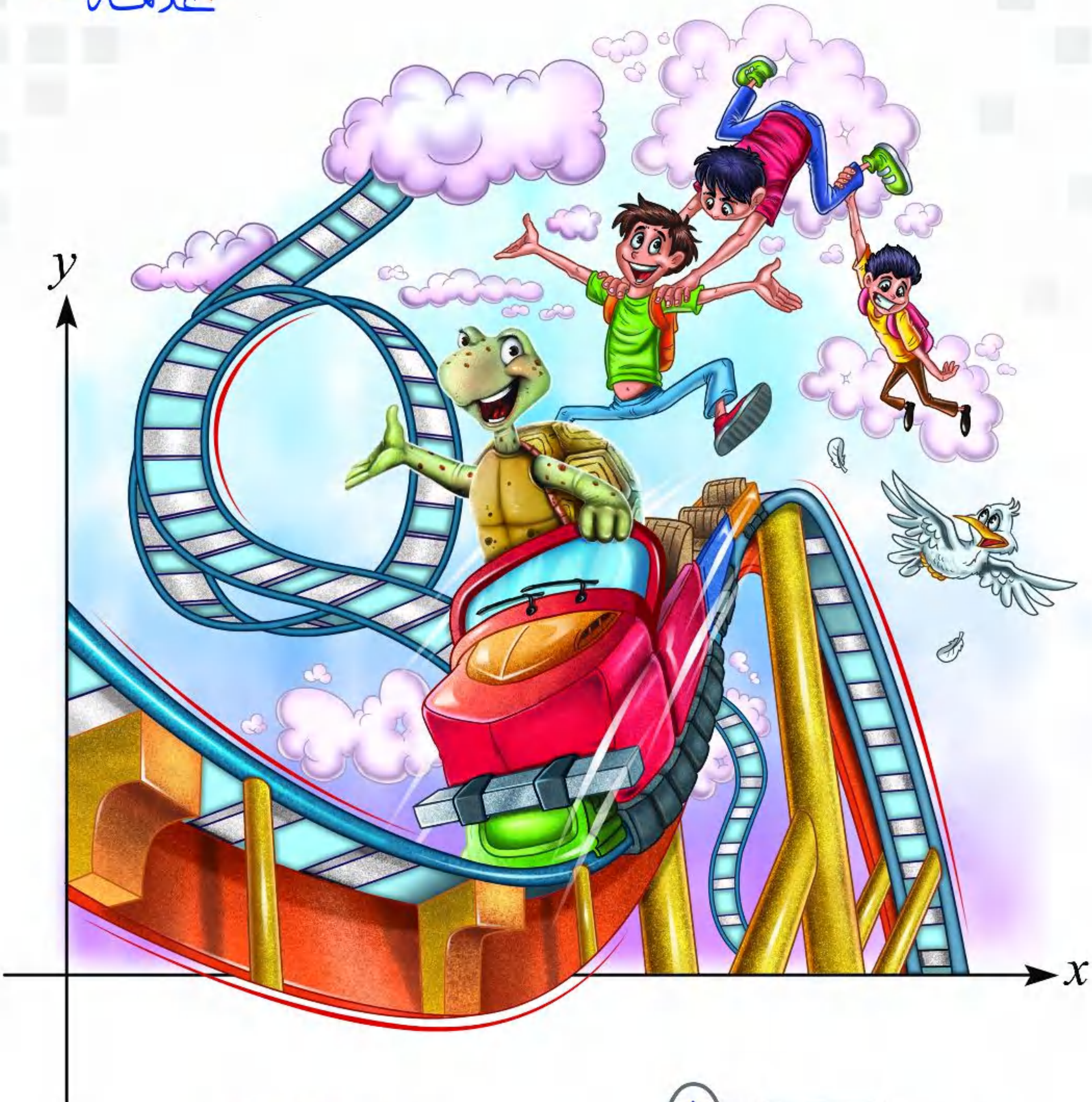


حسابان ۱

یازدهم

کنکور ۹۷ +

مطابق با آخرین تغییرات کتاب درسی

• سیدمحمدصالح ارشاد • حجت انصاری •

مجموعه کتاب‌های علامه حلی

حسابان (۱)
رشته ریاضی فیزیک
پایه یازدهم

• سیدمحمدصالح ارشاد

• حجت انصاری

شناسنامه کتاب

سرشناسه	:	ارشاد، سیدمحمدصالح، ۱۳۶۵
عنوان و نام پدیدآور	:	حسابان (۱) رشته ریاضی فیزیک یازدهم / سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری.
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۶
مشخصات ظاهری	:	۲۹×۲۲ س م. ۱: مصور (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ص ۴۵۶
فروست	:	مجموعه کتاب علامه‌حلی
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۸۹۵۳-۸۱-۴
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپای مختصر
یادداشت	:	فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی *http://opac.nlai.ir* : قابل دسترسی است.
شناسه افزوده	:	انصاری، حجت، ۱۳۵۹
شماره کتابشناسی ملی	:	۴۹۸۰۸۴۶

علامه حلی

عنوان کتاب	حسابان(۱) پایه یازدهم
ناشر	انتشارات حلی
مؤلفان	سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری
ویراستار علمی	معصومه صباغیان، حسین نیری‌پور
هماهنگی	شیوا دلوچی، افسانه رمضانی
طراح جلد	سعید شمس
صفحه‌آرا	راضیه سادات فرهانیان
رسام	محدثه فریابی
حروف‌نگار	حروف‌نگاری علامه‌حلی
سال چاپ	۱۴۰۱
نوبت چاپ	پنجم
شمارگان	۲۰۰۰ جلد
قیمت	۲۷۷۰۰۰ تومان
شماره شابک	۹۷۸-۶۰۰-۸۹۵۳-۸۱-۴

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ و ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

فهرست مطالب

پیشگفتار

به نام خدا

اکنون سال‌هاست نام علامه حلی با فعالیت‌های گوناگونی چون تالیف کتاب‌های مفهومی، برگزاری آزمون‌های با کیفیت، برگزاری مسابقات علمی در سطح کشور، اجرای کارسوق‌های مهیج و خلاق و ... برای دانش‌آموزان کوشا و با استعداد این سرزمین شناخته شده است.

مجموعه علامه حلی با حفظ ارتباط «معلمی» با فضای کلاس و درس، همواره بر آموزش مفهومی و عمیق و یادگیری پایدار تاکید داشته و در جهت رسیدن به این هدف خلاقیت های آموزشی را سرلوحه اهداف خود قرار داده است.

مجموعه کتاب‌های جامع علامه حلی یکی از محصولات بخش انتشارات موسسه است. در این کتاب ها تلاش شده است تا تمام نیاز دانش‌آموزان در درس مورد نظر فراهم گردد و دانش‌آموز با تهیه این کتاب نیاز به مراجعه به سایر کتب تست یا کتب کار و ...را نداشته باشد. بدین منظور، این کتاب‌ها شامل درس نامه جامع و مفصل، تمرینات تشریحی و سوالات چهارگزینه‌ای به تعداد زیاد در هر فصل (با توجه به نیاز دانش‌آموزان برای آمادگی کنکور) با پاسخ‌های کاملا تشریحی می‌باشد.

ما همواره معترف و مفتخریم در راهی که پیموده‌ایم دبیران این سرزمین، با نظرات ارزشمند خود یاور ما بوده‌اند و همچنان برای ادامه راهی که برای سربلندی دانش‌آموزان کشورمان پیش رو داریم، منتظر انتقادات و نظرات سازنده دبیران و دانش آموزان با استعدادمان هستیم. راه ارتباطی ما با شما:

ketab.helli@gmail.com

مریم صفدری

مدیر انتشارات حلی

با نرم افزار موبایل »کتاب زنده« دیده شود.

قبل از شروع به مطالعهٔ کتاب این قسمت را بخوانید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هرکدام وجود دارد که هریک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:

درخت دانش: در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

اهداف رفتاری: بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

پاسخگو باش: در این قسمت باید پاسخگوی مطالبی که تا اینجا خوانده‌اید باشید. پاسخگوی سؤالاتی که انتظار می‌رود بعد از خواندن درس تا آن قسمت، بتوانید باکمی فکرکردن به آن‌ها جواب دهید.

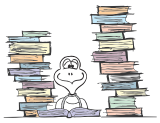
فسفر بسوزان: شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سوالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیدها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

دست به کد شو: در اکثر مدارس خوب کشور از پایه هفتم، آموزش برنامه‌نویسی شروع می‌شود. نوشتن برنامه برای حل یک مسئله علاوه بر کمک به یادگیری بهتر برنامه‌نویسی، به فهم عمیق مسئله و نحوه حل آن کمک زیادی می‌کند. در پایان هر فصل بخشی به نام دست به کد شو وجود دارد که با توجه به موضوعات فصل و مهارت‌های برنامه‌نویسی طراحی شده است. اگر برنامه‌نویسی بلد نیستید می‌توانید به کتاب برنامه‌نویسی انتشارات ما رجوع کنید و هرچه سریع‌تر برنامه‌نویسی را یاد بگیرید.

