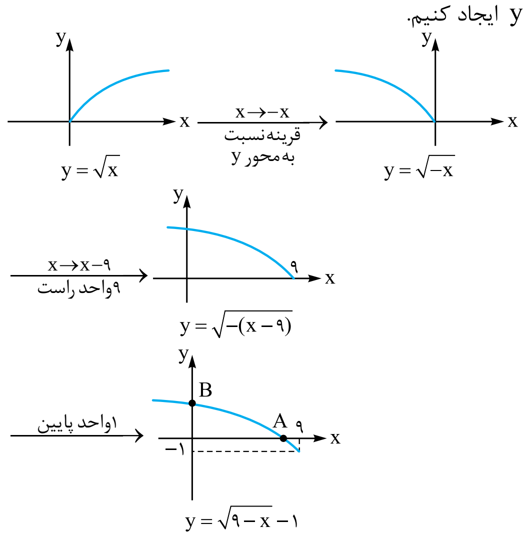
$$x+۹+۶\sqrt{x}=x+a \Rightarrow ۶\sqrt{x}=a-۹$$

برای آن‌که معادلهٔ فوق جواب نداشته باشد کافی است $a<۹$ باشد تا سمت راست تساوی عددی منفی باشد: $a-۹<۰ \Rightarrow a<۹$

از طرفی چون $a>۰$ است پس $۰<a<۹$ است.

(دقت کنید که اگر $a\ge ۹$ باشد معادله جواب دارد.)

۸۳۸- گزینهٔ ۴ سعی می‌کنیم به کمک انتقال این تابع را از روی تابع $y=\sqrt{x}$ ایجاد کنیم.



حال محل‌های برخورد این تابع را با محورهای مختصات مشخص می‌کنیم:

$A: y=۰ \Rightarrow \sqrt{۹-x}-۱=۰ \Rightarrow \sqrt{۹-x}=۱$

$\Rightarrow x=۸ \quad (۸,۰)$

$B: x=۰ \Rightarrow y=\sqrt{۹}-۱=۳-۱=۲ \Rightarrow y=۲ \quad (۰,۲)$

حال فاصلهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم:

$AB=\sqrt{۸^۲+۲^۲}=\sqrt{۶۴+۴}=\underbrace{\sqrt{۶۸}}_{۴\times ۱۷}=۲\sqrt{۱۷}$

۸۳۹- گزینهٔ ۲ اگر تابعی را به سمت راست یا چپ ببریم برد آن بدون تغییر است. پس برد تابع $y=f(x)$ با برد تابع $y=f(x+۳)$ یکسان است. برای رسم تابع $g(x)=۲-f(x+۳)$، عرض نقاط تابع $y=f(x+۳)$ را ابتدا قرینه و سپس ۲ واحد زیاد می‌کنیم:

$-۱\le f(x+۳)\le ۳ \xrightarrow{\times(-۱)} -۳\le -f(x+۳)\le ۱$

$\xrightarrow{+۲} -۱\le ۲-f(x+۳)\le ۳ \Rightarrow R_g=[-۱,۳]$

۸۴۰- گزینهٔ ۲ اگر $۰<a<۱$ باشد، تابع $y=f(ax)$، از یک انبساط افقی در راستای محور xها ایجاد می‌شود. پس گزینه‌ای جواب است که ضریب x در آن بین صفر و یک باشد.

در نتیجه ۲ صحیح است. $f(x)=\sin x \Rightarrow f(\frac{x}{۲})=\sin\frac{x}{۲}$

۸۴۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $b>۱$ باشد، نمودار تابع $y=f(bx)$ از انقباض افقی تابع f در راستای محور xها ایجاد می‌شود.

اگر $a>۱$ باشد، نمودار تابع $y=af(x)$ از انبساط عمودی تابع f در راستای محور yها ایجاد می‌شود و تأثیری بر انقباض افقی تابع f ندارد.

پس تابع $y=af(bx)$، اگر $b>۱$ باشد از انقباض افقی تابع f در راستای محور xها و بسته به آن‌که $a>۱$ یا $۰<a<۱$ باشد، به ترتیب از انبساط یا انقباض عمودی در راستای محور yها ایجاد می‌شود.

۸۴۲- گزینهٔ ۴ اگر در تابع درجه اول $f(x)=ax+b$، $f(kx)=kf(x)$ باشد، آن‌گاه f مبدأگذر است؛ یعنی عرض از مبدأ آن صفر است.

$$\begin{cases} f(kx)=akx+b \\ kf(x)=kax+kb \end{cases} \Rightarrow kb=b \Rightarrow kb-b=۰$$

$\Rightarrow b(k-۱)=۰$

اگر $k\ne ۱$ باشد باید $b=۰$ باشد.

پس ۳ نادرست و ۴ صحیح است:

$f(x)=(x-۱)^۲-(x+۱)^۲=-۴x$

$\Rightarrow$ f تابع خطی مبدأ گذر $\Rightarrow f(kx)=kf(x)$

۱ نادرست است، زیرا:
$$\begin{cases} f(kx)=|۳kx| \\ kf(x)=k|۳x| \end{cases}$$

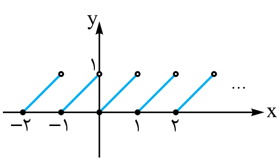
در نتیجه اگر $k<۰$ باشد تساوی $kf(x)$ و $f(kx)$ امکان ندارد.

۲ نادرست است:

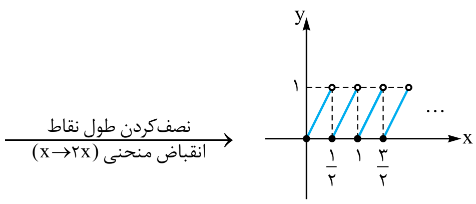
$$\begin{cases} f(kx)=[۲kx] \\ kf(x)=k[۲x] \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً } k=۲} \begin{cases} f(۲x)=[۴x] \\ ۲f(x)=۲[۲x] \end{cases}$$

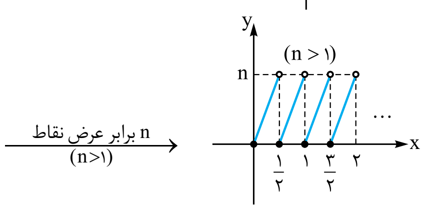
$$\xrightarrow{x=۱/۳} \begin{cases} [۵/۲]=۵ \\ ۲[۲/۶]=۴ \end{cases}$$

۸۴۳- گزینهٔ ۴ می‌دانیم نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ به صورت مقابل است:

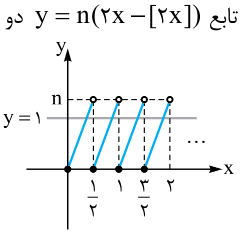


حال نمودار تابع $y=n(۲x-[۲x])$ را رسم می‌کنیم:





با توجه به شکل پایین در هر بازهٔ $(k,k+۱)$ تابع $y=n(۲x-[۲x])$ دو نقطهٔ برخورد با خط $y=۱$ دارد. پس در بازهٔ $(۰,۵)$، خط $y=۱$، ده نقطهٔ برخورد با این تابع دارد: (دقت کنید که وقتی اعضای دامنه نصف می‌شوند تعداد نقاط برخورد این تابع ۲ برابر شده است.)



۸۴۴- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=3-f(2x+2)$ از روی نمودار تابع f مراحل زیر را طی می‌کنیم:

① کاهش ۲ واحدی طول نقاط (انتقال ۲ واحد به چپ)

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد چپ}} y=f(x+2)$$

② نصف‌کردن طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل (انقباض افقی در راستای محور xها)

$$y=f(x+2)\xrightarrow[x\to 2x]{\text{انقباض افقی}} y=f(2x+2)$$

③ قرینه‌کردن عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل (قرینه نسبت به محور xها)

$$y=f(2x+2)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-f(2x+2)$$

④ افزایش ۳ واحدی عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل (انتقال ۳ واحد به بالا)

$$y=-f(2x+2)\xrightarrow{\text{۳ واحد بالا}} y=3-f(2x+2)$$

پس نقطهٔ A مطابق مراحل بالا به نقطهٔ B تبدیل می‌شود.

$$A(2,3)\xrightarrow{\text{کاهش ۲ واحدی طول}}(0,3)$$

$$\xrightarrow{\text{نصف شدن طول}}(0,3)\xrightarrow{\text{قرینه‌شدن عرض}}(0,-3)$$

$$\xrightarrow{\text{افزایش ۳ واحدی عرض}}B(0,0)$$

۸۴۵- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، رأس سهمی f نقطهٔ $(1,4)$ است. باید ببینیم با توجه به مراحل ایجاد تابع جدید، این نقطه با کدام نقطه متناظر است. برای رسم تابع $y=1-2f(2+3x)$ از روی تابع f باید مراحل زیر را طی کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow[(x\to x+2)\ \text{۲ واحد چپ}]{\text{کاهش ۲ واحدی طول نقاط}} y=f(x+2)$$

$$\xrightarrow[(x\to 3x)\ \text{انقباض افقی}]{\frac{1}{3}\ \text{شدن طول نقاط}} y=f(3x+2)$$

$$\xrightarrow{(-2)\ \text{برابر شدن عرض نقاط}} y=-2f(3x+2)$$

$$\xrightarrow{\text{افزایش ۱ واحدی عرض نقاط}} y=1-2f(3x+2)$$

پس رأس سهمی تابع f به نقطهٔ A تبدیل می‌شود:

$$(1,4)\xrightarrow{\text{کاهش ۲ واحدی طول}}(-1,4)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\ \text{شدن طول}}\left(-\frac{1}{3},4\right)\xrightarrow{-2\ \text{برابر شدن عرض}}\left(-\frac{1}{3},-8\right)$$

$$\xrightarrow{\text{افزایش ۱ واحدی عرض}}\left(-\frac{1}{3},-7\right)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{3}\\ \beta=-7\end{cases}\Rightarrow \alpha\beta=\frac{7}{3}$$

۸۴۶- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع $y=3-f(2-x)$ از روی تابع $g(x)=f(x-1)$ باید مراحل زیر را طی کنیم:

① کاهش ۳ واحدی طول نقاط تابع g (انتقال ۳ واحد به چپ)

$$y=f(x-1)\xrightarrow[x\to x+3]{\text{۳ واحد چپ}} y=f((x+3)-1)=f(x+2)$$

② قرینه‌کردن طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل (قرینه نسبت به محور yها)

$$y=f(x+2)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=f(-x+2)$$

③ قرینه‌کردن عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل (قرینه نسبت به محور xها)

$$y=f(-x+2)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-f(-x+2)$$

④ افزایش ۳ واحدی عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل (انتقال ۳ واحد به سمت بالا)

$$y=-f(-x+2)\xrightarrow{\text{۳ واحد بالا}} y=3-f(2-x)$$

پس یک نقطه مانند $A(2,-1)$ طبق مراحل بالا به نقطهٔ B تبدیل می‌شود.

$$A(2,-1)\xrightarrow[\text{کاهش ۳ واحدی طول}]{(1)}(-1,-1)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه‌شدن طول}]{(2)}(1,-1)\xrightarrow[\text{قرینه‌شدن عرض}]{(3)}(1,1)$$

$$\xrightarrow[\text{افزایش ۳ واحدی عرض}]{(4)}B(1,4)$$

۸۴۷- گزینهٔ ۱ برای رسم تابع $y=2+4f(2x-1)$ از روی تابع $y=2f(2-x)$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

① طول نقاط تابع $y=2f(2-x)$ را قرینه می‌کنیم (به جای x قرار می‌دهیم $-x$)

$$y=2f(2-x)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=2f(2-(-x))$$

$$=2f(2+x)$$

② طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل را ۳ واحد زیاد می‌کنیم (به جای x قرار می‌دهیم $x-3$)

$$y=2f(x+2)\xrightarrow[x\to x-3]{\text{۳ واحد راست}} y=2f((x-3)+2)=2f(x-1)$$

③ طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل را نصف می‌کنیم (به جای x قرار می‌دهیم 2x)

$$y=2f(x-1)\xrightarrow[(x\to 2x)\ \text{محور xها}]{\text{انقباض افقی در راستای}} y=2f(2x-1)$$

④ عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل را ۲ برابر می‌کنیم. $y=2f(2x-1)$

$$\xrightarrow{\text{انبساط عمودی در راستای محور yها}} y=2\times 2f(2x-1)=4f(2x-1)$$

⑤ عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل را ۲ واحد زیاد می‌کنیم.

$$y=4f(2x-1)\xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y=2+4f(2x-1)$$

پس در مورد نقطهٔ A داریم:

$$A(3,0)\xrightarrow{\text{قرینه‌شدن طول}}(-3,0)\xrightarrow[\text{۳ واحدی طول}]{\text{زیادشدن}}$$

$$(0,0)\xrightarrow{\text{نصف‌شدن طول}}(0,0)\xrightarrow{\text{۲ برابر شدن عرض}}(0,0)$$

$$\xrightarrow{\text{زیادشدن ۲ واحدی عرض}}(0,2)$$

۸۴۸- گزینهٔ ۱ برای رسم تابع f از روی تابع $y=\cos x$ باید مراحل زیر را طی کنیم: $f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

① طول نقاط تابع $y=\cos x$ نصف می‌شود (انقباض در راستای محور xها)

$$y=\cos x\xrightarrow[x\to 2x]{\text{طول نقاط نصف}} y=\cos 2x$$

② یک واحد به عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود (۱ واحد به سمت بالا)

$$y=\cos 2x\xrightarrow{\text{۱ واحد بالا}} y=1+\cos 2x$$

③ عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل نصف می‌شود (انقباض در راستای محور yها)

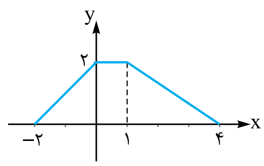
$$y=1+\cos 2x\xrightarrow{\text{عرض نقاط نصف}} y=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

پس مطابق مراحل بالا عملیات زیر روی تابع f انجام می‌شود.

