فهرست

۵۸۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{3x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{4}$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{4}{3}$ ۴) وجود ندارد.

۵۸۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\tan 3x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{5}{3}$ ۲) $\dfrac{25}{3}$ ۳) $\dfrac{25}{9}$ ۴) وجود ندارد.

۵۸۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -2 ۴) ۲

۵۸۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۸۶- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\dfrac{1}{3}$ ۴) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

۱۰ رفع ابهام حد توابع مثلثاتی با استفاده از تغییر متغیر

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۵۵
صفحهٔ پاسخ: ۲۵۵

۵۸۷- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{2x-\pi}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\dfrac{\pi}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) -1

۵۸۸- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{3x-\pi}{\sin 3x}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

۵۸۹- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{2\cos x}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $\dfrac{1}{2}$

۵۹۰- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۵۹۱- حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2x+\pi}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) $-\dfrac{3}{2}$

۵۹۲- مقدار $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\cos a$ ۲) $-\cos a$ ۳) $-\sin a$ ۴) $\sin a$

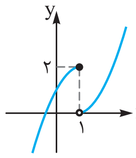
۵۹۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

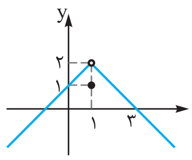
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) 2π

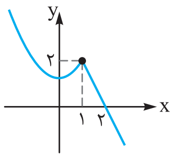
۱۱ پیوستگی تابع در یک نقطه

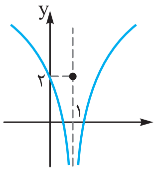
صفحهٔ درس‌نامه: ۲۵۷
صفحهٔ پاسخ: ۲۵۸

۵۹۴- کدام‌یک از نمودارهای توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

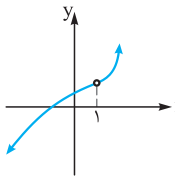
۱) 

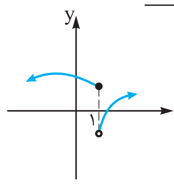
۲) 

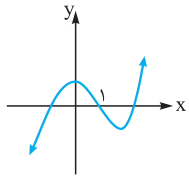
۳) 

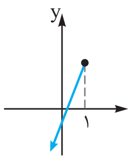
۴) 

۵۹۵- کدام تابع در $x=1$ حد دارد ولی ناپیوسته است؟

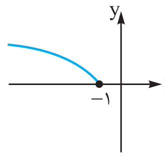
۱) 

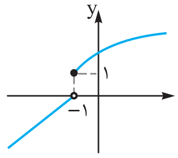
۲) 

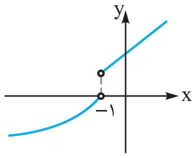
۳) 

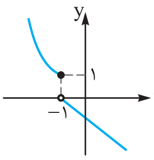
۴) 

۵۹۶- نمودار تابعی که در همسایگی $x=-1$ تعریف‌شده و در این نقطه فقط پیوستگی چپ داشته باشد، کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۹۷- کدام‌یک از توابع زیر به ازای هر عدد حقیقی پیوسته نمی‌باشد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $y=\sqrt[3]{x+1}$ ۲) $y=\dfrac{2x-1}{|x|}$ ۳) $y=3x^3-x^2+1$ ۴) $y=\sin x$

۵۹۸- تعداد نقاط ناپیوستهٔ نمودار تابع با ضابطهٔ $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{3-\sqrt{x+4}}{1+\sqrt[3]{x+1}}=f(x)$، کدام است؟ *(ریاضی ۹۷)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۹۹- با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+a} & x\ge -1\\ x^2+ax & x<-1\end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته است؟ *(تجربی خارج ۸۷)*

۱) $\{1,\sqrt{2}\}$ ۲) $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۰۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+3} & x<1\\ x^2+ax & x\ge 1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۷)*

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۶۰۱- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax+2^{x-3} & x<3\\ a\log_2(1+x) & x\ge 3\end{cases}$ در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟ *(تجربی ۹۷)*

۱) ۲- ۲) ۱/۵- ۳) ۱ ۴) صفر

۶۰۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}a\sin 2x & \frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{4}\\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) & \frac{3\pi}{4}\le x<2\pi\end{cases}$، در $x=\frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۰)*

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۶۰۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x<1\\ 0 & x=1\\ \cos\pi x & x>1\end{cases}$ کدام‌یک از شرایط زیر را در $x=1$ دارد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) فقط پیوستگی راست ۲) فقط پیوستگی چپ ۳) پیوسته است. ۴) نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ

۶۰۴- مقدار k چه‌قدر باشد تا $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\ne 2\\ k & x=2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

۶۰۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+x-2|}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در $x=1$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۰)

۱) هر مقدار a ۲) -3 ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۶۰۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۶)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۶۰۷- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax-a+2 & x\leq 1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۶۰۸- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|} & x\neq -2\\ a & x=-2\end{cases}$ ، در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته است؟ (تجربی ۹۸)

۱) -12 ۲) -6 ۳) ۶ ۴) ۱۲

۶۰۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2|x-2|} & x\neq 2\\ 2 & x=2\end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در $x=2$ ، چگونه است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) از چپ پیوسته ۲) پیوسته

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته ۴) از راست پیوسته

۶۱۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & |x|>1\\ 2x & |x|\leq 1\end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -1 چگونه است؟ (تجربی ۸۸)

۱) در -1 ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته ۲) در -1 ناپیوسته، در ۱ پیوسته ۳) در -1 پیوسته، در ۱ پیوسته ۴) در -1 پیوسته، در ۱ ناپیوسته

۶۱۱- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} & x>0\\ a\sin(x+\frac{\pi}{6}) & x\leq 0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۶۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۲ پیوستگی در توابع شامل جزءصحیح

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۶۰
صفحهٔ پاسخ: ۲۶۱

۶۱۳- تابع $y=[x]$ در $x=-2$ چگونه است؟

۱) فقط از راست پیوسته است. ۲) فقط از چپ پیوسته است. ۳) حد دارد ولی ناپیوسته است. ۴) پیوسته است.

۶۱۴- تابع $y=[2x]$ در $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{1}{3}$ به ترتیب چگونه است؟

۱) پیوسته ـ ناپیوسته ۲) ناپیوسته ـ پیوسته ۳) پیوسته ـ پیوسته ۴) ناپیوسته ـ ناپیوسته

۶۱۵- تابع $y=[\sin x]$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۱۶- تابع $y=x^2[x]+3x$ در $x=0$ .... و در $x=1$ .... است. (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) پیوسته ـ پیوسته ۲) پیوسته ـ ناپیوسته ۳) ناپیوسته ـ پیوسته ۴) ناپیوسته ـ ناپیوسته

۶۱۷- تابع $y=[-x]$ در چند نقطه از مجموعهٔ $\{\frac{1}{3},2,\sqrt{3}\}$ پیوستگی راست دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۵۸- مجانب قائم تابع $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $x=-2$ ۲) $x=-3$ ۳) $x=2$ ۴) $x=3$

۶۵۹- تعداد مجانب‌های قائم تابع $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3-4x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۶۰- تعداد مجانب‌های قائم تابع $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-3x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

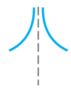
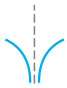
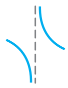
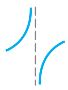
۶۶۱- تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]}$ دارای چند مجانب قائم است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) (کانون فرهنگی آموزش۹۸)

۱) بی‌شمار ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) مجانب قائم ندارد.

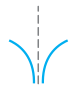
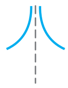
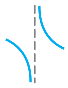
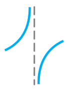
۶۶۲- تابع $f(x)=\dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}$ چند مجانب قائم دارد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

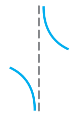
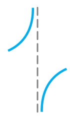
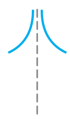
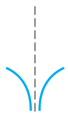
۶۶۳- نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟ (ریاضی ۸۲)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

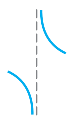
۶۶۴- نمودار تابع $y=\dfrac{-2x+1}{x^2-4x+4}$ در اطراف مجانب قائم خود چگونه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

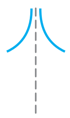
۶۶۵- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2[x]-3}{x^2-4x+4}$ در اطراف مجانب قائم آن به کدام صورت است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) (کانون فرهنگی آموزش۹۸)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۶۶۶- نمودار تابع $y=\dfrac{1}{x+|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۶۶۷- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+bx+4}$ در اطراف مجانب قائمش به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش۹۹)

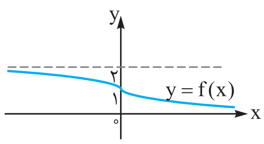


۱) ۴ ۲) ± 4 ۳) -4 ۴) ± 2

۶۶۸- اگر فاصلهٔ مقادیر تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ تا محور xها از $\dfrac{1}{100}$ کم‌تر شود، مقادیر x در کدام فاصله باید قرار گیرد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(\dfrac{1}{1000},\dfrac{1}{100})$ ۲) $(-\infty,-100)\cup(100,+\infty)$ ۳) $(100,+\infty)$ ۴) $(0,100)$

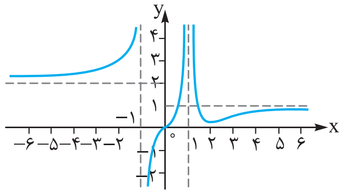
۶۶۹- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ۲) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

۳) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ۴) هیچ‌کدام

۶۷۰- با توجه به نمودار مقابل، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ ۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$

۶۷۱- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=0/5^x$ غلط است؟

۱) به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مقادیر تابع را بزرگ کنیم به شرط آن‌که x به اندازهٔ کافی کوچک باشد.

۲) به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مقادیر تابع را به صفر نزدیک کنیم به شرط آن‌که x به اندازهٔ کافی بزرگ باشد.

۳) تابع در $+\infty$ حد دارد.

۴) تابع در $-\infty$ حد دارد.

