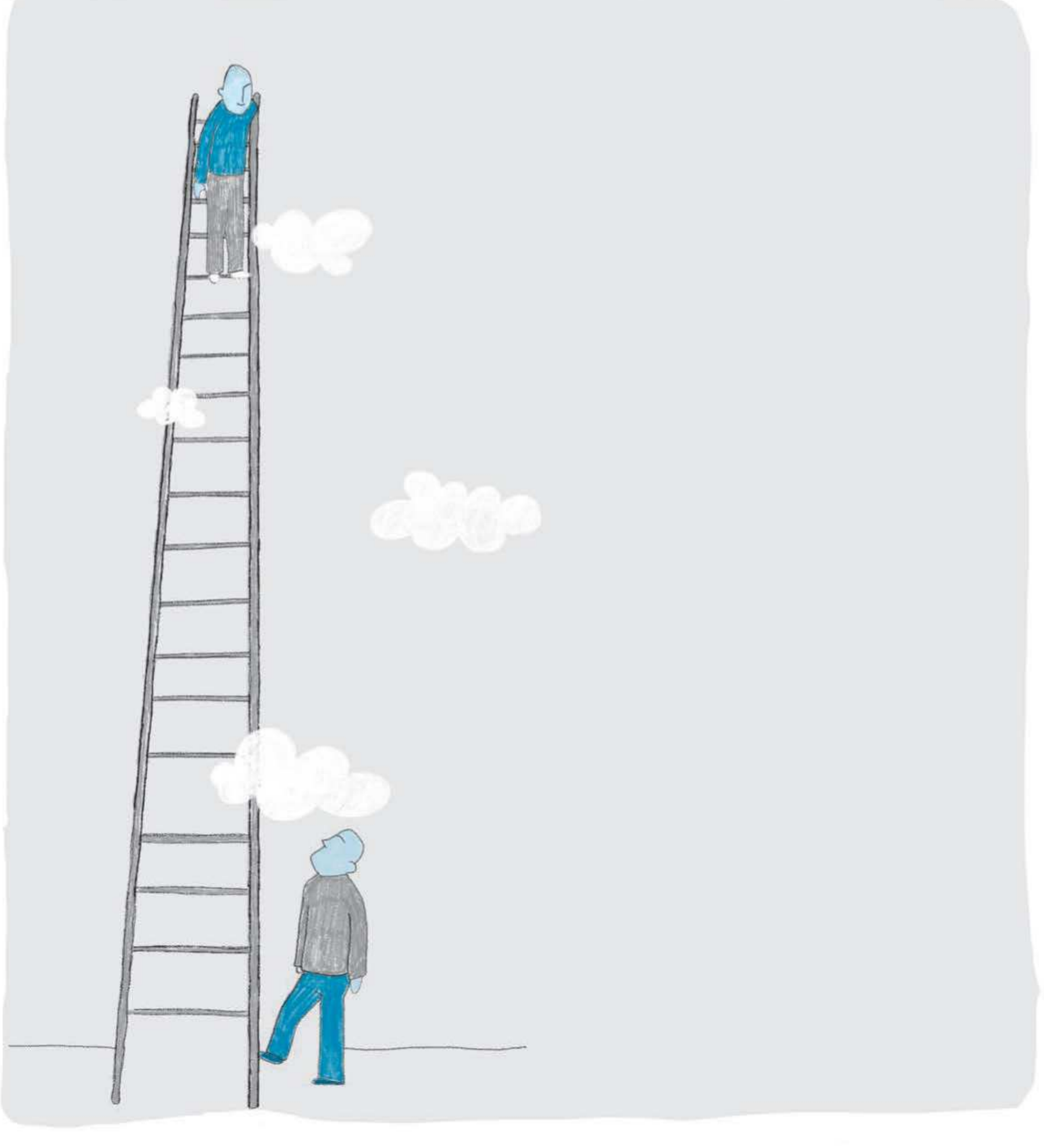
فصل ۱ جبر و معادله



دنبالهٔ حسابی

یادآوری

تعریف دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله از اعداد می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. جملهٔ n اُم دنباله را که با a_n نشان می‌دهیم، جملهٔ عمومی دنباله می‌نامیم.

دنبالهٔ حسابی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

تذکر جملات یک دنبالهٔ حسابی، با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots$ می‌باشد. جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $a_n = a_1+(n-1)d$ به دست می‌آید.

مثال جملهٔ هفتم و دهم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب ۱۲ و ۲۱ می‌باشند. جملهٔ چندم این دنباله برابر صفر است؟

پاسخ
$$a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_7 = 12 \Rightarrow a_1+6d = 12 \\ a_{10} = 12 \Rightarrow a_1+9d = 21 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا مقادیر $a_1 = -6$ و $d = 3$ به دست می‌آید. حال معادلهٔ $a_n = 0$ را حل می‌کنیم.

$$a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow 0 = -6+(n-1)\times 3 \Rightarrow n = 3$$

نکته اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$ است و b را واسطهٔ حسابی a و c می‌نامیم.

تست بین دو عدد ۲ و ۲۶، پنج عدد قرار می‌دهیم به طوری که تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۱» دنباله دارای ۷ جمله به صورت ۲,○,○,○,○,○,۲۶ می‌باشد که $a_1 = 2$ و $a_7 = 26$ است.

$$a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow a_7 = 2+6d = 26 \Rightarrow d = 4$$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d، مجموع n جملهٔ اول از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{1}\ S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \qquad \boxed{2}\ S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

مثال مجموع جملات سوم و نهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۱۶ است. مجموع یازده جملهٔ اول دنباله را بیابید.

پاسخ از رابطهٔ $a_n = a_1+(n-1)d$ داریم:
$$a_3+a_9 = (a_1+2d)+(a_1+8d) = 2a_1+10d = 16$$

طبق رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ داریم:
$$S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1+10d) = \frac{11}{2}\times 16 = 88$$

تست در دنبالهٔ حسابی $\dots, 50, a, 56$ مجموع جملات مثبت چه‌قدر است؟

۱) ۵۴۸ ۲) ۵۵۱ ۳) ۵۵۴ ۴) ۵۵۸

پاسخ گزینهٔ «۲» a واسطهٔ حسابی ۵۰ و ۵۶ است. پس $a = \frac{50+56}{2} = 53$. پس قدرنسبت $d = -3$ است. جملهٔ عمومی به صورت $a_n = 56+(n-1)(-3)$ و یا $a_n = -3n+59$ است. اگر a_n بخواهد مثبت باشد داریم:
$$a_n > 0 \Rightarrow -3n+59 > 0 \Rightarrow n < 19/7$$

پس ۱۹ جملهٔ اول دنباله مثبت است. هدف یافتن S_{19} است.
$$S_{19} = \frac{19}{2}(2\times 56+18(-3)) = 551$$

تست در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۰ جمله، مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۵۶ است. مجموع کل جملات کدام است؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۲۰

پاسخ گزینهٔ «۴» دقت کنید که a_1+a_{20}، a_2+a_{19} و a_3+a_{18} هر سه برابرند. پس داریم:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 10 \\ a_{20}+a_{19}+a_{18} = 56 \end{cases} \Rightarrow (a_1+a_{20})+(a_2+a_{19})+(a_3+a_{18}) = 66 \Rightarrow 3(a_1+a_{20}) = 66 \Rightarrow a_1+a_{20} = 22$$

حال طبق فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$ داریم:
$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1+a_{20}) = 10\times 22 = 220$$

نکته در دنبالهٔ عددی با جملهٔ عمومی a_n رابطهٔ $a_n = S_n - S_{n-1}$ برای $n > 1$ برقرار است.

مثال **در یک دنبالهٔ حسابی، $S_n = 4n^2 + 3n$ می‌باشد. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.**

پاسخ **راه اول:**
$$a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + 3n - (4(n-1)^2 + 3(n-1)) = 4n^2 + 3n - (4n^2 - 5n + 1) = 8n - 1$$

راه دوم: ابتدا a_1 و a_2 و سپس d را محاسبه می‌کنیم:
$$S_n = 4n^2 + 3n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = 4 + 3 = 7 \\ S_2 = 16 + 6 = 22 \Rightarrow a_1 + a_2 = 22 \Rightarrow a_2 = 15 \end{cases}$$

پس $d = a_2 - a_1 = 8$ است. حال جملهٔ عمومی:
$$a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1) \times 8 = 8n - 1$$

تذکر
۱) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
۲) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$

دنبالهٔ هندسی

یادآوری

تعریف: دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل در عددی ثابت، به نام قدرنسبت، به دست می‌آید.

تذکر جملات یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q به صورت $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$ می‌باشد. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $a_n = a_1q^{n-1}$ به دست می‌آید.

تست **در یک دنبالهٔ هندسی صعودی با جملات مثبت، جملهٔ هفتم مربع جملهٔ nاُم است. اگر جملهٔ هفدهم این دنباله برابر ۱ باشد، مقدار n کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ **گزینهٔ «۳»** طبق فرض سؤال $a_7 = (a_n)^2$ است. پس: $a_7 = (a_n)^2 \Rightarrow a_1q^6 = (a_1q^{n-1})^2 \Rightarrow a_1q^6 = a_1^2q^{2n-2} \Rightarrow a_1q^{2n-8} = 1$

چون $a_{17} = 1$ است بنابراین $a_1q^{16} = 1$، از مقایسهٔ این تساوی با تساوی $a_1q^{2n-8} = 1$ در می‌یابیم که $2n - 8 = 16$ و لذا $n = 12$ است.

تذکر اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac$ است و b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.

مثال **در دنبالهٔ هندسی $2, a, b, c, 8, \ldots$ مقدار b را بیابید.**

پاسخ **راه اول:** جملهٔ اول ۲ و جملهٔ پنجم ۸ است.
$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1q^4 \Rightarrow 8 = 2q^4 \Rightarrow q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$
$$b = a_3 = a_1q^2 = 2(\pm\sqrt{2})^2 = 4$$

راه دوم: b واسطهٔ هندسی ۲ و ۸ است. پس $b^2 = 2 \times 8$ و یا $b = 4$ (چون جملهٔ اول مثبت است پس جملهٔ سوم هم مثبت است.)

تست **جملات ششم، هشتم و چهاردهم یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند. جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است؟**

۱) سوم ۲) چهارم ۳) پنجم ۴) نهم

پاسخ **گزینهٔ «۳»** جملات a_6، a_8 و a_{14} از دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند. پس $(a_8)^2 = a_6a_{14}$. حال داریم:
$$(a_1 + 7d)^2 = (a_1 + 5d)(a_1 + 13d) \Rightarrow a_1^2 + 14ad + 49d^2 = a_1^2 + 18ad + 65d^2$$
$$\Rightarrow 4a_1d = -16d^2 \xrightarrow{d \neq c} a_1 = -4d \Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

تست **جملات دوم، پنجم و یازدهم یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** به شرطی a_2، a_5 و a_{11} سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند که $(a_5)^2 = a_2a_{11}$ باشد، پس:
$$(a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 16d^2 + 8a_1d = a_1^2 + 10d^2 + 11a_1d \Rightarrow 6d^2 = 3a_1d \Rightarrow a_1 = 2d$$

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر $q = \dfrac{a_5}{a_2}$ است. پس:
$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{2d + 4d}{2d + d} = 2$$

نکته اگر جملات n اُم، k اُم و m اُم یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با: $\frac{m-k}{k-n}$.

به طور مثال در تست قبلی که $n=۲$، $k=۵$ و $m=۱۱$ بود، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با: $q=\frac{۱۱-۵}{۵-۲}=\frac{۶}{۳}=۲$.

تست جملات سوم، پنجم و n اُم یک دنبالهٔ حسابی غیر ثابت، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ می‌باشند. مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ گزینهٔ «۴» طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$۳=\frac{n-۵}{۵-۳} \Rightarrow n=۱۱$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n=a_۱\frac{۱-q^n}{۱-q} \quad q\neq ۱$$

تست در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع شش جملهٔ اول، $\frac{۳۵}{۸}$ برابر مجموع سه جملهٔ اول است. قدرنسبت این دنباله چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۳» طبق رابطهٔ $S_n=a_۱\frac{۱-q^n}{۱-q}$ و همچنین به کمک اتحاد مزدوج $۱-q^۶=(۱-q^۳)(۱+q^۳)$، داریم:

$$S_۶=\frac{۳۵}{۸}S_۳ \Rightarrow a_۱\frac{۱-q^۶}{۱-q}=\frac{۳۵}{۸}a_۱\frac{۱-q^۳}{۱-q} \Rightarrow ۱-q^۶=\frac{۳۵}{۸}(۱-q^۳)$$

$$\Rightarrow (۱-q^۳)(۱+q^۳)=\frac{۳۵}{۸}(۱-q^۳) \Rightarrow ۱+q^۳=\frac{۳۵}{۸} \Rightarrow q^۳=\frac{۲۷}{۸} \Rightarrow q=\frac{۳}{۲}$$

تست حاصل $۱-x+x^۲-x^۳+\dots-x^۹$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ چند برابر $\sqrt{۲}-۱$ است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۱ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵

پاسخ گزینهٔ «۲» هدف یافتن مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۱,-x,x^۲,-x^۳,\dots,-x^۹$ است که جملهٔ اول آن ۱ و قدرنسبت آن $-x$ است.

$$S_{۱۰}=a_۱\frac{۱-q^{۱۰}}{۱-q}=۱\times\frac{۱-(-x)^{۱۰}}{۱-(-x)}=\frac{۱-x^{۱۰}}{۱+x}=\frac{۱-\sqrt{۲}^{۱۰}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{-۳۱}{\sqrt{۲}+۱}=-۳۱(\sqrt{۲}-۱)=۳۱(۱-\sqrt{۲})$$

تست تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۱/۵ برابر مجموع جملات با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱» اگر تعداد جملات دنباله را 2n و قدرنسبت را q فرض کنید آن‌گاه جملات ردیف زوج، خود یک دنباله‌ای هندسی هستند که قدرنسبت آن‌ها $q^۲$ و تعداد آن‌ها n تاست.

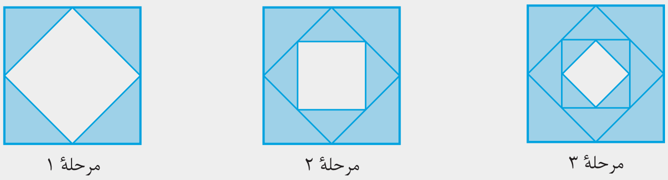
دنبالهٔ اصلی: $S_{۲n}=a_۱\frac{۱-q^{۲n}}{۱-q}$

دنبالهٔ ردیف زوج: $S'_n=a_۲\frac{۱-(q^۲)^n}{۱-q^۲}=a_۱q\frac{۱-q^{۲n}}{۱-q^۲}$

طبق صورت سؤال $S_{۲n}=۱/۵S'_n$ است. پس داریم:

$$a_۱\frac{۱-q^{۲n}}{۱-q}=\frac{۳}{۲}a_۱q\frac{۱-q^{۲n}}{۱-q^۲} \Rightarrow \frac{۱}{۱-q}=\frac{۳}{۲}\frac{q}{۱-q^۲} \Rightarrow \frac{۱-q^۲}{۱-q}=\frac{۳}{۲}q \Rightarrow \frac{(۱-q)(۱+q)}{۱-q}=\frac{۳}{۲}q \Rightarrow ۱+q=\frac{۳}{۲}q \Rightarrow q=۲$$

تست **در الگوی زیر حداقل چند مرحله پیش برویم تا ۹۷ درصد مساحت مربع اولیه رنگ‌آمیزی شود؟ (در هر مرحله وسط اضلاع به هم وصل می‌شود.)**



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

پاسخ **گزینهٔ «۲»** در مرحلهٔ اول، $\frac{1}{2}$ سطح مربع رنگ می‌شود. در مرحلهٔ دوم، $\frac{1}{2}$ از $\frac{1}{2}$ دیگر مربع سطح رنگ‌نشده در مرحلهٔ اول رنگ می‌شود و ...
بنابراین هدف یافتن مجموع جملات دنبالهٔ $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots$ است.

$$S_n \ge \frac{97}{100} \Rightarrow a_1\frac{1-q^n}{1-q} \ge \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \ge \frac{97}{100} \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \ge \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \ge \frac{100}{3}$$

حداقل n برابر ۶ است ($2^6=64$).

