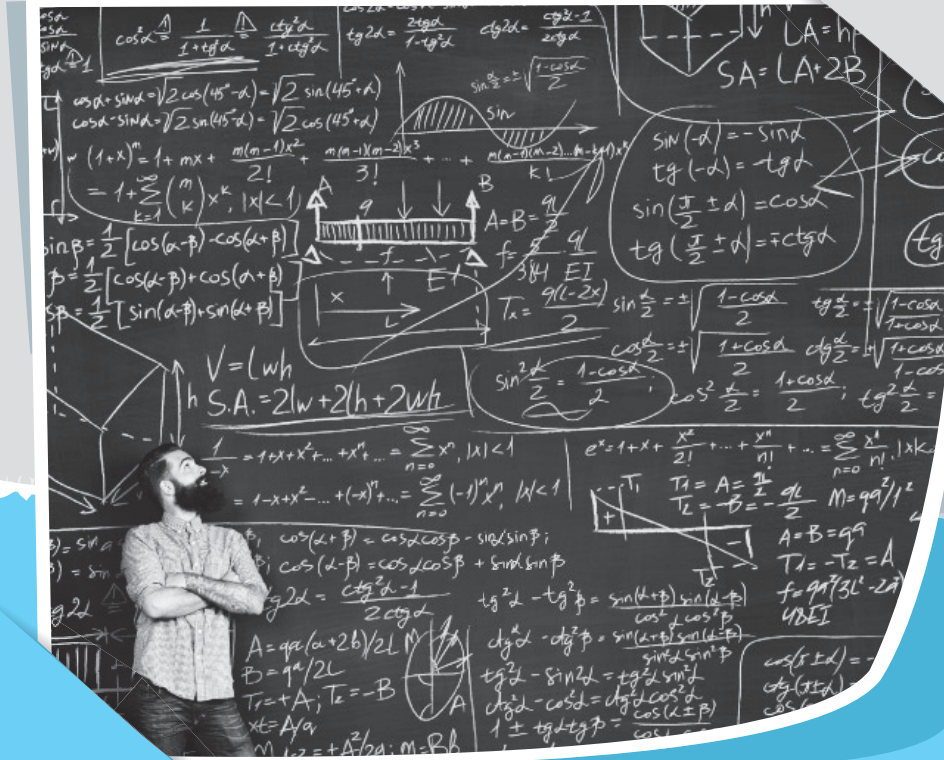


# فصل

## MATHEMATICS



## جبر و معادله

- درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- درس دوم: معادلات درجه دوم
- درس سوم: معادلات گویا و گنگ
- درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

#### دنباله حسابی و مجموع جملات آن

**دنباله حسابی:** دنباله‌ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با  $d$  و جمله اول را با  $a_1$  یا  $a$  نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنباله حسابی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1, \overbrace{a_1+d}^{a_2}, \overbrace{a_1+2d}^{a_3}, \overbrace{a_1+3d}^{a_4}, \dots, \overbrace{a_1+(n-1)d}^{a_n}, \dots$$

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی یا همان جمله  $n$  ام به صورت زیر می‌باشد:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{جمله عمومی}$$

در این رابطه،  $n$  تعداد جملات است.

می‌دانیم اگر هر جمله را از جمله بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، پس به طور کلی داریم:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

**مثال:** در یک دنباله حسابی، جمله پنجم  $-2$  و جمله دوازدهم  $19$  است. جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

**پاسخ:** از رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_5 = -2 \Rightarrow a_1 + 4d = -2 \\ a_{12} = 19 \Rightarrow a_1 + 11d = 19 \end{cases} \Rightarrow d = 3, a_1 = -14$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -14 + 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3n - 17$$

**نکته:** اگر  $a_m$  و  $a_n$  دو جمله از یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

برای مثال، در سؤال قبل که  $a_{12} = 19$  و  $a_5 = -2$  است، داریم:

$$a_{12} - a_5 = (12-5)d \Rightarrow 19 - (-2) = 7d \Rightarrow 21 = 7d \Rightarrow d = 3$$

**واسطه حسابی:** اگر  $a, b, c$  تشکیل دنباله حسابی دهند، آن‌گاه  $b = \frac{a+c}{2}$  است. در این حالت می‌گوییم  $b$  واسطه حسابی  $a$  و  $c$  می‌باشد.

**رابطه اندیس‌ها:** اگر  $a_m, a_n, a_p, a_k$  جملاتی از یک دنباله حسابی باشند که رابطه  $m+n = p+k$  بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$a_m + a_n = a_p + a_k$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که هر جمله، واسطه حسابی بین دو جمله‌ای است که به یک فاصله از طرفین آن قرار دارند.

$$a_{n-k}, \dots, a_n, \dots, a_{n+k}$$

$k$  جمله بعد  $k$  جمله قبل

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$$

برای مثال با توجه به رابطه اندیس‌ها داریم:

$$a_4 + a_{10} = a_5 + a_9 = 2a_7 \quad ; \quad a_5 + a_{14} + a_{17} = 3a_{11}$$

**بررسی یک اشتباه متداول:** توجه داشته باشید که در رابطه اندیس‌ها، علاوه بر این‌که باید جمع اندیس‌ها در دو سمت تساوی برابر باشد، تعداد

جملات نیز باید برابر باشد. پس دقت داشته باشید که:

$$\underbrace{a_4 + a_{10}}_{\text{دو جمله}} \neq \underbrace{a_{14}}_{\text{یک جمله}} \quad ; \quad \underbrace{a_5 + a_{14} + a_{17}}_{\text{سه جمله}} \neq \underbrace{3a_{11}}_{\text{دو جمله}}$$

**تست:** اگر در یک دنباله حسابی  $a_1 = 1$  و  $a_7 = \frac{5}{3}$  باشد، حاصل  $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{23} + a_{25} + a_{27}}$  کدام است؟

$$\frac{21}{17} \quad (4)$$

$$\frac{7}{17} \quad (3)$$

$$\frac{105}{71} \quad (2)$$

$$\frac{35}{71} \quad (1)$$

**پاسخ:** قدرنسبت این دنباله برابر است با  $d = a_7 - a_1 = \frac{2}{3}$ . حال با توجه به رابطه اندیس‌ها داریم:

$$\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{23} + a_{25} + a_{27}} = \frac{3a_{17}}{3a_{25}} = \frac{a_{17}}{a_{25}} = \frac{a_1 + 16d}{a_1 + 24d} = \frac{1 + 16\left(\frac{2}{3}\right)}{1 + 24\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3 + 32}{3 + 68} = \frac{35}{71}$$

پس گزینه (1) صحیح است.

**درج m واسطه حسابی بین دو عدد:** چنانچه بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد m جمله قرار دهیم، به طوری که کلیه اعداد با هم تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطه حسابی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم، با احتساب جملات a و b در کل  $m + 2$  جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است  $a_{m+2}$  را تشکیل داد.

$$a, \underbrace{O, O, \dots, O}_m, b$$

$\downarrow$  جمله  $\downarrow$   
 $a_1$   $a_{m+2}$

**مثال:** بین اعداد ۲ و ۲۷ چهار واسطه حسابی درج کنید.

**پاسخ:** روش اول: چون چهار واسطه درج می‌کنیم، پس دنباله حاصل شش جمله دارد که جمله اول برابر ۲ و جمله ششم برابر ۲۷ است:

$$2, \underbrace{O, O, O, O}_4, 27$$

$\downarrow$  جمله  $\downarrow$   
 $a_1$   $a_6$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 27 = 2 + 5d \Rightarrow d = 5$$

بنابراین واسطه‌ها به صورت ۲۲، ۱۷، ۱۲ و ۷ به دست می‌آیند.