تاریخ علم: در این بخش شخصیتی در متن درس معرفی می‌شود و درکنار صفحه، عکس و مختصری از زندگی وی می‌بینید. حق مسلم ما است که حداقل قیافه این دانشمندان دوست داشتنی را ببینیم، شاید در کتاب‌های آینده عکس شما هم اینجا قرار بگیرد!

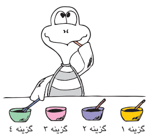
جالب است بدانی: برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به‌راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.

جمع‌بندی کن: در انتهای فصل برای یک جمع‌بندی سریع می‌توان از این قسمت کمک گرفت. در این قسمت با هم فصل را جمع می‌کنیم و نکات و مطالب مهم را برای خود تکمیل می‌کنیم.



لغت‌نامه: ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضوع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات مهم با معادل انگلیسی آن آورده شده است.

تمرین‌ها: در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید. سوالات سخت با ستاره مشخص شده، اگر این سوالات را نتوانستید حل کنید خیلی به خودتان آسیب نزنید!



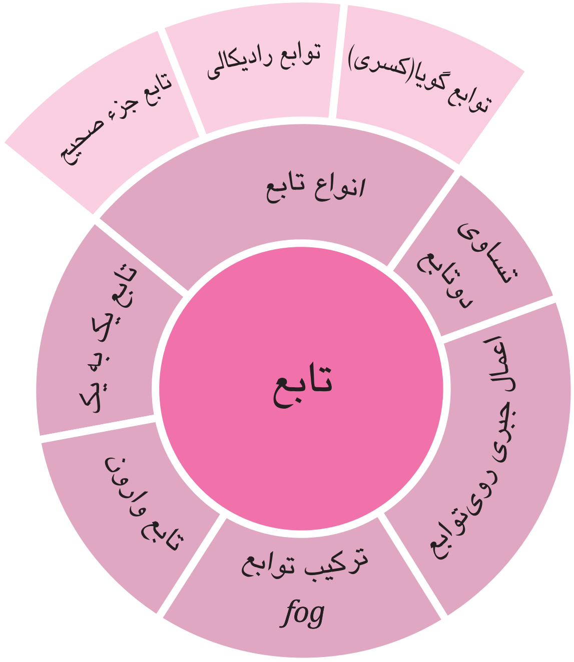
پرسش‌های چهارگزینه‌ای: سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. سؤالات چهارگزینه‌ای با این پیش فرض طراحی شده است که اگر نکات مربوط به سؤال را بلد باشید حداکثر در ۲ دقیقه بتوانید به آن جواب دهید.

پاسخ‌ها: پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای همه فصل‌ها به‌صورت معرفی گزینه درست طراحی شده. جواب‌های نهایی سؤال‌ها هم برای چک کردن درستی راه حل، ارائه شده است. پاسخ تشریحی تمرین‌های زوج به‌طور کامل در وب‌سایت کتاب و همچنین همه پاسخ‌ها به‌طور کامل در کتاب پاسخ‌نامه قابل دسترس است.

فصل ۲

تابع

آشنایی با توابع و درک آنها کمک بزرگی به پیشرفت علوم مختلف داشته است. در علوم مختلف با نوشتن توابع مناسب و تحلیل این روابط در نرم‌افزارها، از بسیاری از آزمایشات جلوگیری می‌کنند و با بهینه‌سازی هدف مورد نظر هزینه‌ها را کاهش می‌دهند. شما هیچ‌گاه نمی‌توانید یک پل پیچیده در دره‌ای طراحی کنید و بعد آن را آزمایش کنید. این روابط ریاضی هستند که به عملکرد شما اطمینان می‌دهند بدون آنکه آزمایش‌های عظیم طراحی کنید.



اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی می‌توانی:

- مفهوم تابع برای شما یادآوری می‌شود.
- نحوه بدست آوردن دامنه و برد را فراخواهی گرفت.
- با انواع تابع (گویا، رادیکالی و جزءصحیح) و دامنه و برد و نمودارهای آن‌ها آشنا می‌شوی.
- مفهوم تابع یک به یک و وارون تابع را یادخواهی گرفت و می‌توانی وارون یک تابع را به‌دست آوری.
- با اعمال جبری بر روی توابع و همچنین ترکیب توابع آشنا می‌شوی.

◄ آشنایی بیشتر با تابع

یادآوری

همان‌طور که در سال گذشته با تعریف تابع آشنا شدیم، تابع مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی است که در آن‌ها هیچ ۲ زوج مرتبی با مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت وجود ندارد. به عبارت دیگر هیچ مؤلفه اولی به ۲ مؤلفه دوم متفاوت مرتب نباشد.

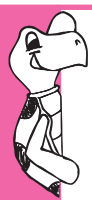
حالا می‌خواهیم در مورد تابع کمی بیشتر صحبت کنیم. درواقع تابع مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها می‌باشد که مؤلفه‌های اول این زوج مرتب‌ها از مجموعه‌ای مثل A که آن را دامنه می‌نامیم انتخاب شده‌اند و مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها نیز داخل مجموعه‌ای مثل B بوده که آن را هم‌دامنه می‌نامیم. درضمن به رابطه‌ای که بین مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها تعریف می‌شود، ضابطه می‌گوییم. مثلاً:

$$f:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ y=f(x)=\dfrac{۳x-۴}{۵}\end{cases}$$

در تابع f مجموعه $\mathbb{N}$ دامنه تابع می‌باشد. (بدان معنا که ورودی‌های تابع که همان مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع می‌باشد، باید از $\mathbb{N}$ انتخاب شوند).

مؤلفه‌های دوم تابع f نیز در مجموعه اعداد حقیقی خواهد بود و $\mathbb{R}$ را هم‌دامنه تابع f می‌نامیم. به رابطه $y=\dfrac{۳x-۴}{۵}$ نیز ضابطه تابع می‌گوییم.

برای اینکه یک تابع را بشناسیم، می‌بایست دامنه، هم‌دامنه و ضابطه تابع را مشخص کنیم.



دقت داشته باشید که مجموعه تمام خروجی‌های تابع (که همان مؤلفه‌های دوم تابع می‌باشند) را بُرد تابع می‌نامیم که زیر مجموعه‌ای است از مجموعه هم‌دامنه.

به‌عبارت دیگر یک تابع یک بُرد مشخص دارد ولی می‌توان برای آن چندین هم‌دامنه تعیین کرد. مثلاً:

$$f:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ y=۳x+۱\end{cases}\qquad f:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{Z}\\ y=۳x+۱\end{cases}$$

یافتن دامنه و برد تابع

الف) از روی نمودار تابع

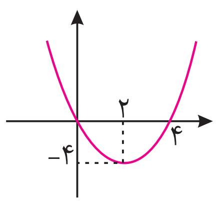
اگر بتوانیم نمودار تابع را رسم کنیم می‌توانیم دامنه و برد تابع را بیابیم.

دامنه: تصویر نمودار تابع برروی محور طول‌ها دامنه تابع را مشخص می‌کند.

برد: تصویر نمودار تابع برروی محور عرض‌ها برد تابع را مشخص می‌کند.

مثال ۱. دامنه و برد تابع $f(x)=x^{۲}-۴x$ را بیابید.

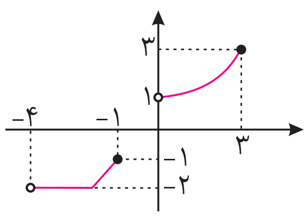
پاسخ: ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم.



$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=[-۴,+\infty)$$

مثال ۲. باتوجه به نمودار مربوط به تابع $f(x)$ دامنه و برد تابع را بیابید.

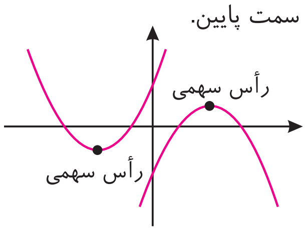
پاسخ:



$$D_f=[-۴,-۱]\cup(۰,۳]$$
$$R_f=[-۲,-۱]\cup(۱,۳]$$

ب) شناخت توابع خاص

اگر ما توابع خاص را بشناسیم می‌توانیم بُرد آن‌ها را تشخیص دهیم. مثلاً می‌دانیم نمودار یک تابع درجه ۲ به شکل یک سهمی است و سهمی‌ها به‌طور کلی به ۲ صورت می‌باشند. یا به سمت بالا هستند و یا به سمت پایین.