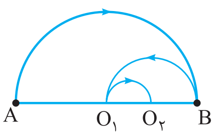
تست **دنبالهٔ هندسی $3,6,12,\dots,a_n$ را در نظر بگیرید. حاصل‌جمع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, \dots$ چند برابر $2^{20}-1$ است؟**

۱) دو برابر ۲) سه برابر ۳) چهار برابر ۴) شش برابر

پاسخ **گزینهٔ «۴»** جملات دنبالهٔ خواسته‌شده به صورت مقابل است: $18,72,288,\dots$

این دنباله خود یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۴ است. بنابراین داریم: $S_{10}=18\times\frac{1-4^{10}}{1-4}=6(4^{10}-1)=6\times(2^{20}-1)$

مثال **در شکل مقابل متحرکی در مرحلهٔ اول از A به B، در مرحلهٔ دوم از B به O_1، در مرحلهٔ سوم از O_1 به O_2 و ... بر روی نیم‌دایره‌ها حرکت می‌کند. اگر قطر نیم‌دایرهٔ بزرگ برابر ۱ باشد، پس از ده مرحله، متحرک چه مسافتی را طی کرده است؟ (O_i ها مرکز نیم‌دایره‌ها هستند)**



پاسخ مسافت طی‌شده مرحله اول: $\frac{1}{2}2\pi R_1=\frac{1}{2}\pi$ مسافت طی‌شده مرحله دوم: $\frac{1}{2}2\pi R_2=\frac{1}{4}\pi$

مسافت طی‌شده پس از ده مرحله، مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{8}\pi,\dots$ است.

$$S_{10}=\frac{1}{2}\pi\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\pi(1-\frac{1}{2^{10}})=\frac{1023}{1024}\pi$$

نکته اگر n عدد طبیعی باشد، به کمک مجموع جملات دنبالهٔ هندسی می‌توان ثابت کرد:

۱ $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1)$

۲ $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots-a+1)$ (n فرد)

۳ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

تذکر بهتر است که به جای استفاده از روابط بالا، از رابطهٔ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی استفاده کنید.

تست **حاصل $P=\frac{1+x+x^2+\dots+x^{11}}{1+x^3+x^6+x^9}$ به ازای $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ چه‌قدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** صورت کسر حاصل‌جمع دوازده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $1,x,x^2,\dots$ می‌باشد که $a_1=1$ و $q=x$ است.

$$S_{12}=a_1\frac{1-q^{12}}{1-q}=\frac{1-x^{12}}{1-x}$$

مخرج کسر، حاصل‌جمع ۴ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $1,x^3,x^6,\dots$ می‌باشد که $a_1=1$ و $q=x^3$ است.

$$S'_{۴} = a_{۱}\frac{۱-q^{۴}}{۱-q} = \frac{۱-(x^{۳})^{۴}}{۱-x^{۳}} = \frac{۱-x^{۱۲}}{۱-x^{۳}}$$

با جای‌گذاری در عبارت داده‌شده داریم:

$$P = \frac{S_{۱۲}}{S'_{۴}} = \frac{\frac{۱-x^{۱۲}}{۱-x}}{\frac{۱-x^{۱۲}}{۱-x^{۳}}} = \frac{۱-x^{۳}}{۱-x} = \frac{(۱-x)(۱+x+x^{۲})}{۱-x} = ۱+x+x^{۲}$$

$$x = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow ۲x+۱=\sqrt{۵} \Rightarrow ۴x^{۲}+۴x+۱=۵ \Rightarrow x^{۲}+x=۱$$

بنابراین $P = x^{۲}+x+۱=۲$.

حد مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q، وقتی $۰<|q|<۱$ باشد مجموع کل جملات از رابطهٔ $\frac{a_{۱}}{۱-q}$ به دست می‌آید. در واقع:

$$a_{۱}+a_{۱}q+a_{۱}q^{۲}+\cdots = \frac{a_{۱}}{۱-q}$$

به طور مثال مجموع کل جملات دنبالهٔ هندسی $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\ldots$ برابر است با: $S_{\infty} = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۲$.

مثال **در یک دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۲^{n+۱}}{۳^{n}}$ مجموع کل جملات را بیابید.**

پاسخ جملات این دنباله به صورت $\frac{۴}{۳},\frac{۸}{۹},\frac{۱۶}{۲۷},\ldots$ می‌باشد که یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_{۱}=\frac{۴}{۳}$ و قدرنسبت $q=\frac{۲}{۳}$ است. پس:

$$S_{\infty} = \frac{a_{۱}}{۱-q} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}} = ۴$$

تست **در یک دنبالهٔ هندسی نامتناهی، مجموع سه جملهٔ اول با مجموع بقیهٔ جملات برابر است. قدرنسبت این دنباله چه‌قدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** سؤال به بیان ریاضی به صورت $a_{۱}+a_{۲}+a_{۳} = a_{۴}+a_{۵}+\cdots$ می‌باشد. حاصل سمت راست تساوی به کمک فرمول حد مجموع به دست می‌آید.

$$a_{۱}+a_{۱}q+a_{۱}q^{۲} = \frac{a_{۴}}{۱-q} \Rightarrow \cancel{a_{۱}}(۱+q+q^{۲}) = \frac{\cancel{a_{۱}}q^{۳}}{۱-q} \Rightarrow (۱-q)(۱+q+q^{۲})=q^{۳} \Rightarrow ۱-q^{۳}=q^{۳} \Rightarrow q=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر a,b,c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ عددی باشند، k کدام باشد تا $a,b+۳,c+k$ هم تشکیل دنبالهٔ عددی دهند؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۲- در یک دنبالهٔ عددی اگر $a_۲+a_۶+a_{۱۰}=۹$ و $a_۵+a_۹+a_{۱۳}=۲۷$، قدرنسبت چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- در یک دنبالهٔ عددی $a_۵=۳$ و $a_۹=۱۹$، چند جمله از این دنباله منفی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴- اگر $x^۳+۲$ ، $x^۲+۲$ و x سه جملهٔ ابتدایی از یک دنبالهٔ عددی باشند، جملهٔ چهارم این دنباله کدام است؟

۱) $x^۴+۲$ ۲) $x^۴-۲$ ۳) $۲x^۴+۲$ ۴) $۲x^۴-۲$

۵- اعداد $۳,a,b$ تشکیل دنبالهٔ عددی و اعداد $۳,a-۱,b+۱$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

۶- جملات دوم، هفتم و nاُم یک دنبالهٔ عددی جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۴ می‌باشد، n کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۳ ۳) ۲۷ ۴) ۳۷

۷- هرگاه $a,b,c,d,...$ جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q باشند، قدرنسبت $ab,bc,cd,...$ چه عددی است؟

۱) q ۲) $q^۲$ ۳) $aq^۲$ ۴) aq

۸- هرگاه $۳,x+۳,۴x,...$ جملات ابتدایی یک دنبالهٔ هندسی باشند، از جملهٔ سوم چه عددی را کم کنیم تا اعداد حاصل، تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- ریشه‌های معادلهٔ $x^۴-(۳m+۱)x^۲+m^۲=۰$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰- در یک دنبالهٔ عددی به جملهٔ اول ۴ واحد اضافه می‌کنیم و از قدرنسبت k واحد کم می‌کنیم به‌طوری‌که در دو دنباله جملهٔ چهلم برابر است، k کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴}{۴۱}$ ۴) $\frac{۴}{۳۸}$

۱۱- اگر اعداد غیرصفر a,b,c تشکیل یک دنبالهٔ عددی با قدرنسبت $d\neq ۰$ بدهند، کدام سه عدد، دنبالهٔ عددی تشکیل نمی‌دهند؟

۱) ad,bd,cd ۲) $a+d^۲,b+d^۲,c+d^۲$ ۳) $da^۲,db^۲,dc^۲$ ۴) $a+d,b+d,c+d$

۱۲- اگر در دو دنبالهٔ عددی $\begin{cases} a_n: -۱۹,-۱۵,-۱۱,... \\ b_n: ۱,۴,۷,... \end{cases}$ جملات مشترک را بنویسیم، چهارمین جملهٔ مشترک، چه عددی است؟

۱) ۴۹ ۲) ۱۳ ۳) ۲۵ ۴) ۳۷

۱۳- دو دنبالهٔ حسابی $\begin{cases} a_n: ۳,۷,۱۱,... \\ b_n: -۵,۱,۷,... \end{cases}$ مفروض‌اند، بیستمین جملهٔ مشترک آن‌ها، چندمین جملهٔ a_n است؟

۱) ۵۸ ۲) ۵۹ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

۱۴- در یک دنبالهٔ عددی $a_۹=۱۲, a_{۱۲}=۹$ است. چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل صفر شود؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

۱۵- مجموع بیست جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $-۳,a,b,\frac{۹}{۲},...$ کدام است؟

۱) ۴۱۵ ۲) ۳۱۵ ۳) ۳۷۵ ۴) ۴۲۵

۱۶- بین دو عدد ۴ و ۳۴، ۹ عدد قرار می‌دهیم به طوری که تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. مجموع ۹ عدد درج‌شده کدام است؟

۱) ۱۸۱ ۲) ۱۷۱ ۳) ۲۰۹ ۴) ۲۱۹

۱۷- مجموع اعداد دو رقمی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۵ برابر ۳ می‌باشد کدام است؟

۱) ۶۹۹ ۲) ۷۹۹ ۳) ۸۹۹ ۴) ۹۹۹

۱۸- هرگاه مجموع شش جملهٔ ابتدایی یک دنبالهٔ عددی برابر جملهٔ چهارم باشد، جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $-\frac{7}{12}$

۱۹- در یک دنبالهٔ عددی قدرنسبت دو برابر جملهٔ اول است و جمع بیست جملهٔ اول آن ۳۰۰ می‌باشد. جملهٔ چندم آن $\frac{147}{4}$ می‌باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۲۰- در دنبالهٔ عددی $a_n = 4n - 3$ جمع ۵ جملهٔ دوم چه‌قدر از جمع ۵ جملهٔ اول بیشتر است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۷۵ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

۲۱- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ عمومی برابر a_n و مجموع n جملهٔ اول آن S_n است. اگر $S_n = n^2 a_1$ باشد، آن‌گاه a_n چند برابر a_1 است؟

۱) $2n+1$ ۲) $2n-1$ ۳) $3n+2$ ۴) $3n-2$

۲۲- هرگاه $-2, 2, 6, \ldots$ جملات ابتدایی یک دنبالهٔ عددی باشند، حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۳- در یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مخالف صفر، جملهٔ چهارم دو برابر جملهٔ نهم است. مجموع چند جملهٔ اول این دنباله صفر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷

۲۴- جمع ۱۰ جملهٔ اول دو دنبالهٔ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (با قدرنسبت d) و دنبالهٔ $a_1+d, a_2+2d, a_3+3d, \ldots$ با یکدیگر ۱۱۰ واحد اختلاف دارند، d چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۵- مجموع جملات مشترک دو رقمی دو دنبالهٔ حسابی $2, 5, 8, \ldots$ و $3, 7, 11, \ldots$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۲۴ ۳) ۴۳۶ ۴) ۴۴۸

۲۶- در یک دنبالهٔ عددی تمام اعضای دنباله، عدد طبیعی هستند، اگر مجموع چهل جملهٔ اول آن ۸۶۰ باشد جمع بیست جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۲۳۰ ۲) ۴۳۰ ۳) ۲۱۵ ۴) ۳۲۵

۲۷- اگر S_n مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی باشد، حاصل $S_{20} - 2S_{10}$ چند برابر قدرنسبت است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

۲۸- در یک دنبالهٔ عددی اگر $S_n = 3n - 2n^2$، حاصل $S_{20} - 20a_1$ کدام است؟

۱) -820 ۲) -780 ۳) -840 ۴) -760

۲۹- در یک دنبالهٔ عددی ۱۰۰جمله‌ای جمع جملات مرتبهٔ زوج، ۶ برابر جمع جملات مرتبهٔ فرد است. اگر قدرنسبت ۴ باشد، جمع جملات مرتبهٔ فرد چه عددی است؟

۱) ۸۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۲۰

۳۰- در یک دنبالهٔ حسابی متناهی، مجموع پنج جملهٔ اول، پنج جملهٔ آخر و مجموع کل جملات به ترتیب برابر ۱۷، ۲۸ و ۵۴ می‌باشد. تعداد جملات این دنباله کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳۱- در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ nاُم برابر $3n+a$ و مجموع n جملهٔ اول برابر $bn^2 + 4n$ می‌باشد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۲- جملات اول، پنجم و هفتم در یک دنبالهٔ عددی تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. جمع چند جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ عددی صفر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۳۳- در یک دنبالهٔ حسابی جملات دوم، پنجم و چهاردهم به ترتیب برابر q ، q^{2} و q^{3} می‌باشد. مجموع n جملهٔ اول این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۹ ۴) ۶۳

۳۴- مجموع شش جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی برابر ۷۷ و مجموع سه جملهٔ اول آن برابر ۸۸ است. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ هشتم است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) -۸

۳۵- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع ۸ جملهٔ اول ۱۷ برابر مجموع چهار جملهٔ اول است. اگر دنباله افزایشی باشد، جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ دوم است؟

۱) -۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) -۳۲

۳۶- اگر S_n جمع n جملهٔ نخست دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $a_n = ۲^{۱-n}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $S_n = ۲ - a_n$ ۲) $S_n = ۲ + a_n$ ۳) $S_n = a_n - ۲$ ۴) $S_n = -a_n - ۲$

۳۷- در یک دنبالهٔ هندسی $۲n$ جمله‌ای، اگر مجموع تمام جملات آن ۴ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۸- در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، مجموع جملات اول و چهارم برابر ۱۸ و مجموع شش جملهٔ اول آن برابر ۱۲۶ می‌باشد. مجموع پنج جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۳ ۳) ۶۸ ۴) ۷۴

۳۹- در دنبالهٔ هندسی a_n که قدرنسبت آن منفی است، جملات ابتدایی $۴, a, \frac{۱}{۴}, \dots$ می‌باشند. جمع ۵ جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) ۲۰۵ ۲) ۲۶۹ ۳) -۲۰۵ ۴) -۲۶۹

۴۰- اگر a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی باشد و مجموع ۹ جملهٔ اول برابر ۵ است. اگر جملهٔ دوازدهم از جملهٔ سوم ۹۰ واحد بیشتر باشد قدرنسبت دنبالهٔ اصلی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۱- در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n، مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $\frac{a_۱}{a_۱+a_۲}, \frac{a_۲}{a_۲+a_۳}, \frac{a_۳}{a_۳+a_۴}, \dots$ برابر ۲ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۴