**روش دوم:**

**نکته:** برای درج m واسطه حسابی بین دو عدد a و b به کمک رابطه زیر، قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$a, \underbrace{O, O, \dots, O}_m, b$$

$\downarrow$  جمله  $\downarrow$   
 $a_1$   $a_{m+2}$

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

به کمک نکته بالا داریم:

$$d = \frac{27-2}{5} = 5 \Rightarrow \text{واسطه‌ها: } 7, 12, 17, 22$$

**نکته:** جمله عمومی یک دنباله حسابی، عبارتی درجه اول بر حسب n است:

$$a_n = a + (n-1)d = a + nd - d \Rightarrow a_n = \underbrace{d}_A n + \underbrace{a-d}_B = An + B$$

ملاحظه می‌شود که در رابطه جمله عمومی دنباله حسابی، ضریب n، برابر قدرنسبت می‌باشد.

**مثال:** کدام یک از عبارات زیر می‌تواند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد؟

الف)  $a_n = n^2 + 2n$       ب)  $b_n = \frac{n}{n+1}$       پ)  $c_n = -\frac{n}{4} + 3$

**پاسخ:** عبارات «الف» و «ب» چون چند جمله‌ای درجه اول نیستند، پس نمی‌توانند جمله عمومی دنباله حسابی باشند، اما  $c_n = -\frac{n}{4} + 3$  جمله عمومی یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $-\frac{1}{4}$  می‌باشد. (ضریب n، برابر قدرنسبت است.)

### مجموع جملات دنباله حسابی

در هر دنباله، مجموع n جمله اول را با  $S_n$  نمایش می‌دهند:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  برای محاسبه  $S_n$  کافی است، مجموع جمله اول و جمله n ام را در نصف تعداد جملات، ضرب کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اگر در رابطه بالا از تساوی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

بدیهی است که هرگاه جمله اول و قدرنسبت را داشته‌ایم، از این رابطه و اگر به جای قدرنسبت،  $a_n$  را داشتیم از رابطه قبلی برای محاسبه مجموع جملات استفاده می‌کنیم.

در رابطه  $S_n$ ، مجموع  $n-1$  جمله اول، یعنی  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$  برابر است با  $S_{n-1}$ ، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$$

بنابراین با در اختیار داشتن  $S_n$  می‌توان به کمک رابطه زیر، جمله عمومی دنباله را تعیین کرد:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

**مثال:** در دنباله حسابی ۷، ۴، ۱، ... مجموع بیست جمله اول را به دست آورید.

**پاسخ:** جمله اول دنباله برابر ۷ و قدرنسبت برابر  $-3$  می‌باشد، بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(7) + 19(-3)) = 10(14 - 57) = 10(-43) = -430$$

**مثال:** مجموع اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  را به دست آورید.

**پاسخ:** مقدار  $1+2+\dots+n$  حاصل جمع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی با  $a_1=1$  و  $a_n=n$  است. پس طبق رابطه  $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$  مقدار آن برابر  $\frac{n}{2}(1+n)$  می شود.

**نتیجه:** مجموع اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  برابر است با:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**تست:** در یک دنباله حسابی، مجموع  $n$  جمله اول از رابطه  $S_n = 3n^2 + 5n$  به دست می آید. جمله عمومی دنباله کدام است؟

$$a_n = 6n + 1 \quad (2)$$

$$a_n = 6n + 2 \quad (1)$$

$$a_n = 14n - 2 \quad (4)$$

$$a_n = 14n - 6 \quad (3)$$

**پاسخ:** روش اول: با توجه به این که  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$  است داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 3 + 5 = 8 \Rightarrow a_1 = 8 \\ S_2 = 3(2)^2 + 5(2) = 22 \Rightarrow a_1 + a_2 = 22 \xrightarrow{a_1=8} a_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 14 - 8 = 6$$

جمله عمومی:  $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)(6) = 6n + 2$

روش دوم: از رابطه  $a_n = S_n - S_{n-1}$  استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 5n - (3(n-1)^2 + 5(n-1)) = 3n^2 + 5n - (3n^2 - 6n + 3 + 5n - 5) \\ &= 3n^2 + 5n - (3n^2 - n - 2) = 6n + 2 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** یک دنباله حسابی دارای ۲۹ جمله است. اگر مجموع سه جمله وسط برابر ۱۸ باشد، مجموع ۲۹ جمله برابر کدام است؟

$$182 \quad (4)$$

$$162 \quad (3)$$

$$168 \quad (2)$$

$$174 \quad (1)$$

**پاسخ:** چون دنباله ۲۹ جمله دارد، جمله وسط، جمله پنزدهم است  $(\frac{29+1}{2} = 15)$ ، در نتیجه داریم:

$$a_{14} + a_{15} + a_{16} = 18 \xrightarrow{\text{رابطه اندیس ها}} 3a_{15} = 18 \Rightarrow a_{15} = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{29} = \frac{29}{2}(a_1 + a_{29}) \xrightarrow{\text{رابطه اندیس ها}} \frac{29}{2}(2a_{15}) = 29 \times 6 = 174$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** در یک دنباله حسابی  $S_8 - S_5 = 7$  می باشد. حاصل عبارت  $a_7 + a_6 + \dots + a_1$  کدام است؟

$$\frac{49}{3} \quad (4)$$

$$49 \quad (3)$$

$$\frac{14}{3} \quad (2)$$

$$14 \quad (1)$$

**پاسخ:** می دانیم  $S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$  و  $S_5 = a_1 + a_2 + \dots + a_5$  است، پس نتیجه می گیریم:

$$S_8 - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 = 7 \xrightarrow{\text{رابطه اندیس ها}} 3a_7 = 7 \Rightarrow a_7 = \frac{7}{3}$$

$$a_7 + a_6 + \dots + a_1 = (a_7 + a_1) + (a_6 + a_2) + (a_5 + a_3) + a_4 = 7a_7 = 7\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{49}{3}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**نکته:** در یک دنباله حسابی، مجموع تعداد فردی از جملات هم فاصله، با حاصل ضرب جمله وسط در تعداد جملات برابر است.

برای مثال در تست قبل داریم:

$$\overbrace{a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1}^{\text{جمله 7}} = 7a_4$$

↓  
جمله وسط

**نکته:** مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی  $(S_n)$ ، عبارتی درجه دوم بر حسب  $n$  است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = an + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d \Rightarrow S_n = \underbrace{\frac{d}{2}}_A n^2 + \underbrace{(a - \frac{d}{2})}_B n = An^2 + Bn$$

ملاحظه می شود که در رابطه  $S_n$ ، عدد ثابت وجود ندارد و ضریب  $n^2$  برابر نصف قدرنسبت است.





**مثال:** آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنباله هندسی باشد و هم یک دنباله حسابی؟

**پاسخ:** دنباله ثابت  $a, a, a, \dots, a$ ، یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۱ و یک دنباله حسابی با قدرنسبت صفر محسوب می‌شود. ( $a \neq 0$ )

**تست:** در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب ۹ جمله اول برابر ۸ است ( $a_1 a_2 \dots a_9 = 8$ ). حاصل ضرب  $a_4 a_6 a_8$  برابر کدام است؟

$$2\sqrt[3]{2} \quad (1) \qquad 2\sqrt{2} \quad (2) \qquad 2\sqrt[3]{2} \quad (3) \qquad 4 \quad (4)$$

**پاسخ:** با در نظر گرفتن  $a_n = a_1 q^{n-1}$  داریم:

$$a_1 a_2 \dots a_9 = 8 \Rightarrow a_1 (a_1 q) (a_1 q^2) \dots (a_1 q^8) = a_1^9 q^{(1+2+\dots+8)} = a_1^9 q^{36} = (a_1 q^4)^9 = 8 \Rightarrow a_1 q^4 = \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2}$$

یادآور می‌شویم که  $1+2+\dots+8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36$  حال داریم:

$$a_4 a_6 a_8 = (a_1 q^3)(a_1 q^5)(a_1 q^7) = a_1^3 q^{16} = (a_1 q^4)^4 = (\sqrt[3]{2})^4 = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**رابطه اندیس‌ها:** اگر  $a_m, a_p, a_n, a_k$  جملاتی از یک دنباله هندسی باشند که رابطه  $m+n = p+k$  بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$a_m a_n = a_p a_k$$

(توجه داشته باشید که از رابطه اندیس‌ها در دنباله هندسی کم‌تر استفاده می‌شود.)