بنابراین بُرد سهمی‌ها یا به‌صورت $[y_{\text{رأس}} ,\ +\infty)$ بوده و یا به‌صورت $[-\infty ,\ y_{\text{رأس}})$ می‌باشد. پس کافی است که $y_{\text{رأس}}$ را بیابیم و باتوجه به جهت سهمی، بُرد را بیابیم.

به‌عنوان مثال دیگر می‌توان به توابع رادیکالی اشاره کرد. می‌دانیم که توابع رادیکالی منفی نمی‌شوند و اگر دامنه تابع (باتوجه به عبارت زیر رادیکال) محدود نباشد، می‌توان بُرد را تشخیص داد.

مثال ۳. برد توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=x^{۲}+۴x-۵$ ۲) $f(x)=\sqrt{x-۳}+۲$ ۳) $f(x)=|x+۴|-۳$

پاسخ:

۱) $x_{\text{رأس}}=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-۴}{۲}=-۲ \Rightarrow y_{\text{رأس}}=f(-۲)=-۹$

سهمی رو به بالا است $\Rightarrow R_f=[-۹ ,+\infty)$

۲) $\sqrt{x-۳}\geq ۰$ می‌دانیم رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است

$\Rightarrow \sqrt{x-۳}+۲\geq ۲ \Rightarrow R_f=[۲ ,+\infty)$

۳) $|x+۴|\geq ۰ \xrightarrow{\text{می‌دانیم قدرمطلق همواره منفی است}} |x+۴|-۳\geq -۳ \Rightarrow R_f=[-۳ ,+\infty)$

ج) یافتن محدوده $f(x)$ از روی محدوده x و باتوجه به ضابطه تابع

یکی از راه‌های یافتن برد آن است که از روی محدوده x باتوجه به ضابطه تابع، محدوده y را بیابیم. به مثال روبه‌رو توجه کنید.

$$\begin{cases}[-۳ , ۷)\longrightarrow \mathbb{R}\\ f(x)=x^{۲}-۲x+۵\end{cases}$$

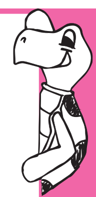
ابتدا ضابطه تابع را مرتب می‌کنیم و با مربع‌سازی کاری می‌کنیم که ورودی تابع (x) در یک عبارت باشد تا بتوانیم از آن قسمت شروع به ساختن ضابطه و محدوده $f(x)$ بکنیم.

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۵=(x-۱)^{۲}+۴$$

حالا باتوجه به دامنه تعیین شده توسط طراح (یعنی بازه $[-۳ , ۷)$) شروع به ساختن $f(x)$ می‌کنیم.

$$-۳\leq x<۷ \Rightarrow -۴\leq (x-۱)<۶ \Rightarrow ۰\leq (x-۱)^{۲}<۳۶ \Rightarrow ۴\leq (x+۱)^{۲}+۴<۴۰ \Rightarrow ۴\leq f(x)<۴۰$$

در نتیجه خواهیم داشت: $R_f=[۴ , ۴۰)$



توجه داشته باشید که بُرد تابع باتوجه به دامنه تابع تعیین می‌شود و حتماً باید به آن دقت داشته باشیم. مثلاً در مورد توابع رادیکالی می‌دانیم که رادیکال همواره نامنفی است ولی ممکن است رادیکال تمام اعداد مثبت را تولید نکند. مثلاً در تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۲}$ عبارت زیر رادیکال همواره بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشد و لذا رادیکال نیز بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{۲}$ خواهد بود؛ یعنی $R_f=[\sqrt{۲} ,+\infty)$ است.

گاهی نیز دامنه تابع توسط طراح سؤال محدود می‌شود. به مثال‌های بعد توجه کنید.

مثال ۴. برد توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(x)=\sqrt{-x^2+4} \qquad 2)\ \begin{cases}[-13,7)\longrightarrow \mathbb{R}\\ f(x)=|x-3|+2\end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases}(-2,5]\longrightarrow \mathbb{R}\\ f(x)=x^3-3x^2+3x+4\end{cases}$$

پاسخ: ۱) ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم.

$$-x^2+4\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow D_f=[-2,2]$$

$$-2\leq x\leq 2 \Rightarrow 0\leq x^2\leq 4 \Rightarrow 0\geq -x^2\geq -4 \Rightarrow 4\geq -x^2+4\geq 0 \Rightarrow 0\leq \sqrt{-x^2+4}\leq 2 \Rightarrow R_f=[0,2]$$

۲)

$$-13\leq x<7 \Rightarrow -16\leq x-3<4 \Rightarrow 0\leq |x-3|\leq 16 \Rightarrow 2\leq |x-3|+2\leq 18 \Rightarrow R_f=[2,18]$$

۳) ابتدا ضابطه را مرتب می‌کنیم.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+4=(x-1)^3+5$$

$$-2<x\leq 5 \Rightarrow -3<x-1\leq 4 \Rightarrow -27<(x-1)^3\leq 64 \Rightarrow -22<(x-1)^3+5\leq 69$$
$$\Rightarrow R_f=(-22,69]$$

د) یافتن x برحسب y

یکی از جامع‌ترین روش‌های به‌دست آوردن برد آن است که ما x (ورودی تابع) را برحسب y (خروجی تابع) بیابیم و باتوجه به محدودیت‌های که برای y وجود دارد، برد را به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال اگر $f(x)=\frac{x-3}{4-x}$ باشد، خواهیم داشت:

$$y=\frac{x-3}{4-x} \Rightarrow 4y-xy=x-3 \Rightarrow 4y+3=x+xy \Rightarrow 4y+3=x(1+y) \Rightarrow x=\frac{4y+3}{y+1}$$

در رابطه به‌دست آمده، تنها محدودیتی که برای y وجود دارد آن است که -1 نباشد تا مخرج کسر صفر نشود، بنابراین:
$R_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

در واقع ما یک معادله حل می‌کنیم که مجهول در آن y و x معلوم است. پس باید همه مراحل حل این معادله برگشت‌پذیر نیز باشد.

مثال ۵. برد توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(x)=\frac{x^2-2x}{x+1} \qquad 2)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-x-2}$$

پاسخ: ۱) ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم. $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$y=\frac{x^2-2x}{x+1} \Rightarrow yx+y=x^2-2x \Rightarrow x^2-2x-yx-y=0$$
$$\Rightarrow x^2-(2+y)x-y=0 \xrightarrow[\text{حقیقی دارید } x]{\text{به ازای } \Delta\geq 0} \Delta\geq 0 \Rightarrow (2+y)^2+4y\geq 0 \Rightarrow y^2+8y+4\geq 0$$

$$R_f=\left(-\infty,-4-\sqrt{12}\right]\cup\left[-4+\sqrt{12},+\infty\right)$$

		$-4-\sqrt{12}$		$-4+\sqrt{12}$	
Δ	$+$		$-$		$+$

۲) ابتدا دامنه را تعیین کرده و سپس تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-x-2} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-1,2\} \text{ ریشه‌های مخرج}$$

$$y=\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(x^2-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x-2)}$$

$$y=\frac{x^{2}+x-2}{x-2}\Rightarrow yx-2y=x^{2}+x-2\Rightarrow x^{2}+(1-y)x+2y-2=0$$

$$\Delta\geq 0\Rightarrow (1-y)^{2}-4(2y-2)\geq 0\Rightarrow y^{2}-10y+9\geq 0\Rightarrow y\in\mathbb{R}-(1,9)$$

فقط باید دامنه را در عبارت نهایی چک کنیم تا ببینیم آیا برد تغییری می‌کند یا خیر

$$x^{2}+(1-y)x-2y+2=0\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x=-1}1-1+y+2y-2=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}\\ \xrightarrow{x=2}4+2-2y+2y-2=0\Rightarrow 4=0 \text{※}\end{cases}$$

بنابراین ممکن است $y=\frac{2}{3}$ عضوی از برد نباشد. اما چرا می‌گوییم ممکن است؟ چون ممکن است $y=\frac{2}{3}$ توسط عدد غیر از $x=-1$ نیز ایجاد شود. پس در مرحله آخر باید چک کنیم که آیا $y=\frac{2}{3}$ توسط x دیگری غیر از ۱- تولید می‌شود یا خیر.

$$x^{2}+(1-y)x+2y-2=0\xrightarrow{y=\frac{2}{3}}x^{2}+(1-\frac{2}{3})x+2\times\frac{2}{3}-2=0$$

$$x^{2}+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=0\Rightarrow 3x^{2}+x-2=0\begin{cases}x=-1\\ x=\frac{2}{3}\end{cases}$$

چون $y=\frac{2}{3}$ توسط $x=\frac{2}{3}$ که در دامنه هست تولید می‌شود، بنابراین $y=\frac{2}{3}$ در برد خواهد بود و برد نهایی برابر است با:

$$R_f=(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$$

مثال ۶. دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x-1}}}$ ب) $y=\frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{|x|-x}}$

پاسخ: الف)

$$\left.\begin{array}{l}x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\\ 2-\sqrt{x-1}>0\Rightarrow 2>\sqrt{x-1}\Rightarrow 4>x-1\Rightarrow x<5\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=[1,5)$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}2x+5\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{5}{2}\\ |x|-x>0\Rightarrow |x|>x\Rightarrow x<0\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=[-\frac{5}{2},0)$$

توجه داشته باشید که اگر $x\geq 0$ باشد $|x|=x$ و اگر $x<0$ باشد $|x|>x$ خواهد بود.