۶۷۲- حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2-3x} + \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x+2}{x-1}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۷۳- حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-x^4+1}{x+x^5+3}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) -1 ۳) صفر ۴) $\dfrac{1}{3}$

۶۷۴- حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} (3+2x-5x^5)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) -5 ۲) -3 ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۶۷۵- حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^5-2x^3+1}{3x^3-2x^5+x+4}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\dfrac{4}{3}$ ۲) -2 ۳) صفر ۴) $+\infty$

۶۷۶- حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5-2x^3+1}{2x^4+x+7}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\dfrac{3}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{7}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۶۷۷- حاصل کدام‌یک از حدود زیر نامتناهی است؟

۱) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x+4}{x^2+x-8}$ ۳) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$ ۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}$

۶۷۸- حاصل کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-\frac{1}{2}x^3+7x^2-6)$ ۲) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x}{3-x}$ ۳) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^5-6x^3-x}{x^2-5x+1}$ ۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{4}$

۶۷۹- اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

۶۸۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{|3x-1|-|2x+1|}{|3-x|-2x}$ مفروض است. اختلاف دو مقدار $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ از هم کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش۹۹)

۱) صفر ۲) $\dfrac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\dfrac{4}{3}$

۶۸۱- حد تابع $y=\dfrac{\sqrt{-x+1}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{-4x+1}+\sqrt[3]{27x}}$ وقتی $x\to -\infty$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) وجود ندارد. ۴) $\dfrac{1}{2}$

۶۸۲- اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{ax^n+3x-1}{2x^3-x+5}=4$ باشد، مقدار an کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۶۸۳- اگر $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x)=2^x$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1^+} g(f(x))$ کدام است؟ (ریاضی ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

۶۸۴- اگر $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0^-}(gof)(x)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

۱) -3 ۲) -1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۶۸۵- اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=-1$، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-2$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۸۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}$ اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{3}$، آن‌گاه $f(-1)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) -2 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

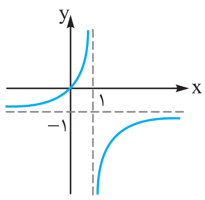
۶۸۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{5}{2}$ باشد، آن‌گاه حد $f(x)$ وقتی $x\to -1$، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۶۸۸- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}x[\frac{1}{x}]$ کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

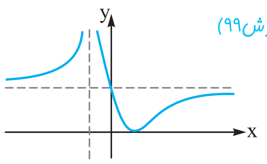
۱) صفر ۲) 1 ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۶۸۹- منحنی تابع $f(x)$ مطابق شکل مقابل است. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to(-L)^-}f(x)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش۹۸)



۱) 1
۲) -1
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

۶۹۰- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-2x+a}{x^2+bx+1}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش۹۹)



۱) صفر ۲) 3
۳) 2 ۴) -1

۶۹۱- اگر $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ و $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش۹۸)

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) 1 ۴) -1

۶۹۲- اگر $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ کدام است؟ (تجربی۹۸)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

۱۷ مجانب افقی

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۷۵
صفحهٔ پاسخ: ۲۷۶

۶۹۳- مجانب افقی تابع $y=\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-1}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $y=-1$ ۲) $y=\frac{2}{3}$ ۳) $x=\frac{2}{3}$ ۴) مجانب افقی ندارد.

۶۹۴- اگر مجانب افقی تابع $y=\frac{2ax^2+3bx+1}{4x-5}$ به صورت $y=-6$ باشد، آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -4 ۳) -8 ۴) 8

۶۹۵- تعداد مجانب‌های افقی و قائم نمودار تابع $y=\frac{x+2}{x^2-4}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) دو مجانب قائم ـ یک مجانب افقی ۲) یک مجانب قائم ـ یک مجانب افقی
۳) فقط دو مجانب قائم ۴) فقط دو مجانب افقی

$$= \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} - (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۲$$

۵۷۷ گزینه ۴ با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\sin x}{۱+\sin^۳ x} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{(۱+\sin x)}(۱-\sin x+\sin^۲ x)}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۱-\sin x+\sin^۲ x} = \frac{۱}{۱-(-۱)+(-۱)^۲} = \frac{۱}{۳}$$

۵۷۸ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲} = \frac{۰}{۰}$$

می‌دانیم $۱-\sin ۲x=(\sin x-\cos x)^۲$، بنابراین فرم کسر را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{(۱-\tan x)^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{(۱-\frac{\sin x}{\cos x})^۲} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x})^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\cancel{(\sin x-\cos x)^۲}}{\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)^۲}}{\cos^۲ x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \cos^۲ x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۵۷۹ گزینه ۱

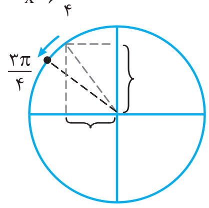
$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱-\tan^۲ x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}} = \frac{۰}{۰}$$

می‌دانیم $(\sin x+\cos x)^۲=۱+\sin ۲x$، بنابراین فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱-\tan^۲ x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{|\sin x+\cos x|}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی:



در $\frac{۳\pi}{۴}^-$ اندازهٔ $\sin x$ از اندازهٔ $\cos x$ بیشتر می‌باشد، با توجه به محدودهٔ زاویه، $\sin x$ مثبت و $\cos x$ منفی می‌باشد، بنابراین $\sin x+\cos x$ مقداری مثبت است، پس خودش از قدرمطلق بیرون می‌آید، پس در ادامه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\sin x+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{(\cos x-\sin x)\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cos^۲ x}}{\cancel{\sin x+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\cos x-\sin x}{\cos^۲ x} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۲\sqrt{۲}$$

فصل ۳

حد

درس‌نامهٔ ۹

رفع ابهام حد توابع مثلثاتی (با استفاده از هم‌ارزی)

این قسمت جزء درس کتابتان نیست اما چون خیلی کاربرد دارد به عنوان یک اشارهٔ کوتاه هم که شده ضرر ندارد. هم‌ارزی یعنی در حد به جای یک تابع می‌توانیم تابع دیگری را قرار دهیم. حد این تابع دوم دقیقاً مساوی همان تابع قبلی است ولی در عین حال محاسبهٔ حد را بسیار ساده می‌کند. این جا فقط در مورد سه هم‌ارزی مثلثاتی حرف می‌زنیم:

۱) $\underset{x\to ۰}{\sin x \sim x}$ ۲) $\underset{x\to ۰}{\tan x \sim x}$ ۳) $\underset{x\to ۰}{\cos^n x \sim ۱-n\frac{x^۲}{۲}}$

تذکر اولاً علامت ~ یعنی هم‌ارز، ثانیاً در هر سه تابع وقتی می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم که کمان جلوی تابع مثلثاتی به سمت صفر میل کند.

حالا بیایید کاربردشان را در چند مثال ببینیم:

الف) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x}{x}$

در $\sin ۲x$ وقتی $x\to ۰$ داریم $۲x\to ۰$، پس می‌توانیم به جای $\sin ۲x$ هم‌ارزش یعنی $۲x$ را در صورت کسر قرار دهیم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲x}{x} = ۲$$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{\sin^۲ ۲x}$

با استفاده از هم‌ارزی ۳ که در بالا دیدیم وقتی $x\to ۰$، $\cos x \sim ۱-\frac{x^۲}{۲}$، پس:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{\sin^۲ ۲x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱-(۱-\frac{x^۲}{۲})}{(۲x)^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{x^۲}{۲}}{۴x^۲} = \frac{۱}{۸}$$

حواسمان هست که وقتی $\sin ۲x \sim ۲x$ پس $\sin^۲ ۲x \sim (۲x)^۲$ یعنی توان سینوس به تابع هم‌ارزش منتقل می‌شود.

تست حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{۱-\cos x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** در هر سه کسینوس کمان به سمت صفر میل می‌کند پس در هر سه از هم‌ارزی $\cos^n x \sim ۱-n\frac{x^۲}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cos x-(\cos x)^{\frac{۱}{۲}}}{۱-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{(۱-\frac{x^۲}{۲})-(۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{x^۲}{۲})}{۱-(۱-\frac{x^۲}{۲})} = \lim_{x\to ۰} \frac{-\frac{x^۲}{۴}}{\frac{x^۲}{۲}} = -\frac{۱}{۲}$$

۵۸۰ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۵x}{\sin ۳x} = \frac{۰}{۰}$$

با توجه به هم‌ارزی $\sin x$ در اطراف $x=۰$ داریم: $\sin ۳x \sim ۳x$

بنابراین: $\lim_{x\to ۰} \frac{۵x}{\sin ۳x} = \frac{۵x}{۳x} = \frac{۵}{۳}$

۵۸۱ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\frac{0}{0}$$

با توجه به این‌که $\sin x$ در اطراف $x=0^-$ منفی می‌باشد، بنابراین $|\sin x|=-\sin x$ است. پس فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}$$

از طرفی با توجه به هم‌ارزی $\sin x\sim x$ در اطراف $x=0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

۵۸۲ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{3x}=\frac{0}{0}$$

با توجه به هم‌ارزی $\tan x\sim x$ در اطراف $x=0$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}$$

۵۸۳ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\tan 3x}=\frac{0}{0}$$

با توجه به هم‌ارزی‌های زیر در اطراف $x=0$ داریم:

$$\sin 5x\sim 5x\quad,\quad \tan 3x\sim 3x$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2}{x(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{3x^2}=\frac{25}{3}$$

۵۸۴ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$$

با توجه به هم‌ارزی $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$ و $x\to 0$

فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-(1-\frac{x^2}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

۵۸۵ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\frac{0}{0}$$

با توجه به هم‌ارزی‌های روبه‌رو: $\sin x\sim x\ ,\ \cos 2x\sim 1-\frac{(2x)^2}{2}\quad (x\to 0)$

فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{(2x)^2}{2})}{x.x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{x^2}=\frac{\frac{4x^2}{2}}{x^2}=2$$

۵۸۶ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}=\frac{0}{0}$$

با توجه به هم‌ارزی‌های روبه‌رو: $\cos 2x\sim 1-\frac{(2x)^2}{2}\ ,\ \sin 3x\sim 3x\quad (x\to 0)$

فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-(1-\frac{(2x)^2}{2})}}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-1+\frac{4x^2}{2}}}{3x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2x^2}}{3x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\,|x|}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}x}{3x}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

فصل ۳

حد:

درس‌نامهٔ ۱۰

رفع ابهام حد توابع مثلثاتی با استفاده از تغییر متغیر

در بعضی از حدهای مثلثاتی برای این‌که عامل صفرکننده را در صورت و مخرج ببینیم، مجبوریم تغییر متغیر بدهیم. در این حدها معمولاً اگر $x\to a$، عاملی شبیه $x-a$ (عامل صفرشونده) را برابر متغیر جدیدی مثل t فرض می‌کنیم و حد را برحسب t می‌نویسیم. بعد از آن معمولاً با استفاده از اتحادهای مثلثاتی یا هم‌ارزی‌هایی که دیدیم حد را حل می‌کنیم.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\pi-3x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ هم صورت کسر یعنی $2\cos x-1=2(\frac{1}{2})-1$ و هم مخرج کسر یعنی $\pi-3x=\pi-3(\frac{\pi}{3})$ برابر صفر می‌شوند. عامل $x-\frac{\pi}{3}$ را برابر t قرار می‌دهیم و x را برحسب t پیدا می‌کنیم و حواسمان هست که وقتی $x-\frac{\pi}{3}=t$ است به ازای $x\to\frac{\pi}{3}$ داریم $t\to 0$:

$$x-\frac{\pi}{3}=t\ \Rightarrow\ x=t+\frac{\pi}{3}\quad,\quad x\to\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ t\to 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\pi-3x}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos(t+\frac{\pi}{3})-1}{\pi-3(t+\frac{\pi}{3})}$$