برای مثال در یک دنباله هندسی، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$a_4 a_{10} = a_5 a_9 = (a_7)^2; \quad a_6 a_9 a_{15} = a_7 a_{10} a_{13} = (a_{10})^3; \quad a_2 a_4 a_6 a_8 = (a_5)^4$$

**تست:** در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و دوم  $\frac{9}{4}$  و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جمله سوم این دنباله کدام است؟

$$12 \quad (4) \qquad 9 \quad (3) \qquad 8 \quad (2) \qquad 6 \quad (1)$$

**پاسخ:**

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a_1 + a_1 q = \frac{9}{4} \\ a_4 + a_5 = 36 \Rightarrow a_1 q^3 + a_1 q^4 = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{a_1 + a_1 q}{a_1 q^3 + a_1 q^4} = \frac{\frac{9}{4}}{36} \Rightarrow \frac{a_1(1+q)}{a_1 q^3(1+q)} = \frac{9}{2 \times 36 \times 4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

حال با توجه به رابطه  $a_1 + a_1 q = \frac{9}{4}$  مقدار  $a_1$  را تعیین می‌کنیم:

$$a_1 + a_1 q = \frac{9}{4} \xrightarrow{q=2} a_1 + 2a_1 = \frac{9}{4} \Rightarrow 3a_1 = \frac{9}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = a_1 q = \frac{3}{4} (2) = \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** در یک دنباله عددی (حسابی)، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی صعودی اند، قدرنسبت

ریاضی خارج ۸۷

این دنباله کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4) \qquad 2 \quad (3) \qquad \frac{5}{4} \quad (2) \qquad \frac{6}{5} \quad (1)$$

**پاسخ:** روش اول: می‌دانیم اگر  $a, b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه  $b^2 = ac$  است. در این تست، جملات اول  $(a_1)$ ،

پنجم  $(a_1 + 4d)$  و یازدهم  $(a_1 + 10d)$  از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند، پس داریم:

$$(a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 16d^2 + 8a_1 d = a_1^2 + 10a_1 d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1 d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = 8d$$

$$\xrightarrow{a_1 = 8d} 8d, a_1 + 4d, a_1 + 10d \Rightarrow 8d, 12d, 18d$$

می‌دانیم قدرنسبت در دنباله هندسی، از نسبت هر جمله به جمله قبلی به دست می‌آید، پس  $q = \frac{12d}{8d} = \frac{3}{2}$

روش دوم:

**نکته:** اگر در یک دنباله حسابی غیرثابت، جملات  $m$ ام،  $n$ ام و  $p$ ام ( $p > n > m$ )، به ترتیب جملات متوالی از یک دنباله هندسی باشند،

آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه  $q = \frac{p-n}{n-m}$  به دست می‌آید.

با توجه به نکته بالا  $q = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$  می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

### مجموع جملات دنباله هندسی

در یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$ ، مجموع  $n$  جمله اول دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید: ( $q \neq 1$ )

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

از رابطه بالا در مواردی که  $q = 1$  باشد، نمی‌توان استفاده کرد. بدیهی است در حالتی که قدرنسبت برابر ۱ باشد، دنباله ثابت  $a, a, \dots, a$  را داریم که مجموع  $n$  جمله اول آن از رابطه  $S_n = na$  به دست می‌آید.

**مثال:** در یک دنباله هندسی، جمله اول برابر ۳- و قدرنسبت برابر  $\frac{1}{2}$  است. الف) وضعیت جملات دنباله از لحاظ صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟ ب) مجموع ۸ جمله اول آن را به دست آورید.

**پاسخ:** الف) چون جمله اول منفی و قدرنسبت  $0 < q < 1$  است، پس دنباله صعودی می‌باشد. البته با نوشتن چند جمله اول آن، این موضوع به سادگی قابل مشاهده است:

$$-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots$$

ب) برای محاسبه  $S_8$  با استفاده از رابطه  $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$  داریم:

$$S_8 = \frac{-3(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-3(1-\frac{1}{256})}{\frac{1}{2}} = -6(1-\frac{1}{256}) = -6(\frac{255}{256}) = -\frac{1530}{128} = -\frac{765}{64}$$

**نکته:** در مسائل مربوط به دنباله‌های هندسی، از اعداد توان‌دار زیاد استفاده می‌شود، پس بهتر است برای این‌که سریع‌تر پاسخ بدهید آن‌ها را به خاطر بسپارید:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8, & 2^4 &= 16, & 2^5 &= 32, & 2^6 &= 64, & 2^7 &= 128, & 2^8 &= 256, & 2^9 &= 512, & 2^{10} &= 1024 \\ 3^3 &= 27, & 3^4 &= 81, & 3^5 &= 243, & 3^6 &= 729, & 3^7 &= 2187, & 3^8 &= 6561, & 3^9 &= 19683, & 3^{10} &= 59049 \\ 5^3 &= 125, & 5^4 &= 625, & 5^5 &= 3125, & 5^6 &= 15625, & 5^7 &= 78125, & 5^8 &= 390625, & 5^9 &= 1953125, & 5^{10} &= 9765625 \end{aligned}$$

**تست:** در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول،  $\frac{5}{4}$  مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

ریاضی داخل ۸۵

(۱)  $\frac{1}{16}$       (۲)  $\frac{1}{8}$       (۳)  $\frac{5}{32}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

**پاسخ:** با توجه به رابطه  $(q \neq 1)$ ،  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  داریم:

$$S_8 = \frac{5}{4} S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \Rightarrow 1-q^8 = \frac{5}{4}(1-q^4) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4)$$

$$\Rightarrow 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**نکته:** در دنباله هندسی بین مجموع  $n$  جمله اول و مجموع  $2n$  جمله اول رابطه زیر برقرار است: ( $q \neq \pm 1$ )

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$$

به عنوان مثال، در تست قبل برای تعیین قدرنسبت می‌توان گفت:

$$\frac{S_8}{S_4} = q^4 + 1 \Rightarrow q^4 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \dots$$

**تست:** طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا  $\frac{2}{3}$  از مساحت آن را رنگ کرده، سپس  $\frac{2}{3}$  از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله  $\frac{2}{3}$  از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل  $\frac{99}{5}$  درصد سطح مربع رنگ شده است؟

(۱) ۷      (۲) ۶      (۳) ۵      (۴) ۴

$\frac{2}{3}$	
$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{9}$

**پاسخ:** روش اول: مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحله اول  $\frac{2}{3}$  از سطح مربع رنگ می‌شود. در مرحله دوم

$\frac{2}{3}$  از  $\frac{1}{3}$  باقی مانده، یعنی  $\frac{2}{9}$  رنگ می‌شود، در مرحله سوم نیز  $\frac{2}{3}$  از  $\frac{1}{9}$  باقی مانده، یعنی  $\frac{2}{27}$  رنگ می‌شود و به

همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = \frac{2}{3}$  و

قدرنسبت  $q = \frac{1}{3}$  می‌دهند:

$$\dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{99}{100}$  باشد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 1-(\frac{1}{3})^n$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{3})^n \leq 1-\frac{99}{100} \Rightarrow (\frac{1}{3})^n \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 3^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 5$$

یعنی از مرحله پنجم، حداقل  $\frac{99}{100}$  درصد مربع رنگ شده است.