تست ۱. دامنه تابع $y=\sqrt{||x-1|-3|-2}$ شامل چند عددصحیحی نمی‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینه ۲

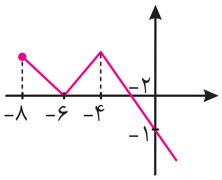
$$y=\sqrt{||x-1|-3|-2}$$

$$||x-1|-3|\geq 2\Rightarrow\begin{cases}|x-1|-3\geq 2\\ |x-1|-3\leq -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|\geq 5\Rightarrow x-1\leq -5 \text{ یا } x-1\geq 5\Rightarrow x\leq -4 \text{ یا } x\geq 6\\ |x-1|\leq 1\Rightarrow -1\leq x-1\leq 1\Rightarrow 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-4]\cup[0,2]\cup[6,+\infty)$$

دامنه تابع شامل ۶ عدد صحیح نیست.

تست ۲. نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{f(x)}{x+۴}}$ کدام است؟



۱) $[-۴,-۲]$ ۲) $\left[-۲,-\frac{۱}{۲}\right)$

۳) $[-۴,-۲)\cup\{-۶\}$ ۴) $[-۶,-۲]$

پاسخ گزینه ۳

در بازه‌هایی که نمودار تابع f بالای محور xهاست مقادیر تابع مثبت و در بازه‌هایی که پایین محور xهاست مقادیر تابع منفی است. پس کمک جدول تعیین علامت داریم:

		-۸		-۶		-۴		-۲	
$f(x)$	تعریف نشده		$+$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$x+۴$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$\dfrac{f(x)}{x+۴}$	تعریف نشده		$-$	۰	$-$	ت.ن	$+$	۰	$-$

$$\frac{f(x)}{x+۴}\geq ۰ \Rightarrow (-۴,-۲]\cup\{-۶\}$$

تست ۳. برد تابع با ضابطه $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\dfrac{۲-x}{x}}$ ، کدام می باشد؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

پاسخ گزینه ۲

ابتدا دامنه تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{۲-x}{x}\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} D_f=(۰,۲]$$

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}} \overset{x>۰}{=\!=} ۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲\sqrt{x(۲-x)}=۲\sqrt{۱-(x-۱)^۲}$$

حال با توجه به دامنه، برد را به‌دست می‌آوریم:

$$۰<x\leq ۲ \Rightarrow -۱<x-۱\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq (x-۱)^۲\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq ۱-(x-۱)^۲\leq ۱$$

$$\Rightarrow ۰\leq ۲\sqrt{۱-(x-۱)^۲}\leq ۲ \Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

روش دوم (راه‌حل تستی):

$x=۲$ در دامنه تابع قرار دارد و $f(۲)=۰$ ، بنابراین صفر باید جزء برد تابع f باشد که تنها در گزینه (۲) وجود دارد.

تساوی ۲ تابع

همان‌طور که قبلاً گفته‌ایم، تابع مجموعه زوج مرتب‌ها می‌باشد. بنابراین اگر قرار باشد ۲ تابع با یکدیگر مساوی باشند، می‌بایست تمام زوج مرتب‌های تابع اول در تابع دوم باشد و تمام زوج مرتب‌های تابع دوم در تابع اول باشد. به عبارت دیگر ۲ مجموعه مساوی داریم که می‌بایست تمام عضوهایشان یکسان باشد.

برای بررسی تساوی ۲ تابع می‌بایست ۲ شرط را بررسی کنیم:

۱) دامنه ۲ تابع برابر باشد. $D_f=D_g$

۲) به‌ازای هر عضو از دامنه یکسان ۲ تابع، خروجی‌های ۲ تابع نیز با یکدیگر برابر باشد: $\forall_{x\in D_f} \Rightarrow f(x)=g(x)$

اگر تابع‌هایی که می‌خواهیم بررسی کنیم، به‌صورت زوج مرتبی باشد، کافی است ابتدا مؤلفه‌های اول در ۲ تابع را باهم مقایسه کنیم و سپس هر دو زوج مرتبی که مؤلفه اول یکسان دارند را بررسی کنیم که مؤلفه دوم یکسان نیز داشته باشند. اگر تابع‌ها به‌صورت ضابطه‌ای بودند، ابتدا دامنه‌ها را می‌یابیم و باهم مقایسه می‌کنیم. اگر مساوی بودند، برای بررسی کردن شرط دوم سعی می‌کنیم با ساده کردن یک ضابطه (در محدوده دامنه‌ها) به ضابطه دوم برسیم.

مثال ۷. a و b را چنان بیابید که ۲ تابع باهم برابر باشند.

$$f=\{(1, a^2-2a), (-1, 4)\} \qquad g=\{(b-3, a+3), (1, -1)\}$$

پاسخ: برای تساوی ۲ تابع باید زوج مرتب‌های آن‌ها یکسان باشند، یعنی:

$$(-1, 4)=(b-3, a+3) \longrightarrow b-3=-1 \Rightarrow b=2$$

$$(1, a^2-2a)=(1, -1) \Rightarrow a^2-2a=-1 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1$$

مثال ۸. در هر مورد بررسی کنید که آیا ۲ تابع با یکدیگر مساوی هستند یا خیر.

۱) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} \qquad g(x)=x+1$

۲) $f(x)=\sqrt{-x^3} \qquad g(x)=x\sqrt{-x}$

پاسخ:

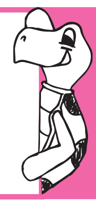
۱) $D_f=\mathbb{R}-\{1\} \qquad D_g=\mathbb{R} \qquad D_f \neq D_g$ پس ۲ تابع مساوی نیستند.

۲) $D_f=(-\infty, 0] \qquad D_g=(-\infty, 0] \qquad D_f=D_g$ شرط اول برقرار است

تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم تا به $g(x)$ برسیم:

$$f(x)=\sqrt{-x^3}=\sqrt{-x \times x^2}=\sqrt{-x}\times\sqrt{x^2}=\sqrt{-x}\times|x|=\sqrt{-x}\times(-x)=-x\sqrt{-x}$$

بنابراین ۲ تابع با یکدیگر برابر نیستند. $f(x)=-g(x)\neq g(x)$



اگر ۲ تابع f و g برابر باشند، دامنه آن‌ها با هم و برد آن‌ها نیز با هم برابر خواهد بود ولی برابری بردها و دامنه‌های ۲ تابع دلیل بر برابری آن ۲ تابع نمی‌باشد. به مثال زیر دقت کنید:

$$f=\{(2, 5), (3, 4)\} \qquad g=\{(2, 4), (3, 5)\} \qquad D_f=D_g, R_f=R_g, f\neq g$$

تست ۴. **چه تعداد از توابع f و g با هم برابرند؟**

الف) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{5x+2}}$ ، $g(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x+2}}$

ب) $f(x)=-\sqrt{(4-3x)^3}$ ، $g(x)=(3x-4)\sqrt{4-3x}$

ج) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+1}$ ، $g(x)=1$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینه ۲

الف)
$$D_f: \frac{2x-1}{5x+2}\geq 0 \Rightarrow D_f: x<-\frac{2}{5}, x>\frac{1}{2}$$
$$D_g: \begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \\ x>-\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow D_g: x\geq\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow f\neq g$$

ب)
$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{(4-3x)^2(4-3x)} \Rightarrow f(x)=-|4-3x|\sqrt{(4-3x)} \\ \Rightarrow f(x)=(3x-4)\sqrt{4-3x}=g(x) \quad (1) \\ D_f=D_g \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1), (2)} f=g$$

ج)
$$\begin{matrix} D_f=\mathbb{R}-\{1\} \\ D_g=\mathbb{R} \end{matrix} \Rightarrow f\neq g$$

◄ انواع تابع

سال گذشته با توابعی مثل تابع ثابت، تابع همانی، تابع خطی و تابع درجه ۲ آشنا شدیم. امثال می‌خواهیم با چند تابع دیگر آشنا شویم.

توابع گویا

توابع گویا یا توابع کسری توابعی هستند که به‌صورت کلی به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ نوشته می‌شوند که $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای می‌باشند و $Q(x)$ نیز مخالف صفر است.