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{انقباض در راستای محور xها}} y=f(2x)$$

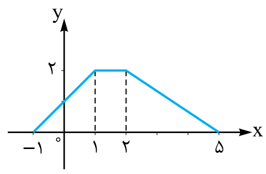
$$\xrightarrow{\text{۱ واحد بالا}} y=f(2x)+1\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{انقباض در راستای}} y=\frac{f(2x)+1}{2}$$

۸۴۹- گزینه ۱ نمودار تابع $y=3f(2x-1)$ را مطابق مراحل زیر رسم می‌کنیم. در هر مرحله تغییر مساحت را نیز بررسی می‌کنیم:



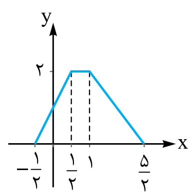
$y=f(x)$

۱ واحد راست $\xrightarrow{x\to x-1}$ (مساحت بدون تغییر)



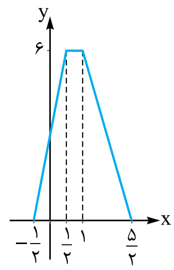
$y=f(x-1)$

نصف شدن طول نقاط $\xrightarrow{x\to 2x}$ (نصف‌شدن مساحت)



$y=f(2x-1)$

۳ برابرشدن عرض نقاط $\longrightarrow$ (۳ برابرشدن مساحت)



$y=3f(2x-1)$

پس با توجه به مراحل فوق مساحت اولیه $\frac{3}{2}$ برابر می‌شود:

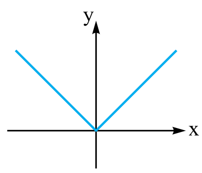
$$S_{\text{اولیه}}=\frac{(6+1)\times 2}{2}=7 \Rightarrow S_{\text{جدید}}=\frac{3}{2}\times 7=\frac{21}{2}=10/5$$

۸۵۰- گزینه ۳ ضابطهٔ تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=\sqrt{4f(x)+1}=\sqrt{4x^2+4x+1}$$

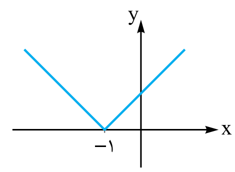
$$=\sqrt{(2x+1)^2} \Rightarrow gof(x)=|2x+1|$$

حال نمودار تابع gof را رسم می‌کنیم:



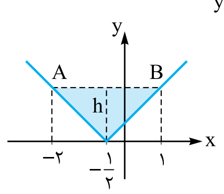
$y=|x|$

۱ واحد چپ $\xrightarrow{x\to x+1}$



$y=|x+1|$

طول نقاط نصف می‌شوند $\xrightarrow{x\to 2x}$

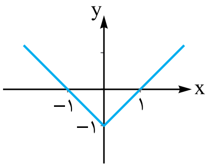


محل‌های برخورد تابع $y=|2x+1|$ را با $y=3$ تعیین می‌کنیم:

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

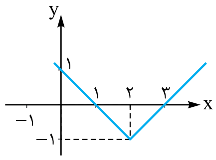
$$S=\frac{AB\times h}{2}=\frac{3\times 3}{2}=4/5$$

۸۵۱- گزینه ۲ بـرای رسـم تابـع $y=-f(2x-2)+1$ از روی تابع $y=f(x)$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.



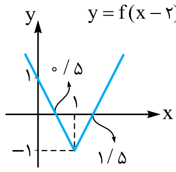
$y=f(x)=|x|-1$

۲ واحد راست $\xrightarrow{x\to x-2}$



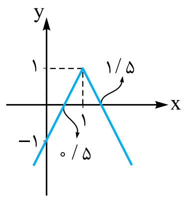
$y=f(x-2)=|x-2|-1$

نصف‌کردن طول نقاط $\xrightarrow{x\to 2x}$



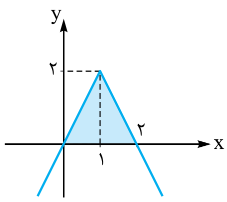
$y=f(2x-2)=|2x-2|-1$

قرینه نسبت به محور xها $\longrightarrow$



$y=-f(2x-2)=-|2x-2|+1$

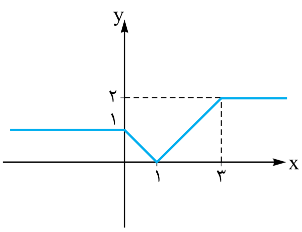
۱ واحد بالا $\longrightarrow$



$y=1-f(2x-2)=-2|x-1|+2$

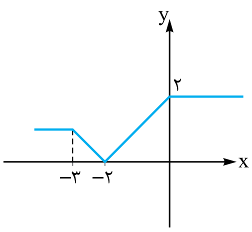
$$\Rightarrow S=\frac{2\times 2}{2}=2$$

۸۵۲- گزینه ۳

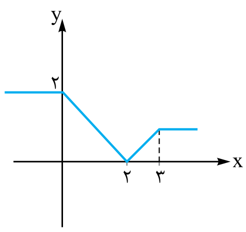


$y=f(x-1)$

۳ واحد سمت چپ $\xrightarrow{x\to x+3}$



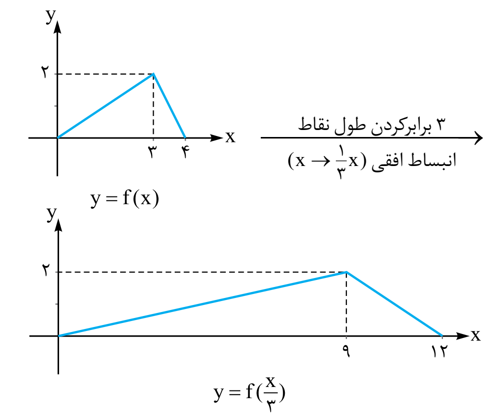
قرینه نسبت به محور yها $\xrightarrow{x\to -x}$



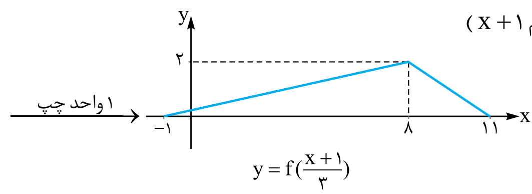
$y=f(-x+2)$

۸۵۳- گزینهٔ ۱ مراحل زیر را به ترتیب طی می‌کنیم:

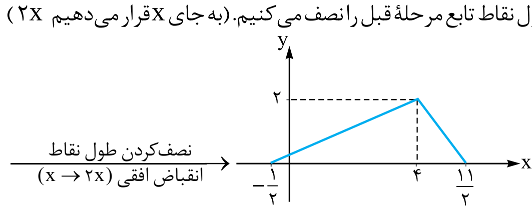
① طول نقاط تابع f را ۳ برابر می‌کنیم. (به جای x قرار می‌دهیم $\frac{x}{3}$)



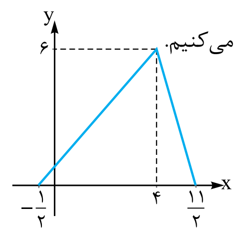
② طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل را ۱ واحد کم می‌کنیم. (به جای x قرار می‌دهیم $x+1$)



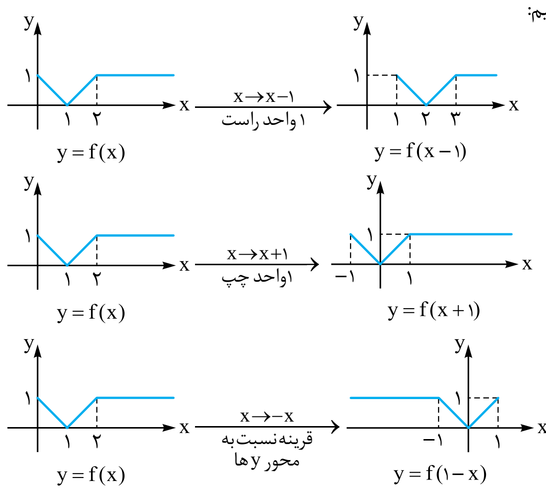
③ طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل را نصف می‌کنیم. (به جای x قرار می‌دهیم $2x$)



④ عرض نقاطع تابع مرحلهٔ قبل را ۳ برابر می‌کنیم.

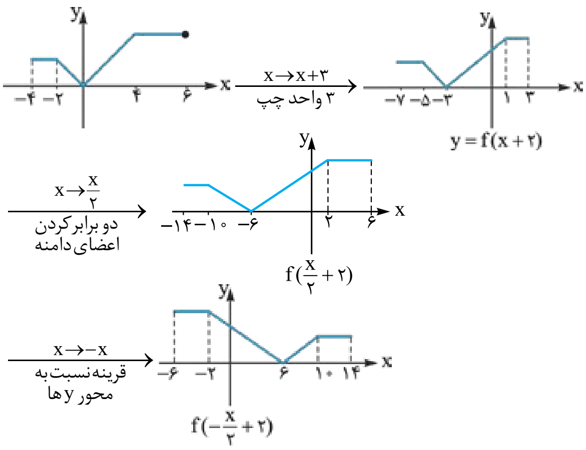


۸۵۴- گزینهٔ ۱ نمودار توابع $y=f(x-1)$ و $y=f(1-x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل‌ها، دامنهٔ توابع $y=f(x-1)$ و $y=f(1-x)$ به ترتیب $[1,+\infty)$ و $(-\infty,1]$ است که دامنهٔ این دو تابع ۱ عضو مشترک دارند:
$(-\infty,1]\cap[1,+\infty)=\{1\}$

۸۵۵- گزینهٔ ۴ از روی نمودار $y=f(x-1)$ نمودار $y=f(2-\frac{x}{2})$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، تابع f در بازهٔ $[-2,6]$ اکیداً نزولی است.

۸۵۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید ریشه‌های تابع f برابر α_1، α_2، ... و α_n است. پس ریشه‌های تابع $y=f(2-3x)$ به صورت زیرند:

$$2-3\beta_1=\alpha_1 \Rightarrow \beta_1=\frac{\alpha_1-2}{-3}$$

$$2-3\beta_1=\alpha_2 \Rightarrow \beta_2=\frac{\alpha_2-2}{-3}$$

$$\vdots$$

$$2-3\beta_n=\alpha_n \Rightarrow \beta_n=\frac{\alpha_n-2}{-3}$$

چون مجموع صفرهای $f(x)$ و $f(2-3x)$ برابر -4 و ۸ است، داریم:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-4$$

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=8 \Rightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n-2n}{-3}=8$$

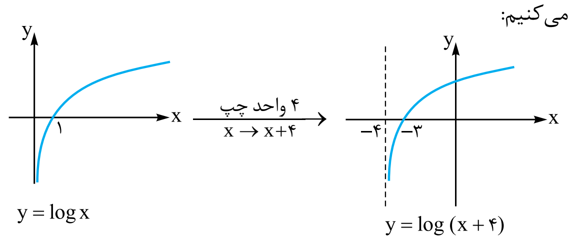
$$\frac{\alpha_1-2}{-3} \quad \frac{\alpha_2-2}{-3} \quad \frac{\alpha_n-2}{-3}$$

$$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-2n=-24$$

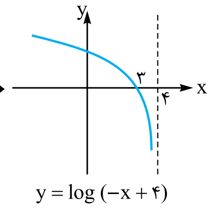
$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}_{-4}=2n-24 \Rightarrow 2n-24=-4$$

$$\Rightarrow 2n=20 \Rightarrow n=10$$

۸۵۷- گزینهٔ ۴ به کمک نمودار تابع $y=\log x$ نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

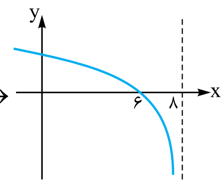


قرینه نسبت به محور yها
$x \to -x$



$y = \log(-x+۴)$

۲ برابرکردن طول نقاط
$x \to \frac{x}{۲}$



$y = \log(۴-\frac{x}{۲})$

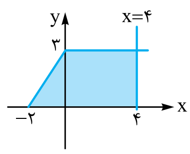
تذکر چون دامنهٔ تابع $y=\log(۴-\frac{x}{۲})$ بازهٔ $(-\infty,+۸)$ است به راحتی می‌توانیم به صحت ۴ پی ببریم!
ولی برای درک بهتر، تابع را مرحله‌به‌مرحله رسم کردیم!

۸۵۸- گزینهٔ ۳ تابع g را به صورت تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=f(x-|x|)=\begin{cases} f(x-x)=f(۰) & x\geq ۰ \\ f(x-(-x))=f(۲x) & x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x-|x|)=\begin{cases} ۳ & x\geq ۰ \\ f(۲x) & x<۰ \end{cases}$$

حال این تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل مساحت بین این تابع، محور xها و خط $x=۴$ برابر است با:

$$(۳\times۴)+(\frac{۱}{۲}\times۳\times۲)=۱۲+۳=۱۵$$

۸۵۹- گزینهٔ ۲ **راه اول:** هر یک از ضابطه‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و به کمک شکل تابع f ریشه‌های تابع g را به دست می‌آوریم:

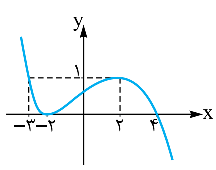
$$x\geq ۲ \Rightarrow f(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۲ \Rightarrow \text{غقق (چون باید } x\geq۲ \text{ باشد)} \end{cases}$$

$$x<۲ \Rightarrow ۱-f(۲x+۲)=۰ \Rightarrow f(۲x+۲)=۱$$

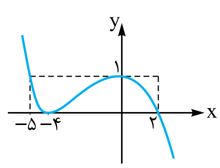
$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \begin{cases} ۲x+۲=۲ \Rightarrow x=۰ \\ ۲x+۲=-۳ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

پس $x=۰$، $x=۴$ و $x=-\frac{۵}{۲}$ ریشه‌های تابع g هستند که مجموع آن‌ها برابر $۱/۵$ است.