**روش دوم:** به جای این‌که بگوییم مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{99}{100}$  باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ‌نشده کم‌تر یا مساوی  $\frac{1}{100}$  باشد.

در مرحله اول  $\frac{1}{3}$ ، مرحله دوم  $\frac{1}{9}$ ، مرحله سوم  $\frac{1}{27}$  و به همین ترتیب در مرحله  $n$  ام،  $\frac{1}{3^n}$  از مساحت مربع، رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 3^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 5$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

### اثبات چند اتحاد مهم به کمک مجموع جملات دنباله هندسی

اگر  $a$  یک عدد حقیقی و  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آنگاه فرض کنید:

$$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$S$  مجموع جملات دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $q = a$  می‌باشد، پس داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1(1-a^n)}{1-a} = \frac{-(a^n-1)}{-(a-1)} = \frac{a^n-1}{a-1} \Rightarrow a^n-1 = S(a-1) \Rightarrow a^n-1 = (1+a+a^2+\dots+a^{n-1})(a-1)$$

اگر  $n$  عددی فرد باشد، با تبدیل  $a$  به  $-a$  خواهیم داشت:

$$a^n+1 = (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots-a+1)$$

با توجه به مطالب بالا اتحادهای مهم زیر را می‌توان نتیجه گرفت: ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad (n \text{ فرد})$$

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}) \quad (n \text{ زوج})$$

**مثال:** حاصل عبارت  $A = \frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} + x^3 + x$  را به‌ازای  $x = \sqrt[3]{3}$  به‌دست آورید.

**پاسخ:** با تجزیه عبارت  $x^5+1$  داریم:

$$A = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} + x^3 + x = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + x^3 + x$$

$$= x^4 + x^2 + 1 \stackrel{x=\sqrt[3]{3}}{=} 3 + \sqrt{3} + 1 = 4 + \sqrt{3}$$

ریاضی خارج ۹۳

**تست:** حاصل عبارت  $\frac{t^8-t^7+t^6-\dots-t+1}{t^6-t^3+1}$  به‌ازای  $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$  کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

**پاسخ:** روش اول: عبارت  $A = 1-t+t^2+\dots-t^7+t^8$ ، مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1=1$  و قدرنسبت  $q=-t$

می‌باشد. بنابراین:

$$A = S_9 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{1-(1-t^9)}{1-(-t)} = \frac{1+t^9}{1+t}$$

عبارت  $B = 1-t^3+t^6$ ، مجموع ۳ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1=1$  و قدرنسبت  $q=t^3$  می‌باشد. بنابراین:

$$B = S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{1-(1-t^3)^3}{1-(-t^3)} = \frac{1+t^9}{1+t^3} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1+t^9}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t} = 1-t+t^2 = 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \frac{1+2\sqrt{17}+17}{4} = 1 + \frac{-2-2\sqrt{17}+18+2\sqrt{17}}{4} = 1+4=5$$

روش دوم: با توجه به اتحادهای گفته شده داریم:

$$t^9 + 1 = (t+1)(t^8 - t^7 + \dots - t + 1), \quad t^9 + 1 = ((t^3)^3 + 1) = (t^3 + 1)(t^6 - t^3 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{\frac{t^9 + 1}{t+1}}{\frac{t^9 + 1}{t^3 + 1}} = \frac{t^3 + 1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{(t+1)} = t^2 - t + 1 \stackrel{\text{مانند روش اول}}{=} 5$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

## دنباله حسابی و مجموع جملات آن

کتاب درسی

۱- حاصل  $(2n-1) + 3 + 5 + \dots + 1$  کدام است؟

$n^2 - 1$ (۴)	$(2n-1)^2$ (۳)	$(n+1)^2$ (۲)	$n^2$ (۱)
---------------	----------------	---------------	-----------

۲- بر محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز به دست آمده کدام است؟

کتاب درسی

۴۲۰ (۴)	۳۸۰ (۳)	۲۱۰ (۲)	۱۹۰ (۱)
---------	---------	---------	---------

ریاضی خارج ۸۶

۳- اگر  $x, y, 1$  چهار جمله اول یک دنباله حسابی باشند، مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کدام است؟

۶۸ (۴)	۶۷/۵ (۳)	۶۲/۵ (۲)	۵۷ (۱)
--------	----------	----------	--------

۴- در یک دنباله حسابی، جمله نوزدهم برابر ۱۰ می‌باشد. مجموع ۳۷ جمله اول این دنباله کدام است؟

۱۳۵ (۴)	۲۷۰ (۳)	۱۸۵ (۲)	۳۷۰ (۱)
---------	---------	---------	---------

ریاضی خارج ۸۸

۵- در یک دنباله عددی، جمله هفتم، نصف جمله سوم می‌باشد. مجموع چند جمله اول از این دنباله صفر است؟

۲۱ (۴)	۲۰ (۳)	۱۹ (۲)	۱۸ (۱)
--------	--------	--------	--------

کتاب درسی

۶- در یک دنباله حسابی، مجموع  $n$  جمله اول از رابطه  $S_n = 4n^2 + 3n$  به دست می‌آید. جمله عمومی دنباله  $a_n$  کدام است؟

$a_n = 4n + 1$ (۴)	$a_n = 4n + 3$ (۳)	$a_n = 8n - 1$ (۲)	$a_n = 8n + 1$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۷- جمله چهارم و شانزدهم از یک دنباله حسابی به ترتیب ۱ و ۱۷ می‌باشند. مجموع ۱۳ جمله اول آن کدام است؟

۶۵ (۴)	۵۶ (۳)	۳۶ (۲)	۳۳ (۱)
--------	--------	--------	--------

۸- در دنباله حسابی  $\dots, -21, x, -27$  مجموع جملات منفی کدام است؟

-۲۷۰ (۴)	-۷۵ (۳)	-۱۵۰ (۲)	-۱۳۵ (۱)
----------	---------	----------	----------

کتاب درسی

۹- در دنباله حسابی  $\dots, 11, 8, 5$  حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۲۰ (۴)	۱۹ (۳)	۱۸ (۲)	۱۷ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۰- بین اعداد  $-13$  و  $71$ ، بیست واسطه حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت دنباله و مجموع این بیست واسطه حسابی به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟ (۱۳- جمله اول است.)