به‌عبارت دیگر توابع گویا از تقسیم ۲ تابع چند جمله‌ای بر یکدیگر تولید می‌شوند.
دامنه توابع گویا برابر است با کل اعداد حقیقی به‌جز آن‌هایی که باعث صفر شدن مخرج کسر (یعنی $Q(x)$) می‌شود.
بنابراین برای یافتن دامنه تابع می‌بایست ریشه‌های مخرج را بیابیم و آن را از مجموعه اعداد حقیقی حذف کنیم. برد تابع نیز کاملاً بستگی به ضابطه تابع دارد.

مثال ۹. الف) دامنه تابع روبه‌رو را بیابید.

ب) برد تابع را نیز بیابید (محتوای تکمیلی).

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

پاسخ: برای یافتن برد x را برحسب y می‌یابیم.

الف) $x^2-3x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq 1,2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1,2\}$

ب) $y=\frac{x-1}{x^2-3x+2} \Rightarrow y=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow y=\frac{1}{x-2} \Rightarrow xy-2y=1$

$$\Rightarrow xy=1+2y \Rightarrow x=\frac{1+2y}{y} \qquad y\neq 0$$

برد اولیه برابر است با $\mathbb{R}$ منهای صفر. ولی دامنه تابع را باید چک کنیم. یعنی $x=1,2$ را در رابطه $x=\frac{1+2y}{y}$ قرار می‌دهیم تا ببینیم چه yهایی تولید می‌کند.

$$x=2 \Rightarrow 2=\frac{1+2y}{y} \Rightarrow 1+2y=2y \Rightarrow 1=0 \times$$

$$x=1 \Rightarrow 1=\frac{1+2y}{y} \Rightarrow y=1+2y \Rightarrow y=-1$$

یعنی y نباید ۱- باشد مگر آنکه توسط یک x دیگری تولید شود که آن را در معادله اولیه چک می‌کنیم.

$$y=-1 \Rightarrow -1=\frac{x-1}{x^2-3x+2} \Rightarrow -x^2+3x-2=x-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$$

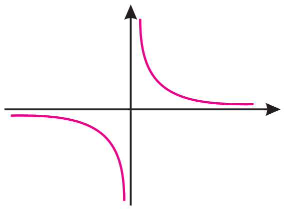
چون $y=-1$ فقط توسط $x=1$ تولید می‌شود باید از برد حذف شود. بنابراین:

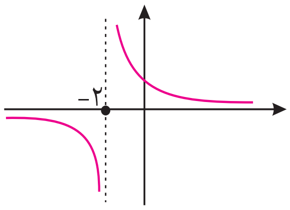
$$R_f=\mathbb{R}-\{0,-1\}$$

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ یک تابع گویا می‌باشد که باتوجه به کاربرد زیاد آن، خوب است با نمودار آن آشنا شویم.

دامنه تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ برابر با $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است و برد آن نیز برابر $R_f=\mathbb{R}-\{0\}$ می‌باشد.



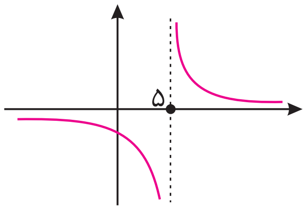


توجه داشته باشید که تابعی مثل $g(x)=\dfrac{۱}{x+۲}$ درواقع انتقال یافته تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ می‌باشد. یعنی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ دو واحد به سمت چپ منتقل شده است.

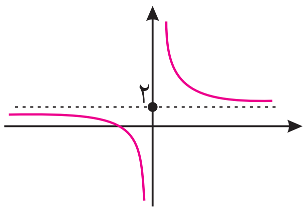
مثال ۱۰. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

۱) $f(x)=\dfrac{۳}{x-۵}$ ۲) $g(x)=\dfrac{۱}{x}+۲$

پاسخ:

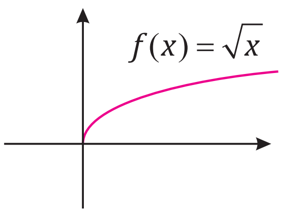


۱) اگر $y=\dfrac{۳}{x-۵}$ را با $y=\dfrac{۱}{x}$ مقایسه کنیم، درواقع ورودی تابع منهای پنج شده است. یعنی نمودار ۵ واحد به سمت راست حرکت می‌کند.



۲) اگر $y=\dfrac{۱}{x}+۲$ را با $y=\dfrac{۱}{x}$ مقایسه کنیم. در واقع خروجی تابع با ۲ جمع شده است. یعنی نمودار ۲ واحد به سمت بالا حرکت می‌کند.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم) $f(x)=\sqrt{x}$

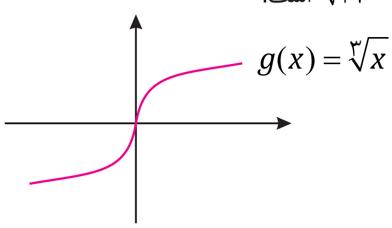


تابع رادیکالی (تابع ریشه دوم) تابعی است که از ورودی تابع جذر می‌گیرد. یعنی ریشه دوم نامنفی ورودی تابع را به‌عنوان خروجی می‌دهد. مثلاً (۳ و ۹) یک زوج مرتب از تابع می‌باشد. زیرا $\sqrt{۹}=۳$ می‌باشد.

همان‌طور که در نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نیز دیده می‌شود، ورودی‌های تابع همگی نامنفی و خروجی‌های تابع هم نامنفی می‌باشد. بنابراین: $D_f=[۰,+\infty)$ $R_f=[۰,+\infty)$

توجه داشته باشید که تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ نیز یک تابع رادیکالی با فرجه فرد می‌باشد.

در این تابع چون فرجه فرد است، ورودی‌های تابع می‌توانند تمام اعداد حقیقی باشند و خروجی‌های تابع نیز می‌توانند مثبت یا منفی یا صفر باشند. مثلاً (۳ و ۲۷) یک زوج مرتب از این تابع است. زیرا $۳=\sqrt[۳]{۲۷}$ است.



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

مثال ۱۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

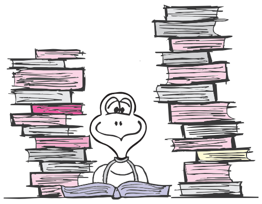
۱) $f(x)=\sqrt{۲x+۳}+۲$ ۲) $g(x)=\sqrt{۴-x}-۱$ ۳) $h(x)=\sqrt[۳]{x-۲}-۱$

پاسخ:

۱) ابتدا $۲x$ را X فرض می‌کنیم و نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۳ واحد به سمت چپ برده و سپس چون $۲x$ داشته‌ایم و ورودی‌ها ۲ برابر شده‌اند، پس طول نقاط نصف می‌شود و در نهایت نیز نمودار ۲ واحد به سمت بالا می‌رود.

اگر دامنه تابع را به‌دست بیاورید نیز به همین نتیجه می‌رسیم. $D_f=\left[-\dfrac{۳}{۲},+\infty\right)$

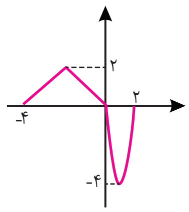
لغت‌نامه



ترجمه	واژه علمی	ترجمه	واژه علمی
برد	*Range*	تابع رادیکالی	*Radical function*
تابع	*Function*	تابع همانی	*Identity function*
تابع انتقال	*Transfer function*	تابع همانی	*Identity function*
تابع ثابت	*Constant function*	تابع یک‌به‌یک	*Injective function*
تابع جزءصحیح	*Step function*	دامنه	*Domain*
تابع چندجمله‌ای (پله‌ای)	*Polynomial function*	نمودار	*Graph*

جمع‌بندی کن.

۱. نمودار تابع $g(x)$ به‌شکل زیر است.



الف) $۲g(x)$ را رسم کنید.

ب) $-g(x)$ را رسم کنید.

ج) دامنه و برد g را مشخص کنید.

۲. اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{۱-x}} & x<۱ \\ ۲x-\dfrac{۳}{۴} & x\geq ۱ \end{cases}$، مقدار $f(f(\frac{۳}{۴}))$ را به‌دست آورید.

۳. a و b را چنان بیابید که رابطه‌های زیر تابع باشند.

الف) $\{(۱,۳),(۲,a+b),(۲,۳),(۴,۲a+۵b),(۵,-۱),(۴,۹)\}$

ب) $\{(۱,۲a),(۵,۰),(-۱,۱),(۲,۳),(۲,۷b-۱)\}$

۴. آیا دو تابع $g(x)=\sqrt{۱+x^۲}-۱$ و $f(x)=\dfrac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}$ مساوی هستند، چرا؟

۵. تساوی زیر را بررسی کنید.

$$f(x)=۰ \quad , \quad g(x)=\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right]$$

۶. دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{|x|-۵}$

۲) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۲}{x+۲}}$

۷. دامنه تابع زیر را به‌دست آورید. $f(x)=\sqrt{|x+۱|+x-۳}$

۸. برد تابع زیر را به‌دست آورید.

$$y=\frac{x^۴+۲}{x^۲}$$

۹. کدام‌یک از روابط زیر نمایشگر یک تابع می‌باشند؟

الف) $|y-۱|+(x-۲)^۲=۰$ ب) $y^۲+۲y=x^۲+۳$

۱۰. به ازای کدام مقدار k، $f(x)=\begin{cases} kx+۲ & x\geq ۲ \\ x^۳ & x\leq ۲ \end{cases}$ ضابطه یک تابع است؟

۱۱. نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۲}x+۱\right]$ را در بازه $[-۲,۲)$ رسم کنید.