حالا $\cos(t+\frac{\pi}{3})$ را با استفاده از فرمول $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ بسط می‌دهیم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{2(\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3})-1}{-3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{3}\sin t-1}{-3t}$$

حالا اگر از هم‌ارزی‌های $\cos t\sim 1-\frac{t^2}{2}$ و $\sin t\sim t$ استفاده کنیم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{3}\sin t-1}{-3t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{t^2}{2}-\sqrt{3}t-1}{-3t}=\lim_{t\to 0}\frac{t(-\frac{1}{2}t-\sqrt{3})}{-3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t-\sqrt{3}}{-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۵۸۷ گزینه ۳

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{2x-\pi}=\frac{0}{0}$$

با تغییر متغیر $t=x-\frac{\pi}{2}$ داریم: $x=t+\frac{\pi}{2}$ و همچنین می‌دانیم t به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{2x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\frac{\pi}{2})-1}{2(t+\frac{\pi}{2})-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{2t}$$

حالا با توجه به هم‌ارزی مقابل: $\cos t\sim 1-\frac{t^2}{2}\quad (t\to 0)$

فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{t^2}{2}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{t^2}{2}}{2t}=\lim_{t\to 0}-\frac{t}{4}=0$$

۵۸۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۳x-\pi}{\sin ۳x} = \frac{۰}{۰}$$

با تغییر متغیر $t = x-\frac{\pi}{۳}$ داریم: $x = t+\frac{\pi}{۳}$ و می‌دانیم t به سمت ۰ میل می‌کند

بنابراین:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۳x-\pi}{\sin ۳x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{۳(t+\frac{\pi}{۳})-\pi}{\sin(۳(t+\frac{\pi}{۳}))} = \lim_{t\to ۰} \frac{۳t}{\sin(۳t+\pi)}$$
$$= \lim_{t\to ۰} \frac{۳t}{-\sin ۳t}$$

با توجه به هم‌ارزی مقابل:
$$\sin ۳t \sim ۳t \quad (t\to ۰)$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to ۰} \frac{۳t}{-\sin ۳t} = \frac{۳t}{-۳t} = -۱$$

۵۸۹ گزینه ۱

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\sin x}{۲\cos x} = \frac{۰}{۰}$$

با تغییر متغیر $t = x+\frac{\pi}{۲}$ داریم: $x = t-\frac{\pi}{۲}$ و می‌دانیم t به سمت ۰ میل می‌کند، بنابراین:
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\sin x}{۲\cos x} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱+\sin(t-\frac{\pi}{۲})}{۲\cos(t-\frac{\pi}{۲})} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱-\cos t}{۲\sin t}$$

با توجه به هم‌ارزی $\sin t$ و $\cos t$ در اطراف $t = ۰$ داریم:
$$\lim_{t\to ۰} \frac{۱-(۱-\frac{t^۲}{۲})}{۲t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{t^۲}{۲}}{۲t} = \lim_{t\to ۰} \frac{t}{۴} = ۰$$

۵۹۰ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \frac{۰}{۰}$$

با تغییر متغیر $t = x-\frac{\pi}{۴}$ داریم، $x = t+\frac{\pi}{۴}$ و می‌دانیم t به سمت ۰ میل می‌کند، بنابراین:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan(t+\frac{\pi}{۴})}{\sin(t+\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})}$$
$$= \lim_{t\to ۰} \frac{۱-\tan(t+\frac{\pi}{۴})}{\sin t} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱-\frac{\tan t+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan t.\tan\frac{\pi}{۴}}}{\sin t} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱-\frac{۱+\tan t}{۱-\tan t}}{\sin t}$$
$$= \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{۱-\tan t-۱-\tan t}{۱-\tan t}}{\sin t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{-۲\tan t}{۱-\tan t}}{\sin t}$$

با توجه به هم‌ارزی $\tan t$ و $\sin t$ در اطراف $t = ۰$ خواهیم داشت:
$$\sin t \sim t \quad , \quad \tan t \sim t$$

بنابراین فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:
$$\lim_{t\to ۰} \frac{\frac{-۲\tan t}{۱-\tan t}}{\sin t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{-۲t}{۱-t}}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-۲}{۱-t} = -۲$$

۵۹۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos ۲x}{۲x+\pi} = \frac{۰}{۰}$$

با تغییر متغیر $t = x+\frac{\pi}{۲}$ داریم: $x = t-\frac{\pi}{۲}$ و می‌دانیم t به سمت صفر میل می‌کند،

بنابراین:
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos ۲x}{۲x+\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱+\cos(۲t-\pi)}{۲(t-\frac{\pi}{۲})+\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱-\cos ۲t}{۲t}$$

با توجه به هم‌ارزی $\cos t$ در اطراف $t = ۰$ داریم:
$$\lim_{t\to ۰} \frac{۱-\cos ۲t}{۲t} = \lim_{t\to ۰} \frac{۱-(۱-\frac{(۲t)^۲}{۲})}{۲t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{۴t^۲}{۲}}{۲t} = \lim_{t\to ۰} t = ۰$$

۵۹۲ گزینه ۳

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a} = \frac{۰}{۰}$$

با تغییر متغیر $t = x-a$ داریم $x = t+a$ و می‌دانیم $t\to ۰$ میل می‌کند،

بنابراین:
$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a} = \lim_{t\to ۰} \frac{\cos(t+a)-\cos a}{t+a-a}$$
$$= \lim_{t\to ۰} \frac{\cos(t+a)-\cos a}{t} = \lim_{t\to ۰}\left(\frac{\cos t.\cos a-\sin t.\sin a-\cos a}{t}\right)$$
$$= \lim_{t\to ۰}\left(\frac{\cos t\cos a-\cos a}{t} - \frac{\sin t\sin a}{t}\right)$$
$$= \lim_{t\to ۰}\left(\frac{\cos a(\cos t-۱)}{t} - \frac{\sin t\sin a}{t}\right)$$

با توجه به هم‌ارزی $\sin t$ و $\cos t$ اطراف $t = ۰$ داریم:
$$\sin t \sim t \quad , \quad \cos t \sim ۱-\frac{t^۲}{۲}$$
$$= \lim_{t\to ۰}\left(\frac{\cos a(۱-\frac{t^۲}{۲}-۱)}{t} - \frac{t}{t}\sin a\right) = \lim_{t\to ۰}\left(-\frac{t}{۲}\cos a-\sin a\right)$$
$$= -\sin a$$

۵۹۳ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sin^۲ \pi x}{[x]+\cos\pi x} = \frac{۰}{۰}$$

روش اول

ابتدا تکلیف جزء صحیح را در اطراف ۱^+ تعیین می‌کنیم:
$$x\to ۱^+ : [x] = [۱^+] = ۱$$

بنابراین:
$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sin^۲ \pi x}{۱+\cos\pi x} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱-\cos^۲ \pi x}{۱+\cos\pi x}$$
$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(۱-\cos\pi x)\cancel{(۱+\cos\pi x)}}{\cancel{۱+\cos\pi x}} = \lim_{x\to ۱^+} ۱-\cos\pi x$$
$$= ۱-\cos\pi = ۱-(-۱) = ۲$$

روش دوم

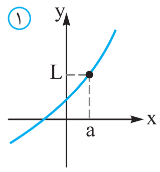
ابتدا به جای $[x]$ عدد یک را قرار می‌دهیم، سپس با تغییر متغیر $x-۱ = t$ ، $x = t+۱$ داریم:
$$\lim_{x\to ۱^+} = \frac{\sin^۲ \pi x}{۱+\cos\pi x} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{\sin^۲(\pi t+\pi)}{۱+\cos(\pi t+\pi)} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{\sin^۲ \pi t}{۱-\cos\pi t}$$

با توجه به هم‌ارزی‌ها می‌توانیم بنویسیم:
$$\lim_{t\to ۰^+} \frac{\pi^۲ t^۲}{۱-(۱-\frac{\pi^۲ t^۲}{۲})} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{\pi^۲ t^۲}{\frac{\pi^۲ t^۲}{۲}} = ۲$$

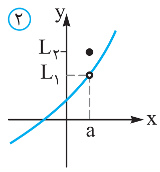
فصل ۳

حد:
درس‌نامهٔ ۱۱
پیوستگی تابع در یک نقطه

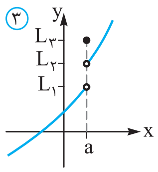
در شکل‌های مقابل مقدار و حد تابع را در نقطهٔ a بررسی می‌کنیم:

① 

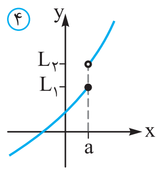
شکل ①: مقدار حد راست و حد چپ تابع با هم برابرند. این تابع در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است.

② 

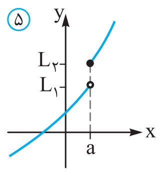
شکل ②: تابع حد دارد ولی حد تابع با مقدارش برابر نیست. این تابع در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.

③ 

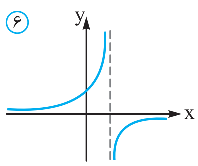
شکل ③: تابع حد ندارد و مقدار تابع نیز نه با حد راست برابر است و نه با حد چپ، این تابع در نقطهٔ $x=a$ نه از راست پیوسته است و نه از چپ.

④ 

شکل ④: تابع حد ندارد. مقدار تابع با حد چپ آن برابر است. این تابع در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی چپ دارد اما ناپیوسته است.

⑤ 

شکل ⑤: تابع حد ندارد. مقدار تابع با حد راست آن برابر است. این تابع در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی راست دارد اما ناپیوسته است.

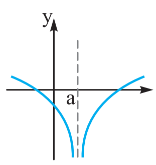
⑥ 

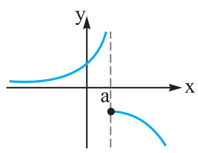
شکل ⑥: تابع حد ندارد. حد راست و چپ نامتناهی‌اند و تابع در نقطهٔ $x=a$ تعریف نشده. این تابع در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.

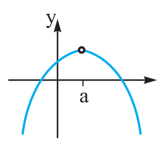
حالا با توجه به مطالب بالا می‌توانیم بگوییم:

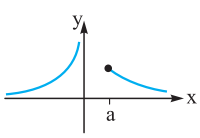
۱ از نظر شهودی (از روی شکل) تابع وقتی در یک نقطه پیوسته است که دو شاخهٔ راست و چپ نمودار در آن نقطه به هم برسند و آن نقطه توپر باشد؛ یعنی مقدار تابع نیز در همان نقطه تعریف‌شده باشد.