۴۲- در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲، اگر مجموع n جملهٔ اول برابر ۳ و مجموع $۳n$ جملهٔ اول برابر ۸۱۹ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۳- اگر $\frac{۱+x+x^{۲}+\dots+x^{۱۱}}{۱+x^{۳}+x^{۶}+x^{۹}} = ۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}+۱}{۲}$

۴۴- حاصل $(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\dots+x^{۹})(۱-x+x^{۲}-x^{۳}+\dots-x^{۹})$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۰۲۳ ۲) -۱۰۲۵ ۳) ۵۱۳ ۴) -۹۶۱

۴۵- اعداد فرد را به صورت $\{۱\}, \{۳,۵\}, \{۷,۹,۱۱\}, \dots$ دسته‌بندی کرده‌ایم. جمع اعداد واقع در دستهٔ نهم چه عددی است؟

۱) ۲۱۸۷ ۲) ۶۵۹۱ ۳) ۲۴۳ ۴) ۷۲۹

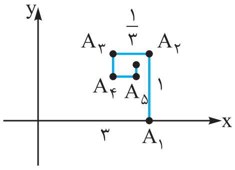
۴۶- توان‌های عدد ۲ را به صورت $\{۲\}, \{۴,۸\}, \{۱۶,۳۲,۶۴\}, \dots$ دسته‌بندی می‌کنیم. جمع عضوهای مجموعهٔ هشتم چند برابر $۲^{۳۰}$ است؟

۱) ۱۲۲ ۲) ۱۲۲/۵ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۷/۵

۴۷- نقطهٔ O بر روی محور xها با یک حرکت رفت‌وبرگشتی به سمت چپ و راست حرکت می‌کند و در هر مرحله، نصف مسافت قبلی را طی می‌کند. اگر مرحلهٔ اول ۵ متر در جهت مثبت حرکت کرده باشد، فاصلهٔ آن از مبدأ پس از ۱۰ مرحله چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۰۲۳}{۵۱۲}$ ۲) $\frac{۱۷۰۳}{۵۱۲}$ ۳) $\frac{۱۰۲۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۱۷۰۵}{۵۱۲}$

۴۸- متحرکی مطابق الگوی مقابل از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند. در هر مرحله ۹۰° تغییر جهت داده و $\frac{۱}{۳}$ فاصلهٔ قبلی را طی می‌کند. اگر به همین روش پیش رود، نقطهٔ $A_۸$ با کدام طول است؟



۱) $\frac{۶۵۶}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۷۲۸}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۲۲}{۹}$ ۴) $\frac{۸۰}{۲۷}$

۴۹- در یک دنباله، $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = \frac{۲}{۳}a_n + ۳$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار k دنباله با جملهٔ عمومی $a_n - k$ هندسی است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۰- اگر در یک دنباله $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = ۲a_n + ۱$، مجموع ۱۰ جملهٔ ابتدایی a_n کدام است؟

۱) $۲^{۱۰} - ۱۲$ ۲) $۲^{۱۱} + ۱۲$ ۳) $۲^{۱۰} + ۱۲$ ۴) $۲^{۱۱} - ۱۲$

۵۱- در شکل مقابل اگر هر بار هر ضلع مربع به ۳ قسمت برابر تقسیم شود و ضلع مربع بزرگ‌تر ۲ باشد و این عمل ۱۰ مرتبه تکرار شود، مجموع مساحت رنگی کدام است؟

۱) $۱-(\frac{۴}{۹})^{۱۰}$ ۲) $۱-(\frac{۵}{۹})^{۱۰}$ ۳) $۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۰}$ ۴) $۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$

۵۲- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع دو جملهٔ اول ۳ برابر مجموع بقیهٔ جملات است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۲) $\pm\frac{۱}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۲}{۳}$ ۴) $\pm\frac{۳}{۲}$

۵۳- حاصل $\frac{۸۱}{۱۰}(۷+۷۷+۷۷۷+\cdots+\underbrace{۷۷\ldots۷}_{\text{۱۰ بار}})$ کدام است؟

۱) $۷۰(۱۰^{۱۰}-۱)$ ۲) $۷۰(۱۰^{۹}-۱)$ ۳) $۷(۱۰^{۱۰}-۱)$ ۴) $۷(۱۰^{۹}-۱)$

۵۴- حاصل $۱+۲x+۳x^۲+۴x^۳+\cdots+۱۰x^۹$ به ازای $x=۲$ چه‌قدر است؟

۱) $۹\times۲^{۱۰}-۱$ ۲) $۹\times۲^{۱۰}+۱$ ۳) $۲^{۱۱}+۱$ ۴) $۲^{۱۱}-۱$

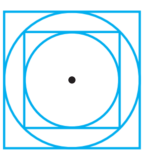
۵۵- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ عمومی $۲\times۳^{۱-n}$ می‌باشد، جمع تمام جملات کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۱۲

۵۶- اگر از دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\cdots,a_n,\cdots$ جملات $a_۳$، $a_۶$ و $a_۹$ و ... را حذف کنیم، حد مجموع جملات باقی‌مانده چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۵۷- در شکل مقابل هر دایره درون یک مربع محاط و بر یک مربع دیگر محیط است. اگر شعاع بزرگ‌ترین دایره برابر R باشد حد مجموع مساحت دایره‌ها چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۳}{۲}\pi R^۲$ ۲) $۲\pi R^۲$ ۳) $\frac{۵}{۲}\pi R^۲$ ۴) $۳\pi R^۲$

۵۸- اگر $a_n = \frac{۲^n + ۳^n}{۶^n}$ حاصل $S = a_۱ + a_۲ + \cdots$ چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۹- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۲^n + ۳^n}{۴^n}$ حد مجموع جملات ردیف فرد چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۵۰}{۲۱}$ ۳) $\frac{۲۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۵۵}{۲۱}$

۶۰- مجموع تمام جملات دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{n}{۲^n}$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱- **گزینهٔ ۲** می‌دانیم هرگاه a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم:

$$\frac{a+c}{۲}=b$$

پس:

$$a+c=۲b$$

با توجه به آن‌که a، $b+۳$ و $c+k$ نیز سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، داریم:

$$\frac{a+(c+k)}{۲}=b+۳ \Rightarrow a+c+k=۲b+۶$$

حال به کمک تشکیل دستگاه زیر مقدار k را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+c=۲b \\ \underbrace{a+c}_{۲b}+k=۲b+۶ \end{cases} \Rightarrow ۲b+k=۲b+۶ \Rightarrow k=۶$$

۲- **گزینهٔ ۲** **راه اول:** در هر دنبالهٔ حسابی جملاتی از دنباله که دارای فواصل مساوی‌اند نیز با یکدیگر تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. در واقع جملهٔ وسط در این جملات نیز میانگین دو عدد دیگر است. در نتیجه اگر a, b, c سه جمله از یک دنبالهٔ حسابی (نه الزاماً متوالی) باشند به طوری که فاصلهٔ جملهٔ b از a و c یکی باشد، داریم:

$$\frac{a+c}{۲}=b$$

فاصلهٔ جملهٔ $a_۶$ از $a_۲$ و $a_{۱۰}$ یکسان است. پس $a_۶$ میانگین حسابی $a_۲$ و $a_{۱۰}$ خواهد بود:

$$a_۲ \xleftarrow{-۴d} a_۶ \xrightarrow{+۴d} a_{۱۰} \Rightarrow \frac{a_۲+a_{۱۰}}{۲}=a_۶ \Rightarrow a_۲+a_{۱۰}=۲a_۶$$

$$\Rightarrow a_۲+a_۶+a_{۱۰}=۳a_۶=۹ \Rightarrow a_۶=۳$$

به همین ترتیب فاصلهٔ جملهٔ $a_۹$ از $a_۵$ و $a_{۱۳}$ نیز برابر است و $a_۹$ میانگین حسابی $a_۵$ و $a_{۱۳}$ است:

$$a_۵ \xleftarrow{-۴d} a_۹ \xrightarrow{+۴d} a_{۱۳} \Rightarrow \frac{a_۵+a_{۱۳}}{۲}=a_۹ \Rightarrow a_۵+a_{۱۳}=۲a_۹$$

$$\Rightarrow a_۵+a_۹+a_{۱۳}=۳a_۹=۲۷ \Rightarrow a_۹=۹$$

از طرفی می‌دانیم $a_n-a_m=(n-m)d$، در نتیجه:

$$\begin{cases} a_۹=۹ \\ a_۶=۳ \end{cases} \Rightarrow a_۹-a_۶=۹-۳ \Rightarrow ۳d=۶ \Rightarrow d=۲$$

راه دوم: می‌توانیم هر یک از جملات یک دنبالهٔ حسابی را برحسب جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله بنویسیم. می‌دانیم $a_n=a_۱+(n-۱)d$، در نتیجه:

$$\begin{cases} a_۲=a_۱+d \\ a_۶=a_۱+۵d \\ a_{۱۰}=a_۱+۹d \end{cases} \Rightarrow a_۲+a_۶+a_{۱۰}=۳a_۱+۱۵d=۹ \Rightarrow a_۱+۵d=۳$$

$$\begin{cases} a_۵=a_۱+۴d \\ a_۹=a_۱+۸d \\ a_{۱۳}=a_۱+۱۲d \end{cases} \Rightarrow a_۵+a_۹+a_{۱۳}=۳a_۱+۲۴d=۲۷ \Rightarrow a_۱+۸d=۹$$

به کمک تشکیل دستگاه زیر مقدار d را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_۱+۵d=۳ \\ a_۱+۸d=۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳d=۶ \Rightarrow d=۲$$

۳- **گزینهٔ ۲** برای آن‌که متوجه شویم چند جمله از یک دنباله منفی است، کافی است معادلهٔ $a_n<۰$ را در مجموعهٔ اعداد حسابی حل کنیم. در نتیجه ابتدا باید با محاسبهٔ جملهٔ اول و قدرنسبت جملهٔ عمومی دنبالهٔ (a_n) را بنویسیم:

$$\begin{cases} a_۹=۱۹ \\ a_۵=۳ \end{cases} \Rightarrow a_۹-a_۵=۴d=۱۶ \Rightarrow d=۴$$

$$a_۵=a_۱+۴d=۳ \xrightarrow{d=۴} a_۱=-۱۳$$

از طرفی می‌دانیم $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است، پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n=-۱۳+۴(n-۱) \Rightarrow a_n=۴n-۱۷$$

حال معادلهٔ $a_n<۰$ را در مجموعهٔ اعداد حسابی حل می‌کنیم:

$$۴n-۱۷<۰ \Rightarrow ۴n<۱۷ \Rightarrow n<\frac{۱۷}{۴}\simeq ۴/...$$

در نتیجه این دنباله ۴ جملهٔ منفی دارد: $\Rightarrow n=۱,۲,۳,۴$

تذکر $a_m-a_n=(m-n)d$

۴- **گزینهٔ ۲** اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم:

$$\frac{a+c}{۲}=b$$

$$x, x^۲+۲, x^۳+۲ \Rightarrow \frac{x+(x^۳+۲)}{۲}=x^۲+۲$$

$$\Rightarrow x^۳-۲x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x^۲(x-۲)+(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x^۲+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x^۲+۱=۰ \Rightarrow x^۲=-۱ \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

با توجه به آن‌که $x=۲$ است، دنباله به این صورت خواهد بود:

$$2,6,10,\ldots$$

در نتیجهٔ جملهٔ چهارم این دنباله با توجه به آن‌که $d=4$ است، برابر است با: $a_4=a_3+d=10+4=14$

که در بین گزینه‌ها تنها ۲ به ازای $x=2$ برابر ۱۴ است.

۵- گزینه۴ اگر سه عدد a ، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، داریم: $\frac{a+c}{2}=b$

با توجه به آن‌که $3,a,b$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، داریم:

$$\frac{3+b}{2}=a \Rightarrow b=2a-3$$

با توجه به آن‌که $3,a-1,b+1$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، داریم: $3(b+1)=(a-1)^2$

حال با تشکیل دستگاه زیر و حذف b مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} b+1=2a-2 \\ 3(b+1)=(a-1)^2 \end{cases} \Rightarrow 3(2a-2)=(a-1)^2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2=6(a-1) \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a-1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=7 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم با توجه به تعریف دنبالهٔ هندسی، هیچ‌یک از جملات یک دنبالهٔ هندسی صفر نباید باشد. (چرا؟) در نتیجه چون به ازای $a=1$ جملهٔ دوم دنبالهٔ هندسی برابر صفر می‌شود $a=1$ قابل قبول نیست و $a=7$ خواهد بود. در نتیجه دنبالهٔ هندسی به این صورت است: $3,6,b+1 \Rightarrow q=\frac{6}{3}=2$

۶- گزینه۳

$$a_2=a_1+d$$

$$a_7=a_1+6d$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

چون a_2 ، a_7 و a_n سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هستند، پس $a_7^2=a_2a_n$ پس:

$$(a_1+6d)^2=(a_1+d)(a_1+(n-1)d)$$

$$\cancel{a_1^2}+36d^2+12a_1d=\cancel{a_1^2}+a_1nd+(n-1)d^2$$

$$36d^2-(n-1)d^2=a_1nd-12a_1d$$

$$\Rightarrow (37-n)d^2=a_1d(n-12)$$

$$\xrightarrow{\div d} (37-n)d=a_1(n-12) \Rightarrow a_1=\frac{37-n}{n-12}d$$

$$\Rightarrow a_2=a_1+d=\frac{37-n}{n-12}d+d=\frac{25}{n-12}d$$

$$a_7=a_1+6d=\frac{37-n}{n-12}d+6d=\frac{5n-35}{n-12}d$$

$$\Rightarrow q=\frac{a_7}{a_2}=\frac{\frac{5n-35}{n-12}d}{\frac{25}{n-12}d}=\frac{n-7}{5}=4$$

تذکر در حالت کلی اگر a_n، a_m و a_k سه جمله از دنباله‌ای حسابی باشند که با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{k-m}{m-n}=q$$

در نتیجه در این سؤال: $\frac{n-7}{7-2}=q=4 \Rightarrow n=27$

۷- گزینه۲ می‌دانیم از حاصل تقسیم هر جملهٔ دنبالهٔ هندسی بر جملهٔ قبلی آن (به‌جز جملهٔ اول) قدرنسبت به دست می‌آید: $(n\neq 1)\ \ q=\frac{a_n}{a_{n-1}}$

اگر قدرنسبت دنبالهٔ $ab,bc,cd,\ldots$ را q' بنامیم، داریم:

$$ab,bc,cd,\ldots \Rightarrow q'=\frac{bc}{ab}=\frac{c}{a}$$

از طرفی در دنبالهٔ $a,b,c,d,\ldots$ اگر قدرنسبت برابر q باشد، جملهٔ سوم (یعنی c) برابر است با: $c=aq^2$

در نتیجه: $q'=\frac{c}{a}=\frac{aq^2}{a}=q^2$

۸- گزینه۳ هرگاه a,b,c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم: $ac=b^2$

در نتیجه با توجه به آن‌که $3,(x+3),4x$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، داریم: $3\times 4x=(x+3)^2 \Rightarrow x^2-6x+9=0$

$$\Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$$

در نتیجه دنباله به این صورت خواهد بود: $3,6,12,\ldots$

اگر دو جملهٔ اول این دنباله، دو جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی نیز باشند، قدرنسبت برابر $6-3=3$ خواهد بود. در نتیجه جملهٔ سوم این دنبالهٔ حسابی $9=3+6$ است. پس کافی است از جملهٔ سوم دنبالهٔ هندسی ۳ واحد کم کنیم تا سه جملهٔ حاصل، تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند.