۵۹۳، ۳ (۴)	۵۸۰، ۳ (۳)	۵۹۳، ۴ (۲)	۵۸۰، ۴ (۱)
------------	------------	------------	------------

۱۱- در یک دنباله عددی مجموع ۲۰ جمله اول، سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول آن است. اگر جمله سوم آن برابر ۶ باشد، جمله دهم آن

ریاضی داخل ۹۰

کدام است؟

۳۸ (۴)	۳۶ (۳)	۳۴ (۲)	۳۲ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۲- در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$ ، اگر یک واحد به قدرنسبت افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده خواهد شد؟

۱۹۰ (۴)	۱۸۰ (۳)	۱۷۰ (۲)	۱۶۰ (۱)
---------	---------	---------	---------

کتاب درسی

۱۳- مجموع اعداد طبیعی فرد و بخش پذیر بر عدد ۳ که کوچک‌تر از ۱۰۱ می‌باشند، کدام است؟

۸۸۴ (۴)	۸۶۷ (۳)	۸۵۲ (۲)	۸۱۶ (۱)
---------	---------	---------	---------

کتاب درسی

۱۴- مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۷ کدام است؟

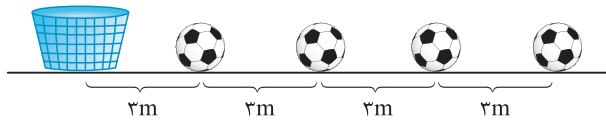
- ۳۵۱۶۸ (۱)      ۶۹۲۳۷ (۲)      ۷۰۴۰۰ (۳)      ۷۰۳۳۶ (۴)

۱۵- مجموع اعداد بین ۲۰ تا ۲۰۰ که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر عدد ۴ برابر ۲ باشد، کدام است؟

- ۴۷۵۲ (۱)      ۴۹۲۸ (۲)      ۴۹۵۰ (۳)      ۴۹۹۵ (۴)

۱۶- مطابق شکل، تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سید ۳ متر است. دونه‌ای باید از کنار سید شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سید بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سید حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونه مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، او چند توپ را در سید انداخته است؟

کتاب درسی



- ۱۵ (۱)  
۱۶ (۲)  
۱۷ (۳)  
۱۸ (۴)

۱۷- مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  می‌باشد. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم

ریاضی خارج ۹۰

و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟

- ۹ (۱)       $\frac{29}{3}$  (۲)       $\frac{49}{3}$  (۳)      ۱۸ (۴)

۱۸- در دنباله‌ای با جمله عمومی  $a_n = \frac{n}{4} - 1$ ، مجموع جملات متوالی با شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام کدام است؟

- ۱۶۸ (۱)      ۱۸۹ (۲)      ۱۹۰ (۳)      ۲۱۰ (۴)

۱۹- در یک دنباله عددی، مجموع ۴ جمله اول برابر ۱۵ و مجموع ۵ جمله بعدی آن برابر ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

ریاضی خارج ۸۵

- ۷/۵ (۱)      ۸ (۲)      ۸/۵ (۳)      ۹ (۴)

۲۰- در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول،  $\frac{1}{3}$  مجموع ۵ جمله بعدی می‌باشد. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

- $\frac{3}{2}$  (۱)       $\frac{5}{2}$  (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲۱- یک دنباله حسابی دارای ۴۱ جمله است. اگر مجموع ۵ جمله وسط برابر ۲۰ باشد، مجموع این ۴۱ جمله کدام است؟

- ۱۲۳ (۱)      ۱۶۴ (۲)      ۲۰۵ (۳)      ۲۴۶ (۴)

۲۲- در یک دنباله حسابی  $S_{10} - S_7 = 6$  است. حاصل عبارت  $a_6 + a_7 + \dots + a_{12}$  کدام است؟

- ۱۴ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۰ (۴)

۲۳- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول کدام است؟

کتاب درسی

- صفر (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

۲۴- در دو دنباله حسابی به صورت‌های  $2, 4, 6, \dots$  و  $5, 8, 11, \dots$  مجموع جملات مشترک کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

- ۸۴۸ (۱)      ۷۵۰ (۲)      ۶۵۸ (۳)      ۶۴۲ (۴)

۲۵- در یک دنباله حسابی،  $a_1 = 3 + \sqrt{2}$  و  $a_7 = 5 + \sqrt{2}$  است. مجموع چهار جمله چهارم این دنباله چه قدر از مجموع چهار جمله دومش بیشتر است؟

- ۸ (۱)      ۶۴ (۲)      ۱۶ (۳)      ۳۲ (۴)

۲۶- در یک دنباله حسابی، مجموع ۸ جمله اول آن با مجموع ۱۴ جمله اول آن برابر است. مجموع ۲۲ جمله اول دنباله کدام است؟

- ۱۴ (۱)      ۱۴ (۲)      ۲۸ (۳)      صفر (۴)

۲۷- در دنباله حسابی  $1, 4, 7, 10, \dots$  مجموع جملات چهارم، هشتم، دوازدهم، ... و شصتم کدام است؟

- ۱۳۸۰ (۱)      ۱۳۹۰ (۲)      ۱۴۰۰ (۳)      ۱۴۱۰ (۴)

۲۸- کدام گزینه به ترتیب جمله عمومی و مجموع  $n$  جمله اول، یک دنباله حسابی را نشان می‌دهد؟

- (۱)  $\{2n^2 + n\}, \{3n - \frac{1}{4}\}$       (۲)  $\{2n^2 + 5\}, \{3n - \frac{1}{4}\}$       (۳)  $\{2n^2 + n\}, \{3n + \frac{1}{n}\}$       (۴)  $\{2n^2 + 5\}, \{3n + \frac{1}{n}\}$



۲۹- اگر  $a_n = (p-2)n^2 + (2p-1)n - 5$  جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، مجموع ده جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۹۵ (۱)      ۱۱۰ (۲)      ۱۱۵ (۳)      ۱۲۵ (۴)

۳۰- مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه  $S_n = (2p-1)n^2 + qn^2 + pn + q + 1$  به دست می آید. مجموع ۵ جمله دوم این دنباله کدام است؟

- ۸۷/۵ (۱)      -۸۲/۵ (۲)      -۷۷/۵ (۳)      -۷۲/۵ (۴)

۳۱- در یک دنباله حسابی ۶۰ جمله ای، مجموع ۱۱ جمله اول برابر با ۷۰ و مجموع ۱۱ جمله آخر برابر ۵۱ می باشد. مجموع تمام جملات کدام است؟

- ۲۴۰ (۱)      ۳۳۰ (۲)      ۴۲۰ (۳)      ۵۱۰ (۴)

۳۲- در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۱۵ و مجموع سه جمله آخر برابر ۶۹ است و مجموع تمام جملات ۱۶۸ می باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

- ۱۳ (۱)      ۱۲ (۲)      ۱۱ (۳)      ۱۰ (۴)

۳۳- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جمله هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. ... (۱,۳,۵), (۷,۹,۱۱), (۱۳,۱۵,۱۷,۱۹), ...

جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

- ۴۱۵ (۱)      ۴۱۹ (۲)      ۴۲۱ (۳)      ۴۲۳ (۴)

۳۴- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله هر دسته، مجذور کامل باشد ... (۱), (۲,۳,۴), (۵,۶,۷,۸,۹), ...

مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

- ۱۶۹۱ (۱)      ۱۷۱۰ (۲)      ۱۷۲۹ (۳)      ۱۷۴۸ (۴)

۳۵- در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله متوالی برابر ۵ و مجموع مربعات آن ۴۵ می باشد. جمله وسط این پنج جمله چند برابر مجذور قدرنسبت می باشد؟

- $-\frac{1}{4}$  (۱)      -۲ (۲)      ۲ (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

۳۶- اعداد  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$  جملات متوالی تصاعد حسابی هستند. اگر  $a_1 = 4$  و  $a_n = 169$  باشند، مجموع

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$$

برابر کدام است؟

- $\frac{n}{12}$  (۱)       $\frac{n-1}{12}$  (۲)       $\frac{n}{15}$  (۳)       $\frac{n-1}{15}$  (۴)

۳۷- در یک دنباله عددی جمله دوم ۳ برابر جمله سوم می باشد و داریم:  $a_n = a_{n+3} + 9$ . مجموع چهار جمله سوم این دنباله کدام است؟

- ۸۴ (۱)      -۸۲ (۲)      -۷۸ (۳)      -۷۶ (۴)