تست **کدام تابع در نقطهٔ $x=a$ حد دارد ولی پیوسته نیست؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ **گزینهٔ «۳»** طبق مطالب بالا جواب گزینهٔ (۳) می‌شود.

۲ از نظر ریاضی تابع وقتی در نقطهٔ $x=a$ $(a\in D_f)$ پیوسته است که:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

یعنی تابع باید هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد.

تست **اگر تابع** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\cos x} & x>\dfrac{\pi}{2}\\ a+\sin x & x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ **در نقطهٔ** $x=\dfrac{\pi}{2}$ **پیوسته باشد،** $f(0)$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -1

پاسخ **گزینهٔ «۲»** باز هم مقدار، حد راست و حد چپ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{مقدار و حد چپ}: \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(a+\sin x)=a+1\\ \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos x}\\ =\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2\sin x=2\end{array}\right\}\Rightarrow a+1=2\Rightarrow a=1$$

حالا با مقدار $a=1$ مقدار $f(0)$ را به دست می‌آوریم: $f(0)=1+\sin 0=1$

---

۳ پیوستگی‌های یک‌طرفه (راست و چپ) ناپیوستگی محسوب می‌شوند.

۴ توابع چندجمله‌ای، یعنی:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x^1+a_0$$

در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. (چون موقع پیداکردن حد تابع همان کاری را می‌کنیم که موقع پیداکردن مقدار تابع انجام می‌دهیم.)

۵ توابع سینوس و کسینوس (به شرطی که زیر رادیکال نباشند یا کسری نباشند یا جلوی لگاریتم نباشند و ...) در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۶ توابع کسری (گویا) در ریشه‌های مخرجشان ناپیوسته‌اند (چون در این نقاط تعریف نشده‌اند).

۷ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج در دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند. یعنی تابع $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ در نقاط بازه‌هایی که $f(x)>0$ باشد، پیوسته است.

۸ در توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، رادیکال تأثیری در پیوستگی ندارد، یعنی بازهٔ پیوستگی تابع $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ همان بازهٔ پیوستگی تابع $f(x)$ است.

تست **کدام‌یک از توابع زیر در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند؟**

۱) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$ ۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

۳) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+4}$ ۴) $f(x)=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱: تابع $y=\dfrac{x^2-2x}{x}$ در ریشهٔ مخرجش یعنی $x=0$ ناپیوسته است. حواسمان باشد حق نداریم قبل از تعیین وضعیت پیوستگی تابع ضابطه را به شکل $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x}=x-2$ ساده کنیم.

۲ : تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{x^۲+۱}$ در مخرجش مشکلی ندارد. چون مخرج ریشه ندارد اما در صورت کسر به علت وجود $\sqrt{x}$ تابع در بازهٔ $[۰,+\infty)$ پیوسته است.

۳ : تابع $f(x)=\frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۴}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است چون در صورت کسر که $\sqrt[۳]{x}$ تأثیری در بازهٔ پیوستگی ندارد و مخرج کسر هم که ریشه ندارد پس تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

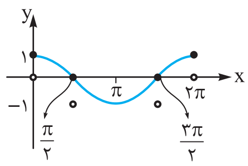
۴ : $f(x)=\sqrt[۳]{x-\frac{۱}{x}}$ در ریشهٔ مخرج کسر $\frac{۱}{x}$ یعنی در $x=۰$ ناپیوسته است.

۹ برای بررسی پیوستگی یک تابع در صورتی که بتوانیم نمودارش را رسم کنیم، می‌توانیم از همین دید شهودی استفاده کنیم.

تست **تابع $f(x)=\cos x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟**

۱) دو ۲) سه ۳) صفر ۴) یک

پاسخ **گزینهٔ «۱»** اول نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل تابع در نقاط ۲π و $x=۰$ ناپیوسته است.

۵۹۴ گزینه ۳ می‌دانیم شرط پیوستگی یک تابع این است که حد چپ و راست آن با یکدیگر برابر باشند و مقدار تابع با حد آن برابر باشد.

۱ : در این گزینه حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x=۱$ با یکدیگر برابر نیستند، پس تابع حد ندارد و پیوسته نیست.

۲ : تابع در این گزینه حدی برابر با ۲ دارد. (حد راست و چپ موجود و برابرند) ولی مقدار تابع با حد آن در نقطهٔ $x=۱$ برابر نیست پس پیوسته نیست.

۳ : حد چپ و حد راست موجود و برابرند و با مقدار تابع در نقطهٔ $x=۱$ برابر است. پس پیوسته است.

۴ : در نقطهٔ $x=۱$ تابع به بی‌نهایت میل می‌کند و حد ندارد. پس پیوسته نیست.

۵۹۵ گزینه ۱

۱ : در این گزینه در $x=۱$ حد راست با حد چپ برابر است. ولی نقطهٔ $x=۱$ در دامنهٔ آن تعریف‌نشده است. $(۱\notin D_f)$ پس در این نقطه تعریف‌نشده است و پیوسته نیست.

۲ : $\lim_{x\to۱^+} f(x)=-۱\ ,\ \lim_{x\to۱^-} f(x)=۱$

$\Rightarrow \lim_{x\to۱^+} f(x)\neq\lim_{x\to۱^-} f(x) \Rightarrow$ حد ندارد.

۳ : $\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=۰, f(۱)=۰$

$\Rightarrow$ تابع در $x=۱$ پیوسته است.

۴ : طبق شکل تابع فقط در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف‌شده پس حد ندارد.

۵۹۶ گزینه ۴

۱ : این تابع در همسایگی راست $x=-۱$ تعریف‌نشده است.

۲ : $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=۰, f(-۱)=۱ \Rightarrow$ پیوستگی چپ ندارد.

۳ : این تابع در $x=-۱$ تعریف‌نشده است، پس پیوستگی ندارد.

۴ : $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=۱, f(-۱)=۱ \Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=f(-۱)$

پس پیوستگی چپ دارد.

۵۹۷ گزینه ۲

۱ : در درس‌نامه گفتیم توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد تأثیری در پیوستگی عبارت ندارند و پیوستگی به عبارت زیر رادیکال بستگی دارد که در این‌جا یک چندجمله‌ای است. پس به ازای هر عدد حقیقی پیوسته است.

۲ : در تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر نقاطی که در آن‌ها مخرج صفر می‌شوند، نقاط ناپیوستگی هستند. پس در $x=۰$ ناپیوسته است.

۳ : گفتیم چندجمله‌ای‌ها به ازای هر عدد حقیقی پیوسته‌اند.

۴ : توابع مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ همواره پیوسته هستند.

۵۹۸ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{۳-\sqrt{x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x+۱}}+\frac{۱}{x+۵}$$

توابع حاصل از تقسیم و یا جمع چند تابع چندجمله‌ای و یا توابع رادیکالی در دامنهٔ خود پیوسته‌اند، پس ابتدا دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم.

$$\sqrt{x+۴} \Rightarrow x+۴\ge۰ \Rightarrow x\ge-۴ \qquad (I)$$

$$۱+\sqrt[۳]{x+۱}\neq۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x+۱}\neq-۱ \Rightarrow x+۱\neq-۱$$

$$\Rightarrow x\neq-۲ \qquad (II)$$

$$x+۵\neq۰ \Rightarrow x\neq-۵ \qquad (III)$$

از اشتراک ۳ رابطه داریم: $D_f=(I)\cap(II)\cap(III)=[-۴,+\infty)-\{-۲\}$

پس تابع در نقطهٔ -۲ $(-۲\notin D_f)$ و -۴ (تابع در همسایگی آن تعریف‌نشده است) پیوسته نیست.

۵۹۹ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=f(-۱)$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+}(\frac{۱}{x+a})=\lim_{x\to(-۱)^-}(x^۲+ax)=\frac{۱}{-۱+a}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{-۱+a}=(-۱)^۲+a\times(-۱) \Rightarrow \frac{۱}{-۱+a}=۱-a$$

$$\Rightarrow (۱-a)(-۱+a)=۱ \Rightarrow -(۱-a)^۲=۱$$

$\Rightarrow (۱-a)^۲=-۱ \Rightarrow$ معادله جواب ندارد. $\Rightarrow a\in\{\ \}$

۶۰۰ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+۳} & x<۱\\ x^۲+ax & x\ge۱\end{cases}$$

ابتدا شرط پیوستگی را در $x=۱$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=f(۱)$$

$$\lim_{x\to۱^+}(x^۲+ax)=\lim_{x\to۱^+}(\sqrt{ax+۳})=۱+a$$

$$\Rightarrow ۱+a=\sqrt{a+۳} \xrightarrow[\text{توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را به}} ۱+۲a+a^۲=a+۳$$

$$\Rightarrow a^۲+a-۲=۰ \Rightarrow (a+۲)(a-۱)=۰ \Rightarrow a=-۲ \text{ یا } a=۱$$

حال با جای‌گذاری a می‌بینیم به ازای کدام مقدار، تابع $f(x)$ پیوسته است.

$a=-۲:$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-۲x+۳} & x<۱\\ x^۲-۲x & x\ge۱\end{cases} \Rightarrow D_f: -۲x+۳\ge۰ \Rightarrow x\le\frac{۳}{۲}$$

$$f(-\frac{۳}{۴})=\sqrt{-۲\times(-\frac{۳}{۴})+۳}=\sqrt{۴/۵}$$

بازهٔ داده‌شده برای این ضابطه با دامنه همخوانی دارد. $a=1:$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & x<1\\ x^2+x & x\ge 1\end{cases}$$

$D_f: x+3\ge 0 \Rightarrow x\ge -3$

پس بازهٔ ضابطهٔ اول باید به شکل $-3\le x<1$ تغییر کند.

$$f(-\frac{3}{4})=\sqrt{(-\frac{3}{4})+3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=1/5$$

۶۰۱ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}ax+2^{x-3} & x<3\\ a\log_2(1+x) & x\ge 3\end{cases}$$

شرط پیوستگی تابع در $x=3$: $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=f(3)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to3^+}(a\log_2(1+x))=\lim_{x\to3^-}(ax+2^{x-3})$$

$$\Rightarrow a\log_2(1+3)=(a\times3+2^0)\Rightarrow a\log_2 2^2=3a+1$$

$$\Rightarrow a\times2\times\log_2 2=3a+1\Rightarrow 2a=3a+1\Rightarrow a=-1$$

$$f(x)=\begin{cases}-x+2^{x-3} & x<3\\ -\log_2(1+x) & x\ge 3\end{cases}$$

$$f(2)=-2+2^{2-3}=-2+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-1/5$$

۶۰۲ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}a\sin2x & \frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{4}\\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) & \frac{3\pi}{4}\le x<2\pi\end{cases}$$

پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $x=\frac{3\pi}{4}$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}f(x)=f(\frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}(a\sin2x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}(\cos(x+\frac{\pi}{4}))$$

$$\Rightarrow a\sin(2\times\frac{3\pi}{4})=\cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$$

$$a\sin(\frac{3\pi}{2})=\cos(\pi)\Rightarrow a\times(-1)=(-1)\Rightarrow a=1$$

۶۰۳ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x<1\\ 0 & x=1\\ \cos\pi x & x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}(\sqrt{1-x})=\sqrt{1-1}=0\\ \lim_{x\to1^+}f(x)&=\lim_{x\to1^+}(\cos\pi x)=\cos\pi=-1\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}f(x)=$ وجود ندارد

پس تابع پیوسته نیست.