۹- گزینه۲ هر معادله به صورت $ax^4+bx^2+c=0$ اگر دارای ریشهٔ α باشد، قطعاً دارای ریشهٔ $-\alpha$ نیز خواهد بود. زیرا مجذور α و $-\alpha$ با هم برابرند: $(\alpha^2=(-\alpha)^2)$

α ریشه است $\Rightarrow a\alpha^4+b\alpha^2+c=0$

$-\alpha \Rightarrow a\underset{\alpha^4}{\underbrace{(-\alpha)^4}}+b\underset{\alpha^2}{\underbrace{(-\alpha)^2}}+c=0$ هم‌ریشه است.

به همین ترتیب اگر معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ β باشد، دارای ریشهٔ $-\beta$ نیز خواهد بود. در نتیجه این معادله دارای ۴ ریشهٔ α، $-\alpha$، β و $-\beta$ است. $(\alpha,\beta>0)$.

از طرفی اگر این ریشه‌ها بخواهند تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند باید از کوچک به بزرگ (یا برعکس) تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. (چرا؟)

با فرض مثبت‌بودن α و β این دنباله به این صورت خواهد بود:

$$-\beta,-\alpha,\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$$

با توجه به این دنباله، قدرنسبت دنباله برابر 2α است $(\alpha-(-\alpha)=2\alpha)$ و در نتیجه $\beta=\alpha+2\alpha=3\alpha$ است،

تجزیهٔ معادلهٔ داده‌شده به صورت زیر است:

$$\underbrace{(x^2-\alpha^2)}_{\text{دارای ریشه‌های } \pm\alpha}\underbrace{(x^2-\beta^2)}_{\text{دارای ریشه‌های } \pm\beta}=0$$

$$\Rightarrow x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2=0$$

$$\xrightarrow{\beta=3\alpha} x^4-10\alpha^2x^2+9\alpha^4=0$$

با توجه به معادلهٔ داده‌شده تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x^4-10\alpha^2x^2+9\alpha^4=0 \\ x^4-(3m+1)x^2+m^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\alpha^2=3m+1 \\ 9\alpha^4=m^2 \end{cases}$$

دو طرف عبارت $10\alpha^2=3m+1$ را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$\begin{cases} 100\alpha^4=(3m+1)^2 \\ 9\alpha^4=m^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{100}{9}=\left(\frac{3m+1}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3m+1}{m}=\dfrac{10}{3} \Rightarrow m=3 \\ \dfrac{3m+1}{m}=\dfrac{-10}{3} \Rightarrow m=-\dfrac{3}{19} \end{cases}$$

که در بین گزینه‌ها فقط $m=3$ وجود دارد.

۱۰- **گزینهٔ ۱** اگر جملهٔ اول دنبالهٔ جدید را a'_1 و قدرنسبت دنبالهٔ جدید را d' بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} a'_1=a_1+4 \\ d'=d-k \end{cases}$$

در نتیجه: $a'_{40}=a'_1+39d'=a_1+4+39(d-k)$

با توجه به تساوی a_{40} و a'_{40} داریم:

$$a_1+4+39(d-k)=a_1+39d$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1}+4+\cancel{39d}-39k=\cancel{a_1}+\cancel{39d} \Rightarrow k=\frac{4}{39}$$

۱۱- **گزینهٔ ۳** **راه اول:** می‌دانیم اگر هر جمله از دنبالهٔ حسابی را از جملهٔ قبلی آن کم کنیم (به‌جز جملهٔ اول) قدرنسبت حاصل می‌شود. در نتیجه:

$$ad,bd,cd \Rightarrow \begin{cases} bd-ad=d\underbrace{(b-a)}_{d}=d^2 \\ cd-bd=d\underbrace{(c-b)}_{d}=d^2 \end{cases}$$

در نتیجه ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d^2 است.

$$a+d^2,b+d^2,c+d^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b+d^2)-(a+d^2)=b-a=d \\ (c+d^2)-(b+d^2)=c-b=d \end{cases}$$

در نتیجه ۲ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d است.

$$c+d,b+d,a+d \Rightarrow \begin{cases} (b+d)-(c+d)=b-c=-d \\ (a+d)-(b+d)=a-b=-d \end{cases}$$

در نتیجه ۴ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $-d$ است.

۳ یک دنبالهٔ حسابی نیست، زیرا اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی را به توان ۲ برسانیم، فاصلهٔ جملات از یکدیگر ثابت نمی‌مانند مگر آن‌که جملات دنباله یکسان باشند:

$$da^2,db^2,dc^2,\ldots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} db^2-da^2=d\underbrace{(b-a)}_{d}(b+a)=d^2(b+a) \\ dc^2-db^2=d\underbrace{(c-b)}_{d}(c+b)=d^2(c+b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2(b+a)\neq d^2(c+b)$$

راه دوم: می‌دانیم اگر a، b و c با یکدیگر دنبالهٔ حسابی بسازند $b=\frac{a+c}{2}$ است. در نتیجه گزینه‌ای که حاصل‌جمع جملهٔ اول و سوم آن برابر ۲ برابر جملهٔ وسط نباشد، دنباله حسابی نیست:

$$ad,bd,cd \Rightarrow ad+cd=d\underbrace{(a+c)}_{2b}=2bd \Rightarrow \checkmark$$

۱ یک دنبالهٔ حسابی است. $c+d,b+d,a+d$

$$\Rightarrow (c+d)+(a+d)=\underbrace{a+c}_{2b}+2d=2(b+d) \Rightarrow \checkmark$$

۴ یک دنبالهٔ حسابی است. $a+d^2,b+d^2,c+d^2$

$$\Rightarrow (a+d^2)+(c+d^2)=\underbrace{(a+c)}_{2b}+2d^2=2(b+d^2)\Rightarrow \checkmark$$

۲ یک دنبالهٔ حسابی است.

$$da^2,db^2,dc^2 \Rightarrow da^2+dc^2=d(a^2+c^2)\neq 2db^2$$

در نتیجه ۳ یک دنبالهٔ حسابی نیست.

چند تذکر:

۱ اگر به جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d، عدد ثابتی اضافه شود، دنبالهٔ جدید نیز یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d است.

۲ اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d را در عدد ثابتی مانند k ضرب کنیم، دنبالهٔ جدید یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت kd خواهد بود.

۱۲- گزینه۴ **راه اول:** ابتدا باید اولین جملهٔ مشترک این دو دنباله را به دست آوریم. از آن‌جا که جملات اولیهٔ دنبالهٔ a_n منفی هستند و جملات اولیهٔ دنبالهٔ b_n مثبت هستند و هر دو دنباله صعودی‌اند. اولین جملهٔ مشترک این دو دنباله عددی مثبت خواهد بود. در نتیجه ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ a_n را می‌نویسیم و به کمک آن سعی می‌کنیم جملات مثبت این دنباله را بنویسیم. سپس اولین جملهٔ مشترک این دو دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_n: -۱۹ \xrightarrow{+۴} -۱۵ \xrightarrow{+۴} -۱۱, \dots \Rightarrow \begin{cases} d=۴ \\ a_۱=-۱۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = -۱۹ + ۴(n-۱) = ۴n - ۲۳$$

اولین جملهٔ مثبت دنبالهٔ a_n جملهٔ ششم آن است که برابر ۱ است:

$$a_n: -۱۹, -۱۵, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ a_۶}}{۱}, ۵, ۹, \dots$$

$$a_۶ = ۴ \times ۶ - ۲۳ = ۱$$

از آن‌جا که اولین جملهٔ دنبالهٔ b_n برابر ۱ است، پس اولین جملهٔ مشترک این دو دنباله ۱ است:

$$\begin{cases} a_n: -۱۹, -۱۵, \dots, ۱, ۵, \dots \\ b_n: ۱, ۴, ۷, \dots \end{cases} \Rightarrow \text{اولین جملهٔ مشترک} = ۱$$

از طرفی قدرنسبت دنبالهٔ a_n، ۴ و قدرنسبت دنبالهٔ b_n، ۳ است. در نتیجه قدرنسبت دنبالهٔ مشترک برابر ک.م.م آن‌ها یعنی ۱۲ خواهد بود و این دنباله را اگر c_n بنامیم، به صورت زیر است:

$$c_n: ۱ \xrightarrow{+۱۲} ۱۳ \xrightarrow{+۱۲} ۲۵ \xrightarrow{+۱۲} ۳۷, \dots$$

در نتیجه جملهٔ عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$c_n = ۱ + ۱۲(n-۱) = ۱۲n - ۱۱ \Rightarrow c_۴ = ۳۷$$

تذکر اگر دو دنبالهٔ حسابی دارای جملات مشترک باشند، جملات مشترک آن‌ها نیز یک دنبالهٔ حسابی‌اند که قدرنسبت آن برابر ک.م.م قدرنسبت‌های آن دو دنباله است.

راه دوم: جملهٔ عمومی دو دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = -۱۹ + ۴(n-۱) = ۴n - ۲۳$$

$$b_m = ۱ + ۳(m-۱) = ۳m - ۲$$

حال اولین n و m را پیدا می‌کنیم که معادلهٔ زیر برقرار باشد:

$$b_m = a_n \Rightarrow ۳m - ۲ = ۴n - ۲۳ \Rightarrow ۳m + ۲۱ = ۴n$$

$$\Rightarrow ۳(m+۷) = ۴n$$

با توجه به آن‌که n و m دو عدد طبیعی‌اند، برای آن‌که تساوی بالا برقرار باشد لازم است $m+۷$ مضرب عدد ۴ و n مضرب ۳ باشد. زیرا سمت چپ تساوی مضرب ۳ است، در نتیجه سمت راست هم باید مضرب ۳ باشد. ۴ که مضرب ۳ نیست پس n باید مضربی از ۳ باشد. از طرفی سمت راست تساوی مضرب ۴ است، در نتیجه سمت چپ تساوی نیز باید مضربی از ۴ باشد. ۳ که مضرب ۴ نیست پس $m+۷$ باید مضرب ۴ باشد:

$$\underbrace{۳(m+۷)}_{\text{مضرب ۳}} = \underbrace{۴n}_{\text{مضرب ۴}} \Rightarrow \begin{cases} m+۷ = ۴k \Rightarrow \text{مضرب ۴} \\ n = ۳k' \Rightarrow \text{مضرب ۳} \end{cases}$$

از آن‌جا که m و n اعداد طبیعی‌اند، کوچک‌ترین m که $m+۷$ را مضربی از ۴ کند، عدد ۱ است، در نتیجه $m+۷=۸$ است و تساوی مقابل برقرار است: $۳\underbrace{(m+۷)}_{۸} = ۴n \Rightarrow ۲۴ = ۴n \Rightarrow n = ۶$

پس اولین جملهٔ مشترک ششمین جملهٔ دنبالهٔ a و اولین جملهٔ دنبالهٔ b است. با توجه به آن‌که قدرنسبت دنباله‌ها ۴ و ۳ است، قدرنسبت دنبالهٔ جملات مشترک، ۱۲ است و داریم:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{جملات مشترک}}}{c_n} = ۱ + ۱۲(n-۱) = ۱۲n - ۱۱ \Rightarrow c_۴ = ۳۷$$

۱۳- گزینه۲ اولین جملهٔ مشترک این دو دنباله ۷ است. از آن‌جا که قدرنسبت دنباله با جملهٔ عمومی a_n برابر ۴ و قدرنسبت دنباله با جملهٔ عمومی b_n برابر ۶ است، پس قدرنسبت جملات مشترک ک.م.م آن‌ها یعنی ۱۲ خواهد بود:

$$\text{دنبالهٔ جملات مشترک} \leftarrow c_n = ۷ \xrightarrow{+۱۲} ۱۹ \xrightarrow{+۱۲} ۳۱, \dots$$

جملهٔ عمومی دنباله با جملهٔ عمومی c_n به صورت زیر است:

$$\begin{cases} c_۱ = ۷ \\ d = ۱۲ \Rightarrow c_n = ۷ + (n-۱) \times ۱۲ = ۱۲n - ۵ \end{cases}$$

برای آن‌که بفهمیم بیستمین جملهٔ مشترک چندمین جملهٔ a_n است ابتدا $c_{۲۰}$ را به دست می‌آوریم: $c_{۲۰} = ۱۲ \times ۲۰ - ۵ = ۲۳۵$

حال جملهٔ عمومی a_n را برابر $c_{۲۰}$ قرار می‌دهیم و n را به دست می‌آوریم: $a_n = c_{۲۰} \Rightarrow ۳ + ۴(n-۱) = ۲۳۵$

$$\Rightarrow ۴(n-۱) = ۲۳۲ \Rightarrow n-۱ = ۵۸ \Rightarrow n = ۵۹$$

پس داریم $a_{۵۹} = c_{۲۰}$. یعنی جملهٔ ۵۹اُم دنباله با جملهٔ عمومی a_n، جملهٔ ۲۰اُم دنباله با جملهٔ عمومی c_n است.

۱۴- گزینه۳

$$\begin{cases} a_۹ = ۱۲ \Rightarrow \\ a_{۱۲} = ۹ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a_۱ + ۸d = ۱۲ \\ a_۱ + ۱۱d = ۹ \end{cases} \Rightarrow -۳d = ۳ \Rightarrow d = -۱$$

$$a_۱ + ۸d = ۱۲ \xrightarrow{d=-۱} a_۱ - ۸ = ۱۲ \Rightarrow a_۱ = ۲۰$$

با توجه به داشتن جملهٔ اول و قدرنسبت این دنباله می‌توانیم مجموع n جملهٔ اول آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] = \frac{n}{۲}[۴۰ - n + ۱] = \frac{n}{۲}[۴۱ - n] = ۰$$

$$\Rightarrow n = ۴۱$$

۱۵- گزینه۱ با توجه به آن‌که جملهٔ اول و چهارم این دنباله را داریم، می‌توانیم قدرنسبت این دنباله را به دست آوریم.

$$\begin{cases} a_4 = \frac{9}{2} \\ a_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow a_4 - a_1 = 3d \Rightarrow \frac{9}{2} + 3 = 3d$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2} = 3d \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[-6 + 19 \times \frac{5}{2}] = -60 + 19 \times 25 = 415$$

تذکر $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

۱۶- گزینه۲ دنباله شامل ۱۱ جمله است که به صورت زیر هستند:

$$4, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \ldots, \bigcirc}_{\text{۹ تا}}, 34$$

جملهٔ اول این دنباله ۴، و جملهٔ یازدهم آن ۳۴ است از طرفی می‌دانیم مجموع جملهٔ اول و یازدهم، برابر مجموع جملهٔ دوم و دهم است. پس برای محاسبهٔ مجموع ۹ جملهٔ وسط لازم نیست قدرنسبت دنباله محاسبه شود. زیرا مجموع جملهٔ اول و آخر ۹ جملهٔ درجشده همان مجموع جملهٔ اول و یازدهم دنباله است، در نتیجه:

$$a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = 4 + 34 = 38$$

$$S_{\text{۹ جملهٔ درجشده}} = \frac{9 \times (a_2 + a_{10})}{2} = \frac{9 \times 38}{2} = 9 \times 19 = 171$$

۱۷- گزینه۴ هر عددی که باقی‌ماندهٔ آن بر ۵ برابر ۳ است را به صورت $5k + 3$ $(k \in \mathbb{Z})$ می‌توان نوشت. به ازای $k = 2$، اولین عدد دو رقمی که باقی‌ماندهٔ آن بر ۵ برابر ۳ است ایجاد می‌شود و به ازای $k = 19$، بزرگ‌ترین عدد دو رقمی که باقی‌ماندهٔ آن بر ۵ برابر ۳ است ایجاد می‌شود. این عدد هجدهمین جملهٔ این دنباله است. جملات این دنباله یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۵ هستند که تعداد آن‌ها هم ۱۸تاست: $13, 18, 23, \ldots, 98$

$$S_{18} = \frac{18}{2}[a_1 + a_{18}] = 9[13 + 98] = 9 \times 111 = 999$$

تذکر با توجه به آن‌که ۱۳، اولین جملهٔ این دنباله است می‌توانستیم آخرین جمله و تعداد جملات این دنباله را به صورت زیر نیز به دست آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = 13 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_n = 13 + 5(n-1) = 5n + 8$$

$$\Rightarrow 5n + 8 < 100 \Rightarrow 5n < 92 \Rightarrow n < \frac{92}{5} \simeq 18/\ldots$$

در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار n برابر ۱۸ است. به ازای $n = 18$، $a_{18} = 98$ خواهد بود.