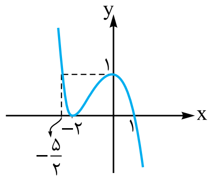
راه دوم: نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:



۲ واحد چپ
$x \to x+۲$



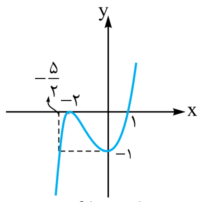
$y=f(x+۲)$



$y=f(۲x+۲)$

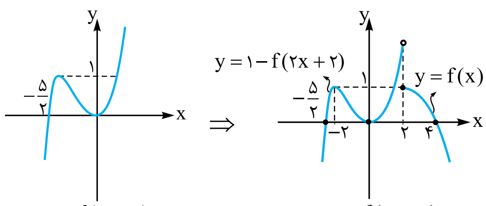
نصف‌شدن طول نقاط
$x \to ۲x$

قرینه نسبت به محور x



$y=-f(۲x+۲)$

۱ واحد بالا



$y=۱-f(۲x+۲)$ $\Rightarrow$ $y=۱-f(۲x+۲)$

۸۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x+|x+۲|\geq۰ \Rightarrow \begin{cases} x\geq-۲: x+x+۲\geq۰ \\ \Rightarrow ۲x+۲\geq۰ \Rightarrow x\geq-۱ \\ \xrightarrow{\cap x\geq-۲} x\geq-۱ \\ x<-۲: x-x-۲\geq۰ \\ \Rightarrow -۲\geq۰ \Rightarrow \text{غیرممکن} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=[-۱,+\infty)$$

چون دامنهٔ تابع $y=f(x)$، $[-۱,+\infty)$ است، اعضای دامنهٔ تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ اعضای دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است. پس دامنهٔ تابع $y=f(-x)$ بازهٔ $(-\infty,۱]$ است.

۸۶۱- گزینهٔ ٤ اگر فرض کنیم $g(x)=۳-x$ است پس باید دامنهٔ تابع fog را تعیین کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_g=\mathbb{R}, D_f=[۰,۲]$$

پس باید $g(x)\in[۰,۲]$ باشد. در نتیجه:

$$۰\leq ۳-x\leq ۲ \Rightarrow -۳\leq -x\leq -۱ \Rightarrow ۱\leq x\leq ۳$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} \mid ۱\leq x\leq ۳\}=[۱,۳]$$

۸۶۲- گزینهٔ ۲ **راه اول:** ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم. ورودی‌های تابع $y=f(۲-x)$ (یعنی xها) در بازهٔ $[۱,۴]$ هستند پس باید محدودهٔ $۲-x$ (خروجی‌های تابع $g(x)=۲-x$ که ورودی تابع f هستند) را تعیین کنیم:

$$y=f(۲-\underbrace{x}_{۱\leq x\leq ۴}) \Rightarrow ۱\leq x\leq ۴ \xrightarrow{\times(-۱)} -۴\leq -x\leq -۱$$

$$\xrightarrow{+۲} -۲\leq ۲-x\leq ۱ \Rightarrow D_f=[-۲,۱]$$

تابع $y=f(x-۴)$ از انتقال تابع f به اندازهٔ ۴ واحد به سمت راست ایجاد می‌شود. پس به اعضای دامنهٔ تابع f، ۴ واحد اضافه می‌شود:

$$-۲\le x-۴\le ۱ \xrightarrow{+۴} ۲\le x\le ۵$$

از طرفی دامنهٔ توابع $y=f(x-۴)$ و $y=۳+۲f(x-۴)$ یکسان است.
پس دامنهٔ تابع $y=۳+۲f(x-۴)$ بازهٔ $[۲,۵]$ است.

راه دوم:

۱ اگر در تابع $y=f(۲-x)$ به جای x قرار دهیم $-x$، تابع $y=f(x+۲)$ ایجاد می‌شود. در نتیجه اعضای دامنهٔ تابع اولیه قرینه می‌شوند: $[-۴,-۱]$

۲ اگر در تابع $y=f(x+۲)$ به جای x قرار دهیم $x-۶$ (یعنی تابع مرحلهٔ قبل را ۶ واحد به راست ببریم) تابع $y=f(x-۴)$ ایجاد می‌شود. پس به اعضای دامنهٔ تابع مرحلهٔ قبل ۶ واحد اضافه می‌شود. $[-۴+۶,-۱+۶]=[۲,۵]$

۸۶۳- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم. ورودی‌های تابع $y=۲f(۱-\frac{x}{۲})$ (یعنی xها) در بازهٔ $[-۱,۳]$ هستند. پس باید محدودهٔ $۱-\frac{x}{۲}$ (خروجی‌های تابع $g(x)=۱-\frac{x}{۲}$ که ورودی تابع f هستند) را تعیین کنیم:

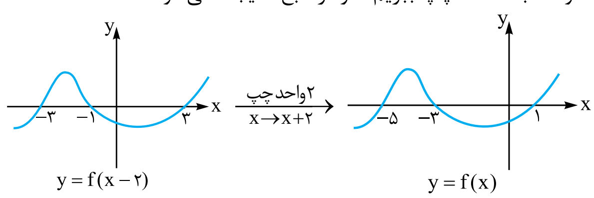
$$-۱\le x\le ۳ \xrightarrow{\times(-\frac{۱}{۲})} -\frac{۳}{۲}\le -\frac{۱}{۲}x\le \frac{۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{+۱} -\frac{۱}{۲}\le ۱-\frac{x}{۲}\le \frac{۳}{۲}$$

پس $D_f=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ است. تابع $g(x)=f(x-۲)$ از انتقال ۲ واحدی تابع f به سمت راست ایجاد می‌شود. پس طول نقاط تابع f دو واحد افزایش می‌یابد:

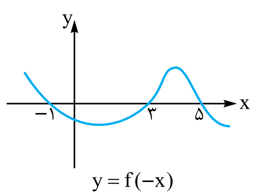
$$-\frac{۱}{۲}\le x-۲\le\frac{۳}{۲} \xrightarrow{+۲} \frac{۳}{۲}\le x\le \frac{۷}{۲} \Rightarrow D_g=[\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲}]$$

دامنهٔ توابع $y=f(x-۲)$ و $y=۳+f(x-۲)$ یکسان است. پس دامنهٔ تابع $y=۳+f(x-۲)$ نیز بازهٔ $[\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲}]$ است.

۸۶۴- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت راست ببریم نمودار تابع $y=f(x-۲)$ ایجاد می‌شود. پس اگر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را ۲ واحد به سمت چپ ببریم نمودار تابع f ایجاد می‌شود.



اگر نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم تابع $y=f(-x)$ ایجاد می‌شود:



حال به کمک جدول تعیین علامت دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(-x)}$ را به دست می‌آوریم:

(۲) (۱)

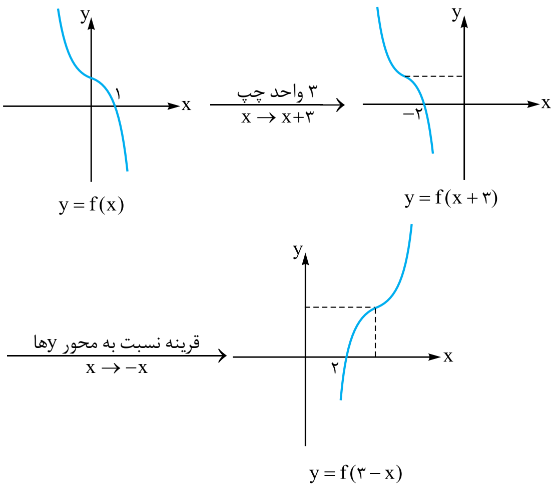
		−۱		۰		۳		۵	
$f(-x)$	+	۰	−		−	۰	+	۰	−
x	−		−	۰	+		+		+
$xf(-x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−

(۱) تابع $y=f(-x)$ زیر محور xها است.
(۲) تابع $y=f(-x)$ بالای محور xها است.

$$xf(-x)\ge ۰ \Rightarrow x\in[-۱,۰]\cup[۳,۵]$$

پس دامنهٔ این تابع شامل ۵ عدد صحیح ۱−، ۰، ۳، ۴ و ۵ است.

۸۶۵- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=f(۳-x)$ را رسم می‌کنیم:



حال با توجه به نمودار تابع $y=f(۳-x)$ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x+۱)f(۳-x)}$ را به دست می‌آوریم.

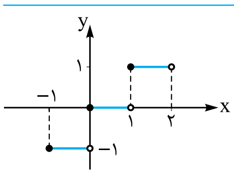
(۱) (۲)

		−۱		۲	
$f(۳-x)$	−		−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+		+
$(x+۱)f(۳-x)$	+	۰	−	۰	+

(۱) تابع $y=f(۳-x)$ زیر محور xها است.
(۲) تابع $y=f(۳-x)$ بالای محور xها است.

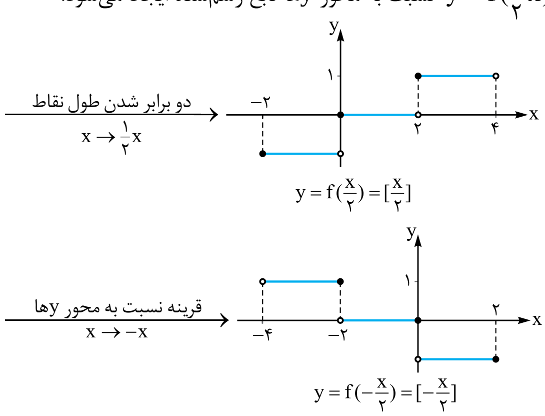
$$(x+۱)f(۳-x)\ge ۰ \Rightarrow x\in\mathbb{R}-(-۱,۲)$$

۸۶۶- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=[x]$ به صورت مقابل است:



چون طول پله‌ها ۲ برابر شده است پس تابع در جهت محور xها منبسط شده است.

در تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ طول پله‌ها دو برابر تابع $y=f(x)$ است. با قرینهٔ تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ نسبت به محور yها تابع رسم‌شده ایجاد می‌شود.

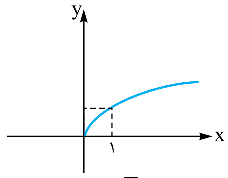


۸۶۷- گزینه ۱ با توجه به شکل $f(0)=2$ و $f(1)=0$ است:

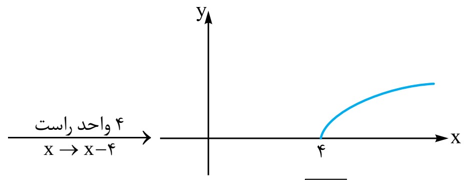
$$f(0)=\sqrt{b}=2 \Rightarrow b=4$$

$$f(1)=\sqrt{a+b}=0 \xrightarrow{b=4} a=-4$$

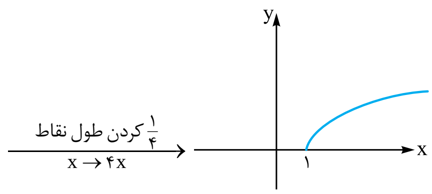
پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{-4x+4}$ است. پس $g(x)=\sqrt{4x-4}$ است که نمودار آن به صورت زیر رسم‌می‌شود:



$y=\sqrt{x}$



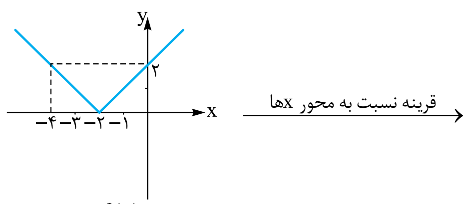
$y=\sqrt{x-4}$



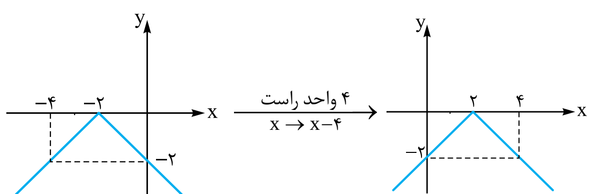
$y=\sqrt{4x-4}$

تذکر البته با توجه به آن‌که ریشهٔ تابع g، $x=1$ است و ضریب x در آن مثبت است می‌توانستیم به راحتی به درستی ۱ برسیم.

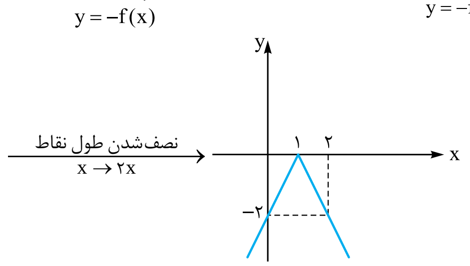
۸۶۸- گزینه ۳ برای رسیدن به تابع g مراحل زیر را طی می‌کنیم:



$y=f(x)$



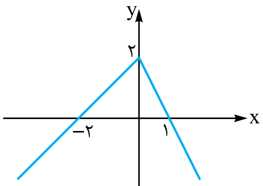
$y=-f(x)$ $\qquad$ $y=-f(x-4)$



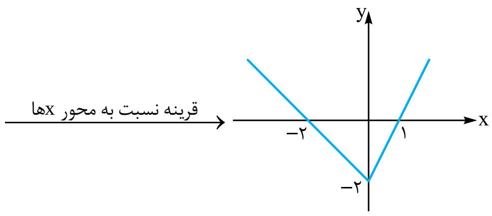
$y=-f(2x-4)$

پس ضابطهٔ تابع g به صورت $g(x)=-f(2x-4)$ است.