$f(1)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Rightarrow$ تابع فقط پیوستگی چپ دارد.

۶۰۴ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\ne2\\ k & x=2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$$

$\lim\limits_{x\to2}(\frac{x^2-3x+2}{x-2})=k\Rightarrow \lim\limits_{x\to2}(\frac{x^2-3x+2}{x-2})=\frac{0}{0}$ (مبهم)

پس باید رفع ابهام کنیم.

$$\lim_{x\to2}(\frac{x^2-3x+2}{x-2})=\lim_{x\to2}(\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}})=\lim_{x\to2}(x-1)$$

$$=2-1=1\Rightarrow f(2)=1$$

۶۰۵ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+x-2|}{x-1} & x\ne1\\ a & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=a$$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\frac{0}{0}$ (مبهم)

$$\lim_{x\to1}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{|x-1||x+2|}{x-1}$$

اگر $x\to1^+\xrightarrow{x-1>0}\lim\limits_{x\to1}(\frac{|x-1||x+2|}{x-1})=\lim\limits_{x\to1}|x+2|=3$

$x\to1^-\xrightarrow{x-1<0}\lim\limits_{x\to1}(\frac{|x-1||x+2|}{x-1})$

$=\lim\limits_{x\to1}(-|x+2|)=-3$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=$ وجود ندارد

پس این تابع به ازای هیچ مقدار a در $x=1$ پیوسته نیست.

۶۰۶ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x\ne0\\ a & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\Rightarrow \lim_{x\to0}(\frac{x}{1-\sqrt{1-x}})=a$$

$\lim\limits_{x\to0}(\frac{x}{1-\sqrt{1-x}})=\frac{0}{0}$ (مبهم)

رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to0}(\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\times\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}})$

$$=\lim_{x\to0}(\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-(1-x)})=\lim_{x\to0}(\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{x})$$

$$=\lim_{x\to0}(1+\sqrt{1+x})=1+\sqrt{1+0}=2\Rightarrow a=2$$

۶۰۷ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax-a+2 & x\le1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$$

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=a-a+2=2$$

$\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{x-1}{x-\sqrt{x}})=\frac{0}{0}$ (مبهم)

رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}})$

$$\lim_{x\to ۱^+} \left(\frac{(x-۱)(x+\sqrt{x})}{x^۲-(\sqrt{x})^۲}\right) = \lim_{x\to ۱}\left(\frac{(x-۱)(x+\sqrt{x})}{x^۲-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۱}\left(\frac{\cancel{(x-۱)}(x+\sqrt{x})}{x\cancel{(x-۱)}}\right) = \lim_{x\to ۱}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{۱+\sqrt{۱}}{۱} = ۲$$

پس مقدار a هر عددی می‌تواند باشد.

۶۰۸ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۸+x^۳}{|x+۲|} & x\neq -۲\\ a & x=-۲\end{cases}$$

برای پیوستگی از چپ داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=f(-۲) \Rightarrow \lim_{x\to(-۲)^-}\left(\frac{۸+x^۳}{-(x+۲)}\right)=a$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\left(\frac{۸+x^۳}{-(x+۲)}\right)=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

رفع ابهام: $\lim_{x\to(-۲)^-}\left(\frac{۸+x^۳}{-(x+۲)}\right)$

$$= \lim_{x\to(-۲)^-}\left(\frac{\cancel{(x+۲)}(x^۲-۲x+۴)}{-\cancel{(x+۲)}}\right) = \lim_{x\to(-۲)^-}(-(x^۲-۲x+۴))$$

$$=-((-۲)^۲-۲\times(-۲)+۴)=-۱۲ \Rightarrow a=-۱۲$$

۶۰۹ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} & x\neq ۲\\ ۲ & x=۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲|x-۲|}\right)$$

$$\xrightarrow{x-۲<۰} \lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{-۲\cancel{(x-۲)}}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{-۲}\right)=\frac{۲+۲}{-۲}=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}\right)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲|x-۲|}\right)$$

$$\xrightarrow{x-۲>۰} \lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)=\frac{۲+۲}{۲}=۲$$

$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x)\neq \lim_{x\to ۲^-} f(x) \Rightarrow$ حد ندارد پس پیوسته نیست.

$f(۲)=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲) \Rightarrow$ از راست پیوسته است.

۶۱۰ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & x>۱ \cup x<-۱\\ ۲x & -۱\leq x\leq ۱\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=۱$ داریم:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to ۱^+} f(x)&=\lim_{x\to ۱^+}\left(\frac{x^۲-۱}{x+۱}\right)=\left(\frac{۱^۲-۱}{۱+۲}\right)=۰\\ \lim_{x\to ۱^-} f(x)&=\lim_{x\to ۱^-}(۲x)=۲\times ۱=۲\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x)\neq \lim_{x\to ۱^+} f(x) \Rightarrow$ تابع حد ندارد

در این نقطه پیوسته نیست.

در نقطهٔ $x=-۱$ داریم: $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(۲x)=۲\times(-۱)=-۲$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\left(\frac{x^۲-۱}{x+۱}\right)=\lim_{x\to(-۱)^-}\left(\frac{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}{\cancel{x+۱}}\right)$$

$$=\lim_{x\to(-۱)^-}(x-۱)=-۱-۱=-۲$$

$$f(-۱)=-۲$$

$\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)} f(x)=f(-۱) \Rightarrow$ در این نقطه پیوسته است

۶۱۱ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & x>۰\\ a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) & x\leq ۰\end{cases}$$

شرط پیوستگی در نقطه $x=۰$: $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)$

$$\lim_{x\to ۰^-}(a\sin(x+\frac{\pi}{۶}))=a\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{a}{۲}=f(۰)$$

$$\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{x^۲}{\frac{x^۲}{۲}}\right)=۲\Rightarrow \frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=۴$$

۶۱۲ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$$

شرط پیوستگی در نقطه $x=۰$: $\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$

$$f(۰)=a$$

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{x^۲}{۲})}{x^۲}\right)$$

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\frac{x^۲}{۲}-۱+\frac{x^۲}{۴}}{x^۲}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{x^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۲}}{x^۲}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}}{۱}\right)=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

فصل ۳ — حد: درس‌نامهٔ ۱۲ — پیوستگی در توابع شامل جزء صحیح

قبلاً دیدیم که در تابع جزء صحیح هم مثل همهٔ تابع‌های دیگر برای بررسی پیوستگی باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع را به دست آوریم و با هم مقایسه کنیم.

تست **اگر تابع $f(x)=\frac{[x]+a}{[۲x]+۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) a جواب ندارد.

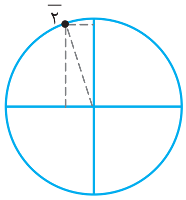
پاسخ **گزینهٔ «۳»** باید مقدار، حد راست و حد چپ تابع را در $x=۱$ پیدا کنیم. اگر حواسمان باشد می‌بینیم که مقدار و حد راست $[x]$ و $[۲x]$ در $x=۱$ برابرند، پس:

حد راست: $\lim_{x\to ۱^+}\frac{[x]+a}{[۲x]+۱}=\frac{۱+a}{۲+۱}=\frac{a+۱}{۳}=f(۱)$

حد چپ: $\lim_{x\to ۱^-}\frac{[x]+a}{[۲x]+۱}=\frac{۰+a}{۱+۱}=\frac{a}{۲}$

پس باید $\frac{a}{۲}=\frac{a+۱}{۳}$ باشد: $۲a+۲=۳a \Rightarrow a=۲$

۶۵۳ گزینه ۱ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی:



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}^{+} = 0^{-} \\ \sin\frac{\pi}{2}^{+} = 1^{-} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}} \tan 2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}^{+}}{\cos\frac{\pi}{2}^{+}} = \frac{1}{0^{-}} = -\infty$$

۶۵۴ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

۶۵۵ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{3-3\cos x}{x^3}$$

با توجه به هم‌ارزی cos اطراف ۰ داریم: $\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}$

بنابراین فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{3-3\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{3-3(1-\frac{x^2}{2})}{x^3} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{\frac{3x^2}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^{-}} \frac{3}{2x} = \frac{3}{0^{-}} = -\infty$$

۶۵۶ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{2x+\sin^2 2x}{3x^2}$$

با توجه به هم‌ارزی sin اطراف ۰ داریم: $\sin 2x \sim 2x$

بنابراین فرم کسر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{2x+\sin^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{2x+(2x)^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{2x+4x^2}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^{-}} \frac{2+4x}{3x} = \frac{2}{0^{-}} = -\infty$$

۶۵۷ گزینه ۱

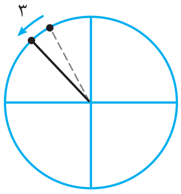
$$f(x) = \frac{\sin x}{1+2\cos x}$$

تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ و ۲:

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^{+}} \frac{\sin x}{1+2\cos x} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}^{+}}{1+2\cos\frac{2\pi}{3}^{+}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{-}} = -\infty \checkmark$$

همان‌طور که در دایرهٔ مثلثاتی مشخص است با افزایش مقدار زاویه از $\frac{2\pi}{3}$ (یعنی $\frac{2\pi}{3}^{+}$) مقدار cos کم‌تر از $-\frac{1}{2}$ است.