۱۸- گزینه۱

$$\begin{cases} S_6 = \frac{6}{2}[2a_1 + (6-1)d] = 3[2a_1 + 5d] = 6a_1 + 15d \\ a_4 = a_1 + 3d \end{cases}$$

با توجه به تساوی S_6 و a_4 داریم:

$$S_6 = a_4 \Rightarrow 6a_1 + 15d = a_1 + 3d \Rightarrow 5a_1 + 12d = 0$$

$$\Rightarrow d = -\frac{5}{12}a_1$$

از طرفی می‌دانیم $a_7 = a_1 + 6d$ است و با توجه به آن‌که $d = -\frac{5}{12}a_1$ است، داریم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 + 6d}{a_1} = \frac{a_1 + (6 \times \frac{-5}{12}a_1)}{a_1} = \frac{a_1 - \frac{5}{2}a_1}{a_1} = \frac{-\frac{3}{2}a_1}{a_1}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

۱۹- گزینه۱

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + (20-1)d] = 10[2a_1 + 19d] = 300$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 19d = 30$$

از طرفی می‌دانیم $d = 2a_1$. در نتیجه:

$$\begin{cases} 2a_1 + 19d = 30 \\ d = 2a_1 \end{cases} \Rightarrow d + 19d = 30 \Rightarrow 20d = 30 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow d = 2a_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}$$

با توجه به آن‌که جملهٔ اول این دنباله $\frac{3}{4}$ و قدرنسبت آن $\frac{3}{2}$ است، می‌توانیم جملهٔ عمومی آن را بنویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}(n-1) = \frac{3}{2}n - \frac{3}{4}$$

می‌خواهیم بدانیم جملهٔ چندم این دنباله برابر $\frac{147}{4}$ است، پس جملهٔ عمومی را برابر $\frac{147}{4}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{2}n - \frac{3}{4} = \frac{147}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}n = \frac{150}{4} \Rightarrow n = 25$$

۲۰- گزینه۴ **راه اول:** ۵ جملهٔ دوم این دنباله خود یک دنبالهٔ حسابی‌اند که جملهٔ اول آن a_6 و جملهٔ آخر آن a_{10} است. در نتیجه مجموع این ۵ جمله برابر $S_{10} - S_5 = \frac{5}{2}[a_6 + a_{10}]$ است.

از طرفی مجموع ۵ جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_5 = \frac{5}{2}[a_1 + a_5]$$

در نتیجه:

$$\underbrace{\frac{5}{2}[a_6+a_{10}]}_{\text{مجموع ۵ جملهٔ دوم}} - \underbrace{\frac{5}{2}[a_1+a_5]}_{\text{مجموع ۵ جملهٔ اول}} = \frac{5}{2}[a_6+a_{10}-a_1-a_5]$$

از طرفی می‌دانیم $a_6-a_1=5d$ و $a_{10}-a_5=5d$ است، در نتیجه:

$$\frac{5}{2}[a_6-a_1+a_{10}-a_5]=\frac{5}{2}[5d+5d]=\frac{5}{2}\times 10d=25d$$

اما با توجه به آن‌که جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_n=4n-3$ است، قدرنسبت آن برابر ۴ است (ضریب n همان قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است)، در نتیجه:

$$\text{مجموع ۵ جملهٔ دوم} - \text{مجموع ۵ جملهٔ اول} = 25d = 25\times 4 = 100$$

راه دوم: می‌دانیم $a_p-a_q=(p-q)d$ است. در نتیجه a_6-a_1، a_7-a_2، a_8-a_3، a_9-a_4 و $a_{10}-a_5$ همگی مقادیر ثابتی برابر $5d$ خواهند داشت. در نتیجه مجموع ۵ جملهٔ دوم به اندازهٔ ۵ تا $5d$ یعنی $25d$ از مجموع ۵ جملهٔ اول بیشتر است:

$$-\begin{cases} a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10} \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \end{cases}$$
$$\overline{5d+5d+5d+5d+5d=25d}$$

با توجه به آن‌که $a_n=4n-3$ است، $d=4$ است و اختلاف ۵ جملهٔ دوم از اول برابر $25\times 4=100$ است.

تذکر مجموع n جملهٔ دوم یک دنبالهٔ حسابی از مجموع n جملهٔ اول آن به اندازهٔ n^2d بیشتر است. (چون هر جمله از n جملهٔ دوم nd بیشتر است پس $n\times nd$ یعنی n^2d بیشتر هستند.)

۲۱- **گزینهٔ ۲**

راه اول:

$$\begin{cases} S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] \\ a_n=a_1+(n-1)d \\ S_n=n^2a_1 \end{cases} \Rightarrow n^2a_1=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$\Rightarrow 2na_1=2a_1+nd-d \Rightarrow 2na_1-2a_1=nd-d$$
$$\Rightarrow 2a_1(n-1)=d(n-1)$$

با فرض آن‌که $n\neq 1$ است، داریم: $2a_1=d$

در نتیجه:

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_1+(n-1)d}{a_1}\overset{2a_1=d}{=}\frac{a_1+2a_1(n-1)}{a_1}$$
$$=\frac{a_1(1+2(n-1))}{a_1}=1+2n-2=2n-1$$

راه دوم:

$$\begin{cases} S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \\ S_n=n^2a_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{2}(a_1+a_n)=n^2a_1$$

$$\Rightarrow a_1+a_n=2na_1 \Rightarrow a_n=(2n-1)a_1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_1}=2n-1$$

۲۲- **گزینهٔ ۳** ابتدا قدرنسبت دنباله را به دست می‌آوریم:

$$-2\ \underset{+4}{,}\ 2\ \underset{+4}{,}\ 6,\dots \qquad d=6-2=4$$

حالا به کمک جملهٔ اول و قدرنسبت، S_n را برحسب n می‌نویسیم.

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}[-4+4(n-1)]=\frac{n}{2}[4n-8]=n(2n-4)$$

با حل نامعادلهٔ $S_n>200$ حداقل n را می‌توانیم به دست آوریم:

$$S_n=n(2n-4)>200 \Rightarrow 2n(n-2)>200$$
$$\Rightarrow n(n-2)>100$$

از آن‌جا که n و $n-2$ دو عدد طبیعی باید باشند که به فاصلهٔ ۲ از هم هستند با حدس و آزمایش حداقل آن را به دست می‌آوریم:

$$n=11 \Rightarrow n(n-2)=99<100 \quad ✗$$

$$n=12 \Rightarrow n(n-2)=12\times 10>100 \quad ✓$$

پس حداقل n برابر ۱۲ است.

تذکر می‌توانیم به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای نیز این نامعادله را حل کنیم:

$$S_n=n(n-2)>100 \Rightarrow n^2-2n>100$$
$$\Rightarrow n^2-2n+1>101 \Rightarrow (n-1)^2>101 \Rightarrow n\geq 12$$

۲۳- **گزینهٔ ۴**

$$a_4=2a_9 \Rightarrow a_1+3d=2(a_1+8d)$$
$$\Rightarrow a_1+3d=2a_1+16d \Rightarrow a_1+13d=0 \Rightarrow a_{14}=0$$

با توجه به این‌که جملهٔ چهاردهم برابر صفر است. ۱۳ جملهٔ اول با ۱۳ جمله بعد از جملهٔ چهاردهم ۲ به دو قرینهٔ یکدیگرند. در نتیجه حاصل جمعشان صفر است:

$$\underset{\downarrow}{\overset{a_1}{}}{}_{-13d},\dots,\underset{-2d}{a_{12}},\underset{-d}{a_{13}},\underset{0}{a_{14}},\underset{d}{a_{15}},\underset{2d}{a_{16}},\dots,\underset{13d}{a_{27}}$$

$$a_1=-a_{27}\ ,\ a_2=-a_{26}\ ,\ \dots\ ,\ a_{13}=-a_{15}$$
$$\Rightarrow a_1+a_2+\dots+a_{27}=0$$

۲۴- گزینه۲ **راه اول:** دو دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_۱, a_۲, a_۳, \ldots \\ d, ۲d, ۳d, \ldots \end{cases}$$

d قدرنسبت دو دنباله است. پس دنباله‌ای که هر جملهٔ آن از حاصل‌جمع دو جمله با شماره جملهٔ مشابه به دست می‌آید، دارای قدرنسبت ۲d است:

$$a_۱+d \xrightarrow{۲d} a_۲+۲d \xrightarrow{۲d} a_۳+۳d, \ldots$$

در نتیجه:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$$

$$S'_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}[۲(a_۱+d)+(n-۱)\times ۲d]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{۱۰}=۵[۲a_۱+(n-۱)d] \\ S'_{۱۰}=۵[۲a_۱+۲d+۲(n-۱)d] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S'_{۱۰}-S_{۱۰} = ۵[\cancel{۲a_۱}+۲d+۲(n-۱)d-\cancel{۲a_۱}-(n-۱)d]$$

$$\overset{n=۱۰}{=\!=} ۵[\underbrace{(\overset{۹}{\cancel{n-۱}})d+۲d}_{۱۱d}]=۵۵d=۱۱۰ \Rightarrow d=۲$$

راه دوم: جملات اول، دوم، سوم و ... دنبالهٔ دوم به ترتیب هر کدام d واحد بزرگ‌تر از جملات اول، دوم، سوم و ... دنبالهٔ اول است:

$$-\begin{cases} a_۱+d, a_۲+۲d, a_۳+۳d, \ldots \\ \;\; a_۱ \;\;,\;\; a_۲ \;\;,\;\; a_۳ \;\;, \ldots \end{cases}$$
$$\overline{\quad d \;\;,\;\; ۲d \;\;,\;\; ۳d \;\;, \ldots \quad}$$

در نتیجه مجموع جملات دنبالهٔ دوم به اندازهٔ حاصل‌جمع زیر از مجموع جملات دنبالهٔ اول بیشتر است:

$$S'_{۱۰}-S_{۱۰}=d+۲d+۳d+\cdots+۱۰d=\frac{۱۰\times ۱۱d}{۲}=۵۵d$$

$$\Rightarrow S'_{۱۰}-S_{۱۰}=۵۵d=۱۱۰ \Rightarrow d=۲$$

۲۵- گزینه۲ با نوشتن چند جملهٔ اول این دو دنباله اولین جملهٔ مشترک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix} ۲,۵,۸,۱۱,\ldots \\ ۳,۷,۱۱,۱۵,\ldots \end{matrix} \Rightarrow$$ ۱۱ اولین جملهٔ مشترک

از آن‌جا که ۱۱ عددی دورقمی است، اولین جملهٔ جملات مشترک دورقمی نیز محسوب می‌شود. با توجه به آن‌که قدرنسبت دو دنباله به ترتیب ۳ و ۴ است، پس جملات مشترک دارای قدرنسبتی برابر ۱۲ (به مقدار ک.م.م قدرنسبت دو دنباله) دارند: $۱۱,۲۳,۳۵,\ldots$

حال می‌توانیم جملهٔ عمومی جملات مشترک را بنویسیم:

$$a_n=۱۱+۱۲(n-۱)=۱۲n-۱$$

از آن‌جا که آخرین جملهٔ این دنباله بزرگ‌ترین عدد ۲ رقمی در این دنباله است، داریم:

$$۱۲n-۱<۱۰۰ \Rightarrow ۱۲n<۱۰۱ \Rightarrow n<\frac{۱۰۱}{۱۲}\simeq ۸/\ldots$$

در نتیجه این دنباله دارای ۸ جمله است. پس مجموع این ۸ جمله برابر است با:

$$S_۸=\frac{۸}{۲}[۲\times ۱۱+۷\times ۱۲]=۴[۲۲+۸۴]=۴\times ۱۰۶=۴۲۴$$

۲۶- گزینه۱

$$S_{۴۰}=۸۶۰ \Rightarrow S_{۴۰}=\frac{۴۰}{۲}[۲a_۱+۳۹d]=۸۶۰$$

$$\Rightarrow ۲a_۱+۳۹d=۴۳$$

با توجه به آن‌که d و $a_۱$ هر دو عدد طبیعی هستند، با عددگذاری می‌توانیم d و $a_۱$ را به دست آوریم:

$$۲a_۱+۳۹d=۴۳ \Rightarrow \begin{cases} d=۱ \\ a_۱=۲ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲a_۱+۱۹d]=۱۰[۴+۱۹]=۲۳۰$$

۲۷- گزینه۲ **راه اول:**

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲a_۱+۱۹d]=۱۰[۲a_۱+۱۹d]$$

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲a_۱+۹d]=۵[۲a_۱+۹d]$$

$$\Rightarrow S_{۲۰}-۲S_{۱۰}=۱۰[۲a_۱+۱۹d]-۱۰[۲a_۱+۹d]$$

$$=۱۹۰d-۹۰d=۱۰۰d$$

راه دوم: می‌دانیم $S_{۲۰}-S_{۱۰}$ مجموع ۱۰ جملهٔ دوم یک دنبالهٔ حسابی است. اولین جملهٔ ۱۰ جملهٔ دوم (یعنی جملهٔ یازدهم) ۱۰d بیشتر از جملهٔ اول دنباله است. دومین جملهٔ ۱۰ جملهٔ دوم (جملهٔ دوازدهم) نیز ۱۰d بیشتر از جملهٔ دوم دنباله است. به همین ترتیب دهمین جملهٔ ۱۰ جملهٔ دوم (یعنی جملهٔ بیستم) نیز ۱۰d بیشتر از جملهٔ دهم است. در نتیجه مجموع ۱۰ جملهٔ دوم از مجموع ۱۰ جملهٔ اول ۱۰۰d بیشتر است.

$$S_{۲۰}-۲S_{۱۰}=\underbrace{S_{۲۰}-S_{۱۰}}_{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ دوم}}-\underbrace{S_{۱۰}}_{\text{مجموع ۱۰ جملهٔ اول}}=۱۰\times ۱۰d=۱۰۰d$$

$$\begin{cases} S_{۲۰}-S_{۱۰}=S_{۱۱}+S_{۱۲}+\cdots+S_{۲۰} \\ S_{۱۰}=S_۱+S_۲+\cdots+S_{۱۰} \end{cases}$$
$$\overline{S_{۲۰}-S_{۱۰}-S_{۱۰}=\underbrace{۱۰d+۱۰d+\cdots+۱۰d}_{۱۰۰d}}$$

$$\Rightarrow S_{۲۰}-۲S_{۱۰}=۱۰۰d$$

تذکر مجموع n جملهٔ دوم هر دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d، $n^۲d$ بیشتر از مجموع n جملهٔ اول است.