۱۲. معادله زیر را حل کنید.

$$[x]+[x+۳]-[x+۴]=+۲$$

۱۳. نمودار تابع $y=[|x|]$ را برای $-۲\leq x<۲$ رسم کنید.

۱۴. a و b را طوری تعیین کنید، که تابع زیر یک‌به‌یک باشد.

$$f=\{(۱,۴),(۲,a+۳),(b^۲-۳,۴),(۲,b+۱),(۳,a+b)\}$$

۱۵. تابع $y=x^۲-۴x+۵$ با دامنه $[a,+\infty)$ یک‌به‌یک است. کمترین مقدار a چقدر است؟

۱۶. در مورد وارون‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x\leq -۱ \\ x^۲ & -۱<x<۱ \\ x+۱ & ۱\leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۱۷. اگر $f^{-۱}(x)$ تابع معکوس $f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۴}}$ باشد، $f^{-۱}(\sqrt{۶})$ کدام است؟

۱۸. معکوس‌پذیری $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x^۳-۱}}$ را تحقیق کنید و در صورت معکوس‌پیری ضابطه تابع معکوس را بیابید.

۱۹. اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کد، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t)=۱۰۰-\frac{۴۹}{۱۰}t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد تابع $h(t)s$ را به‌دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک‌به‌یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به‌دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟

۲۰. اگر $f=\{(-۲,-۱),(-۱,۰),(۰,۲),(-۳,۳)\}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ باشد، دامنه تابع $f+g$ و تابع $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

۲۱. اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ باشد:

الف) تابع fog را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۲۲. اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲-|x-۱|}}$ و $g(x)=|x-۱|$ مطلوب است، دامنه توابع $f+g$ و fog و ضابطه gof.

۲۳. اگر $f(۲x-۱)+۳f(۱)=x+۷$ باشد، ضابطه $f(x)$ را به‌دست آورید.

۲۴. اگر $f(x)=x+۱$ و $fog(x)=۳x+۵$ باشد، آن‌گاه $g(x)$ را به‌دست آورید.

۲۵. اگر $h(x)=۴x^۲+۴x+۷$ و $g(x)=۲x+۱$، تابعی مانند f بیابید به قسمی که $fog=h$

تمرین‌ها

تابع (تعریف، دامنه و برد)

۱. الف) چند تابع مانند f با ویژگی $f:\{۱,۲,۳\}\to\{۳,۴,۵,۶\}$ می‌توان تعریف کرد؟ ۵ مورد از این توابع را بنویسید.

ب) از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی چند تابع می‌توان تعریف کرد؟

۲. در مستطیلی به عرض w و محیط ۴۰ متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.

۳. اختلاف دو عدد برابر با ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.

۴. مساحت مثلث قائم الزاویه‌ای ۲۵ سانتی‌متر است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع بنویسید.

۵. تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x\geq ۰\\ -۲x^۲+۱ & x<۰\end{cases}$ داده شده است، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید.

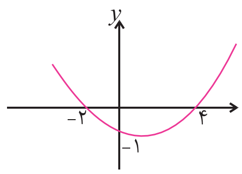
۱) $f(۱)\times f(-۳)=$

۲) $f(-\sqrt{۲})-f(f(۰))=$

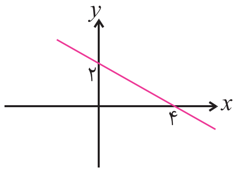
۴) $f(x^۴)=$

۶. در هر یک از نمودارهای زیر مقادیر $f(-۱)$, $f(۵)$, $f(۰)$ را بیابید. (نمودار الف سهمی است)

الف)



ب)



۷. اگر رابطه $R=\{(a,۳a+b),(b,b-a),(a,۲b-۱),(b,۳)\}$ تابع باشد، مقادیر مجهول را بیابید.

۸. تابع $\begin{cases}g:[-۴,۵]\to\mathbb{R}\\ g(x)=|x|\end{cases}$ را رسم کنید.

۹. در کدام‌یک از موارد y تابعی از x است؟

۱) $|y|+x=۱$

۲) $y+|x|=۱$

۳) $-x+y^۲=۱$

۴) $x=۱$

۶) $x^۲+۲x=y^۲+۲y$

۵) $|x-۲|+|y-۳|=۰$

۷) $y^۲+۲y=۱-x^۲$

۸) $۲x+y^۲=۳y$

۹) $|y|=-۴x^۲+۴x-۱$

۱۰) $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۵=۰$

۱۱) $۴x^۲+۴xy+y^۲=۰$

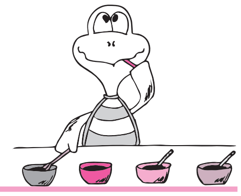
۱۲) $y^۲+۲y=-۱-x^۲$

۱۳) $y^۳=x^۲$

۱۴) $y^۲=x^۳$

۱۵) $y^۳+۳y^۲+۳y=x$

۱۶) $y=\sqrt{x-۱}-\sqrt{۱-x}$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

? تابع (تعریف، دامنه و برد)

۱. کدام‌یک از گزینه‌های زیر تابع است؟

۱) $|y+۳|+x=۰$ ۲) $y=\pm\sqrt{۹+x^۲}$ ۳) $|x|+y=۲$ ۴) $y=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۲ \\ x-۱ & x<۳ \end{cases}$

۲. کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^۳-۳y^۲+x=۰$ ۲) $y+y^۳=x^۳+۱$ ۳) $|y-۱|+x=۰$ ۴) $xy^۲-x=۱$

۳. در کدام‌یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

۱) $y^۲-y=۲x+۱$ ۲) $|y^۲+۲xy+x^۲|=۰$ ۳) $|x-۱|+|y^۲-۱|=۰$ ۴) $y=\begin{cases} x+۱ & x>۲ \\ x-۱ & x<۳ \end{cases}$

۴. اگر در ضابطه $(y^۲-۶y+a)^۲+\sqrt{x-۲}=۰$، y تابعی از x باشد، a کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نشدنی

۵. دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x^۳-۱}+\frac{۲}{\sqrt{۴-x^۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

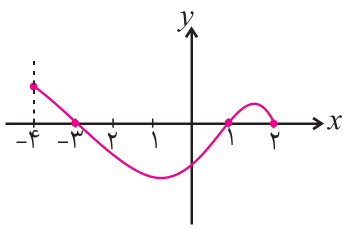
۶. دامنه تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۷. اگر $f(x)=\frac{x^۴-۱}{x^۲+ax+b}$ باشد و دامنه تابع f، $R-\{-۱\}$ باشد $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

۸. شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



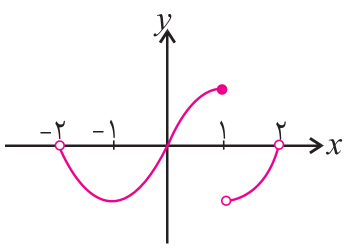
۱) $[۰,۲]$

۲) $[-۳,۲]$

۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$

۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۹. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y=\sqrt{(x^۲-۱)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۱,۰]\cup\{۱\}$ ۲) $[-۱,۰]$

۳) $[-۱,۱]$ ۴) $(-۲,۰]\cup[۱,۲)$

پاسخ تمرین‌های فصل ۲

۱. الف) $۴\times۴\times۴=۶۴$

$f_۱=\{(۱,۳),(۲,۳),(۳,۳)\}$

$f_۲=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۵)\}$

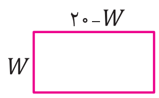
$f_۳=\{(۱,۶),(۲,۶),(۳,۵)\}$

$f_۴=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$

$f_۵=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳)\}$

ب) برای هر عضو مجموعه n عضوی m انتخاب وجود دارد: m^n

۲.



$۲x+۲w=۴۰ \Rightarrow x=۲۰-w$

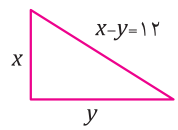
$S_{\text{لوزی}}(w)=\frac{۱}{۲}w\times(۲۰-w)=-\frac{۱}{۲}w^۲+۱۰w$

۳.

$x-y=۱۲ \Rightarrow x=۱۲+y$

$\Rightarrow S_{(y)}=y\times(۱۲+y)=y^۲+۱۲y$

۴.