۳:

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^{-}} \frac{\sin x}{1+2\cos x} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}^{-}}{1+2\cos\frac{2\pi}{3}^{-}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{+}} = +\infty \times$$

۴:

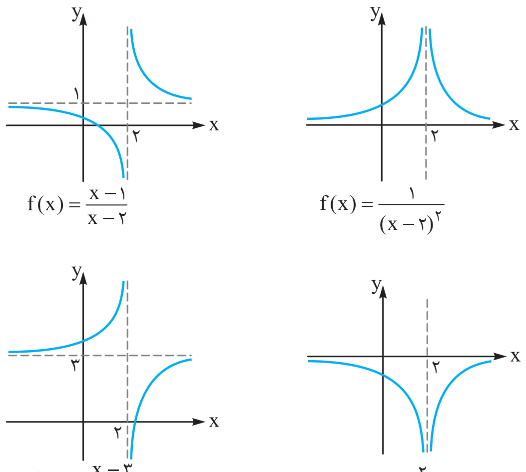
$$\lim_{x\to\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+2\cos x}$$

$$\begin{cases} 1+2\cos\frac{4\pi}{3}^{+} = 0^{+} \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{+}} = -\infty \\ 1+2\cos\frac{4\pi}{3}^{-} = 0^{-} \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{-}} = +\infty \end{cases}$$

فصل ۳ حد: مجانب قائم

درس‌نامهٔ ۱۵

به نمودار تابع‌های زیر نگاه کنیم:



نمودارهای هر چهار تابع در اطراف نقطهٔ $x=2$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کنند. در هر چهار نمودار به خط $x=2$ مجانب قائم می‌گوییم یعنی:

اگر در تابع $f(x)$ وقتی $x\to a$ (از راست یا چپ یا هر دو سمت حد تابع یعنی حد $f(x)$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند می‌گوییم خط $x=a$ مجانب قائم تابع است.

روش پیداکردن مجانب قائم در توابع مختلف

۱ برای پیداکردن مجانب قائم توابع کسری باید ریشه‌های مخرج تابع را پیدا کنیم.

پس از پیداکردن ریشه‌های مخرج حتماً باید ریشهٔ مخرج را در صورت قرار دهیم و حد صورت را هم پیدا کنیم. در نتیجه:

قراردادن ریشهٔ مخرج در صورت $\Rightarrow$
- صورت $\neq 0 \Rightarrow$ ریشهٔ مخرج مجانب قائم است.
- صورت $=0 \Rightarrow \frac{0}{0}$ رفع ابهام $\Rightarrow$
  - حاصل $\neq \pm\infty \Rightarrow$ ریشهٔ مخرج مجانب قائم نیست.
  - حاصل $=\pm\infty \Rightarrow$ ریشهٔ مخرج مجانب قائم است.

تست تابع $y=\frac{x^2+x-2}{x^3-x}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم و در صورت امتحان می‌کنیم:

$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0\,,\, x=1\,,\, x=-1$

$x=0 \Rightarrow$ صورت $=-2\neq 0 \Rightarrow x=0$ مجانب قائم

$x=-1 \Rightarrow$ صورت $=-2\neq 0 \Rightarrow x=-1$ مجانب قائم

$x=1 \Rightarrow$ صورت $=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x(x+1)}=\frac{3}{2}$ مجانب قائم نیست.

پس تابع دو خط مجانب قائم دارد $x=0$ و $x=-1$.

---

۲ اگر تابع کسری شامل عواملی باشد که دامنهٔ تابع را محدود کند (مثل رادیکال، لگاریتم و ...) ریشهٔ مخرج به دست آمده برای مجانب قائم به شرطی قابل‌قبول است که تابع حداقل در یک همسایگی راست یا چپ آن ریشه تعریف‌شده باشد.

تست تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-2x-3}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اول ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$x^2-2x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} x=-1\,,\, x=3$

حالا $\sqrt{x-3}$ در همسایگی $x=-1$ تعریف‌نشده است $(\sqrt{-1-3})$، پس $x=-1$ مجانب قائم نیست، اما $\sqrt{x-3}$ در همسایگی راست $x=3$ تعریف شده پس $x=3$ مجانب قائم است پس تابع یک خط مجانب قائم دارد. (البته صورت کسر هم به ازای $x=3$ برابر صفر است که بعد از رفع ابهام حاصل حد $+\infty$ می‌شود.)

---

۳ اگر مخرج به علت وجود جزء صحیح صفر شود؛ یعنی ریشه‌های مخرج از حل یک معادلهٔ شامل براکت، به دست آیند، باید حواسمان باشد در صورتی که حد مخرج به ازای میل‌کردن x به سمت ریشهٔ آن، خود عدد صفر باشد، باز هم تابع در همسایگی ریشه تعریف‌نشده است و ریشه به دست آمده مجانب قائم نیست.

تست تابع $f(x)=\frac{1}{(x^2-4)([x]^2-1)}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) هیچ ۲) دو ۳) چهار ۴) بی‌شمار

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اگر مخرج را برابر صفر قرار دهیم:

$x^2-4=0 \Rightarrow x=2\,,\, x=-2$

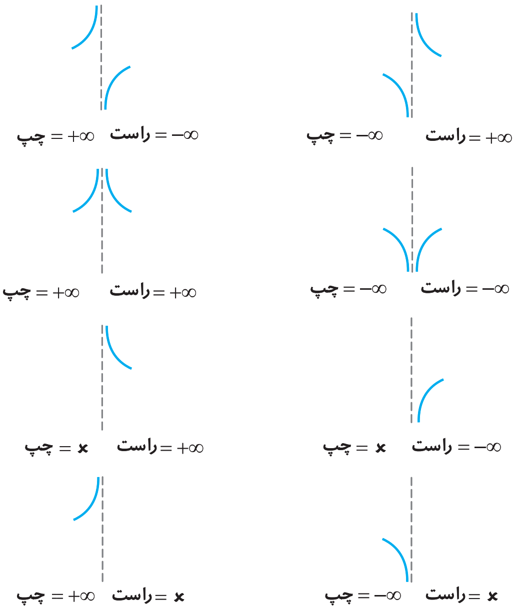
$[x]^2-1=0 \Rightarrow [x]^2=1 \Rightarrow [x]=1 \quad , \quad [x]=-1$

ریشه‌های $[x]=1$ و $[x]=-1$ مجانب قائم نیستند زیرا به ازای آن‌ها حد مخرج صفر نمی‌شود بلکه مخرج برابر خود عدد صفر می‌شود پس تابع فقط دو مجانب قائم دارد $x=2$ و $x=-2$.

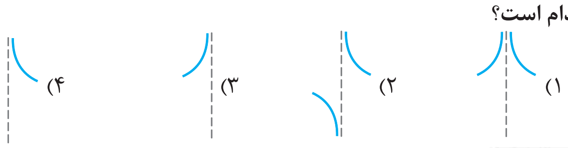
۴ معادلهٔ خطوط مجانب قائم تابع $y=\tan x$ به صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$ و معادلهٔ خط مجانب قائم تابع $y=\log_c(ax+b)$ به صورت $x=\frac{-b}{a}$ است. (یعنی همان ریشه‌های مخرج)

رسم نمودار تابع در اطراف مجانب قائم

برای پیداکردن وضعیت نمودار یک تابع در اطراف مجانب قائمش کافی است حد راست و حد چپ تابع را در اطراف مجانب قائم پیدا کنیم.



تست وضعیت منحنی $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}$ در اطراف مجانب قائمش کدام است؟



پاسخ **گزینهٔ «۴»** اول ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$x^2-3x+2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1\,,\, x=2$

$x=1$ قابل‌قبول نیست چون $\sqrt{x-2}$ به ازای $x=1$ تعریف‌نشده است.

حالا حد راست و حد چپ تابع را وقتی $x\to 2$ به دست می‌آوریم:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x-2}}{(x-1)(x-2)}=$

وجود ندارد چون رادیکال در همسایگی چپ ۲ تعریف‌نشده است.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-2}}=\frac{1}{1\times 0^+}=+\infty$

پس وضعیت منحنی در اطراف مجانب قائمش به صورت  است.

۶۵۸ گزینه ۲

$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم.

$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3\ ✓ & (\text{ریشهٔ صورت نیست}) \\ x=2 \end{cases}$

چون $x=2$ ریشهٔ مشترک با صورت است، نیاز به رفع ابهام دارد:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{5}$$

بنابراین $x=2$ مجانب قائم نیست.

پس $x=-3$ تنها مجانب قائم تابع می‌باشد.

۶۵۹ گزینه ۲

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^3-4x}$$

ابتدا ریشه‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم: $x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \ \times\ (0\notin D_f) \\ x=2 \ \checkmark \\ x=-2 \ \ (-2\notin D_f) \end{cases}$$

بنابراین $x=2$ تنها مجانب قائم است.

۶۶۰ گزینه ۳

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-3x}$$

ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)=x(x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \ \checkmark \ (\text{ریشهٔ مشترک با صورت نیست}) \\ x=-1 \ \checkmark \ (\text{ریشهٔ مشترک با صورت نیست}) \\ x=3 \ \ (\text{ریشهٔ مشترک با صورت}) \Rightarrow \text{نیاز به بررسی دارد} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{x\cancel{(x-3)}(x+1)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

بنابراین $x=3$ مجانب قائم نیست.

پس $x=0$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

۶۶۱ گزینه ۴

$$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]}$$

به ضابطهٔ تابع $y=[x]+[-x]$ توجه کنید: $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

با توجه به ضابطهٔ $y=[x]+[-x]$ مقدار تابع در تمام نقاط صحیح برابر صفر می‌باشد. ولی دقت کنید در همسایگی این نقاط مخرج ۰ نخواهد بود، بنابراین به عنوان مجانب قائم قابل‌قبول نیستند. پس تابع هیچ مجانب قائمی ندارد. (مثلاً $x=2$ ریشهٔ مخرج می‌باشد، ولی در 2^+ و 2^- این مقدار -1 می‌باشد.)

۶۶۲ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}$$

با توجه به $\sqrt{16-x^2}$ داریم:

$$16-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 16 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\le 4 \Rightarrow -4\le x\le 4$$

بنابراین بایستی، آن دسته از ریشه‌های مخرج را بررسی کنیم که در بازهٔ $[-4,4]$ باشد. می‌دانیم مقدار $\sin x$ در π و 0 و $-\pi$ در این بازه برابر صفر می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pi \Rightarrow \checkmark \ (\text{ریشهٔ مشترک با صورت نیست}) \\ x=0 \Rightarrow \text{ریشهٔ مشترک با صورت} \Rightarrow \text{نیاز به بررسی دارد} \\ x=-\pi \Rightarrow \checkmark \ (\text{ریشهٔ مشترک با صورت نیست}) \end{cases}$$

حل حد تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم: (با توجه به هم‌ارزی $\sin$ در اطراف ۰ داریم: $\sin x\sim x$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt{16-x^2}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{16-x^2}=4$$

بنابراین $x=0$ به عنوان مجانب قائم قابل‌قبول نیست.