۲۸- گزینه۴ می‌دانیم $S_۱$ برابر همان $a_۱$ است. در نتیجه:

$$S_{۲۰} = ۳\times ۲۰ - ۲\times ۲۰^۲ = ۶۰ - ۸۰۰ = -۷۴۰$$

$$S_۱ = a_۱ = ۳ - ۲ = ۱$$

$$\Rightarrow S_{۲۰} - ۲۰a_۱ = -۷۴۰ - ۲۰ = -۷۶۰$$

۲۹- گزینه۳ می‌دانیم در هر دنبالهٔ حسابی قدرنسبت برابر است با حاصل تفاضل هر جمله از جملهٔ قبلی. در نتیجه تفاضل جملهٔ دوم از اول برابر d ، تفاضل جملهٔ چهارم از سوم برابر d و در حالت کلی تفاضل هر جملهٔ با ردیف زوج به اندازهٔ d واحد از جملهٔ قبلی آن، که در ردیف فرد است بیشتر است. در نتیجه مجموع جملات ردیف زوج در ۱۰۰ جملهٔ ابتدایی، $۵۰d$ بیشتر از مجموع جملات ردیف فرد است و در نتیجه:

$$-\begin{array}{l} ۶S = a_۲ + a_۴ + a_۶ + \cdots + a_{۱۰۰} \\ S = a_۱ + a_۳ + a_۵ + \cdots + a_{۹۹} \end{array}$$

$$۵S = \underbrace{d + d + d + \cdots + d}_{\text{۵۰ تا}} \Rightarrow ۵S = ۵۰d \Rightarrow S = ۱۰d$$

$$\xrightarrow{d=۴} S = ۴۰$$

۳۰- گزینه۳ در هر دنبالهٔ حسابی مجموع جملهٔ اول و nاُم، دوم و $n-۱$اُم، سوم و $n-۲$اُم و ... با هم برابرند. در واقع با افزایش شمارهٔ جمله از ۱ به ۲ قدرنسبت d واحد افزایش می‌یابد اما با کاهش شمارهٔ جمله از n به $n-۱$، قدرنسبت d واحد کاهش می‌یابد در نتیجه مجموع جملهٔ اول و nاُم با مجموع جملهٔ دوم و $n-۱$اُم برابر است.

$$a_۱ + a_n = a_۲ + a_{n-۱} = a_۳ + a_{n-۲} = a_۴ + a_{n-۳}$$
$$= a_۵ + a_{n-۴}$$

در نتیجه مجموع ۵ جملهٔ اول و ۵ جملهٔ آخر ۵ برابر مجموع جملات اول و آخر است:

$$+\begin{cases} a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ \\ a_n + a_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۳} + a_{n-۴} \end{cases}$$

$$(a_۱ + a_n) + (a_۲ + a_{n-۱}) + (a_۳ + a_{n-۲})$$
$$+ (a_۴ + a_{n-۳}) + (a_۵ + a_{n-۴}) = ۵(a_۱ + a_n)$$

از طرفی با توجه به سؤال، مجموع ۵ جملهٔ اول و آخر برابر $۴۵ = ۱۷ + ۲۸$ است. در نتیجه:

$$۵(a_۱ + a_n) = ۴۵ \Rightarrow a_۱ + a_n = ۹$$

با توجه به آن‌که مجموع n جملهٔ اول برابر ۵۴ است، داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}[\underbrace{a_۱ + a_n}_{۹}] = ۵۴ \Rightarrow \frac{۹n}{۲} = ۵۴ \Rightarrow n = ۱۲$$

تذکر مجموع m جملهٔ اول هر دنبالهٔ حسابی با m جملهٔ آخر آن، برابر است با m برابر مجموع جملات اول و آخر.

تذکر اگر $m + n = p + q$ باشد، حاصل‌جمع جملات mاُم و nاُم با حاصل‌جمع جملات pاُم و qاُم برابر است.

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

به عنوان مثال: $a_۱ + a_{۱۰} = a_۲ + a_۹ = a_۳ + a_۸$

$$۱ + ۱۰ = ۲ + ۹ = ۳ + ۸$$

۳۱- گزینه۱ **راه اول**: در دنبالهٔ a اگر جملهٔ عمومی $a_n = ۳n + a$ باشد، به ازای $n = ۱$ جملهٔ اول به دست می‌آید:

$$n = ۱ \Rightarrow a_۱ = ۳ + a$$

از طرفی اگر S_n مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی باشد، $S_۱$ همان جملهٔ اول $(a_۱)$ است: $S_۱ = a_۱ = b\times ۱^۲ + ۴\times ۱ = b + ۴$

در نتیجه: $۳ + a = b + ۴ \Rightarrow a - b = ۱$

از طرفی $S_۲ = a_۱ + a_۲$ است، در نتیجه $S_۲ - a_۱ = a_۲$ می‌شود و در نتیجه داریم: $S_۲ - S_۱ = a_۲$.

$$\begin{cases} S_۲ = b\times ۲^۲ + ۴\times ۲ = ۴b + ۸ \\ S_۱ = a_۱ = ۳ + a \\ a_۲ = ۳\times ۲ + a = a + ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_۲ - S_۱ = ۴b + ۸ - a - ۳ = a + ۶ \Rightarrow ۴b - ۲a = ۱$$

با حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} a - b = ۱ \\ ۴b - ۲a = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a - ۴b = ۴ \\ ۴b - ۲a = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۵ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

$$\xrightarrow{a=\frac{۵}{۲}} ۴b - ۵ = ۱ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{۵}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۴$$

راه دوم: اگر از مجموع n جملهٔ اول هر دنباله مجموع جملهٔ اول را کم کنیم، حاصل، جملهٔ nاُم خواهد بود:

$$S_n = \underbrace{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{n-۱}}_{S_{n-۱}} + a_n \Rightarrow S_n - S_{n-۱} = a_n$$

اگر در رابطهٔ $S_n = bn^۲ + ۴n$ به جای n، $n-۱$ قرار دهیم، مجموع $n-۱$ جملهٔ اول به دست می‌آید:

$$\begin{cases} S_n = bn^۲ + ۴n \\ S_{n-۱} = b(n-۱)^۲ + ۴(n-۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-۱} = bn^۲ + ۴n - b(n-۱)^۲ - ۴(n-۱) = a_n$$

$$\Rightarrow \cancel{bn^۲} + \cancel{۴n} - \cancel{bn^۲} + ۲bn - b - \cancel{۴n} + ۴ = ۳n + a$$

$$\Rightarrow ۲bn - b + ۴ = ۳n + a$$

باید ضریب جملهٔ درجه‌اول دو سمت (ضریب n) و مقدار عددی دو سمت با هم برابر باشند تا تساوی همواره صحیح باشد:

$$2b\,n + 4 - b = 3\,n + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ 4 - b = a \xrightarrow{b=\frac{3}{2}} a = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

تذکر: اگر a_n و S_n به ترتیب جملهٔ عمومی و مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم: $S_1 = a \;,\; S_n - S_{n-1} = a_n$

۳۲- گزینهٔ۳ اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم $ac = b^2$. پس در این‌جا داریم:

$$a_1, a_5, a_7 \Rightarrow a_1.a_7 = a_5^2$$

از طرفی می‌دانیم $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_7 = a_1 + 6d$ است. پس:

$$a_1(a_1 + 6d) = (a_1 + 4d)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1^2} + 6a_1d = \cancel{a_1^2} + 8a_1d + 16d^2$$

$$16d^2 = -2a_1d \xrightarrow{\div 2d} 8d = -a_1$$

از طرفی می‌دانیم: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

با توجه به تساوی $a_1 = -8d$ داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[-16d + (n-1)d] = 0 \Rightarrow -16d + (n-1)d = 0$$

$$\Rightarrow n - 1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

تذکر: می‌توانیم خیلی سریع از روی تساوی $a_1 = -8d$ نتیجه بگیریم پس $a_1 + 8d = 0$ است؛ یعنی $a_9 = 0$ است. با توجه به آن‌که دنباله حسابی است پس جملات قبل و بعد a_9 دوبه‌دو قرینهٔ یکدیگرند. پس مجموع ۸ جملهٔ اول و ۸ جملهٔ بعد از a_9 همگی صفر خواهد بود. پس مجموع ۱۷ جملهٔ اول دنباله برابر صفر است.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & \cdots\cdots & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & \cdots\cdots & a_{17} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ -8d & & -2d & -d & 0 & d & 2d & & 8d \end{array}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{17} = 0$$

۳۳- گزینهٔ۳

$$\begin{array}{l} a_2 = a_1 + d = q \\ a_5 = a_1 + 4d = q^2 \\ a_{14} = a_1 + 13d = q^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow a_5 - a_2 = 3d = q^2 - q \\ \Rightarrow a_{14} - a_5 = 9d = q^3 - q^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3d}{9d} = \frac{q^2 - q}{q^3 - q^2} \Rightarrow \frac{q(q-1)}{q^2(q-1)} = \frac{1}{3} \xrightarrow[q\neq 1]{q\neq 0} \frac{1}{q} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow q = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = q \\ a_1 + 4d = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 3 \\ a_1 + 4d = 9 \end{cases}$$
$$3d = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

تذکر: اگر a_n و a_m و a_k جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند که تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q بدهند، داریم:

$$q = \frac{k - m}{m - n}$$

در نتیجه:

$$q = \frac{14 - 5}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$$

پس $S_n = n^2$ است. یعنی S_n مربع کامل است. تنها مربع کامل در بین گزینه‌ها ۴۹ است.

۳۴- گزینهٔ۴ مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی به صورت $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ است که در آن q قدرنسبت و a_1 جملهٔ اول است. در نتیجه:

$$\begin{cases} S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 77 \\ S_3 = \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1} = 88 \end{cases}$$

با تقسیم S_6 به S_3 داریم:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}} = \frac{77}{88} \Rightarrow \frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{(q^3 - 1)(q^3 + 1)}{(q^3 - 1)} = \frac{7}{8} \Rightarrow q^3 + 1 = \frac{7}{8} \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

و از طرفی می‌دانیم $a_5 = a_1q^4$ و $a_8 = a_1q^7$ است، با تقسیم a_5 به a_8 داریم:

$$\frac{a_5}{a_8} = \frac{a_1q^4}{a_1q^7} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^3} = -8$$

۳۵- گزینهٔ۲

$$\frac{S_8}{S_4} = 17 \Rightarrow \frac{a_1\frac{(q^8 - 1)}{q - 1}}{a_1\frac{(q^4 - 1)}{q - 1}} = 17 \Rightarrow \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = 17$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(q^4 - 1)}(q^4 + 1)}{\cancel{(q^4 - 1)}} = 17 \Rightarrow q^4 + 1 = 17 \Rightarrow q^4 = 16$$

$$\Rightarrow q = \pm 2$$

اگر قدرنسبت یک دنبالهٔ هندسی منفی باشد، جملات آن یک در میان مثبت و منفی‌اند و نه کاهشی و نه افزایشی‌اند، در نتیجه $q=۲$ است. پس:

$$\frac{a_۷}{a_۲}=\frac{a_۱q^۶}{a_۱q}=q^۵=۲^۵=۳۲$$

تذکر در هر دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q داریم: $\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$

۳۶- گزینه۱ **راه اول:** می‌دانیم در حالت کلی جملهٔ عمومی هر دنبالهٔ هندسی به صورت $a_n=a_۱q^{n-۱}$ است. در نتیجه می‌توانیم با توجه به جملهٔ عمومی دنباله، $a_۱$ و q را به دست آوریم:

$$a_n=۲^{۱-n}=۲^{-(n-۱)}=(۲^{-۱})^{n-۱}=(\frac{۱}{۲})^{n-۱}=۱\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

در نتیجه:

$$a_۱q^{n-۱}=۱\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}\Rightarrow\begin{cases}a_۱=۱\\ q=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

راه دوم: اگر به جای n قرار دهیم ۱، جملهٔ اول به دست می‌آید و از طرفی $q=\frac{a_n}{a_{n-۱}}$، در نتیجه:

$$\begin{cases}a_۱=۲^۰=۱\\ q=\frac{a_n}{a_{n-۱}}=\frac{۲^{۱-n}}{۲^{۱-(n-۱)}}=\frac{۲^{۱-n}}{۲^{۲-n}}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$S_n=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}$$

$$\xrightarrow[a_۱=۱]{q=\frac{۱}{۲}} S_n=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\frac{۱}{۲}}=۲(۱-۲^{-n})$$

$$\Rightarrow S_n=۲-۲^{۱-n}\xrightarrow{a_n=۲^{۱-n}}S_n=۲-a_n$$

۳۷- گزینه۲ **راه اول:** هر جمله با شمارهٔ جملهٔ زوج، q برابر هر جمله با شمارهٔ جملهٔ فرد ماقبل خود است. پس اگر تعداد جملات دنباله زوج باشد. مجموع جملات ردیف زوج، q برابر مجموع جملات ردیف فرد است. پس اگر فرض کنیم مجموع جملات ردیف فرد x باشد، مجموع جملات ردیف زوج xq است:

$$a_۱, \underset{a_۱q}{\underset{\downarrow}{a_۲}}, a_۳, \underset{a_۳q}{\underset{\downarrow}{a_۴}}, \dots, a_{۲n-۱}, \underset{a_{۲n-۱}q}{\underset{\downarrow}{a_{۲n}}}$$

$$q(\underbrace{a_۱+a_۳+\cdots+a_{۲n-۱}}_{x})=\underbrace{a_۲+a_۴+\cdots+a_{۲n}}_{xq}$$

$\Rightarrow$ مجموع کل جملات $=$ $\underset{\text{مجموع جملات ردیف فرد}}{\underset{\downarrow}{x}}+\underset{\text{مجموع جملات ردیف زوج}}{\underset{\downarrow}{xq}}=۴x$

$$\Rightarrow ۳x=xq\Rightarrow q=۳$$

راه دوم: در هر دنبالهٔ هندسی جملات ردیف فرد (جملات با شماره جملهٔ فرد) با یکدیگر یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q^۲$ می‌سازند. هم‌چنین جملات ردیف زوج نیز با یکدیگر یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q^۲$ می‌سازند. زیرا:

$$a_۱ \xrightarrow{\times q^۲} a_۳ \xrightarrow{\times q^۲} a_۵,\dots \qquad \frac{a_۳}{a_۱}=\frac{a_۵}{a_۳}=\cdots=\frac{a_{۲k+۱}}{a_{۲k-۱}}=q^۲$$

$$a_۲ \xrightarrow{\times q^۲} a_۴ \xrightarrow{\times q^۲} a_۶,\dots \qquad \frac{a_۴}{a_۲}=\frac{a_۶}{a_۴}=\cdots=\frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}}=q^۲$$

در نتیجه جملات ردیف فرد دنباله‌ای با قدرنسبت $q^۲$ هستند که جملهٔ اول آن‌ها $a_۱$ است و اگر تعداد اعضای دنباله $۲n$ باشد، تعداد جملات این دنباله n است. در نتیجه:

$$\begin{cases}S_{۲n}=\dfrac{a_۱(q^{۲n}-۱)}{q-۱}\\[2ex] \text{مجموع جملات ردیف فرد}:S'=\dfrac{a_۱((\overbrace{q^۲}^{\text{قدرنسبت}})^n-۱)}{\underbrace{q^۲}_{\text{قدرنسبت}}-۱}=\dfrac{a_۱(q^{۲n}-۱)}{q^۲-۱}\end{cases}$$

با توجه به آن‌که $S_{۲n}=۴S'$ است، داریم:

$$\frac{\cancel{a_۱}\cancel{(q^{۲n}-۱)}}{q-۱}=\frac{۴\cancel{a_۱}\cancel{(q^{۲n}-۱)}}{q^۲-۱}\Rightarrow\frac{۱}{q-۱}=\frac{۴}{q^۲-۱}$$

$$\Rightarrow\frac{q^۲-۱}{q-۱}=۴\Rightarrow\frac{(q-۱)(q+۱)}{(q-۱)}=۴$$

$$\xrightarrow{q\neq۱}q+۱=۴\Rightarrow q=۳$$

۳۸- گزینه۱

$$\begin{cases}S_۶=\dfrac{a_۱(q^۶-۱)}{q-۱}=۱۲۶\\[1ex] a_۱+a_۴=۱۸\Rightarrow a_۱+a_۱q^۳=۱۸\Rightarrow a_۱(q^۳+۱)=۱۸\ (*)\end{cases}$$

از تقسیم $S_۶$ به $a_۱+a_۴$ داریم:

$$\frac{S_۶}{a_۱+a_۴}=\frac{۱۲۶}{۱۸}\Rightarrow\frac{a_۱\dfrac{(q^۶-۱)}{q-۱}}{a_۱(q^۳+۱)}=۷$$

$$\Rightarrow\frac{\dfrac{(q^۳-۱)\cancel{(q^۳+۱)}}{q-۱}}{\cancel{(q^۳+۱)}}=۷\Rightarrow\frac{q^۳-۱}{q-۱}=۷$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(q-۱)}(q^{۲}+q+۱)}{\cancel{(q-۱)}}=۷ \Rightarrow q^{۲}+q-۶=۰$$

$$\Rightarrow (q+۳)(q-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} q=-۳ & \text{غ ق ق} \\ q=۲ \end{cases}$$

با توجه به آن‌که دنبالهٔ داده‌شده باید دارای قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ باشد. $q=-۳$ غیرقابل‌قبول است.