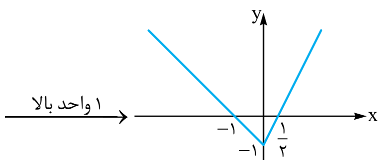
۸۶۹- گزینه ۳ مطابق مراحل زیر می‌توان از نمودار تابع f به نمودار تابع g رسید:



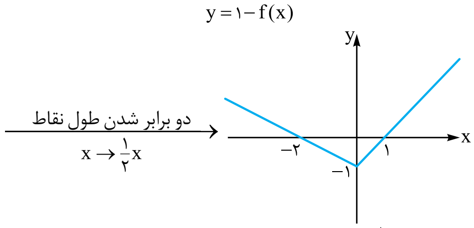
$y=f(x)$



$y=-f(x)$



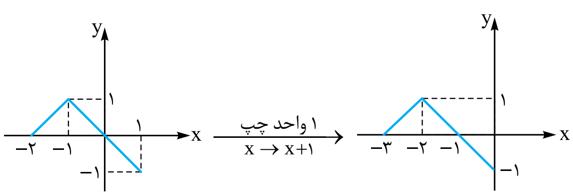
$y=1-f(x)$



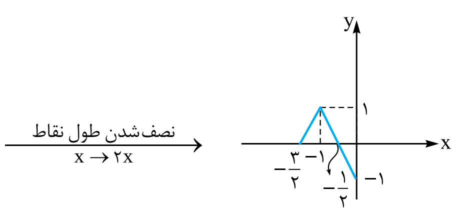
$y=1-f(\frac{1}{2}x)$

پس $g(x)=1-f(\frac{1}{2}x)$ است و در آن $a=1$ و $b=\frac{1}{2}$ است پس $a+b=1/5$ است.

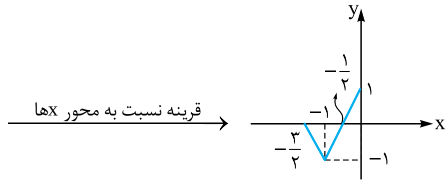
۸۷۰- گزینه ۴ به کمک نمودار تابع f نمودار تابع $y=2-f(2x+1)$ را رسم می‌کنیم.



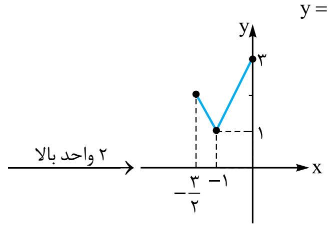
$y=f(x)$ $\qquad$ $y=f(x+1)$



$y=f(2x+1)$



$y=-f(۲x+۱)$



$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=-\frac{۳}{۲} \\ c=۱ \end{cases} \Rightarrow a+b=۱/۵$$

۸۷۱- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $g(x)=f(x+۴)$ است، تابع $y=f(۴-x)$ از قرینه‌کردن طول نقاط تابع g نسبت به محور yها ایجاد می‌شود؛ یعنی $g(-x)=f(-x+۴)$.

با توجه به تساوی $f(x+۴)=f(۴-x)$ می‌توان فهمید محور yها محور تقارن تابع $g(x)=f(x+۴)$ است که با قرینه‌کردن ورودی‌های آن تغییری در نمودار آن حاصل نمی‌شود.

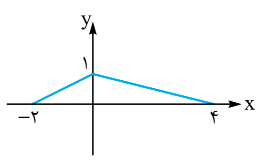
پس تابع $y=f(x+۴)$ تابعی است که دارای محور تقارن به معادلهٔ $x=۰$ است. (محور yها) اما تابع f از انتقال ۴ واحدی تابع $y=f(x+۴)$ به سمت راست محور xها ایجاد می‌شود. پس محور تقارن تابع $y=f(x)$ به خط $x=۴$ منتقل می‌شود. در واقع تابع f تابعی است که دارای محور تقارن به معادلهٔ $x=۴$ است که اگر ۴ واحد عقب برود (تشکیل تابع $y=f(x+۴)$) نسبت به محور yها متقارن است.

پس گزینه‌ای می‌تواند تابع f باشد که خط $x=۴$ محور تقارن آن باشد. چون همهٔ گزینه‌ها سهمی هستند، پس سهمی که طول رأس آن ۴ باشد پاسخ تست است. که در بین گزینه‌ها، ۱ این ویژگی را دارد.

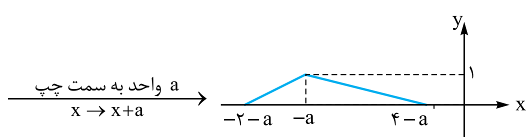
$$f(x)=x^۲-۸x \Rightarrow x_{\text{رأس}}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۸۷۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل $D_f=[-۲,۴]$ است. حال برای آن‌که دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(۲x+a)$ متقارن باشند دو راه‌حل زیر را داریم:
نمودار تابع $y=f(۲x+a)$ را در دو حالتی که $a>۰$ و $a<۰$ باشد رسم می‌کنیم.

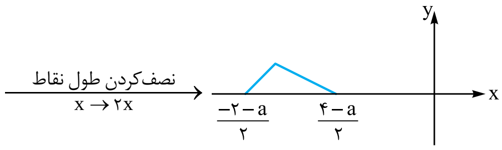
الف) $a>۰$:



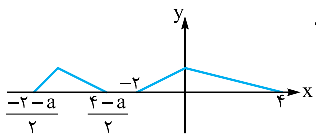
$y=f(x)$



$y=f(x+a)$



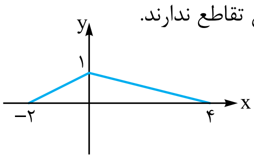
در این حالت اگر تابع $y=f(x)$ و $y=f(۲x+a)$ تقاطع نداشته باشند باید با توجه به شکل زیر بزرگ‌ترین عضو دامنهٔ تابع $y=f(۲x+a)$؛ یعنی $\frac{۴-a}{۲}$ از کوچک‌ترین عضو دامنهٔ تابع f یعنی -۲، کم‌تر باشد.



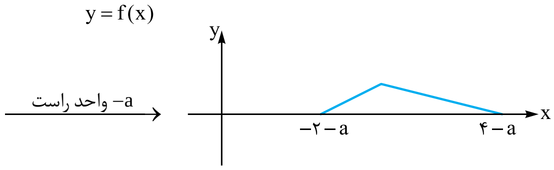
$$\Rightarrow \frac{۴-a}{۲}<-۲ \Rightarrow ۴-a<-۴ \Rightarrow ۸<a$$

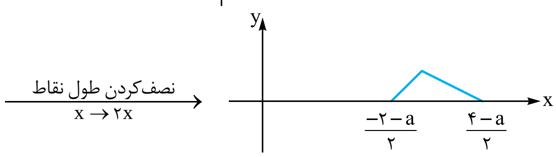
پس در این حالت اگر $۸<a$ باشد دو تابع تقاطع ندارند.

ب) $a<۰$:

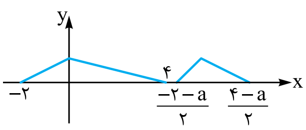


$y=f(x)$





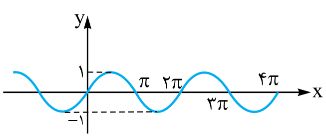
در این حالت اگر تابع $y=f(x)$ و $y=f(۲x+a)$ تقاطع نداشته باشند باید مطابق شکل مقابل کوچک‌ترین عضو دامنهٔ تابع $y=f(۲x+a)$ یعنی $\frac{-۲-a}{۲}$ از بزرگ‌ترین عضو تابع f یعنی ۴ بزرگ‌تر باشد:



$$\Rightarrow ۴<\frac{-۲-a}{۲} \Rightarrow ۸<-۲-a \Rightarrow a<-۱۰$$

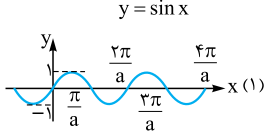
پس در این حالت اگر $a<-۱۰$ باشد دو تابع تقاطع ندارند. پس اگر $a>۸$ یا $a<-۱۰$ باشد دو تابع تقاطع ندارند و در نتیجه اگر $-۱۰\le a\le ۸$ باشند دو تابع متقاطع‌اند.

۸۷۳- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم:

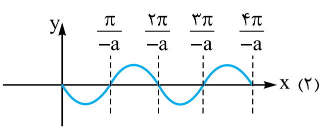


$y=\sin x$

حال نمودار تابع $y=\sin ax$ را رسم می‌کنیم. باید طول‌های نمودار تابع مرحلهٔ قبل را تقسیم بر a کنیم: اگر $a>۰$ باشد.



اگر $a<۰$ باشد:



با توجه به شکل تابع f، اگر $a>0$ باشد $b<0$ است. زیرا باید نمودار تابع (۱) نسبت به محورxها قرینه شود تا شبیه تابع f شود. در این حالت چون حداکثر تابع f برابر ۲ است، پس $b=-2$ است.

اگر $a<0$ باشد $b>0$ است، زیرا نمودار تابع (۲) در مقایسه با f تغییری نسبت به محور xها نکرده است (قرینه نشده است) پس در این حالت $b=2$ است.

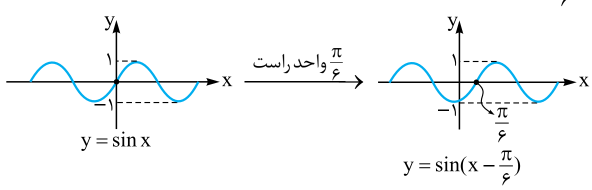
در هر دو حالت (۱) و (۲)، $\frac{4\pi}{|a|}$ باید برابر 2π باشد:

$$\left|\frac{4\pi}{a}\right|=2\pi \Rightarrow |a|=2 \Rightarrow a=\pm 2$$

پس اگر $a=2$ باشد $b=-2$ و اگر $a=-2$ باشد $b=2$ است، در نتیجه $ab=-4$ است.

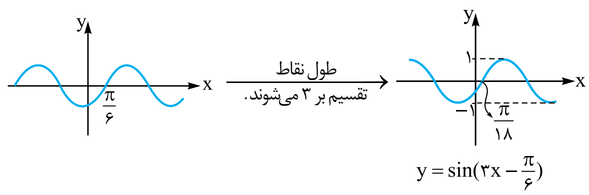
۸۷۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم برای رسم تابع $y=g(ax+c)$ ابتدا باید تابع g را به اندازهٔ $|c|$ به سمت راست یا چپ ببریم (بسته به علامت c راست یا چپ می‌بریم) و سپس طول نقاط را بر a تقسیم کنیم. پس سعی می‌کنیم تابع f را مطابق مراحل زیر رسم کنیم و a و b را پیدا کنیم:

۱) تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم و آن را $\frac{\pi}{6}$ به راست می‌بریم تا تابع $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ ایجاد شود:

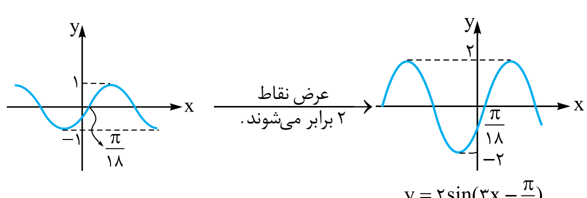


۲) طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل باید بر a تقسیم شود. چون جهت نمودار عوض نشده است، پس a مثبت است. از طرفی طول اولین نقطهٔ برخورد تابع مرحلهٔ قبل $\frac{\pi}{6}$ است که به $\frac{\pi}{18}$ تبدیل شده است، پس $a=3$ است:

$$\frac{\frac{\pi}{6}}{a}=\frac{\pi}{18}\Rightarrow a=3$$



۳) حال اگر عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل b برابر شود $(b>0)$ تابع موردنظر رسم می‌شود. با توجه به آن‌که حداکثر مقدار تابع ۲ است، پس $b=2$ است:

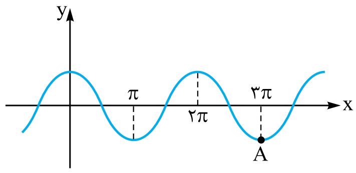


پس $a=3$ و $b=2$ است و در نتیجه $a+b=5$ است.

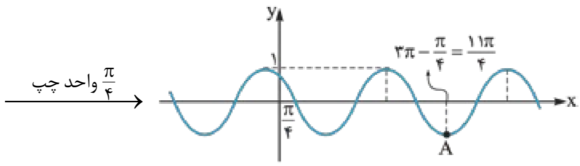
۸۷۵- گزینهٔ ۲ مطابق مراحل زیر سعی می‌کنیم از روی نمودار تابع $y=\cos x$ تابع f را رسم کنیم و مقادیر a و b را بیابیم. ابتدا ضابطهٔ f را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$f(x)=b\cos(a\pi x+\frac{\pi}{4})+2$$

۱) تابع $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ می‌بریم تا تابع $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ رسم شود:

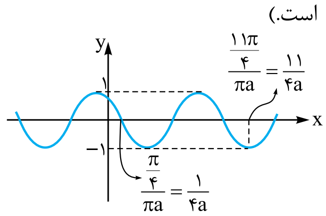


$y=\cos x$



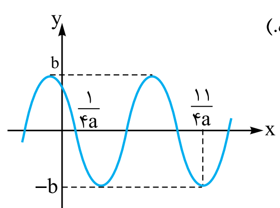
$y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$

۲) طول نقاط تابع مرحلهٔ قبل را تقسیم بر πa می‌کنیم تا تابع $y=\cos(\pi ax+\frac{\pi}{4})$ رسم شود. (با توجه به آن‌که نمودار نسبت به محور yها قرینه نشده است، پس $a>0$ است.)



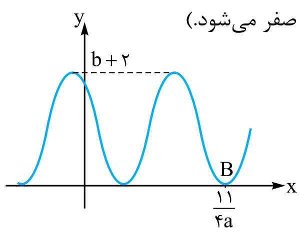
$y=\cos(\pi ax+\frac{\pi}{4})$

۳) عرض نقاط تابع مرحلهٔ قبل b برابر می‌شود. (چون تابع نسبت به محور xها قرینه نشده است، پس $b>0$ است.)



$y=b\cos(\pi ax+\frac{\pi}{4})$

۴) تابع مرحلهٔ قبل را اگر ۲ واحد بالا ببریم نمودار تابع f ایجاد می‌شود. چون حداقل تابع f صفر است؛ پس $b=2$ است که حداقل تابع مرحلهٔ قبل از $-b$ به صفر برسد. ($2-b$ برابر با صفر می‌شود.)



$$\Rightarrow b+2=4 \Rightarrow b=2$$

با توجه به شکل سؤال، دومین محل برخورد تابع f با محور xها $\frac{11}{2}$ است.

پس طول این نقطه $\frac{11}{2}$ است:

$$\frac{11}{4a}=\frac{11}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

پس $a+b=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ است.