$\frac{۱}{۲}xy=۲۵ \Rightarrow xy=۵۰ \Rightarrow y=\frac{۵۰}{x}$

طول وتر بر حسب x: $a(x)=\sqrt{x^۲+(\frac{۵۰}{x})^۲}$

$=\frac{\sqrt{x^۴+۲۵۰۰}}{x}$

۵.

$۱)\begin{cases} f(۱)=۱-۱=۰ \\ f(-۳)=-۲\times۹+۱=-۱۷ \end{cases} \Rightarrow -۱۷\times۰=۰$

$۲)\begin{cases} f(-\sqrt{۲})=-۲\times۲+۱=-۳ \\ f(۰)=-۱ \Rightarrow f(f(۰))=-۲+۱=-۱ \end{cases} \Rightarrow -۳-(-۱)=-۲$

$۳)\ f(x^۴)=(x^۴)^۲-۱=x^۸-۱$

همواره $x^۴\geq۰$

۶. الف) در سهمی:

$f(x)=\frac{۱}{۸}(x+۲)(x-۴) \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=\frac{۱}{۸}(۱)(-۵)=-\frac{۵}{۸} \\ f(۵)=\frac{۱}{۸}(۷)(۱)=\frac{۷}{۸} \\ f(۰)=\frac{۱}{۸}\times(۲)(-۴)=-۱ \end{cases}$

ب) در نمودار خطی:

$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=-\frac{۱}{۲}(-۱)+۲=\frac{۵}{۲} \\ f(۰)=۰+۲=۲ \\ f(۵)=-\frac{۵}{۲}+۲=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$

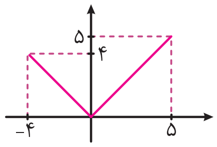
۷.

$R=\{(a,۳a+b),(b,b-a),(a,۲b-۱),(b,۳)\}$

$\left.\begin{array}{l} (b,b-a)=(b,۳) \Rightarrow b-a=۳ \\ (a,۳a+b)=(a,۲b-۱) \Rightarrow ۳a+b=۲b-۱ \Rightarrow ۳a-b=-۱ \end{array}\right\}$

$\Rightarrow ۲a=۲ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۴ \end{cases}$

۸.



۹.

$۱)\ |y|+x=۱$ نیست.

مثال نقض: $x=۰ \Rightarrow y=\pm۱$

$۲)\ y+|x|=۱$ هست.

$x_۱=x_۲ \Rightarrow |x_۱|=|x_۲| \Rightarrow -|x_۱|=-|x_۲|$
$\Rightarrow -|x_۱|+۱=-|x_۲|+۱ \Rightarrow y_۱=y_۲$

$۳)\ -x+y^۲=۱$ نیست.

مثال نقض: $x=۰ \Rightarrow y=\pm۱$

$۴)\ x=۱$ نیست.

هر دو عضو رابطه هستند. $(۱,۲),(۱,۴)$

$۵)\ |x-۲|+|y-۳|=۰$ هست.

فقط یک زوج عضو رابطه است. $(۲,۳)$

$۶)\ x^۲+۲x=y^۲+۲y$ نیست.

مثال نقض: $x=۰ \Rightarrow y^۲+۲y=۰ \Rightarrow y(y+۲)=۰ \Rightarrow y=۰,-۲$

$۷)\ y^۲+۲y=۱-x^۲$ نیست.

$x=۱ \Rightarrow y^۲+۲y=۰ \Rightarrow y(y+۲)=۰ \Rightarrow y=۰,-۲$

$۸)\ ۲x+y^۲=۳y$ نیست.

$x=۰ \Rightarrow ۰=۳y-y^۲ \Rightarrow y(۳-y)=۰ \Rightarrow y=۰,۳$

$۹)\ |y|=-۴x^۲+۴x-۱ \Rightarrow |y|=-(۲x-۱)^۲$ هست.

فقط یک زوج مرتب: $(\frac{۱}{۲},۰)$

$۱۰)\ x^۲+y^۲-۲x+۴y+۵=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲+۴y+۴=۰$

$\Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۰$ هست.

فقط یک زوج مرتب: $(۱,-۲)$

$۱۱)\ ۴x^۲+۴xy+y^۲=۰ \Rightarrow (۲x+y)^۲=۰$

$\Rightarrow ۲x+y=۰ \Rightarrow y=-۲x$ هست.

$۱۲)\ y^۲+۲y=-۱-x^۲ \Rightarrow y^۲+۲y+۱=-x^۲$

$\Rightarrow \underset{۰\leq}{\underset{\downarrow}{(y+۱)^۲}}=\underset{\leq۰}{\underset{\downarrow}{-x^۲}}$ هست.

فقط یک زوج مرتب $(۰,-۱)$

$۱۳)\ y^۳=x^۲$ هست.

$x_۱=x_۲ \Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲ \Rightarrow y_۱^۳=y_۲^۳ \Rightarrow y_۱=y_۲$

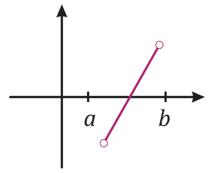
$۱۴)\ y^۲=x^۳$ نیست.

مثال نقض: $x=۱ \Rightarrow y=\pm۱$

$۱۵)\ y^۳+۳y^۲+۳y=x \Rightarrow y^۳+۳y^۲+۳y+۱=x+۱$

$\Rightarrow (y+۱)^۳=x+۱ \Rightarrow x=(y+۱)^۳-۱$ هست.

۱۱۷. الف) نادرست



ب) درست

فرض : $f(c)=۰$

$x<c \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} f(x)<۰$

$x>c \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} f(x)>۰$

پس فقط در یک نقطه محور x قطع می‌شود.

۱۱۸.

الف) $[-۵,۴]$ روی این بازه صعودی $D=[-۵,۴]$

$f(x+۳)$ $\quad D=[۲,۱۱]$

ب) روی این بازه صعودی : $[۲,۱۱]$

ج) $[-۲,۷]$ روی بازه نزولی است.

د) روی بازه $[-۷,۲]$ نزولی است.

۱۱۹.

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) نمی‌توان گفت

۴) نمی‌توان گفت ۵) نمی‌توان گفت

۱۲۰.

$x_۲>x_۱ \xrightarrow{\text{صعودی } f} f(x_۲)>f(x_۱) \xrightarrow{\text{صعودی } g}$

$g(f(x_۲))>g(f(x_۱)) \Rightarrow gof(x)$ صعودی

۱۲۱. الف)

$$f(۰)<f(۵) \Rightarrow \begin{matrix} f^{-۱}(f(۰))=۰ \\ f^{-۱}(f(۵))=۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵>۰ \Rightarrow \underset{[f(۰),f(۵)]}{f^{-۱}\text{صعودی}}$$

ب)

$$g(۰)>g(۵) \Rightarrow \begin{matrix} g^{-۱}(g(۰))=۰ \\ g^{-۱}(g(۵))=۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵>۰ \Rightarrow \underset{[g(۵),g(۰)]}{g^{-۱}\text{نزولی}}$$

۱۲۲. می‌دانیم $D_{f+g}=D_f\cap D_g$. پس D_{f+g} نه دامنه تابع f است و نه دامنه تابع g، بلکه اشتراک دامنه‌هاست. اگر اشتراک دامنه‌های توابع f و g باید صعودی و نزولی بودن تابع $f+g$ و $f-g$ باشد نمی‌توان در مورد صعودی و نزولی بودن تابع f نظر داد. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} f:[۰,+\infty)\Rightarrow \mathbb{R} \\ f(x)=x \end{cases} \qquad \begin{cases} g=[-۱,+\infty) \\ g(x)=x^۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} g(x)=x^۲ \\ D_{f\cap g}=[۰,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$ اما تابع g یک‌به‌یک نیست زیرا دامنه $[-۱,+\infty)$ است نه $[۰,+\infty)$

اگر $D_f=D_g=\mathbb{R}$ باشد، آنگاه:

$$D_{f\pm g}=[۰,+\infty) \text{ و } \begin{cases} (f+g)(x)=x^۲+x \\ (g-f)(x)=x^۲-x \end{cases} \Rightarrow ۲g(x)=۲x^۲$$

در مورد f نمی‌توان چیزی گفت.

۱۲۳. بله هنگامی که هر دو مقدار تابع منفی باشد.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=-۲^{-x} \text{ اکیدا صعودی} \\ g(x)=-۳^{-x} \text{ اکیدا صعودی} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)\cdot g(x)=۶^{-x} \rightarrow \text{اکیدا نزولی}$$

۱۲۴.

صعودی $f \Rightarrow f(a)<f(b)$

بررسی $f^{-۱}$ روی بازه $[f(a),f(b)]$:

$$\left.\begin{matrix} f^{-۱}(f(a))=a \\ f^{-۱}(f(b))=b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{a<b} f^{-۱} \text{ صعودی اکید است.}$$

۱۲۵.