حال با توجه به داشتن $q=۲$ با جای‌گذاری در رابطهٔ (*) می‌توانیم $a_{۱}$ را به دست آوریم:

$$a_{۱}(q^{۳}+۱)=۱۸ \xrightarrow{q=۲} ۹a_{۱}=۱۸ \Rightarrow a_{۱}=۲$$

در نتیجه:

$$S_{۵}=\frac{a_{۱}(q^{۵}-۱)}{q-۱}=\frac{۲(۲^{۵}-۱)}{۲-۱}=۶۲$$

تذکر

$$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$$

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$$

۳۹- گزینه۱ می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند داریم $ac=b^{۲}$. پس:

$$۴, a, \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴\times\frac{۱}{۴}=a^{۲} \Rightarrow a^{۲}=۱ \Rightarrow a=\pm۱$$

قدرنسبت منفی است پس $a=-۱$ است. در نتیجه:

$$a=-۱ \Rightarrow q=-\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{S_{۵}}{a_{۵}}=\frac{a_{۱}\left(\frac{۱-q^{۵}}{۱-q}\right)}{a_{۱}q^{۴}}=\frac{\frac{۱-(-\frac{۱}{۴})^{۵}}{۱-(-\frac{۱}{۴})}}{(-\frac{۱}{۴})^{۴}}=\frac{\frac{\frac{۴^{۵}+۱}{۴^{۵}}}{\frac{۵}{۴}}}{\frac{۱}{۴^{۴}}}$$

$$=\frac{۴^{۵}+۱}{۵}=\frac{۱۰۲۵}{۵}=۲۰۵$$

۴۰- گزینه۲

$$\begin{cases} S_{۹}=\dfrac{a_{۱}(q^{۹}-۱)}{q-۱}=۵ \\ a_{۱۲}-a_{۳}=۹۰ \Rightarrow a_{۱}q^{۱۱}-a_{۱}q^{۲}=۹۰ \\ \qquad \Rightarrow a_{۱}q^{۲}(q^{۹}-۱)=۹۰ \end{cases}$$

با تقسیم $S_{۹}$ بر $a_{۱۲}-a_{۳}$، داریم:

$$\frac{S_{۹}}{a_{۱۲}-a_{۳}}=\frac{\frac{\cancel{a_{۱}}\cancel{(q^{۹}-۱)}}{q-۱}}{\cancel{a_{۱}}q^{۲}\cancel{(q^{۹}-۱)}}=\frac{۵}{۹۰}$$

$$\frac{۱}{q^{۲}(q-۱)}=\frac{۱}{۱۸} \Rightarrow q^{۲}(q-۱)=۱۸$$

با توجه به آن‌که q عددی است طبیعی با حدس و آزمایش $q=۳$ خواهد بود:

$$q=۳ \Rightarrow ۳^{۲}\times(۳-۱)=۱۸$$

۴۱- گزینه۴ در هر دنبالهٔ هندسی می‌دانیم $\frac{a_{n+۱}}{a_{n}}=q$ پس $a_{n+۱}=a_{n}q$ پس:

$$a_{n+۱}+a_{n}=a_{n}q+a_{n}=a_{n}(q+۱)$$

در نتیجه:

$$\frac{a_{۲}}{a_{۲}+a_{۳}}=\frac{a_{۲}}{a_{۲}(۱+q)}=\frac{۱}{q+۱}$$

$$\frac{a_{۳}}{a_{۳}+a_{۴}}=\frac{a_{۳}}{a_{۳}(۱+q)}=\frac{۱}{q+۱}$$

$$\frac{a_{n}}{a_{n}+a_{n+۱}}=\frac{a_{n}}{a_{n}(۱+q)}=\frac{۱}{q+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{۱}}{a_{۱}+a_{۲}}+\frac{a_{۲}}{a_{۲}+a_{۳}}+\cdots+\frac{a_{۱۰}}{a_{۱۰}+a_{۱۱}}=\frac{۱۰}{q+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{q+۱}=۲ \Rightarrow q=۴$$

۴۲- گزینه۲

$$\begin{cases} S_{۳n}=\dfrac{a_{۱}(q^{۳n}-۱)}{q-۱}=۸۱۹ \\ S_{n}=\dfrac{a_{۱}(q^{n}-۱)}{q-۱}=۳ \end{cases}$$

با تقسیم $S_{۳n}$ بر S_{n} داریم:

$$\frac{S_{۳n}}{S_{n}}=\frac{\frac{a_{۱}(q^{۳n}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_{۱}(q^{n}-۱)}{q-۱}}=\frac{q^{۳n}-۱}{q^{n}-۱}=\frac{۸۱۹}{۳}=۲۷۳$$

با توجه به اتحاد $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$ داریم:

$$\frac{q^{۳n}-۱}{q^{n}-۱}=۲۷۳ \Rightarrow \frac{\cancel{(q^{n}-۱)}(q^{۲n}+q^{n}+۱)}{\cancel{(q^{n}-۱)}}=۲۷۳$$

با توجه به آن‌که $q=۲$ است، داریم:

$$q^{۲n}+q^{n}+۱=۲۷۳ \xrightarrow{q=۲} ۲^{۲n}+۲^{n}=۲۷۲$$

در رابطهٔ بالا اگر $n=۴$، تساوی برقرار است:

$$n=۴ \Rightarrow ۲^{۸}+۲^{۴}=۲۵۶+۱۶=۲۷۲$$

تذکر برای حل معادلهٔ $۲^{۲n}+۲^{n}=۲۷۲$ می‌توان فرض کرد $۲^{n}=t$ است و به کمک حل معادلهٔ درجه۲ نیز معادله را حل کرد که کمی برای تست طولانی است!

$$۲^{n}=t \Rightarrow t^{۲}+t=۲۷۲ \Rightarrow t^{۲}+t-۲۷۲=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱۶)(t+۱۷)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۱۶ \Rightarrow ۲^n=۱۶ \Rightarrow n=۴ \\ t=-۱۷ \Rightarrow ۲^n=-۱۷ \Rightarrow \text{امکان‌ناپذیر است} \end{cases}$$

۴۳- گزینه۳ به دنباله‌های زیر دقت کنید:

$$a: ۱, x, x^۲, \dots, x^{۱۱}$$

$$b: ۱, x^۳, x^۶, x^۹$$

دنبالهٔ a یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت x است. در نتیجه مجموع ۱۲ جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_{۱۲}=\frac{b_۱(q^{۱۲}-۱)}{q-۱}=\frac{۱\times(x^{۱۲}-۱)}{x^۳-۱}=\frac{x^{۱۲}-۱}{x-۱}$$

دنبالهٔ b یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $x^۳$ است که مجموع ۴ جملهٔ اول آن برابر است با:

$$S'_۴=\frac{b_۱(q^۴-۱)}{q-۱}=\frac{۱\times((x^۳)^۴-۱)}{x^۳-۱}=\frac{x^{۱۲}-۱}{x^۳-۱}$$

در نتیجه:

$$\frac{۱+x+x^۲+\dots+x^{۱۱}}{۱+x^۳+x^۶+x^۹}=\frac{\frac{x^{۱۲}-۱}{x-۱}}{\frac{x^{۱۲}-۱}{x^۳-۱}}=\frac{x^۳-۱}{x-۱}$$

$$=\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۲ \Rightarrow x^۲+x-۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

که در بین گزینه‌ها $x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ وجود دارد.

۴۴- گزینه۴ دو دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$a: ۱, -x, x^۲, -x^۳, \dots, -x^۹$$

$\times(-x)$ $\times(-x)$ $\times(-x)$

$$b: ۱, x, x^۲, x^۳, \dots, x^۹$$

$\times x$ $\times x$ $\times x$

دنبالهٔ a یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-x$ است، در نتیجه مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن برابر است با:

$$S_{۱۰}=۱-x+x^۲-x^۳+\dots-x^۹=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}$$

$$=\frac{۱((-x)^{۱۰}-۱)}{-x-۱}=\frac{۱-x^{۱۰}}{x+۱}$$

دنبالهٔ b نیز یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت x است. در نتیجه مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن برابر است با:

$$S'_{۱۰}=۱+x+x^۲+\dots+x^۹=\frac{b_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{۱\times(x^{۱۰}-۱)}{x-۱}$$

$$=\frac{x^{۱۰}-۱}{x-۱}$$

در نتیجه:

$$(۱-x+x^۲-x^۳+\dots-x^۹)(۱+x+x^۲+\dots+x^۹)$$

$$=\frac{۱-x^{۱۰}}{x+۱}\times\frac{x^{۱۰}-۱}{x-۱}=-\frac{(x^{۱۰}-۱)^۲}{x^۲-۱}$$

در نتیجه به ازای $x=\sqrt{۲}$ داریم:

$$-\frac{(x^{۱۰}-۱)^۲}{x^۲-۱}=-\frac{(\sqrt{۲}^{۱۰}-۱)^۲}{\sqrt{۲}^۲-۱}=-۳۱^۲=-۹۶۱$$

۴۵- گزینه۴ **راه اول:** بدون در نظر گرفتن دسته‌ها، دنبالهٔ زیر یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲ است:

$$b_n: ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, \dots$$

برای پیداکردن اولین جمله و آخرین جملهٔ دستهٔ نهم باید ببینیم جملهٔ اول دستهٔ نهم چندمین جمله از دنبالهٔ فوق است. با توجه به آن‌که دستهٔ اول ۱ عضو، دستهٔ دوم ۲ عضو، دستهٔ سوم ۳، ... و دستهٔ n اُم n عضو دارد، پس شمارهٔ جملهٔ اولین جملهٔ دستهٔ نهم از حاصل‌جمع $۱+۲+۳+\dots+۸+۱$ به دست می‌آید:

$$۱+۲+۳+\dots+۸=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶ \Rightarrow ۱+۲+\dots+۸+۱=۳۷$$

پس ۳۷ اُمین جملهٔ دنبالهٔ b_n اولین جملهٔ دستهٔ نهم است. چون دنباله یک دنبالهٔ حسابی است، پس درون هر دسته نیز یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲ است. تعداد جملات هر دسته نیز با شمارهٔ آن دسته برابر است. پس:

اولین جملهٔ دستهٔ نهم $a_۱=b_{۳۷}=۱+(۳۷-۱)\times۲$

$$=۱+۳۶\times۲=۷۳$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_n=\frac{۹}{۲}[۲a_۱+۸d]$$

$$S_n=۹(a_۱+۴d)=۹(۷۳+۸)=۹\times۸۱=۷۲۹$$

راه دوم: حاصل‌جمع هر دسته برابر تعداد اعضای دسته به توان ۳ است. (این مطلب را با کمی تلاش می‌توان اثبات کرد.) در نتیجه حاصل‌جمع اعضای دستهٔ نهم برابر $۹^۳$ است. $۹^۳=۷۲۹$

۴۶- گزینه۴ جملات هر دسته یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ هستند. تعداد جملات هر دسته برای شمارهٔ آن دسته است. مثلاً دستهٔ اول ۱ عضو، دستهٔ دوم ۲ عضو و ... و دستهٔ nام، n عضو دارد.

اگر اولین جملهٔ هر دسته را بتوانیم به دست آوریم می‌توانیم به کمک رابطهٔ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی مجموع کل اعضای آن دسته را حساب کنیم.

شمارهٔ جملهٔ اول هر دسته در دنبالهٔ اصلی از جمع تعداد اعضای دسته‌های قبل به علاوهٔ یک به دست می‌آید. پس الگوی زیر را داریم:

شمارهٔ جملهٔ اول دستهٔ ۲ $= ۱+۱=۲$

شمارهٔ جملهٔ اول دستهٔ ۳ $= ۱+۲+۱=۴$

شمارهٔ جملهٔ اول دستهٔ ۴ $= ۱+۲+۳+۱=۷$

$\vdots$

شمارهٔ جملهٔ اول دستهٔ ۸ $= ۱+۲+۳+\cdots+۷+۱=\frac{۷(۱+۷)}{۲}+۱=۲۹$

تعداد اعضای دستهٔ اول

تعداد اعضای دستهٔ دوم

تعداد اعضای دستهٔ سوم

تعداد اعضای دستهٔ هفتم

اولین عضو دستهٔ هشتم

شمارهٔ اولین عضو دستهٔ هشتم دنبالهٔ بیست و نهمین عضو از دنبالهٔ حسابی اصلی است. پس اولین عضو از دستهٔ هشتم برابر $۲^{۲۹}$ است.