تذکر البته اگر درک مناسبی از رسم نمودار داشته باشید لازم نبود همهٔ شکل‌ها را رسم کنید. ما برای درک بهتر این مراحل را رسم کردیم. اما در امتحان بهتر است این‌طور فکر کنید که نقطهٔ متناظر با نقطهٔ B در تابع f با چه نقطه‌ای از تابع $y=\cos x$ متناظر بوده است. با توجه به شکل به نظر می‌رسد نقطهٔ A (در نمودار تابع $y=\cos x$) به B طی مراحل زیر تبدیل شده است:

$$A(۳\pi,-۱)\xrightarrow{\text{کاهش } \frac{\pi}{۴} \text{ طول نقطه (۱)}}(\frac{۱۱\pi}{۴},-۱)$$

$$\xrightarrow[\text{می‌شود (۲)}]{\text{طول نقطه تقسیم بر } \pi a}(\frac{۱۱}{۴a},-۱)$$

$$\xrightarrow[\text{می‌شود (۳)}]{\text{عرض نقطه b برابر}}(\frac{۱۱}{۴a},-b)$$

$$\xrightarrow[\text{زیاد می‌شود (۴)}]{\text{عرض نقطه ۲ واحد}}B(\frac{۱۱}{۴a},۲-b)$$

چون مختصات B برابر $(\frac{۱۱}{۲},۰)$ است، پس:

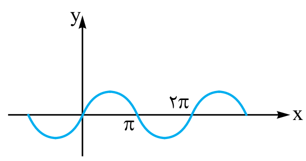
$$\begin{cases}\frac{۱۱}{۴a}=\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ ۲-b=۰\Rightarrow b=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۵}{۲}$$

۸۷۶- گزینه ۱ اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}۲k\le x<۲k+۱\Rightarrow [x]=۲k\Rightarrow (-۱)^{[x]}=(-۱)^{۲k}=۱\\ ۲k+۱\le x<۲k+۲\Rightarrow [x]=۲k+۱\\ \Rightarrow (-۱)^{[x]}=(-۱)^{۲k+۱}=-۱\end{cases}$$

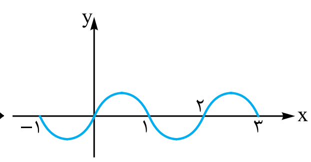
$$\Rightarrow\begin{cases}۲k\le x<۲k+۱\Rightarrow f(x)=|f(x)|\\ ۲k+۱\le x<۲k+۲\Rightarrow -f(x)=|f(x)|\end{cases}$$

با توجه به نمودار توابع هر یک از گزینه‌ها، تابع $y=\sin \pi x$ این ویژگی را دارد:



$y=\sin x$

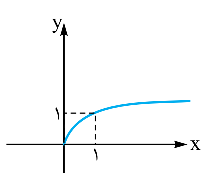
$\xrightarrow[x\to \pi x]{\text{طول نقاط بر } \pi \text{ تقسیم می‌شوند}}$



$y=\sin \pi x$

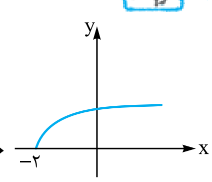
با توجه به شکل این تابع مشخص است در بازه‌های به صورت $[۲k,۲k+۱)$ (مثل $[۰,۱)$، $[۲,۳)$ و ....) $f(x)=|f(x)|$ است و در بازه‌هایی به صورت $[۲k+۱,۲k+۲)$ (مثل $[۱,۲)$، $[۳,۴)$ و ...) $f(x)=-|f(x)|$ است.

۸۷۷- گزینه ۱



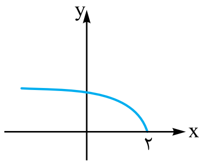
$y=\sqrt{x}$

$\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}}$



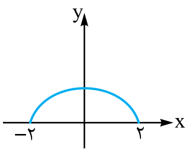
$y=\sqrt{x+۲}$

$\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}}$



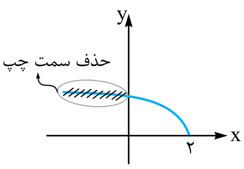
$y=\sqrt{-x+۲}$

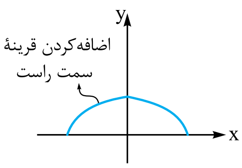
$\xrightarrow[x\to |x|]{\text{حذف سمت چپ و اضافه‌کردن سمت راست به سمت چپ}}$



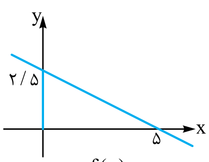
$y=\sqrt{-|x|+۲}$

تذکر برای رسم تابع $y=g(|x|)$ از روی تابع $y=g(x)$، کافی است ابتدا سمت چپ محور yها را حذف کنیم و سپس قرینهٔ سمت راست را نسبت به محور yها به سمت چپ اضافه کنیم.





۸۷۸- گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $y=g(|x|)$ کافی است سمت چپ محور yهای تابع g را حذف و قرینهٔ سمت راست را به سمت چپ محور yها اضافه کنیم. با توجه به این مطالب طی مراحل زیر تابع $y=۲f(۳|x|+۱)$ را رسم می‌کنیم.

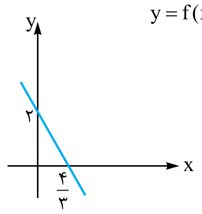


$y=f(x)$

$\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد چپ}}$

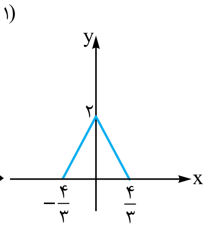
$y=f(x+۱)$

$\xrightarrow[\text{انقباض افقی } (x\to ۳x)]{\frac{۱}{۳} \text{ کردن طول نقاط}}$



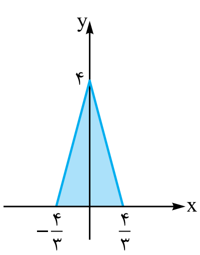
$y=f(۳x+۱)$

$\xrightarrow[x\to |x|]{\text{حذف سمت چپ و اضافه‌کردن قرینهٔ سمت راست به چپ}}$



$y=f(۳|x|+۱)$

$\xrightarrow{\text{۲ برابرکردن عرض نقاط}}$



$y=۲f(۳|x|+۱)$

$$S=\frac{۴}{۲}\times\frac{۸}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$$

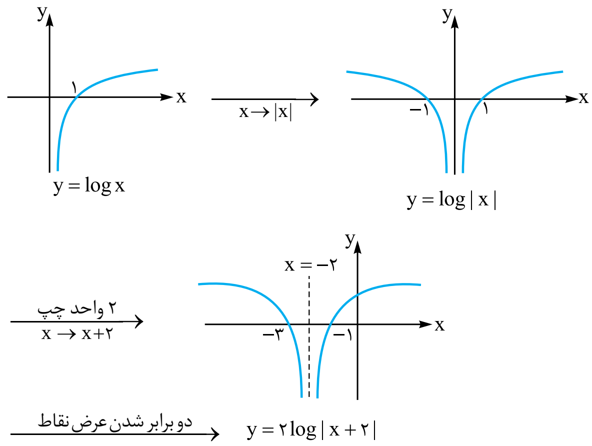
۸۷۹- گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=\log(x^2+4x+4)=\log(x+2)^2=2\log|x+2|$$

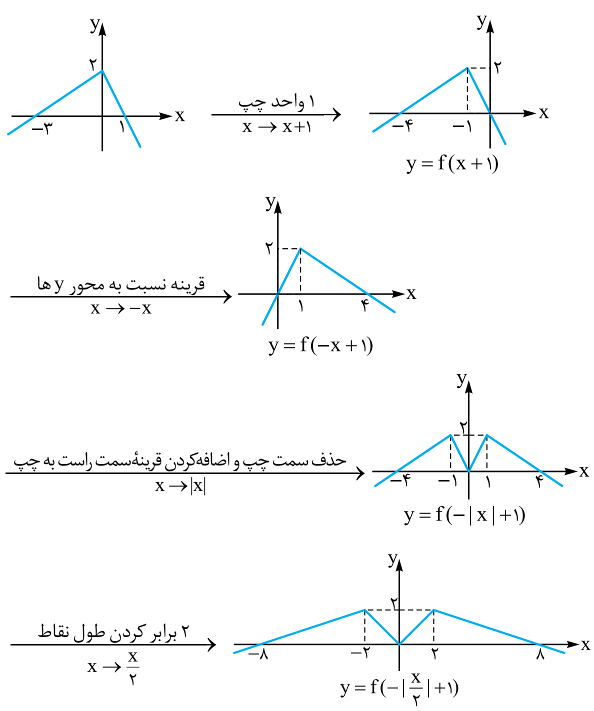
دقت کنید که استفاده از خاصیت $\log_b a^n = n\log_b a$ برای زمانی معتبر است که a مثبت باشد. در واقع اگر n زوج باشد a می‌تواند منفی هم باشد و داریم $\log a^n = n\log|a|$.

باتوجه‌به‌دامنهٔ تابع‌می‌توان‌به‌درستی ۳ پی‌برد، زیرا $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$ است.

اما به کمک انتقال نیز این تابع را رسم می‌کنیم:



۸۸۰- گزینه ۲ مطابق مراحل زیر تابع g را رسم می‌کنیم:

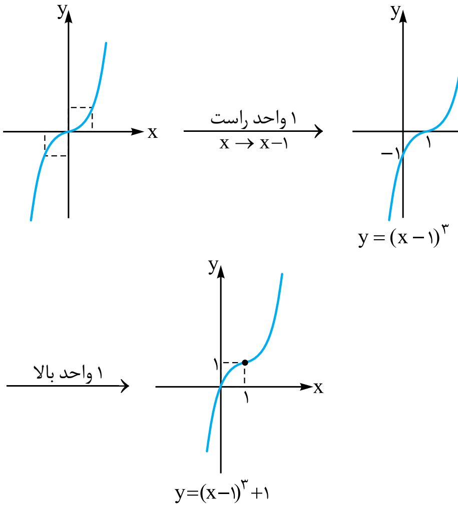


$$\Rightarrow b=8,\ a=-2 \Rightarrow a-b=-10$$

۸۸۱- گزینه ۱ ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$$

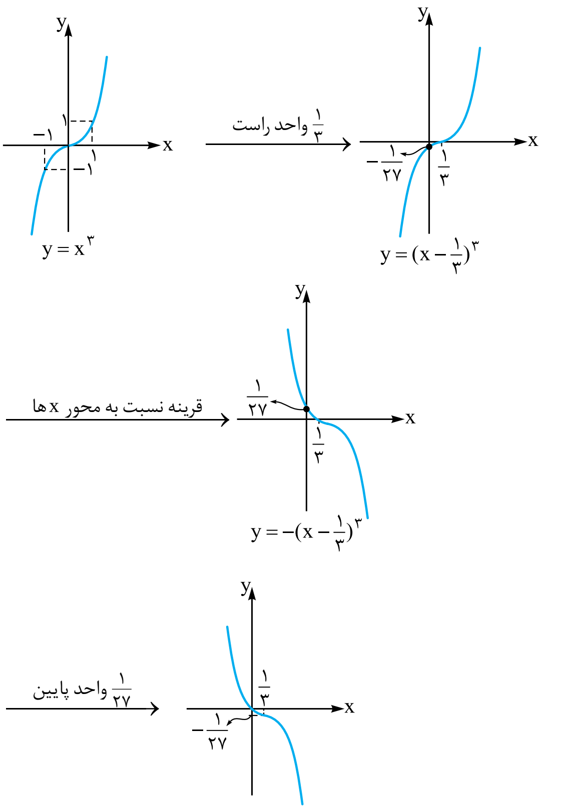
حال به کمک انتقال تابع $y=x^3$، این تابع را رسم می‌کنیم:



۸۸۲- گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=-(x^3-x^2+\frac{1}{3}x)=-((x-\frac{1}{3})^3+\frac{1}{27})=-(x-\frac{1}{3})^3-\frac{1}{27}$$

حال نمودار تابع f را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:



۸۸۳- گزینه ۲ **راه اول:** ضابطهٔ تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

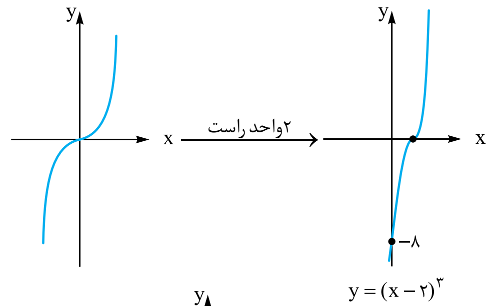
$$y=x(x^2-6x+12)-7=x^3-6x^2+12x-7$$

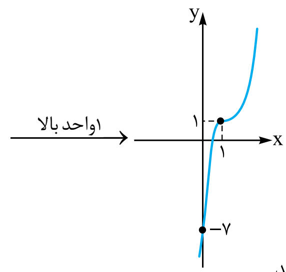
$$=(x^3-6x^2+12x)-7$$

می‌دانیم $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ پس:

$$y=((x-2)^3+8)-7=(x-2)^3+1$$

حال به کمک انتقال، نمودار تابع فوق را رسم می‌کنیم:





پس این تابع از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند.

راه دوم: در حالت کلی دو تابع درجه‌سوم $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ اگر $a>۰$ باشد نمودار حتماً از ناحیهٔ اول و سوم عبور می‌کند. در ضمن اگر $x=۰$ باشد $y=-۷$ است. پس تابع از ناحیهٔ ۴ نیز عبور کند. پس از ۲ عبور نمی‌کند.