۳۸- بین دو عدد ۵ و ۵۳، تعدادی عدد طوری قرار می دهیم که کل اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند و تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این اعداد ۳۶ باشد. مجموع کل اعداد قرار داده شده کدام است؟

- ۱۸۷ (۱)      ۲۱۰ (۲)      ۱۹۷ (۳)      ۲۰۳ (۴)

۳۹- در دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = 2n - 1$ ، حاصل  $\frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{2}{a_3 a_4} + \dots + \frac{2}{a_{12} a_{13}}$  کدام است؟

- ۰/۹۲ (۱)      ۰/۹۴ (۲)      ۰/۹۶ (۳)      ۰/۹۸ (۴)

۴۰- در یک دنباله حسابی، اگر  $S_m = S_n$  ( $m \neq n$ )، حاصل  $S_{m+n}$  کدام است؟

- $4(m+n)$  (۱)       $n + S_m$  (۲)       $m + S_n$  (۳)      صفر (۴)

### دنباله هندسه و مجموع جملات آن

۴۱- در یک دنباله هندسی، مجموع پنج جمله اول برابر ۱۲ و جمله ششم ۲۴ واحد از جمله اول بیشتر می باشد. قدرنسبت این دنباله

کدام است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)       $\frac{3}{2}$  (۳)       $\frac{5}{2}$  (۴)

۴۲- دنباله هندسی  $\frac{1}{p}, x, 2$  غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$(1) \frac{41}{32} \quad (2) \frac{21}{16} \quad (3) \frac{11}{8} \quad (4) \frac{23}{16}$$

ریاضی خارج ۸۹

۴۳- در یک دنباله هندسی صعودی به صورت  $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

$$(1) \frac{3}{8} \cdot 81 \quad (2) \frac{7}{8} \cdot 81 \quad (3) \frac{3}{8} \cdot 82 \quad (4) \frac{1}{8} \cdot 83$$

۴۴- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

ریاضی داخل ۸۹

$$(1) \frac{81}{16} \quad (2) 8 \quad (3) 9 \quad (4) 16$$

۴۵- در یک دنباله هندسی، مجموع ده جمله اول  $(1 + \sqrt{2})^4$  برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این دنباله، مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

$$(1) 5 \quad (2) 3 \quad (3) 9 \quad (4) 17$$

۴۶- در یک دنباله هندسی نزولی با جمله اول مثبت، بین جملات، رابطه  $\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_4)^3} = 64$  برقرار است. مجموع شش جمله اول، چند برابر جمله اول است؟

$$(1) \frac{63}{64} \quad (2) \frac{63}{32} \quad (3) \frac{63}{128} \quad (4) \frac{63}{16}$$

۴۷- بین دو عدد ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

ریاضی خارج ۸۸

$$(1) 30(2 + \sqrt{2}) \quad (2) 48\sqrt{2} \quad (3) 30(\sqrt{2} + 1) \quad (4) 36(\sqrt{2} + 1)$$

۴۸- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟

ریاضی داخل ۸۸

$$(1) 10/8 \quad (2) 11/2 \quad (3) 12/6 \quad (4) 13/4$$

۴۹- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟

کتاب درسی

$$(1) 6 \quad (2) 7 \quad (3) 8 \quad (4) 9$$

۵۰- طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن و سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله، نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است؟

کتاب درسی

$$(1) 6 \quad (2) 7 \quad (3) 8 \quad (4) 9$$

۵۱- تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

ریاضی داخل ۹۴

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

۵۲- جملات اول، دوم و ششم از یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله حسابی چند برابر جمله اول آن است؟

$$(1) 120 \quad (2) 125 \quad (3) 155 \quad (4) 145$$

۵۳- در یک دنباله حسابی جملات اول، پنجم و هفدهم به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی هستند. مجموع چهار جمله اول دنباله هندسی چند برابر جمله اول آن است؟

$$(1) 15 \quad (2) 40 \quad (3) 85 \quad (4) 56$$

۵۴- در خانه اول شطرنج، یک عدد گندم می‌گذاریم. در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم قرار می‌دهیم. اگر وزن هر دانه گندم یک گرم باشد، وزن کل گندم‌ها چند گرم می‌شود؟ مقدار آن از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است یا کم‌تر؟ (صفحه شطرنج ۶۴ خانه دارد.)

کتاب درسی

$$(1) 1 - 16^{16}, \text{ کم‌تر} \quad (2) 1 - 8^8, \text{ کم‌تر} \quad (3) 1 - 16^6, \text{ بیشتر} \quad (4) 1 - 16^6, \text{ کم‌تر}$$

۵۵- در خانه اول شطرنج یک عدد گندم، در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم می‌گذاریم. اگر وزن هر دانه گندم یک گرم باشد، حداقل در چند خانه، گندم قرار داده شود تا میزان کل گندم بیشتر از ۶۴ کیلوگرم باشد؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۱۶

۵۶- در دنباله هندسی  $\dots, \sqrt[4]{243}, \sqrt{3}$  مجموع چهار جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله دوم است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{9}$  (۳)  $\frac{1}{27}$  (۴)  $\frac{1}{81}$

۵۷- به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2$ ،  $2x$  و  $x^2 + 4$  به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این

تجربی داخل ۹۳

دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{117}{16}$  (۲)  $\frac{125}{16}$  (۳)  $\frac{63}{4}$  (۴)  $\frac{127}{8}$

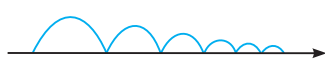
۵۸- توپی را از سطح زمین به هوا پرتاب می‌کنیم به طوری که تا ارتفاع ۶۴ متری بالا می‌رود و بعد از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود. در لحظه‌ای که برای دهمین بار به زمین برخورد می‌کند، این توپ چه مسافتی را بر حسب متر طی کرده است؟

- (۱)  $127/75$  (۲)  $191/75$  (۳)  $255/75$  (۴)  $264/75$

۵۹- یک بانک به حساب سپرده مشتری، سالانه ۲۰٪ سود می‌دهد. اگر شخصی دو میلیون تومان سپرده‌گذاری کند، بعد از ۵ سال مقدار

موجودی حسابش تقریباً چند میلیون تومان می‌شود؟ (فرض کنید  $125 = 250000$ )

- (۱) ۴ (۲)  $4/5$  (۳)  $5/5$  (۴) ۵



۶۰- موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه یک واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه محیط این نیم‌دایره‌های متوالی

دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله کدام است؟ *مشابه ریاضی داخل ۸۴*

- (۱)  $\frac{5\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$  (۲)  $\frac{5\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$  (۳)  $5\pi \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$  (۴)  $5\pi \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$

۶۱- در یک دنباله هندسی که نه صعودی است و نه نزولی، مجموع چهار جمله اول  $\frac{1}{3}$  مجموع جملات پنجم تا دوازدهم می‌باشد. قدرنسبت این

دنباله کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $-\sqrt[3]{2}$  (۴)  $\sqrt[4]{2}$

۶۲- سه عدد، جملات متوالی یک دنباله هندسی‌اند به طوری که مجموع آن‌ها ۲۱ و مجموع معکوس آن‌ها  $\frac{7}{12}$  است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۶۳- در تجزیه  $x^9 + x^3y^3$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $x^2 - y$  (۲)  $x^2 + y^2 + x^2y$  (۳)  $x^3 + y$  (۴)  $x^2 + y^2 - x^2y$

۶۴- در تجزیه عبارت  $(x^3 - x^2 + 3)^9 + (x^3 + x^2 + 1)^9$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $x^3 + 2$  (۲)  $x^2 - 1$  (۳)  $2x^2 - 1$  (۴)  $2x^3 + 2$

۶۵- حاصل عبارت  $x^5 + x^3 + x = \frac{(x^2 + 1)(x - 2)}{x^2 - x - 2} + x^5 + x^3 + x$  به ازای  $x = \sqrt{3}$  کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۳

۶۶- حاصل  $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟

- (۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

ریاضی داخل ۹۳

۶۷- حاصل عبارت  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

### معادلات درجه دوم

**معادله درجه دوم:** معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) یک معادله درجه دوم است. عبارت  $\Delta = b^2 - 4ac$  را دلتای معادله می‌نامیم که با توجه به علامت آن تعداد ریشه‌ها معلوم می‌شود:

۱ اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از رابطه  $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  به دست می‌آیند.