چون تعداد اعضای این دسته برابر ۸ است، داریم:

$$S_n=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=\frac{۲^{۲۹}(۲^۸-۱)}{(۲-۱)}=۲^{۲۹}\times ۲۵۵$$

در نتیجه:
$$\frac{۲^{۲۹}\times ۲۵۵}{۲^{۳۰}}=\frac{۲۵۵}{۲}=۱۲۷/۵$$

۴۷- گزینهٔ ۴ متحرک در مرحلهٔ اول ۵ متر به سمت راست، در مرحلهٔ دوم $\frac{۵}{۲}$ متر به سمت چپ، در مرحلهٔ سوم $\frac{۵}{۴}$ متر به سمت راست حرکت می‌کند و به حرکت خود ادامه می‌دهد. در واقع مقدار حرکت‌های او در جهت مثبت یا منفی محور xها یک دنبالهٔ هندسی می‌سازد که برایند این حرکت‌ها مکان نهایی متحرک را مشخص می‌کند:

مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحلهٔ ۱ $=۵$

مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحلهٔ ۲ $=۵-\frac{۵}{۲}$

مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحلهٔ ۳ $=\underbrace{۵-\frac{۵}{۲}}_{\text{مختصات مرحله ۲}}+\frac{۵}{۴}$

مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحلهٔ ۴ $=\underbrace{۵-\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۴}}_{\text{مختصات مرحله ۳}}-\frac{۵}{۸}$

$\vdots$

مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحلهٔ ۱۰ $=۵-\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۴}-\frac{۵}{۸}+\cdots-\frac{۵}{۲^۹}$

پس مجموع بالا مختصات نهایی را مشخص می‌کند:

$$S_n=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=\frac{۵((-\frac{۱}{۲})^{۱۰}-۱)}{-\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۱۷۰۵}{۵۱۲}$$

۴۸- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، مؤلفهٔ x نقاط $A_۱$ و $A_۲$ با هم برابرند. همچنین مؤلفهٔ x نقاط $A_۳$ و $A_۴$ نیز با هم برابرند و می‌توان در حالت کلی گفت مؤلفهٔ x نقاط $A_{۲k-۱}$ و $A_{۲k}$ با هم برابرند. مختصات مؤلفهٔ x نقاط $A_۱$ و $A_۲$ برابر ۳ است. با توجه به آن‌که از نقطهٔ $A_۱$ به $A_۲$ ۱ واحد حرکت کرده‌ایم، پس مؤلفهٔ x نقاط $A_۳$ و $A_۴$ به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ واحد کم‌تر از مؤلفهٔ x نقاط $A_۱$ و $A_۲$ است. به همین ترتیب مؤلفهٔ x نقاط $A_۵$ و $A_۶$ به اندازهٔ $\frac{۱}{۲۷}$ واحد بیشتر از مؤلفهٔ x نقاط $A_۳$ و $A_۴$ است. در نتیجه داریم:

$$x_{A_۱}=x_{A_۲}=۳$$

$$x_{A_۳}=x_{A_۴}=۳-\frac{۱}{۳}$$

$$x_{A_۵}=x_{A_۶}=۳-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^۳}$$

$$x_{A_۷}=x_{A_۸}=۳-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^۳}-\frac{۱}{۳^۵}$$

پس مختصات طول نقطهٔ $A_۸$ از حاصل‌جمع جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $-\frac{۱}{۹}$ و جملهٔ اول ۳ ایجاد می‌شود:

$$x_{A_۸}=\underbrace{S_۴}_{\text{نصف تعداد نقاط}}=\frac{۳(۱-(-\frac{۱}{۹})^۴)}{۱-(-\frac{۱}{۹})}=\frac{۳(\frac{۹^۴-۱}{۹^۴})}{\frac{۱۰}{۹}}=\frac{\frac{۶۵۶۰}{۲۱۸۷}}{\frac{۱۰}{۹}}=\frac{۶۵۶}{۲۴۳}$$

۴۹- گزینهٔ ۱ **راه اول**: جملات دنباله با جملهٔ عمومی a_n را می‌نویسیم:

$$۱,\frac{۲}{۳}+۳,\frac{۲}{۳}(\frac{۲}{۳}+۳)+۳,\ldots$$

$$۱,\frac{۱۱}{۳},\frac{۴۹}{۹},\ldots$$

اگر از جملات دنبالهٔ فوق k واحد کم کنیم، دنبالهٔ جدید به صورت مقابل است:

$$۱-k,\frac{۱۱}{۳}-k,\frac{۴۹}{۹}-k,\ldots$$

اگر جملات دنبالهٔ فوق تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، داریم:

$$a,b,c\Rightarrow ac=b^۲\Rightarrow(۱-k)(\frac{۴۹}{۹}-k)=(\frac{۱۱}{۳}-k)^۲$$

$$\Rightarrow \cancel{k^۲}-\frac{۵۸}{۹}k+\frac{۴۹}{۹}=\cancel{k^۲}-\frac{۲۲}{۳}k+\frac{۱۲۱}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۲k}{۳}-\frac{۵۸}{۹}k=\frac{۱۲۱}{۹}-\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow\frac{۸}{۹}k=\frac{۷۲}{۹}\Rightarrow k=۹$$

راه دوم: اگر دنباله با جملهٔ عمومی c_n یک دنبالهٔ هندسی باشد، داریم $\frac{c_{n+1}}{c_n}=q$ و در نتیجه $c_{n+1}=a_nq$. دنباله با جملهٔ عمومی $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+3$ بسیار شبیه به یک دنبالهٔ هندسی است که اگر از هر جملهٔ آن عدد ثابتی کم کنیم تبدیل به یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{2}{3}$ خواهد شد. اگر دنبالهٔ جدید را b بنامیم و قدرنسبت آن را $\frac{2}{3}$ فرض کنیم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} b_n=a_n-k \\ b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n=\frac{2}{3}(a_n-k) \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $b_{n+1}=a_{n+1}-k$ (زیرا از هر جمله k واحد کم کرده‌ایم) پس داریم:

$$\begin{cases} b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n=\frac{2}{3}(a_n-k) \\ b_{n+1}=a_{n+1}-k=\frac{2}{3}a_n+3-k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(a_n-k)=\frac{2}{3}a_n+3-k$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{2}{3}a_n}-\frac{2}{3}k=\cancel{\frac{2}{3}a_n}+3-k \Rightarrow \frac{1}{3}k=3 \Rightarrow k=9$$

۵۰- گزینه۴ **راه اول:** جملات این دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1=1$$
$$a_2=2\times 1+1=3$$
$$a_3=2\times 3+1=7 \Rightarrow 1,3,7,15,\ldots$$
$$a_4=2\times 7+1=15$$

با اضافه‌کردن ۱ واحد به هر جملهٔ دنبالهٔ فوق این دنباله به یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ تبدیل می‌شود:

$$b_n:2,4,8,16,\ldots \quad \text{و} \quad q=2$$

پس مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله با جملهٔ عمومی a_n، ۱۰ واحد کم‌تر از مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی است. پس ابتدا مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی را به کمک رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول حساب می‌کنیم:

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$$

پس مجموع ۱۰ جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ a به صورت زیر است:

$$S'_{10}=S_{10}-10=2^{11}-2-10=2^{11}-12$$

راه دوم: هر جمله از دنبالهٔ a را به صورت زیر می‌نویسیم:

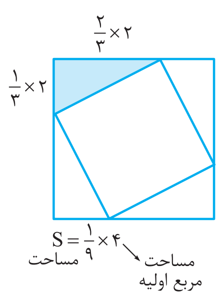
$$a_1=1$$
$$a_2=2+1$$
$$a_3=2(2+1)+1=2^2+2+1$$
$$a_4=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$$
$$\vdots$$
$$a_{10}=2(2^8+2^7+\cdots+2)+1=2^9+2^8+\cdots+2+1$$

چون حاصل هر جمله از این دنباله از حاصل‌جمع جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ و جملهٔ اول ۱ به دست می‌آید می‌توانیم هر جمله را به صورت زیر بنویسیم:

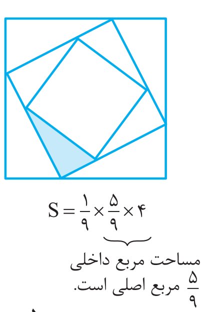
$$a_{10}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1$$
$$a_9=\frac{2^9-1}{2-1}=2^9-1$$
$$a_8=\frac{2^8-1}{2-1}=2^8-1$$
$$\vdots$$
$$a_1=\frac{2^1-1}{2-1}=2^1-1$$
$$\Rightarrow a_{10}+a_9+\cdots+1$$
$$=(2^{10}+2^9+\cdots+2^1)-10=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10$$
$$=2^{11}-2-10=2^{11}-12$$

تذکر اگر به هر جمله از دنباله با رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1}=ta_n+k$ و $a_1=m$، عدد ثابتی اضافه کنیم، تبدیل به دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت t خواهد شد.

۵۱- گزینه۲ طول هر ضلع مثلث رنگی در هر مرحله به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ طول ضلع مربع متناظر است. در نتیجه مساحت هر مثلث $\frac{1}{9}$ کل مربعی است که اضلاع قائم مثلث بر روی اضلاع آن مربع قرار دارد. هم‌چنین چون در هر مرحله داخل هر مربع ۴ مثلث و ۱ مربع قرار دارد مساحت کل مثلث‌ها $\frac{4}{9}$ مساحت کل و در نتیجه مساحت مربع محاط‌شده درون هر مربع در هر مرحله $\frac{5}{9}$ کل مربع قبلی است. پس هر بار $\frac{1}{9}$ مربع داخلی رنگ می‌شود و در هر مرحله مساحت مربع داخلی $\frac{5}{9}$ مربع قبلی است پس دنبالهٔ مساحت‌های رنگی به صورت زیر است:



،



، ...

$$\frac{1}{9}\times 4,\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}\times 4,(\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}\times 4)\times\frac{5}{9},\ldots$$

$$\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^1, \frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^2, \dots$$

در نتیجه دنبالهٔ حاصل تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $\frac{4}{9}$ قدرنسبت $\frac{5}{9}$ می‌دهد. در نتیجه:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{4}{9}\times\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{10}}{1-\frac{5}{9}} = 1-\left(\frac{5}{9}\right)^{10}$$

۵۲- گزینهٔ ۱ مجموع بقیهٔ جملات یعنی مجموع تمام جملات به‌جز جملهٔ a_1 و a_2. پس دنبالهٔ جدید یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_3 است:

$$a_1 + a_2 = 3\times\frac{a_3}{1-q} \Rightarrow a_1 + a_1 q = \frac{3a_1q^2}{1-q}$$

$$\xrightarrow{\div a_1} 1+q = \frac{3q^2}{1-q} \Rightarrow 1-q^2 = 3q^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{2}$$

۵۳- گزینهٔ ۲ سعی می‌کنیم جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر را به دست آوریم:

$$7, 77, 777, \dots, \underbrace{777\dots7}_{\text{۱۰ بار}}$$

$$7 = 7\times1 = 7\times\frac{10-1}{9}$$

$$77 = 7\times11 = 7\times\frac{10^2-1}{9}$$

$$777 = 7\times111 = 7\times\frac{10^3-1}{9}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{777\dots7}_{\text{۱۰ بار}} = 7\times\underbrace{111\dots1}_{\text{۱۰ بار}} = 7\times\frac{10^{10}-1}{9}$$

در نتیجه:

$$\frac{81}{10}(7+77+777+\dots+\underbrace{777\dots7}_{\text{۱۰ بار}})$$

$$= \frac{81}{10}\left[7\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\dots+\frac{10^{10}-1}{9}\right]\right.$$

$$= \frac{81}{10}\left[\frac{7}{9}(10+10^2+10^3+\dots+10^{10}-10)\right]$$

$$= \frac{7\times9}{10}[10^2+10^3+\dots+10^{10}]$$

حاصل‌جمع $10^2+10^3+\dots+10^{10}$ مجموع ۹ جملهٔ ابتدایی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۱۰ و جملهٔ ابتدایی 10^2 است. در نتیجه حاصل عبارت بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{9\times7}{10}[10^2+10^3+\dots+10^{10}] = \frac{9\times7}{10}\left[10^2\left(\frac{10^9-1}{10-1}\right)\right]$$

$$= 70(10^9-1)$$

۵۴- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $S = 1+2x+3x^2+\dots+10x^9$، داریم:

$$\begin{cases} xS = x+2x^2+3x^3+\dots+9x^9+10x^{10} \\ S = 1+2x+3x^2+\dots+10x^9 \end{cases}$$

$$S - xS = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^9-10x^{10}$$

$$S(1-x) = 1+x+x^2+\dots+x^9-10x^{10}$$

از طرفی دنبالهٔ $1, x, x^2, \dots, x^9$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت x است پس:

$$S_9 = 1+x+x^2+\dots+x^9 = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{x^{10}-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow S(1-x) = \frac{x^{10}-1}{x-1} - 10x^{10}$$

$$\xrightarrow{x=2} -S = 2^{10}-1-10\times2^{10}$$

$$\Rightarrow S = 10\times2^{10}-2^{10}+1 = 9\times2^{10}+1$$

۵۵- گزینهٔ ۱ اگر $a_n = 2\times3^{1-n}$ باشد، جملهٔ اول برابر $a_1 = 2$ است. این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ است.

پس مجموع تمام جملات آن از رابطهٔ $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ به دست می‌آید:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{2}{9},\ \dots$$

$$S_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

۵۶- گزینهٔ ۱ جملات $a_3, a_6, a_9, \dots$ خود تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q^3 = \frac{1}{8}$ می‌دهند:

$$b_n : a_3, a_6, a_9, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}, \dots$$

مجموع جملات دنبالهٔ a_n و b_n را طبق رابطهٔ حد مجموع به‌دست‌ می‌آوریم:

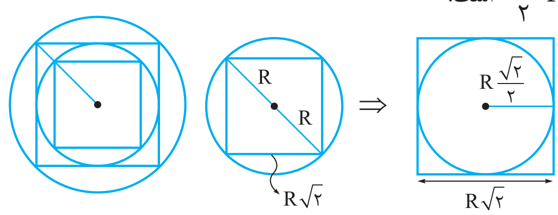
$$S_{a_n} = \frac{a_1}{1-q_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$S_{b_n} = \frac{b_1}{1-q'} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

در نتیجه مجموع جملات باقی‌مانده برابر است با:

$$S_{a_n} - S_{b_n} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

۵۷- گزینه۲ شعاع هر دایرهٔ بزرگ‌تر برابر نصف طول قطر مربع محاط‌شده درون آن است. طول ضلع هر مربع نیز برابر قطر هر دایرهٔ محاط‌شده درون آن است. پس اگر شعاع دایرهٔ اول R باشد، طول قطر مربع درون آن $2R$ و در نتیجه طول ضلع مربع $2R\times\frac{\sqrt{2}}{2}=R\sqrt{2}$ است. پس طول شعاع دایرهٔ محاط در مربع $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ است.



در نتیجه دنبالهٔ مساحت‌ها به صورت زیر است:

$$\pi R^2,\ \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2,\ \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2,\ldots$$

$$\pi R^2,\ \frac{\pi R^2}{2},\ \frac{\pi R^2}{4},\ldots$$

پس دنبالهٔ مساحت یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول πR^2 و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است. در نتیجه حد مجموع مساحت‌ها برابر است با:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}}=2\pi R^2$$

۵۸- گزینه۳

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{6^n}=\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

دنبالهٔ a_n از حاصل‌جمع دو دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت‌های بین صفر و ۱ تشکیل شده است. اگر $c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ باشند، می‌توان حد مجموع b_n و c_n را محاسبه و با هم جمع کنیم تا مجموع جملات دنبالهٔ a_n را به دست آوریم.

$$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\begin{cases}b_1=\frac{1}{2}\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow S_b=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{1}{3}\\ q=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow S_c=\frac{c_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$S=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۵۹- گزینه۲

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n}=\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

a_n از حاصل جمع دو دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۵ به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ تشکیل شده است:

$$b_n=\left(\frac{2}{4}\right)^n\Rightarrow b_n:\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ldots$$

$$c_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\Rightarrow c_n:\frac{3}{4},\frac{9}{16},\frac{27}{64},\ldots$$

قدرنسبت جملات ردیف فرد b_n برابر $\frac{1}{4}$ و c_n برابر $\frac{9}{16}$ است (توان دوم قدرنسبت دنبالهٔ اصلی). پس:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{27}{64}+\cdots=\frac{c_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}}=\frac{12}{7}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{12}{7}=\frac{14+36}{21}=\frac{50}{21}$$

۶۰- گزینه۱

$$a_n:\frac{1}{2},\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^3},\frac{4}{2^4},\ldots$$

$$\begin{cases}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots\\ 2S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots\end{cases}$$

$$2S-S=1+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^2}\right)+\left(\frac{4}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\cdots$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\Rightarrow S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$