۸۸۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم:

$$(x-۱)^۳=x^۳-۳x^۲+۳x-۱$$

پس می‌توان تابع را به کمک مکعب‌سازی به صورت زیر نوشت:

$$y=-x^۳+۳x^۲-۳x+۹=-\underbrace{(x^۳-۳x^۲+۳x)}_{(x-۱)^۳+۱}+۹$$

$$=-(x-۱)^۳+۸ \Rightarrow y=-(x-۱)^۳+۸$$

حال محل برخوردهای تابع را با محورهای مختصات مشخص می‌کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow y=۹$$

$$y=۰ \Rightarrow -(x-۱)^۳+۸=۰ \Rightarrow (x-۱)^۳=۸$$

$$\Rightarrow x-۱=۲ \Rightarrow x=۳$$

پس مختصات نقاط A و B به ترتیب $(۰,۹)$ و $(۳,۰)$ است و شیب خط گذرنده از این دو نقطه برابر ۳− است.

$$\text{شیب } AB=\frac{۹-۰}{۰-۳}=-۳$$

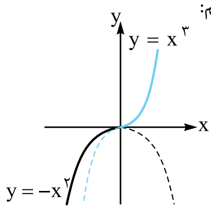
۸۸۵- گزینهٔ ۲ اگر به ازای هر $x_۲$ و $x_۱$ که $x_۱>x_۲$ باشد $f(x_۱)\geq f(x_۲)$ باشد، f را تابعی صعودی گوییم.

چون $(۵,a)$ و $(۳,۵)$ اعضای f هستند، پس باید $۵\leq a$ باشد. از طرفی چون $(۵,a),(۷,۱۲-a)$ اعضای f هستند، پس باید $a\leq ۱۲-a$ باشد.

در نتیجه:

$$\begin{cases} ۵\leq a \\ a\leq ۱۲-a \Rightarrow ۲a\leq ۱۲ \Rightarrow a\leq ۶ \end{cases} \Rightarrow ۵\leq a\leq ۶$$

۸۸۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



پس f یک تابع یک‌به‌یک و اکیداً صعودی است.

۸۸۷- گزینهٔ ۲ اگر تابع f نزولی باشد و بدانیم $f(x_۱)>f(x_۲)$ است، طبق تعریف $x_۱<x_۲$ است. پس:

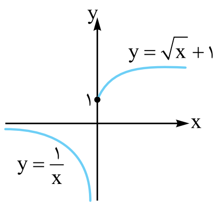
$$f(۳a+۱)<f(۳-a) \xrightarrow{\text{f نزولی است}} ۳a+۱>۳-a$$

$$\Rightarrow ۴a>۲ \Rightarrow a>\frac{۱}{۲}$$

چون دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}$ است پس دامنهٔ توابع $y=f(۳-x)$ و $y=f(۳x+۱)$ نیز $\mathbb{R}$ است. پس مجموعه جواب نامعادله همان بازهٔ $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است.

تذکر اگر $x_۱<x_۲$ باشد و تابع f نزولی باشد $f(x_۱)\geq f(x_۲)$ است اما اگر $f(x_۱)>f(x_۲)$ باشد حتماً $x_۱<x_۲$ است. (اگر $x_۱\leq x_۲$ باشد در حالتی که $x_۱=x_۲$ است به دلیل مقادیر متفاوت $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$، f تابع نخواهد بود.)

۸۸۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



پس با توجه به شکل، این تابع یک‌به‌یک اما غیر یکنوا است.

۸۸۹- گزینهٔ ۱ تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+۲+x-۱ & x\geq ۱ \\ x+۲-x+۱ & -۲\leq x\leq ۱ \\ -x-۲-x+۱ & x\leq -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۱ \\ ۳ & -۲\leq x\leq ۱ \\ -۲x-۱ & x\leq -۲ \end{cases}$$

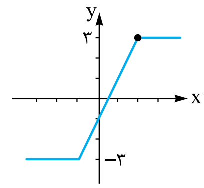
با توجه به ضابطهٔ تابع، تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً نزولی است زیرا تابع $y=-۲x-۱$ یک خط با شیب منفی است که اکیداً نزولی است.

۸۹۰- گزینهٔ ۳ تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} (x+۱)-(x-۲) & x>۲ \\ x+۱+(x-۲) & -۱\leq x\leq ۲ \\ -x-۱+(x-۲) & x\leq -۱ \end{cases}$$

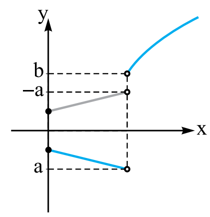
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۳ & x\geq ۲ \\ ۲x-۱ & -۱\leq x\leq ۲ \\ -۳ & x\leq -۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ f، تابع f در بازهٔ $(-۱,۲)$ دارای ضابطهٔ $y=۲x-۱$ است که خطی با شیب مثبت است که اکیداً صعودی است.

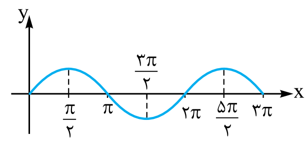


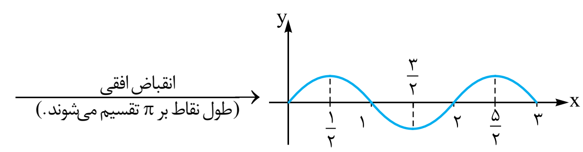
۸۹۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم برای رسم تابع $y=|f(x)|$ باید قسمت‌هایی که پایین محور xها هستند نسبت به این محور قرینه کنیم. با توجه به شکل باید $-a$ کوچک‌تر یا مساوی b باشد تا تابع $|f|$ اکیداً صعودی باشد:

$\Rightarrow\ -a\le b\ \Rightarrow\ a+b\ge ۰$



۸۹۲- گزینهٔ ٤ نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

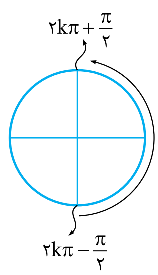




چون ضریب ۲ در تابع $y=۲\sin \pi x$ تأثیری در صعودی و نزولی بودن تابع ندارد پس این تابع در بازهٔ $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$ مطابق شکل صعودی است.

در حالت کلی مطابق شکل می‌توان بازه‌هایی را که این تابع صعودی است، به صورت زیر نوشت:

$$\xrightarrow{\div\pi}\ (۲k-\frac{۱}{۲},۲k+\frac{۱}{۲})\quad (k\in\mathbb{Z})$$

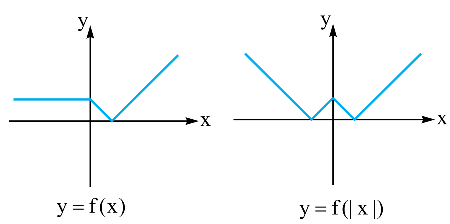


۸۹۳- گزینهٔ ۲ برای رسم تابع $y=f(|x|)$، باید ابتدا قسمت‌هایی از نمودار تابع f را که در سمت چپ محور yها است حذف و سپس قرینهٔ سمت راست را نسبت به محور yها به سمت چپ اضافه کنیم.

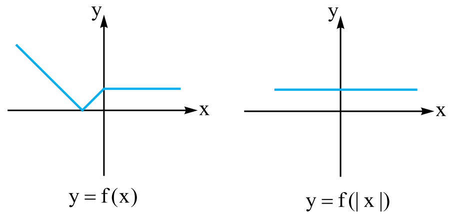
با این توضیح اگر تابع در نقاطی به طول مثبت در بازه‌هایی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد تابع $y=f(|x|)$ در نقاطی به طول منفی در آن بازه‌ها به ترتیب اکیداً نزولی یا اکیداً صعودی است و در کل تابع $y=f(|x|)$ غیر یکنوا خواهد بود. پس باید تابع f به ازای $x\ge ۰$ تابعی ثابت باشد تا تابع $f(|x|)$ یکنوا باشد.

در نتیجه ۲ صحیح است.

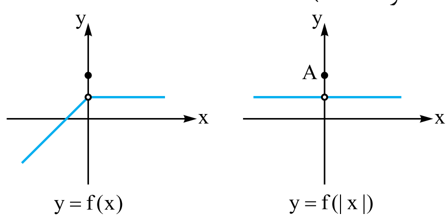
۱ غیر یکنوا



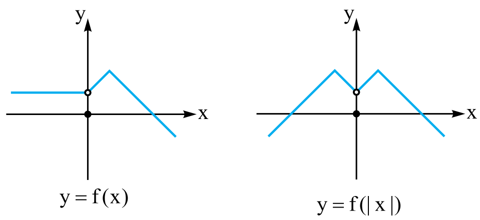
۲ یکنوا (ثابت)



۳ غیریکنوا (به خاطر نقطهٔ A)



۴



۸۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را می‌نویسیم. با توجه به شکل این سهمی دارای ریشه‌های ۱ و -۳ است، پس ضابطهٔ آن بر $(x+۳)$ و $(x-۱)$ بخش‌پذیر است:

$$f(x)=a(x-۱)(x+۳)\ \xrightarrow{(-۱,۲)\in f}\ a\times(-۲)\times ۲=۲$$

$$\Rightarrow\ a=-\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{۱}{۲}(x^۲+۲x-۳)$$

پس تابع $y=۲f(x)+ax^۲$ به صورت زیر است:

$$y=-x^۲-۲x+۳+ax^۲\ \Rightarrow\ y=(a-۱)x^۲-۲x+۳$$

ما اگر فرض کنیم تابع فوق یک سهمی است امکان ندارد این تابع اکیداً یکنوا باشد پس نباید این تابع یک تابع درجهٔ ۲ باشد، در نتیجه باید ضریب $x^۲$ صفر باشد تا این تابع به تابعی خطی (با شیب غیر صفر) تبدیل شود. می‌دانیم هر تابع خطی با شیب غیر صفر اکیداً یکنوا است.

$a-۱=۰\ \Rightarrow\ a=۱$

۸۹۵- گزینهٔ ۳ تابع $y=(x+۱)f(x)$ یک سهمی است:

$y=(x+۱)(۳x-۲)$

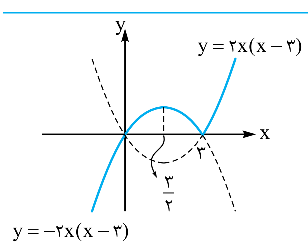
اگر طول رأس سهمی را x_S بنامیم، چون سهمی رو به بالا است در هر زیرمجموعه از بازهٔ $[x_S,+\infty)$ اکیداً صعودی است پس x_S را به دست می‌آوریم:

$$\text{ریشه‌های سهمی}=-۱,\frac{۲}{۳}\ \Rightarrow\ x_S=\text{میانگین ۲ ریشه}=\frac{\frac{۲}{۳}-۱}{۲}=-\frac{۱}{۶}$$

پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{۱}{۶}$ است.

۸۹۶- گزینهٔ ۲ تابع f را به صورت ۲ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x(x-۳) & x\ge ۳\\ -۲x(x-۳) & x<۳\end{cases}$$



با توجه به شکل این تابع در بازهٔ $[\frac{3}{2},3]$ اکیداً نزولی است. پس $b-a=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ است.

-۸۹۷ گزینهٔ۱ اگر $x<2$ باشد، $x-2$ و $x-3$ هر دو منفی هستند و داریم:

$$\begin{cases}|x-2|=-(x-2)\\ |x-3|=-(x-3)\end{cases}\Rightarrow |x-2|+|x-3|$$
$$=-x+2-x+3=-2x+5$$

چون شیب خط منفی است، پس در این بازه تابع f اکیداً نزولی است. حال نمودار خط $y=-2x+5$ را با تابع g تقاطع می‌دهیم:

$$2x^2-x-10=-2x+5 \Rightarrow 2x^2+x-15=0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{5}{2} & \text{غ ق ق}\\ x=-3\end{cases}$$

چون $x<2$ است، پس $x=\frac{5}{2}$ قابل قبول نیست (در بازه‌ای که نمودار f نزولی است قرار ندارد) پس دو تابع در این بازه در یک نقطه مشترک‌اند.

-۸۹۸ گزینهٔ۲ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

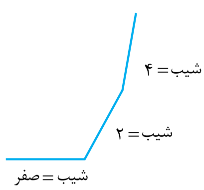
$$f(x)=\begin{cases}x+x-2 & x>2\\ x-x+2 & 0\le x\le 2\\ -x-x+2 & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x-2 & x>2\\ 2 & 0\le x\le 2\\ -2x+2 & x<0\end{cases}$$

در نتیجه:
$$g(x)=f(x)+ax=\begin{cases}(2+a)x-2 & x>2\\ 2+ax & 0\le x\le 2\\ (a-2)x+2 & x<0\end{cases}$$

چون تابع g تابعی پیوسته است و در هر یک از سه بازهٔ فوق خطی است، پس کافی است شیب هر یک از این خطوط صفر یا مثبت باشد (منفی نباشد) تا تابع g صعودی باشد. پس باید کم‌ترین شیب بین این سه خط که $a-2$ است. بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد: $a-2\ge 0 \Rightarrow a\ge 2$

پس حداقل مقدار a برابر ۲ است. در این حالت شکل کلی تابع به صورت مقابل است:



-۸۹۹ گزینهٔ۲ این تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}x-3+b(x-2) & x>3\\ 3-x+b(x-2) & 2\le x\le 3\\ 3-x+b(2-x) & x<2\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases}(b+1)x-3-2b & x>3 & (1)\\ (b-1)x+3-2b & 2\le x\le 3 & (2)\\ (-1-b)x+2b+3 & x<2 & (3)\end{cases}$$

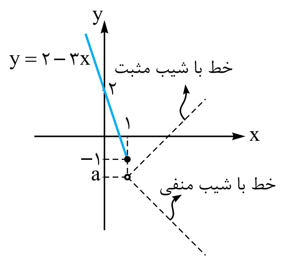
چون این تابع در هر سه بازه فوق تابعی خطی است، پس با توجه به پیوستگی این تابع کافی است شیب خطوط در بازهٔ $(-\infty,3)$، صفر یا منفی باشد (مثبت نباشد) در نتیجه:

(۲) شیب ضابطهٔ $=b-1\le 0 \Rightarrow b\le 1$

(۳) شیب ضابطهٔ $=-b-1\le 0 \Rightarrow -1\le b$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1\le b\le 1 \Rightarrow |b|\le 1$$

-۹۰۰ گزینهٔ۴ ابتدا نمودار تابع f را در بازهٔ $x\le 1$ رسم می‌کنیم: مطابق شکل اگر ضابطهٔ تابع در بازهٔ $(1,+\infty)$ خطی باشد باید اولاً شیب این خط منفی و ثانیاً مقدار این تابع خطی به ازای $x=1$ کوچک‌تر یا مساوی -1 باشد.