پس $x=\pi$ و $x=-\pi$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

۶۶۳ گزینه ۳

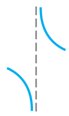
$$y=\frac{x+1}{x^3+x} \Rightarrow x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0$$

ابتدا حد تابع را در سمت راست و چپ مجانب تابع (یعنی $x=0$) به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^3+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{0^+\times 1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^3+x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{0^-\times 1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

بنابراین رفتار تابع در اطراف $x=0$ به صورت روبه‌رو است:



۶۶۴ گزینه ۱

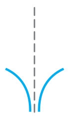
$$y=\frac{-3x+1}{x^2-4x+4}=\frac{-3x+1}{(x-2)^2} \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

ابتدا حد راست و چپ تابع را در اطراف $x=2$ به دست آوردیم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-3x+1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(0^+)^2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-3x+1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(0^-)^2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

بنابراین رفتار تابع در اطراف $x=2$ به صورت روبه‌رو است:



۶۶۵ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{2[x]-3}{x^2-4x+4}=\frac{2[x]-3}{(x-2)^2} \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

ابتدا حد راست و چپ تابع را در $x=2$ به دست می‌آوریم:

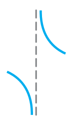
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2[x]-3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2[\cancelto{2}{2^+}]-3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(0^+)^2}$$

$$=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2[x]-3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2[\cancelto{1}{2^-}]-3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(0^-)^2}$$

$$=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

بنابراین رفتار تابع در اطراف $x=2$ به صورت روبه‌رو است:



۶۶۶ گزینه ۱

$$y=\frac{1}{x+|x|}$$

دقت کنید تابع در همسایگی چپ $x=0$ تعریف‌نشده است، زیرا مخرج صفر مطلق می‌باشد. $x+|\overset{-}{x}|=x-x=0$

ولی در همسایگی راست $x=0$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

بنابراین در همسایگی چپ $x=0$ تعریف‌نشده است و در همسایگی راست آن $+\infty$ می‌باشد.

۶۶۷ گـزینه ۳

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+bx+4}$$

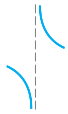
با توجه به این‌که تابع در همسایگی راست و چپ (ریشهٔ مخرج) مجانب قائم $+\infty$ می‌باشد، بنابراین بایستی در اطراف ریشهٔ مخرج تغییر علامت نداشته باشیم، پس بایستی ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta_{\text{مخرج}}=0 \Rightarrow b^2-4(1)(4)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ \text{یا} \\ b=-4 \end{cases}$$

اگر $b=4$ باشد، $f(x)=\frac{x+2}{x^2+4x+4}$ می‌باشد و در اطراف مجانب قائم به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)}\begin{cases} \xrightarrow{(-2)^+} \frac{1}{0^+}=+\infty \\ \xrightarrow{(-2)^-} \frac{1}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

بنابراین با توجه به مقایسه به دست آمده رفتار تابع در اطراف مجانب به صورت روبه‌رو است:

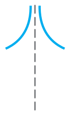


پس $b=4$ قابل قبول نیست.

اگر $b=-4$ باشد، $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4x+4}$ می‌باشد و در اطراف مجانب قائم به صورت زیر است:

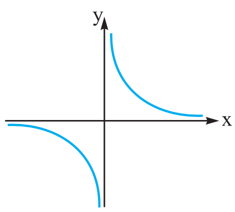
$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

پس رفتار تابع در اطراف مجانب به صورت روبه‌رو است:



فصل ۳ — حد: درس‌نامهٔ ۱۶ — حد در بی‌نهایت

به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ نگاه کنیم:



در این تابع وقتی مقادیر x بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند، مقدار تابع به صفر نزدیک می‌شود این موضوع را به این صورت نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$

و منظورمان این است که می‌توانیم مقدار تابع f را هر اندازه که بخواهیم به عدد صفر نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیریم.

و همین‌طور وقتی x خیلی کوچک می‌شود (در جهت منفی) باز هم مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود؛ یعنی:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$$

پس حد در بی‌نهایت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

حد	به معنی آن است که	به شرط آن‌که
$\lim_{x\to +\infty} f(x)=L$	می‌توانیم $f(x)$ را هر اندازه که بخواهیم به عدد L نزدیک کنیم.	x را به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیریم.
$\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$	می‌توانیم $f(x)$ را هر اندازه که بخواهیم به عدد L نزدیک کنیم.	x را به اندازهٔ کافی کوچک در نظر بگیریم.

برای پیداکردن حد تابع‌ها وقتی $x\to\pm\infty$ از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

۱ حد $\frac{\text{عدد}}{\pm\infty}$ برابر صفر است. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=0 \ , \ (n>0)$

۲ حد هر چندجمله‌ای وقتی که $x\to\pm\infty$ برابر جملهٔ شامل بزرگ‌ترین توان x است. (پرتوان)

تست حاصل $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{3x-2}\right)$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** حد کسر $\frac{2}{x+1}$ که به شکل $\frac{\text{عدد}}{\infty}$ است برابر صفر است و در مورد کسر دوم داریم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{3x-2}=\lim_{x\to +\infty} 0+\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

تست حاصل $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+x-5}{x^2-x-2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $+\infty$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** قرار شد در صورت و مخرج جملهٔ پرتوان را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+x-5}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

تست اگر حاصل $\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n+x^2-x+5}{3x^2+2x-1}=2$ باشد، $a+n$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ «۴»** در صورت کسر یا باید ax^n جملهٔ پرتوان باشد و یا x^2.

اگر ax^n پرتوان باشد و $x>3$ آن‌گاه: $\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^n}{3x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{a}{3}x^{n-2}=\infty$

پس n نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۲ باشد، اگر هم n کوچک‌تر از ۲ باشد آن‌وقت حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

که برابر ۲ نیست. پس n باید حتماً برابر ۲ باشد. با این حساب جملهٔ پرتوان صورت برابر است با $ax^2+x^2=(a+1)x^2$ و حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(a+1)x^2}{3x^2}=\frac{a+1}{3}$$

پس $\frac{a+1}{3}=2$ و در نتیجه $a+1=6$ و $a=5$ پس حاصل $a+n$ برابر است با $5+2=7$.

۳ اگر در عبارت رادیکال داشته باشیم، عامل زیر رادیکال هم مثل یک عامل با توان کسری با بقیهٔ عامل‌ها مقایسه می‌شود؛ مثلاً در $\sqrt{x^2+x-1}$

جملهٔ پرتوان $x = x^{\frac{۲}{۲}}$ است یا در $\sqrt[۳]{۲x^۲+۳x-۲}$ جملهٔ پرتوان $(۲x^۲)^{\frac{۱}{۳}}$ است. در این حالت باز هم باید جملهٔ پرتوان را در نظر بگیریم. فقط نکتهٔ مهم آن است که اگر عاملی را از زیر رادیکال با توان زوج خارج کنیم، باید حتماً داخل قدرمطلق قرار گیرد و بعد از این‌که علامت داخل قدرمطلق را مشخص کردیم، قدرمطلق را حذف می‌کنیم.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲}}{۳x-\sqrt{۴x^۲-۱}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در صورت کسر توان جملهٔ ۲x برابر است با ۱ و توان جملهٔ $\sqrt{x^۲+۱}$ هم برابر است با $۱=\frac{۲}{۲}$. پس در صورت باید هر دو را در نظر بگیریم. در مخرج هم توان ۳x برابر ۱ و توان $\sqrt{۴x^۲-۱}$ هم برابر $۱=\frac{۲}{۲}$ است، پس در مخرج هم باید هر دو را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲}}{۳x-\sqrt{۴x^۲-۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+|x|}{۳x-|۲x|}$$

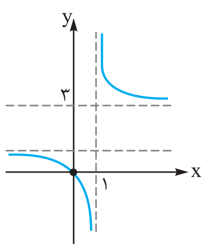
مهم آن است که وقتی $x^۲$ و $۴x^۲$ را از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم، داخل قدرمطلق قرار دهیم. حالا چون x و ۲x در داخل قدرمطلق منفی‌اند:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+|x|}{۳x-|۲x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-x}{۳x+۲x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۵x}=\frac{۱}{۵}$$

---

۴ اگر نمودار تابع را داشته باشیم، برای تعیین حد تابع وقتی $x\to+\infty$ یا وقتی $x\to-\infty$ باید ببینیم در اول و آخر نمودار (در امتداد محور xها) عرض نقاط روی منحنی به کدام عدد نزدیک می‌شود.

تست اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+|x|}{bx-۱}$ به صورت شکل زیر باشد، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ برابر کدام است؟



۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در شکل دو نکته داریم. اولاً $x=۱$ مجانب قائم نمودار است، پس $x=۱$ باید ریشهٔ مخرج کسر باشد:

$$x=۱ \Rightarrow b(۱)-۱=۰ \Rightarrow b=۱$$

و ثانیاً وقتی $x\to+\infty$، حد تابع برابر ۳ است:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+|x|}{x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۱)x}{x}=a+۱\Rightarrow a+۱=۳ \Rightarrow a=۲$$

پس ضابطهٔ $f(x)$ برابر است با $f(x)=\frac{۲x+|x|}{x-۱}$، حالا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+|x|}{x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=۱$$

۵ بعضی وقت‌ها حد عبارت وقتی که $x\to\pm\infty$ به شکل $\infty-\infty$ تبدیل می‌شود. اگرچه این نوع رفع ابهام مستقیماً جزء درس کتاب نیست اما چون راه‌حلش مشابه رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ است بهتر است یک بار با هم ببینیم. برای رفع ابهام این عبارت‌ها، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم. عبارت به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شود که آن را با توجه به روش‌های قبل رفع ابهام می‌کنیم.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} ۲x+۱-\sqrt{۴x^۲-۸x+۲۰}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر بزرگ‌ترین توان‌ها را در نظر بگیریم می‌شود، $۲x-۲x$ یعنی حالت مبهم $\infty-\infty$ داریم. عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱-\sqrt{۴x^۲-۸x+۲۰})\times\frac{۲x+\sqrt{۴x^۲-۸x+۲۰}}{۲x+\sqrt{۴x^۲-۸x+۲۰}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲x+۱)^۲-(۴x^۲-۸x+۲۰)}{۲x+\sqrt{۴x^۲-۸x+۲۰}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۲+۴x+۱-۴x^۲+۸x-۲۰}{۲x+(۲x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x}{۴x}=۳$$

---

۶ گاهی اوقات هم همین حالت $\infty-\infty$ را در تفاضل دو کسر داریم. این‌جا هم راه‌حل خیلی راحت است، کافی است مخرج مشترک بگیریم. حالت مبهم معمولاً تبدیل به $\frac{۰}{۰}$ می‌شود که آن را با تجزیه رفع ابهام می‌کنیم.