۲ اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای یک ریشه مضاعف (مکرر مرتبه ۲) است که از رابطه  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  به دست می‌آید.

۳ اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

**تعیین ریشه‌های معادله درجه دوم در حالت خاص:** در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر شرایط زیر را داشته باشیم، می‌توان سریع‌تر جواب معادله را تعیین کرد.

۱ اگر  $a + b + c = 0$  (مجموع ضرایب صفر باشد)، آنگاه دو ریشه معادله عبارت است از:  $x_1 = 1$  و  $x_2 = \frac{c}{a}$

۲ اگر  $a + c = b$  باشد، آنگاه دو ریشه معادله عبارت است از:  $x_1 = -1$  و  $x_2 = -\frac{c}{a}$

**طرح یک سؤال:** هر یک از معادلات  $(x-a)^2 = 0$ ،  $(x-a)^3 = 0$  و  $(x-a)^5 = 0$  چند ریشه دارند؟

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow (x - a)(x - a) = 0 \Rightarrow x = a$$

$$(x - a)^3 = 0 \Rightarrow (x - a)(x - a)(x - a) = 0 \Rightarrow x = a$$

در معادله  $x - a = 0$  اصطلاحاً می‌گوییم یک ریشه ساده دارد. در معادله  $(x - a)^2 = 0$  چون دارای دو ریشه برابر است، اصطلاحاً می‌گوییم یک ریشه مضاعف یا مکرر مرتبه ۲ دارد. همچنین  $(x - a)^3 = 0$  در  $x = a$  ریشه مکرر مرتبه ۳ دارد. پس باید بگوییم که هر سه معادله، فقط یک ریشه دارند و اختلافشان در نوع ریشه‌ها است نه در تعداد ریشه‌ها.

به تقسیم‌بندی زیر توجه کنید:

$x - a = 0$ برای $x = a$ ساده	}	ریشه معادله
$(x - a)^2 = 0$ برای $x = a$ مکرر مرتبه ۲ مضاعف؛ مانند $x = a$ برای $(x - a)^2 = 0$		
$(x - a)^4 = 0$ برای $x = a$ مکرر مرتبه ۴؛ مانند $x = a$ برای $(x - a)^4 = 0$		
$(x - a)^3 = 0$ برای $x = a$ مکرر مرتبه ۳؛ مانند $x = a$ برای $(x - a)^3 = 0$		
$(x - a)^5 = 0$ برای $x = a$ مکرر مرتبه ۵؛ مانند $x = a$ برای $(x - a)^5 = 0$		

ملاحظه می‌شود که به ریشه مکرر مرتبه ۲، ریشه مضاعف می‌گوییم. ویژگی‌های خاص این ریشه را در قسمت‌های بعد خواهید آموخت.

**مثال:** هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2, \frac{1}{2}$

ب)  $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$

پ)  $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0 \Rightarrow$  معادله جواب ندارد.

ت)  $5x^2 - 3x - 2 = 0$  مجموع ضرایب صفر است.  $\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$

ث)  $5x^2 + 3x - 2 = 0$   $a+c=b$   $\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$

**تست:** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ ، فاقد ریشه حقیقی است؟ **تجربی خارج ۸۹**

- (۱)  $-3 < m < 5$       (۲)  $-3 < m < 4$       (۳)  $-2 < m < 4$       (۴)  $-1 < m < 5$

**پاسخ:** زمانی معادله درجه دوم ریشه ندارد که  $\Delta < 0$  باشد:

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{4}m + 2\right) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

برای حل نامعادله  $(m-5)(m+3) < 0$  از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

$m$	$-3$	$5$	
$(m-5)(m+3)$	$+$	$-$	$+$

(جهت یادآوری، تعیین علامت عبارات جبری را در آخر این بخش می‌توانید ملاحظه کنید.)

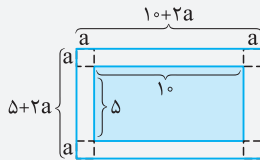
بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** درون یک اتاق مستطیل شکل، فرش وجود دارد که فاصله هر طرف آن از دیواره اتاق، مقدار ثابت  $a$  است. اگر ابعاد فرش

$5$  و  $10$  متر و مساحت قسمت‌های فرش نشده  $34$  مترمربع باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $1$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳)  $2$       (۴)  $\frac{3}{4}$

**پاسخ:** مساحت فرش  $5 \times 10 = 50$  و مساحت قسمت‌های فرش نشده  $34$  مترمربع است. پس مساحت اتاق برابر  $84$  مترمربع می‌باشد. فاصله هر طرف فرش از دیواره اتاق، برابر  $a$  است، پس طول و عرض اتاق، به ترتیب  $10 + 2a$  و  $5 + 2a$  می‌شود. بنابراین:



$$(10 + 2a)(5 + 2a) = 84 \Rightarrow 50 + 20a + 10a + 4a^2 = 84 \Rightarrow 4a^2 + 30a - 34 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ \text{یا} \\ a = -\frac{34}{4} < 0 \text{ (غقق)} \end{cases}$$

مجموع ضرایب صفر است.

بنابراین  $a = 1$  می‌باشد و گزینه (۱) صحیح است.

### روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

می‌دانیم اگر دلتای معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  مثبت باشد، آن‌گاه معادله دو ریشه متمایز دارد. با فرض آن‌که  $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

و  $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  باشد، داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

بنابراین اگر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای دو ریشه  $\alpha$  و  $\beta$  باشد، آن‌گاه جمع و ضرب دو ریشه را به کمک روابط زیر تعیین می‌کنیم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} ; P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

قدرمطلق تفاضل دو ریشه را نیز به صورت زیر می‌توان به دست آورد:

$$|\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

**محاسبه عبارات متقارن برحسب ریشه‌ها:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، معمولاً جهت تعیین مقدار عباراتی که نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  متقارن هستند (یعنی با تعویض جای  $\alpha$  و  $\beta$  عبارت تغییر نمی‌کند)، ابتدا آن‌ها را برحسب  $S = \alpha + \beta$  و  $P = \alpha\beta$  نوشته و سپس مقدار آن را حساب می‌کنیم. (عباراتی برحسب  $\alpha$  و  $\beta$  متقارن هستند که اگر جای  $\alpha$  و  $\beta$  را در آن‌ها عوض کنیم، عبارت تغییری نکند، برای مثال  $\alpha^2 + \beta^2$  متقارن است، اما  $\alpha^3 + \beta^2$  متقارن نیست.)