در نتیجه ۲ و ۳ چون شیب مثبت دارند حذف می‌شوند. از طرفی مقدار تابع ۱ به ازای $x=1$ برابر ۱ است که از -1 بزرگ‌تر است. در نتیجه این گزینه نیز حذف می‌شود.

تابع ۴ تابعی با شیب منفی است که به ازای $x=1$ دارای مقدار -2 است. پس این گزینه پاسخ صحیح است.

-۹۰۱ گزینهٔ۲ اگر این تابع را به صورت دوضابطه‌ای بنویسیم، در هر دو بازه تابعی خطی است. برای آن‌که این تابع اکیداً صعودی باشد باید شیب هر دو خط مثبت باشد. شیب این خطوط $a-2$ و $a+2$ است؛ پس باید خط با شیب کم‌تر (یعنی $a-2$) دارای شیب مثبت باشد:

$$a-2>0 \Rightarrow a>2$$

$$g=\begin{cases}\overbrace{(a-2)}^{\text{باید مثبت باشد}}x+\cdots & x\ge -\frac{1}{2}\\ (a+2)x+\cdots & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

تذکر اگر شیب $a-2$ مثبت باشد قطعاً $a+2$ نیز مثبت است!

$$a-2>0 \Rightarrow a+2>4$$

-۹۰۲ گزینهٔ۳ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x-6-(x+1) & x>3\\ 6-2x-(x+1) & -1\le x\le 3\\ 6-2x-(-x-1) & x<-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-7 & x>3\\ -3x+5 & -1\le x\le 3\\ -x+7 & x<-1\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها، تابع f در بازهٔ $(3,+\infty)$ صعودی است. (زیرا شیب خط در این بازه مثبت است.) با توجه به خطی‌بودن تابع در این بازه، برد این تابع در این بازه $(-4,+\infty)$ است و داریم:

$$g(x)=x-7 \Rightarrow y=x-7 \Rightarrow x=y+7$$

$$D_g=(3,+\infty) \Rightarrow R_g=(-4,+\infty)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g^{-1}(x)=x+7 \\ D_{g^{-1}}=(-4,+\infty) \end{cases}$$

۹۰۳- گزینهٔ ۴ تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases} 2x-6-(x+4)+x & x>3 \\ -2x+6-(x+4)+x & -4\le x\le 3 \\ -2x+6+x+4+x & x<-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} 2x-10 & x>3 \\ -2x+2 & -4\le x\le 3 \\ 10 & x<-4 \end{cases}$$

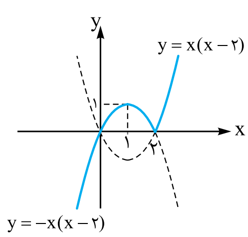
پس در بازهٔ $[-4,3]$ تابع داده‌شده اکیداً نزولی است (چون شیب خط در این بازه منفی است). چون این تابع خطی است پس برد آن در این بازه برابر $(f(-4)=10, f(3)=-4)$ $[-4,10]$ است پس دامنهٔ تابع معکوس در این بازه، بازهٔ $[-4,10]$ است. پس ④ صحیح است. اما ما ضابطهٔ تابع معکوس را نیز به دست می‌آوریم:

$$y=-2x+2 \Rightarrow 2x=2-y \Rightarrow x=1-\frac{1}{2}y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=1-\frac{1}{2}x \\ D_{f^{-1}}=[-4,10] \end{cases}$$

۹۰۴- گزینهٔ ۳ این تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس آن را رسم می‌کنیم:

$$y=x|x-2|=\begin{cases} x(x-2) & x\ge 2 \\ -x(x-2) & x<2 \end{cases}$$



با توجه به شکل، این تابع در بازهٔ $(1,2)$ نزولی است و ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=-x^2+2x$ است. برد تابع در این بازه، بازهٔ $(0,1)$ است پس دامنهٔ تابع معکوس نیز $(0,1)$ است. حال ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y=-x^2+2x \Rightarrow -y=x^2-2x$$

$$\Rightarrow (x-1)^2-1=-y \Rightarrow (x-1)^2=1-y$$

$$x-1=\underset{\substack{\downarrow \\ \text{غ ق ق (چون } 1<x<2 \text{ است)}}}{\pm}\sqrt{1-y} \xrightarrow{1<x<2} x-1=\sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x=1+\sqrt{1-y} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x} \\ D_{f^{-1}}=(0,1) \end{cases}$$

۹۰۵- گزینهٔ ۲ ابتدا باید دامنهٔ توابع $g(x)=f(x-1)$ و $h(x)=f(5-x)$ را به دست آوریم. چون $D_f=[0,+\infty)$ است داریم:

$$\begin{cases} g(x)=f(x-1)\ ,\ D_g: x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \\ h(x)=f(5-x)\ ,\ D_h: 5-x\ge 0 \Rightarrow x\le 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1\le x\le 5$$

اولاً باید مجموعه‌جواب زیرمجموعهٔ دامنهٔ این دو تابع باشد پس $1\le x\le 5$ است. از طرفی چون تابع f اکیداً نزولی است، داریم:

$$f(x-1)<f(5-x) \xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} x-1>5-x$$

$$\Rightarrow 2x>6 \Rightarrow x>3$$

از اشتراک دو شرط $1\le x\le 5$ و $x\ge 3$ مجموعه‌جواب نامعادله ایجاد می‌شود: $(3,+\infty)\cap[1,5]=(3,5]$

۹۰۶- گزینهٔ ۲ اگر تابع f تابعی اکیداً صعودی باشد و بدانیم $x_1<x_2$، $f(x_1)<f(x_2)$ داریم:

اعدادی عضو دامنهٔ این تابع هستند که عبارت زیر رادیکال را نامنفی کنند:

$$f(2x-1)-f(x+1)\ge 0 \Rightarrow f(2x-1)\ge f(x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} 2x-1\ge x+1 \Rightarrow x\ge 2$$

از طرفی چون دامنهٔ توابع $y=f(x+1)$ و $y=f(2x-1)$، $\mathbb{R}$ است پس دامنهٔ تابع داده‌شده همان بازهٔ $[2,+\infty)$ است.

۹۰۷- گزینهٔ ۱ اگر تابع f تابعی اکیداً صعودی باشد، اگر $x_2>x_1$ باشد داریم $f(x_2)>f(x_1)$ (و برعکس). پس چون تابع $f(x)=\log x$ (مبنای لگاریتم ۱۰ است) تابعی اکیداً صعودی است، داریم:

$$\log(x^2-3x)<\log(2x-4)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} x^2-3x<2x-4$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4<0 \Rightarrow x\in(1,4) \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به دامنهٔ تابع لگاریتم باید عبارت جلوی لگاریتم‌ها مثبت باشند:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \Rightarrow x<0 \text{ یا } x>3 & (2) \\ 2x-4>0 \Rightarrow 2<x & (3) \end{cases}$$

از اشتراک ۳ شرط (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} x\in(3,4) \Rightarrow b-a=1$$

۹۰۸- گزینهٔ ۲ اولاً باید x عضو دامنهٔ توابع $g(x)=f(-x)$ و $y=fof(x)$ باشد. پس ابتدا دامنهٔ این توابع را به دست می‌آوریم:

$$D_f=[-1,+\infty) \xrightarrow[\text{قرینه می‌شوند}]{\text{اعضای دامنه}} D_g=(-\infty,1]$$

$$D_{fof}=\{\underset{\substack{\downarrow \\ -1\le x}}{x\in D_f} \mid \underset{\substack{\downarrow \\ 1-\sqrt{x+1}}}{f(x)} \in \underset{\substack{\downarrow \\ [-1,+\infty)}}{D_f}\} \Rightarrow 1-\sqrt{x+1}\ge -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}\le 2 \Rightarrow x+1\le 4 \Rightarrow x\le 3$$

$$\Rightarrow D_{fof}=\{-1\le x \mid x\le 3\}=[-1,3]$$

$$D_g\cap D_{fof}=[-1,1] \qquad (1)$$

از طرفی در هر تابع اکیداً نزولی اگر $f(x_2)<f(x_1)$ باشد، آن‌گاه $x_2>x_1$ است. چون تابع f در این سؤال تابعی اکیداً نزولی است؛ داریم:

$$f(f(x))<f(-x) \xrightarrow[\text{است}]{\text{f اکیداً نزولی}} f(x)>-x$$

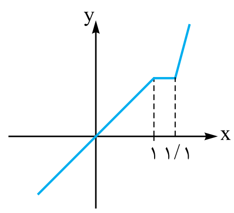
$$\Rightarrow 1-\sqrt{x+1}>-x \Rightarrow x+1>\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2>(x+1) \Rightarrow x^2+x>0$$

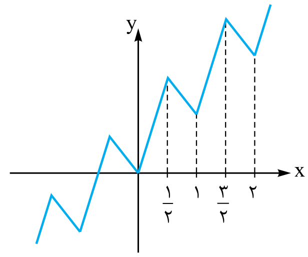
$$\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \qquad (2)$$

از اشتراک شروط (۱) و (۲) داریم: $(1)\cap(2) \Rightarrow x\in(0,1]$

۹۰۹- گزینهٔ ۴ در تعریف تابع اکیداً صعودی داریم هرگاه به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ تابع f که $x_۲ > x_۱$ است، اگر داشته باشیم $f(x_۲) > f(x_۱)$ آن‌گاه تابع f صعودی اکید است. تأکید کنیم که به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$! نه هر دو $x_۱$ و $x_۲$ای که ۱ واحد با هم فاصله دارند. مثلاً در توابع زیر همواره $f(x) < f(x+۱)$ است. اما این توابع الزاماً صعودی اکید نیستند.



شکل (۱)



شکل (۲)

در تابع شکل (۱) و شکل (۲) به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ای که $x_۲ = x_۱ + ۱$ است $f(x_۱) < f(x_۲)$ است اما این توابع صعودی اکید نیستند حتی در شکل (۲) تابع f نه صعودی است و نه نزولی.

۹۱۰- گزینهٔ ۳ باید $x^۳ f(x+۱) \ge ۰$ باشد. برای این کار باید عبارت $x^۳ f(x+۱)$ را تعیین علامت کنیم.

چون تابع $f(x+۱) = (\frac{۱}{۲})^{x-۱} - ۱$ تابعی اکیداً نزولی است، پس به ازای اعداد قبل از ریشهٔ خود مثبت و به ازای اعداد بعد از ریشهٔ خود منفی است.

پس با محاسبهٔ ریشهٔ این تابع آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$(\frac{۱}{۲})^{x-۱} - ۱ = ۰ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{x-۱} = ۱ \Rightarrow x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

		۰		۱	
$f(x+۱)$	+		+	۰	−
$x^۳$	−	۰	+		+
$x^۳ f(x+۱)$	−	۰	+	۰	−

$x^۳ f(x+۱) \ge ۰ \Rightarrow x \in [۰,۱]$

۹۱۱- گزینهٔ ۴ تابع f تابعی اکیداً صعودی است؛ پس اگر $f(x_۱) \le f(x_۲)$ باشد $x_۱ \le x_۲$ است.

برای آن‌که عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد باید داشته باشیم:

$$f(\frac{۱}{x}) - f(x) \ge ۰ \Rightarrow f(\frac{۱}{x}) \ge f(x)$$

$$\xrightarrow[\text{صعودی است}]{\text{f اکیداً}} \frac{۱}{x} \ge x \Rightarrow \frac{۱}{x} - x \ge ۰ \Rightarrow \frac{۱-x^۲}{x} \ge ۰$$

$\xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}}$

		−۱		۰		۱	
$P = \frac{۱-x^۲}{x}$	+	۰	−	ت ن	+	۰	−

$\xrightarrow{P \ge ۰} (-\infty,-۱] \cup (۰,۱]$

۹۱۲- گزینهٔ ۱ چون تابع f اکیداً صعودی است، تابع $y = f(x-k)$ ($|k|$ واحد f را به سمت راست یا چپ می‌بریم) نیز اکیداً صعودی است.

توابع $y = x+۳$ و $y = f(x-k)$ هر دو صعودی اکید هستند. اگر ریشهٔ هر دو تابع یکسان باشد مطابق جدول زیر قطعاً تابع $y = (x+۳)f(x-k)$ همواره نامنفی است. (اما اگر ریشه‌ها یکسان نباشند قطعاً دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ نیست. (چرا؟))

		−۳	
$f(x-k)$	−		+
$x+۳$	−		+
$(x+۳)f(x-k)$	+		+

چون $y = f(x-k)$ صعودی اکید است بعد از ریشه‌اش باید مثبت و قبل از آن منفی باشد. $\Rightarrow (x+۳)f(x-k) \ge ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

پس باید تابع $y = f(x-k)$ نیز دارای ریشهٔ ۳− باشد، در نتیجه:

$f(-۳-k) = ۰$

از طرفی $f(۲) = ۰$ است. پس (چون f تابعی یک‌به‌یک است):

$-۳-k = ۲ \Rightarrow k = -۵$

۹۱۳- گزینهٔ ۴ اگر تابع f و g اکیداً نزولی باشند تابع fog اکیداً صعودی است. چون تابع $g(x) = ۲-x$ و $y = f(x)$ اکیداً نزولی‌اند پس تابع fog؛ یعنی $y = f(۲-x)$ اکیداً صعودی است.

طبق خواستهٔ سؤال، باید فقط به ازای یک عدد زیر رادیکال نامنفی باشد.

آن‌چه مشخص است تابع زیر رادیکال به ازای $x = -\frac{b}{a}$ (ریشهٔ $ax+b$) قطعاً صفر است. پس $x = -\frac{b}{a}$ عضو دامنهٔ این تابع است.