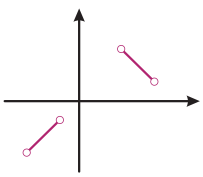
الف) اکیداً صعودی $f: a<b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$

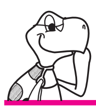
اکیداً نزولی $f: a<b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$

اگر $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \begin{cases} a>b \text{ یا } a<b \; ✗ \\ a=b \end{cases}$ با صعودی یا نزولی اکید بودن در تناقض است. / یک‌به‌یک است.

ب) خیر. مثال نقض:





پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. گزینه «۳»

گزینه ۱ : $x=-۱ \Rightarrow \begin{cases} y=-۲ \\ y=-۴ \end{cases}$ تابع نیست.

گزینه ۲ : $x=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=+۳ \\ y=-۳ \end{cases}$ تابع نیست.

گزینه ۴ : $x=۲/۵ \Rightarrow \begin{cases} y=۶ \\ y=۱/۵ \end{cases}$ تابع نیست.

۲. گزینه «۲»

گزینه ۱ : $x=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=۳ \end{cases}$ تابع نیست.

گزینه ۳ : $x=-۱ \Rightarrow \begin{cases} y=۲ \\ y=۵ \end{cases}$ تابع نیست.

گزینه ۴ : $x=۱ \Rightarrow \begin{cases} y=+\sqrt{۲} \\ y=-\sqrt{۲} \end{cases}$ تابع نیست.

۳. گزینه «۲»

گزینه ۱ : $x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=۱ \end{cases}$ تابع نیست.

گزینه ۳ : $x=۱ \Rightarrow \begin{cases} y=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$ تابع نیست.

گزینه ۴ : $x=۲/۵ \Rightarrow \begin{cases} y=۳/۵ \\ y=۱/۵ \end{cases}$ تابع نیست.

۴. گزینه «۱»

$$\begin{cases} \sqrt{x-۲}\geq ۰ \\ (y^۲-۶y+a)^۲\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow (y^۲-۶y+a)^۲+\sqrt{x-۲}\geq ۰$$

$$\Rightarrow (y^۲-۶y+a)^۲+\sqrt{x-۲}=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-۲}=۰ \Rightarrow x=۲ \\ y^۲-۶y+a=۰ \Rightarrow \Delta=۰ \Rightarrow \text{فقط یک ریشه} \Rightarrow a=۹ \end{cases}$$

۵. گزینه «۱»

$$\begin{cases} x^3-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ 4-x^2>0 \Rightarrow -2<x<2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1\leq x<2$$

فقط شامل عدد ۱ است.

۶. گزینه «۱»

$$\begin{cases} 1-4x\geq 0 \\ 3-\sqrt{1-4x}\geq 0 \Rightarrow 1-4x\leq 9 \end{cases} \Rightarrow -9\leq 4x-1\leq 0$$

$$\Rightarrow -8\leq 4x\leq 1 \Rightarrow -2\leq x\leq \frac{1}{4}$$

شامل اعداد $-2,-1,0$ است.

۷. گزینه «۴»

مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$x^2+ax+b=(x+1)^2=x^2+2x+1 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=3$$

۸. گزینه «۴»

		-4		-3		0		1		2	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$			$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	0	
$xf(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

$$\Rightarrow [-3,0]\cup[1,2]$$

۹. گزینه «۱»

		-2		-1		0		1		2	
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$			$-$		$-$	0	$+$		$-$		
$(x^2-1)f(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$		

$$\Rightarrow [-1,0]\cup\{1\}$$

۱۰. گزینه «۴»

باید $x+3|x-1|-6\geq 0$ باشد. دو حالت زیر را داریم:

$$x\geq 1: x+3(x-1)-6\geq 0 \Rightarrow 4x-10\geq 0$$
$$\Rightarrow x\geq 2/5 \xrightarrow[x\geq 1]{\text{اشتراک}} x\geq 2/5$$
$$x<1: x-3(x-1)-6\geq 0 \Rightarrow -2x-3\geq 0$$
$$\Rightarrow 2x\leq -3 \Rightarrow x\leq -1/5 \xrightarrow{x<1} x\leq -1/5$$
$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-(-1/5,2/5)$$

پس دامنه شامل اعداد ۱-، ۰، ۱ و ۲ نمی‌شود.

۱۱. گزینه «۲»

$$(x+4)^2\geq 0 \Rightarrow -(x+4)^2\leq 0 \Rightarrow 9-(x+4)^2\leq 9 \Rightarrow y\leq 9$$
$$\Rightarrow \text{برد}=(-\infty,9]$$

۱۲. گزینه «۳»

$$\begin{cases} x<0 & : y=0 \\ x>0 & : y=\frac{\sqrt[3]{2x}}{x} \Rightarrow \text{برد}:(0,+\infty) \end{cases}$$

برد تابع: $[0,+\infty)$

۱۳. گزینه «۳»

$$y=\frac{x^2+3x+a}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2+3x+a$$
$$\Rightarrow x^2+(3-y)x+(y+a)=0$$

باید $\Delta\geq 0$ باشد:

$$\Delta=(3-y)^2-4(y+a)=y^2-6y+9-4y-4a$$
$$y^2-10y+9-4a\geq 0$$

چون جواب نامعادله فوق $\mathbb{R}-(3,7)$ است پس ۳ و ۷ ریشه عبارت Δ هستند:

$$\xrightarrow{y=3} 3^2-30+9-4a=0 \Rightarrow -4a=12 \Rightarrow a=3$$

تذکر: اگر $a=3$ باشد، ۷ نیز ریشه عبارت Δ است.

۱۴. گزینه «۳»

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=y \Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}\geq 0$$
$$\Rightarrow y>1 \text{ یا } y\leq -1$$

۱۵. گزینه «۴»

$$\text{کمترین مقدار } |x|+|x-2| \Rightarrow \text{بیشترین مقدار } \frac{8}{|x|+|x-2|}$$

به کمک نامساوی مثلثی داریم $|x|+|2-x|\geq 2$ پس:

$$\min|x|+|x-2|=2$$
$$\Rightarrow \max\frac{8}{|x|+|x-2|}=4$$

۱۶. گزینه «۲»

$$x>\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{x} \Rightarrow 0<y<2$$

$$-1\leq x\leq\frac{1}{2} \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow 0\leq y\leq 1$$

برد شامل ۲ عدد صحیح ۰،۱ است.

تذکر: به کمک رسم نمودار نیز می‌توان به این موضوع پی برد.

۱۷. گزینه «۱»

$$S_{\text{رنگی}}=2x^2-\frac{x^2}{4}\pi=x^2\left(\frac{8-\pi}{4}\right)$$

$$P=4\sqrt{2}x \Rightarrow x^2=\frac{P^2}{(4\sqrt{2})^2} \Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{(8-\pi)}{128}P^2$$

۱۸. گزینه «۲»

اگر عرض قاعده برابر y باشد پس طول آن $\frac{3}{4}y$ است.

اگر ارتفاع مکعب را z در نظر گیریم داریم:

$$V=y\times\frac{4}{3}y\times z=60 \Rightarrow \frac{4}{3}y^2z=60 \Rightarrow z=\frac{45}{y^2}$$

در نتیجه مساحت کل مقوای به کار رفته برابر است با:

$$s(y)=\underbrace{\frac{4}{3}y\times y}_{\text{مساحت قاعده}}+\underbrace{2\underbrace{(y+\frac{4}{3}y)}_{\text{محیط قاعده}}\times\frac{45}{y^2}}_{\text{مساحت جانبی}}$$

$$\Rightarrow s(y)=\frac{4y^2}{3}+\frac{210}{y}$$

۱۹. گزینه «۳»

گزینه ۱: $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$, $D_g=\mathbb{R}$ دامنه‌ها متفاوت است.

گزینه ۲: $D_f=[1,+\infty)$, $D_g=[-2,+\infty)$ دامنه‌ها متفاوت است.

گزینه ۴: $D_f=[1,+\infty)$, $D_g=\mathbb{R}-(1,0)$ دامنه‌ها متفاوت است.

۲۰. گزینه «۴»

$$\frac{3x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{x-1}=\frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\xrightarrow{f(x)=g(x)}$$
$$3x^2+ax+b=(3x+1)(x-1)=3x^2-2x-1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=-5$$

۲۱. گزینه «۲»

x-۲ منفی است پس نمی‌تواند وارد رادیکال شود اما x-۲ مثبت است و وارد رادیکال می‌شود.

$$f(x)=(x-2)\sqrt{2-x}=-(2-x)\sqrt{2-x}$$
$$=-\sqrt{(2-x)^2(2-x)}=-\sqrt{(2-x)^3}=g(x)$$