تست حاصل حد $\lim\limits_{x\to۲}\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** وقتی $x\to۲$ حد هر دو کسر ∞ می‌شود؛ یعنی با $\infty-\infty$ سروکار داریم، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}=\lim_{x\to۲}\frac{x+۲-۴}{x^۲-۴}=\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۴}$$

۶۶۸ گـزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

با توجه به این‌که محور xها همان $y=۰$ می‌باشد، بایستی داشته باشیم:

$$|f(x)-۰|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\left|\frac{۱}{x}\right|<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{|x|}<\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰<|x|\Rightarrow x>۱۰۰ \text{ یا } x<-۱۰۰$$

$$(-\infty,-۱۰۰)\cup(۱۰۰,+\infty)$$

۶۶۹ گـزینه ۴ تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: (با توجه به نمودار)

۱: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$ ✓

۲: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$ ✓

۳: $\lim\limits_{x\to۰} f(x)=۱$ ✓

بنابراین همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

۶۷۰ گزینه ۴ تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: (با توجه به نمودار)

۱: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \Rightarrow \begin{cases}(-1)^+ : -\infty \\ (-1)^- : +\infty\end{cases}$ ✗

۲: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \begin{cases}1^+ : +\infty \\ 1^+ : +\infty\end{cases}$ ✗

۳: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ ✗

۴: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ ✓

۶۷۱ گزینه ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱: بدین معنی است که با میل‌کردن x به سمت $-\infty$، حاصل تابع $+\infty$ است. حال درستی آن را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -\infty} (0/5)^x = (\frac{1}{2})^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty \checkmark$$

۲: بدین معنی است که با میل‌کردن x به سمت $+\infty$ حاصل تابع 0 است. حال درستی آن را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty} (0/5)^x = (\frac{1}{2})^{+\infty} = 0 \checkmark$$

۳: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (0/5)^x = (\frac{1}{2})^{+\infty} = 0$ ✓

۴: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (0/5)^x = (\frac{1}{2})^{-\infty} = 2^{+\infty} = \infty$ ✗

۶۷۲ گزینه ۲ با توجه به این‌که در $x \to \pm\infty$ می‌توان صورت و مخرج را معادل با جملهٔ با بزرگ‌ترین توان در نظر گرفت:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3x}{x} = 3 \quad , \quad \lim_{x\to \infty} \frac{1}{2-3x} = \frac{1}{-3x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+2}{x-1} + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2-3x} = 3 + 0 = 3$$

۶۷۳ گزینه ۳ با استفاده از جمله با بیشترین توان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x - x^4 + 1}{x + x^5 + 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^4}{x^5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

۶۷۴ گزینه ۳ به استفاده از جمله با بیشترین توان داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} (3 + 2x - 5x^5) = \lim_{x\to +\infty} -5x^5 = -5(+\infty) = -\infty$$

۶۷۵ گزینه ۲ استفاده از جمله با بیشترین توان داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^5 - 2x^3 + 1}{3x^3 - 2x^5 + x + 4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^5}{-2x^5} = -2$$

۶۷۶ گزینه ۴ با استفاده از جمله با بیشترین توان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5 - 2x^3 + 1}{2x^4 + x + 7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5}{2x^4}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{2} = \frac{3(-\infty)}{2} = -\infty$$

۶۷۷ گزینه ۳ حاصل حد هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم: (با توجه به این‌که باید از جمله با بزرگ‌ترین توان استفاده کنیم)

۱: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x} = \frac{2\cancel{x^3}}{7\cancel{x^3}} = \frac{2}{7}$ ✗

۲: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8} = \frac{5x}{x^3} = \frac{5}{x^2} = \frac{5}{+\infty} = 0$ ✗

۳: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \frac{-4x^7}{2x^3} = -2x^4 = -2(-\infty)^4 = -\infty$ ✓

۴: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{3 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{\infty}}}}{\underset{0}{\cancel{\frac{4}{\infty}}} - 5} = \frac{3}{-5}$ ✗

۶۷۸ گزینه ۴

۱: $\lim\limits_{x\to +\infty} (-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6) = -\frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{2}(\infty)^3 = -\infty$

۲: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \frac{x^2}{-x} = -x = -\infty$

۳: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1} = \frac{2x^5}{x^2} = 2x^3 = 2(-\infty)^3 = -\infty$

۴: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{4} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$

بنابراین حاصل گزینهٔ ۴ $+\infty$ می‌باشد، در صورتی که سایر گزینه‌ها $-\infty$ است.

۶۷۹ گزینه ۴

$$f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x - |2x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x + 2x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۶۸۰ گزینه ۴

$$f(x) = \frac{|3x-1| - |2x+1|}{|3-x| - 2x}$$

حاصل هر دو حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{+}{|3x-1|} - \overset{+}{|2x+1|}}{\underset{-}{|3-x|} - 2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(3x-1) - (2x+1)}{-(3-x) - 2x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{-x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\overset{-}{|3x-1|} - \overset{-}{|2x+1|}}{\underset{+}{|3-x|} - 2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-(3x-1) - (-(2x+1))}{(3-x) - 2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-(3x-1) + (2x-1)}{3 - 3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{3 - 3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{-3x} = \frac{1}{3}$$

بنابراین اختلاف دو مقدار به دست آمده برابر است با: $\frac{1}{3} - (-1) = \frac{4}{3}$

۶۸۱ گزینه ۴

$$y = \frac{\sqrt{-x+1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{-4x+1} + \sqrt[3]{27x}}$$

بایستی در صورت و مخرج جملات با بزرگ‌ترین توان را بنویسیم:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-x+1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{-4x+1}\sqrt[3]{27x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-x+1}}{\sqrt{-4x+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-4x}}$$

$$= \frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$$

۶۸۲ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+۳x-۱}{۲x^۳-x+۵}=۴$$

با توجه به این‌که حاصل حد، عددی حقیقی غیرصفر شده است، بنابراین بایستی درجهٔ صورت و مخرج یکسان باشند، پس بایستی $n=۳$ باشد، حال حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۳+۳x-۱}{۲x^۳-x+۵}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۳}{۲x^۳}=\frac{a}{۲}=۴\Rightarrow a=۸$$

بنابراین: $an=۸\times۳=۲۴$

۶۸۳ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۲x+۵}{x^۲-۴x+۳}\ \text{و}\ g(x)=۲^x$$

ابتدا حاصل $f(x)$ وقتی $x\to۱^+$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{۲x+۵}{x^۲-۴x+۳}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۲x+۵}{(x-۱)(x-۳)}=\frac{۷}{۰^+\times(-۲)}$$

$$=\frac{۷}{۰^-}=-\infty$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to۱^+}g(f(x))=g(-\infty)=۲^{-\infty}=(\frac{۱}{۲})^{+\infty}=۰$$

۶۸۴ گزینه ۱ ابتدا حاصل $f(x)$ را وقتی $x\to۰^-$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}۲^{\frac{۱}{x}}=۲^{\frac{۱}{۰^-}}=۲^{-\infty}=(\frac{۱}{۲})^{\infty}=۰$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to۰^-}g(f(x))=g(۰)=\frac{۲(۰)-۳}{(۰)+۱}=-۳$$

۶۸۵ گزینه ۴ با توجه به این‌که $x\to\infty$، پس: $|\overset{+}{x^۲-۴}|=x^۲-۴$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

حال با توجه به مقدار به دست آمده برای a، حاصل $\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|\overset{-}{x^۲-۴}|}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۴-x^۲}{-x^۲-x+۲}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}{\cancel{(x+۲)}(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

۶۸۶ گزینه ۴

$$f(x)=\frac{ax^n-۳x+۱}{۳x^۲+x}$$

با توجه به این‌که حاصل حد یک عدد حقیقی غیرصفر می‌باشد، بنابراین بایستی درجهٔ صورت و مخرج یکسان باشند، پس $n=۲$ می‌باشد.

حال با توجه به $n=۲$، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲}{۳x^۲}=\frac{a}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $f(x)=\frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}$ می‌باشد، پس $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱)=\frac{۲(-۱)^۲-۳(-۱)+۱}{۳(-۱)^۲+(-۱)}=\frac{۲+۳+۱}{۳-۱}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۶۸۷ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}$$

جمله با بزرگ‌ترین درجه در عبارت $\sqrt{۴x^۲+۵}$ برابر است با:

$$\sqrt{۴x^۲+۵}\sim\sqrt{۴x^۲}\sim|۲x|$$

بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+|۲x|}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۲x}{۲x+۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+۲)x}{۲x+۲}$$

$$=\frac{(a+۲)x}{۲x}=\frac{a+۲}{۲}$$

پس $\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}$ می‌باشد:

$$\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a+۲=۵\Rightarrow a=۳$$

با توجه به مقدار $a=۳$، $f(x)=\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\frac{۳(-۱)+\sqrt{۴(-۱)^۲+۵}}{۲(-۱)+۲}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow$$ باید رفع ابهام شود

$$\Rightarrow\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{\underbrace{\cancel{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}}_{-۶}}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{-۶(۲x+۲)}=\lim_{x\to-۱}\frac{۵(x-۱)\cancel{(x+۱)}}{-۱۲\cancel{(x+۱)}}=\frac{۵}{۶}$$

۶۸۸ گزینه ۳ ابتدا $\lim_{x\to-\infty}[\frac{۱}{x}]$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{۱}{x}]=[\frac{۱}{-\infty}]=[۰^-]=-۱$$

بنابراین حاصل حد به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to-\infty}x[\frac{۱}{x}]=\lim_{x\to-\infty}x\times-۱=\lim_{x\to-\infty}-x=-(-\infty)=+\infty$$

۶۸۹ گزینه ۳ با توجه به شکل: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-۱\Rightarrow L=-۱$

بنابراین:

$$\lim_{x\to(-(-۱))^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=+\infty$$

۶۹۰ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x^۲-۲x+a}{x^۲+bx+۱}$$

با توجه به شکل، تابع بر محور x مماس است، پس تابع f تنها یک ریشه دارد، یعنی صورت کسر ریشهٔ مضاعف دارد.

$$\Delta_{\text{صورت}}=۰\Rightarrow(-۲)^۲-۴(۱)(a)=۰\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲-۲x+۱}{x^۲+bx+۱}$$

حال با توجه به نمودار تابع در اطراف مجانب قائم بایستی مخرج کسر ریشهٔ مضاعف داشته باشد (تا در اطراف ریشه تغییر علامت نداشته باشیم).

$$\Rightarrow\Delta_{\text{مخرج}}=۰\Rightarrow(b)^۲-۴(۱)(۱)=۰\Rightarrow b^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}b=۲\\b=-۲\end{cases}$$

حال با توجه به شکل ریشهٔ مخرج باید منفی باشد، بنابراین $b=+۲$ قابل قبول می‌باشد.

$$\Rightarrow a+b=۱+۲=۳$$

۶۹۱ گزینه ۱ ابتدا مقدار $g(x)$ را وقتی $x\to+\infty$ میل می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}}$$