با توجه به آن‌که تابع $y = f(۲-x)$ اکیداً صعودی است، باید این تابع نیز ۱ ریشهٔ $-\frac{b}{a}$ داشته باشد و برای آن‌که تابع زیر رادیکال فقط به ازای $x = -\frac{b}{a}$ تعریف شده باشد، باید خط $y = ax+b$ شیب منفی داشته باشد. (اکیداً نزولی باشد):

		$-\frac{b}{a}$		
$f(۲-x)$	−		+	چون $f(۲-x)$ اکیداً صعودی است
$ax+b$	+		−	$\Rightarrow$ a باید منفی باشد
$(ax+b)f(۲-x)$	−		−	

$(ax+b)f(۲-x) \ge ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

چون $-\frac{b}{a}$ ریشهٔ تابع $h(x) = f(۲-x)$ است، پس باید:

$$g(-\frac{b}{a}) = f(۲+\frac{b}{a}) = ۰ \Rightarrow f(\frac{۲a+b}{a}) = ۰ \ , \ a < ۰$$

تذکر: اگر $a > ۰$ باشد یا تابع $y = f(۲-x)$ ریشه نداشته باشد آن‌گاه به ازای یک بازه زیر رادیکال مثبت خواهد بود.

۹۱۴- گزینهٔ ۳ ترکیب یک تابع نزولی و یک تابع صعودی (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) تابعی نزولی و ترکیب دو تابع نزولی (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) تابعی صعودی است. این موضوع را برای ۱ و ۲ نشان می‌دهیم:

$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{g نزولی}} g(x_۱) \ge g(x_۲)$

$\xrightarrow{\text{f صعودی}} f(g(x_۱)) \ge f(g(x_۲))$

$\Rightarrow fog(x_۱) > fog(x_۲) \Rightarrow$ fog نزولی است

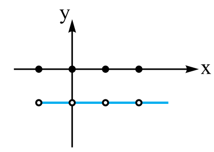
$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{نزولی } g} g(x_۱) \ge g(x_۲)$

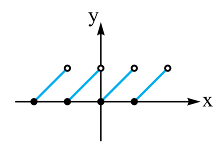
$\xrightarrow{\text{نزولی } g} g(g(x_۱)) \le g(g(x_۲))$

$\Rightarrow gog(x_۱) \le gog(x_۲) \Rightarrow$ gog صعودی است

اگر تابع g نزولی باشد تابع $-g$ صعودی است. از طرفی مجموع هر دو تابع صعودی، تابعی صعودی و مجموع هر دو تابع نزولی تابعی نزولی است. پس تابع $f+(-g)$ یا همان تابع $f-g$ قطعاً صعودی است.

اما جمع یک تابع صعودی و یک تابع نزولی ممکن است یکنوا نباشد. مانند $f(x)=[x]$ و $g(x)=[-x]$ که جمع آن ها تابع $y=[x]+[-x]$ است که غیریکنوا است یا اگر $f(x)=x$ و $g(x)=-[x]$ باشد تابع $y=x-[x]$ غیریکنوا است.


$y=[x]+[-x]$


$y=x-[x]$

۹۱۵- گزینه «۳» اگر f و g توابعی صعودی باشند تابع $f+g$ نیز صعودی است. تابع $f(x)=x$ و $g(x)=[x]$ توابعی صعودی‌اند پس تابع جمع آن‌ها یعنی $y=x+[x]$ نیز صعودی است. پس تابع ۱ یکنوا است.

اگر توابع f و g صعودی باشند ترکیب آن‌ها (fog و gof) نیز صعودی است. توابع $g(x)=x^۳+۱$ و $f(x)=\log x$ هر دو اکیداً صعودی‌اند. پس ترکیب آن‌ها؛ یعنی $y=\log(x^۳+۱)$ اکیداً صعودی است. پس تابع ۲ نیز یکنوا است.

اما ۳ یکنوا نیست. زیرا دارای ۳ ریشهٔ ۱، ۰ و ۱- است و مطابق جدول تعیین علامت زیر یکنوا نیست.

		-۱		۰		۱	
$x(x-۱)(x+۱)$	$-$		$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)<f(۲) \Rightarrow \text{f نزولی نیست} \\ f(-\frac{۱}{۲})>f(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow \text{f صعودی نیست} \end{cases}$

اگر توابع f و g صعودی باشند، به طوری که همواره $f(x)$ و $g(x)$ نامنفی باشند قطعاً تابع $f\times g$ صعودی است.

$x_۱<x_۲ \Rightarrow \begin{cases} g(x_۱)<g(x_۲) \\ f(x_۱)<f(x_۲) \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{نامنفی}]{\text{دو طرف نامساوی‌ها}} g(x_۱)f(x_۱)<g(x_۲)f(x_۲)$

چون دامنهٔ تابع ۴ بازهٔ $[۰,+\infty)$ است. پس $|x|=x$ است.

از آن‌جا که تابع $g(x)=x$ تابعی صعودی و به ازای $x\ge ۰$، نامنفی است و تابع $f(x)=\sqrt{x}$ تابعی صعودی و نامنفی است پس تابع ضرب آن‌ها یعنی $y=x\sqrt{x}$ نیز صعودی است.

۹۱۶- گزینه «۲» تابع f در بازهٔ $[a,b]$ تابعی صعودی و دارای مقادیر مثبت است و تابع g در این بازه تابعی نزولی و دارای مقادیر مثبت است. اثبات می‌کنیم با این ویژگی تابع $\frac{f}{g}$ قطعاً صعودی اکید است.

$x_۱<x_۲ \xrightarrow{\text{صعودی اکید } f} ۰<f(x_۱)<f(x_۲) \quad (۱)$

$x_۱<x_۲ \xrightarrow{\text{نزولی اکید } g} g(x_۱)>g(x_۲)>۰$

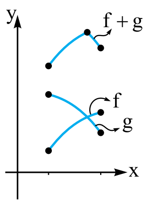
$\xrightarrow[\text{تساوی مثبت}]{\text{دو طرف}} ۰<\frac{۱}{g(x_۱)}<\frac{۱}{g(x_۲)} \quad (۲)$

$\Rightarrow \begin{cases} ۰<f(x_۱)<f(x_۲) \\ ۰<\frac{۱}{g(x_۱)}<\frac{۱}{g(x_۲)} \end{cases} \xrightarrow{\times} ۰<\frac{f(x_۱)}{g(x_۱)}<\frac{f(x_۲)}{g(x_۲)}$

$\Rightarrow \frac{f}{g}(x_۱)<\frac{f}{g}(x_۲) \Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ صعودی اکید است

به همین ترتیب می‌توان نشان داد تابع $\frac{g}{f}$ نزولی اکید است.

اما چون تابع f صعودی اکید است پس $-f$ نزولی اکید است و چون مجموع دو تابع نزولی اکید، تابعی اکیداً نزولی است، تابع $g+(-f)$ (یا همان $g-f$) تابعی اکیداً نزولی است.

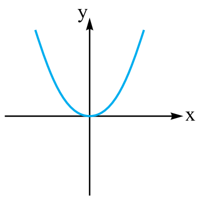


در مورد جمع دو تابع که یکی صعودی و دیگری نزولی اکید است نمی‌توان نظر داد اما در این سؤال مشخص است که تابع جمع f و g، نه نزولی است نه صعودی:

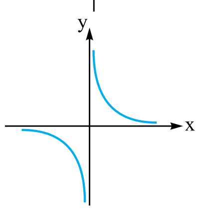
۹۱۷- گزینه «۴» اگر تابع f صعودی باشد تابع $f(-x)$ نزولی است و تابع $-f(-x)$ صعودی است. از طرفی مجموع دو تابع صعودی، صعودی است پس مجموع دو تابع $y=f(x)$ و $y=-f(-x)$ تابعی صعودی است. پس تابع ۴ صعودی است (همین مطلب اگر f نزولی باشد نیز برقرار است).

اما اگر f یکنوا باشد ممکن است توابع $\frac{۱}{f}$ و $f^۲$ و $y=f(x)+f(-x)$ یکنوا نباشند، مثلاً اگر $f(x)=x$ باشد، هیچ‌کدام از توابع $\frac{۱}{f}$، $f^۲$ و $y=f(x)+f(-x)$ یکنوا نیستند، زیرا:

$f(x)=x \Rightarrow f^۲(x)=x^۲ \Rightarrow$

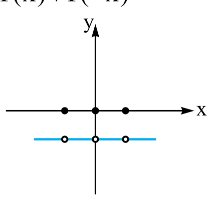


$f(x)=x \Rightarrow \frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{x} \Rightarrow$



$f(x)=[x] \Rightarrow f(x)+f(-x)=۰$

$\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$



۹۱۸- گزینه «۲» مجموع دو تابع f و g در بازهٔ L تابع ثابت ۱ است:

$f(x)+g(x)=\cancel{x^۴}+\sin^۲x+\cos^۲x-\cancel{x^۴}$

$=\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

در نتیجه در این بازه داریم: $g(x)=۱-f(x)$

چون تابع f در این بازه اکیداً صعودی است پس تابع $y=-f(x)$ در این بازه تابعی اکیداً نزولی است و در نتیجه تابع g نیز (که از انتقال ۱ واحد تابع $y=-f(x)$ به بالا ایجاد می‌شود) اکیداً نزولی است. (البته در بازهٔ L)

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲) \Rightarrow -f(x_۱)>-f(x_۲)$$
$$\Rightarrow ۱-f(x_۱)>۱-f(x_۲) \Rightarrow g(x_۱)>g(x_۲)$$

$\Rightarrow$ g در این بازه نزولی اکید است.

۹۱۹- گزینه۳ می‌دانیم اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد قطعاً یک‌به‌یک است. تابع $f(x)=x$ یک تابع اکیداً صعودی است. اگر تابعی مانند g صعودی یا نزولی باشد تابع $-g$ به ترتیب نزولی یا صعودی است. چون تابع $g(x)=[-\frac{x}{۳}]$ تابعی نزولی است تابع $-g$ یعنی $y=-[-\frac{x}{۳}]$ صعودی است. از طرفی مجموع دو تابع که یکی صعودی اکید و دیگری صعودی است، صعودی اکید خواهد بود. پس جمع توابع f و $-g$ تابعی اکیداً صعودی است و در نتیجه تابع $y=x-[-\frac{x}{۳}]$ تابعی یک‌به‌یک است.

مثال نقص برای غیر یک‌به‌یک بودن بقیهٔ گزینه‌ها به صورت زیر است:

(۱) $f(۰)=۰=f(-۱)=۰$

(۲) $f(۰)=f(۱)=۰$

(۴) $f(۰)=f(۱)=۰$

۹۲۰- گزینه۱ مجموع دو تابع اکیداً صعودی تابعی اکیداً صعودی است و هر تابع اکیداً صعودی یک‌به‌یک است. پس تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ تابعی یک‌به‌یک است زیرا توابع $y=x$ و $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها نیز اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.

بررسی نادرستی بقیهٔ گزینه‌ها:

(۲) $g(۱)=g(۰)=۰$ است، پس g یک‌به‌یک نیست.

(۳) ضابطهٔ تابع h را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$h(x)=۲x+\frac{۱}{x}=\frac{۲x^۲+۱}{x}$$

خروجی‌مانند $y=۳$ رادوعددایجادمی‌کنند،زیرا Δ معادلهٔزیرمثبت‌می‌شود:

$$\frac{۲x^۲+۱}{x}=۳ \Rightarrow ۲x^۲+۱=۳x \Rightarrow ۲x^۲-۳x+۱=۰$$
$$\xrightarrow{\Delta>۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

(۴) خروجی مانند $y=\frac{۱}{۳}$ را دو عدد ایجاد می‌کند:

$$\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x^۲+۱=۳x \Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$
$$\xrightarrow{\Delta>۰} x=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

۹۲۱- گزینه۱ محل(های) برخورد هر تابع اکیداً صعودی با معکوسش (در صورت وجود) بر روی خط $y=x$ است؛ پس کافی است تعداد محل‌های برخورد تابع f را با خط $y=x$ به دست آوریم:

$$x^۳+۲x=x \Rightarrow x^۳+x=۰ \Rightarrow x(x^۲+۱)=۰ \Rightarrow x=۰$$

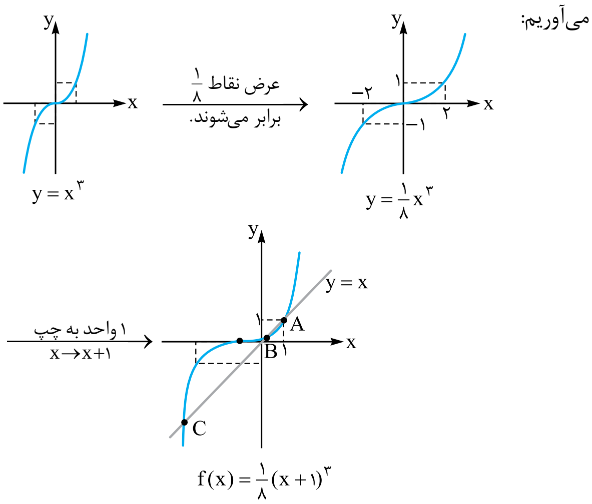
پس توابع f و $f^{-۱}$ فقط در نقطه‌ای به طول صفر متقاطع‌اند.

۹۲۲- گزینه۳ محل(های) برخورد هر تابع اکیداً صعودی با معکوسش (در صورت وجود) روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم: $f(x)=(x+۱)^۳-۱ \Rightarrow$ f اکیداً صعودی است

$$x^۳+۳x^۲+۳x=x \Rightarrow x^۳+۳x^۲+۲x=۰$$
$$\Rightarrow x(x^۲+۳x+۲)=۰ \Rightarrow x(x+۱)(x+۲)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۱ \\ x=-۲ \end{cases}$$

پس مجموع طول نقاط تقاطع توابع f و $f^{-۱}$ برابر -۳ است.

۹۲۳- گزینه۳ اگر تابع f اکیداً صعودی باشد تابع معکوس خود را فقط بر روی خط $y=x$ (نیمساز ربع‌های اول و سوم) قطع می‌کند. پس با رسم نمودار تابع f و خط $y=x$ تعداد نقاط برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم:



با توجه به شکل تابع f با خط $y=x$ در نقاط A، B و C که طول نقطهٔ A برابر ۱ است متقاطع است. پس تابع f معکوس خود را در سه نقطه قطع می‌کند.