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P ; \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

**نکته:** بین ریشه‌های معادله درجه دوم و  $S$  و  $P$  دو رابطه کاربردی زیر برقرار است:

این دو رابطه به کمک اتحاد‌های مربع دو جمله‌ای و مکعب دو جمله‌ای به دست آمده‌اند:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3SP$$

مثال: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، بدون حل معادله، مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$

ب)  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

پاسخ: الف) باید سعی کنیم عبارت را برحسب  $S$  و  $P$  بنویسیم:

$$S = \frac{-b}{a} = 3, P = \frac{c}{a} = 1$$

$$\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3} = P(S^3 - 3P) + \frac{S^3 - 3SP}{P^3} = 1(9 - 3) + \frac{27 - 9}{1} = 6 + 18 = 24$$

ب) عبارت را مساوی  $A$  گرفته و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow A = \pm\sqrt{5} \xrightarrow{A>0} A = \sqrt{5}$$

تست: در معادله  $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد،  $m$  کدام است؟

۶۳ (۴)

۵۹ (۳)

۶۳ (۲)

۵۹ (۱)

پاسخ: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{15}{3} = 5, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{3}$$

از طرفی با توجه به فرض سوال  $\alpha = \beta + 2$  است، بنابراین:

$$\alpha + \beta = 5 \Rightarrow (\beta + 2) + \beta = 5 \Rightarrow 2\beta = 3 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \xrightarrow{\alpha = \beta + 2} \alpha = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{7}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{21}{4} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

نکته: شرط وجود دو ریشه قرینه در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$b = 0, \Delta > 0$$

توضیح: برای وجود دو ریشه باید  $\Delta > 0$  باشد و زمانی دو ریشه قرینه (مانند  $\alpha$  و  $-\alpha$ ) داریم که جمع دو ریشه یعنی  $S = \frac{-b}{a}$  برابر صفر شود، پس  $b = 0$  خواهد بود.

نکته: شرط وجود دو ریشه معکوس در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$a = c, \Delta > 0$$

توضیح: برای وجود دو ریشه باید  $\Delta > 0$  باشد و زمانی دو ریشه معکوس (مانند  $\alpha$  و  $\frac{1}{\alpha}$ ) داریم که ضرب دو ریشه یعنی  $P = \frac{c}{a}$  برابر یک باشد، پس  $a = c$  خواهد بود.

تست: به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله درجه دوم  $mx^2 + 5x + m^2 - 6 = 0$ ، دو ریشه حقیقی و معکوس هم دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: اگر دو ریشه معکوس هم باشند، ضرب دو ریشه برابر یک می‌شود، بنابراین:

$$P = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 6}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 2) = 0 \Rightarrow m = 3, m = -2$$

اما باید شرط  $\Delta > 0$  نیز برقرار باشد، بنابراین:

$$m = 3 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ قابل قبول نیست.}; m = -2 \Rightarrow -2x^2 + 5x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{ قابل قبول است.}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست: به ازای کدام مقدار  $k$  بین دو ریشه معادله  $x^2 - kx + 8 = 0$  رابطه  $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = 3$  برقرار است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: می‌دانیم  $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = k$  و  $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 8$ . حال به کمک اتحاد  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$  دو سمت

رابطه  $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = 3$  را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})^3 = 3^3 \Rightarrow \alpha + \beta + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) = 27 \Rightarrow S + 3\sqrt[3]{P}(3) = 27$$

$$\Rightarrow k + 3\sqrt[3]{8}(3) = 27 \Rightarrow k + 18 = 27 \Rightarrow k = 9$$

پس گزینه (۳) صحیح است.



**محاسبه عبارات نامتقارن بر حسب ریشه‌ها:** می‌دانیم همواره ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند، مثلاً اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آن‌گاه  $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$  و  $\beta^2 + b\beta + c = 0$  است. در محاسبه عباراتی که بر حسب  $\alpha$  و  $\beta$  متقارن نیستند، معمولاً از این ویژگی صدق کردن ریشه‌ها استفاده می‌شود.

**مثال:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\alpha^2(\beta - 1)$  را به دست آورید.

**پاسخ:** ریشه معادله است و در معادله صدق می‌کند، بنابراین  $\beta^2 - 4\beta + 1 = 0$  و در نتیجه  $\beta^2 = 4\beta - 1$ ، پس داریم:

$$\alpha^2(\beta - 1) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1$$

**تست:** در معادله درجه دوم  $x^2 + 2x - 4 = 0$ ، حاصل  $x_1^3 - 2x_2^3 + 4x_2$  کدام است؟ ( $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله‌اند).

-۱۶ (۱)
۲ (۲)
۱۶ (۳)
-۳۲ (۴)

**پاسخ:** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه  $-2 = x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$  و  $-4 = x_1x_2 = P = \frac{c}{a}$ . حال  $x_2$  را در معادله صدق می‌دهیم:

$$x_2^2 + 2x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2^2 = -2x_2 + 4 \quad (*)$$

$$x_1^3 - 2x_2^3 + 4x_2 = x_1^3 + x_2(-2x_2 + 4) \stackrel{(*)}{=} x_1^3 + x_2(x_2^2) = x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP = (-2)^3 - 3(-2)(-4) = -32$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**بحث در علامت ریشه‌های معادله درجه دوم:** در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دو ریشه دارد. برای تعیین علامت ریشه‌ها از مطلب زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} P > 0 : \text{ معادله دو ریشه هم‌علامت دارد.} \\ S > 0 : \text{ دو ریشه مثبت دارد.} \\ S < 0 : \text{ دو ریشه منفی دارد.} \end{array} \right\} \Delta > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} P < 0 : \text{ معادله دو ریشه غیر هم‌علامت دارد.} \\ S > 0 : \text{ از لحاظ قدرمطلق ریشه مثبت، بزرگ‌تر است.} \\ S < 0 : \text{ از لحاظ قدرمطلق ریشه منفی بزرگ‌تر است.} \end{array} \right\} \Delta > 0$$

**تذکره:** فراموش نشود که  $S = -\frac{b}{a}$  و  $P = \frac{c}{a}$  زمانی مفهوم جمع و ضرب دارند که  $\Delta$  مثبت باشد، پس باید قبل از تعیین  $S$  و  $P$  از مثبت بودن  $\Delta$  مطمئن بود. فقط در حالتی که  $P = \frac{c}{a} < 0$  باشد، دیگر نیازی به تعیین علامت  $\Delta$  نیست؛ زیرا در این حالت، چون  $a$  و  $c$  غیر هم‌علامت می‌شوند  $ac < 0$  و در نتیجه  $\Delta = b^2 - 4ac$  همواره مثبت خواهد بود:

$$\Delta = b^2 + (-4ac) > 0$$

(یا صفر)

در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله یک ریشه مضاعف دارد که مقدار این ریشه برابر  $x = \frac{-b}{2a}$  می‌باشد. بدیهی است که اگر  $\frac{-b}{2a} > 0$ ، معادله یک ریشه مضاعف مثبت و اگر  $\frac{-b}{2a} < 0$ ، معادله یک ریشه مضاعف منفی دارد.

**تست:** به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، معادله  $ax^2 + (a+3)x - 1 = 0$  دو ریشه منفی دارد؟

$a < -9$  (۱)
 $a < -3$  (۲)
 $a > -1$  (۳)
 $-3 < a < 0$  (۴)

**پاسخ:** زمانی معادله درجه دوم، دو ریشه منفی دارد که  $\Delta > 0$ ،  $S < 0$  و  $P > 0$  باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0 \Rightarrow (a+1)(a+9) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0, \quad P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده، محدوده جواب به صورت  $a < -9$  می‌باشد، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تشکیل معادله درجه دوم از روی ریشه‌ها:** تا این‌جا روش به دست آوردن ریشه‌های یک معادله درجه دوم را یاد گرفتیم. اکنون می‌خواهیم با در اختیار داشتن ریشه‌ها، معادله درجه دوم را بسازیم.

برای نوشتن معادله درجه دومی که دو ریشه  $\alpha$  و  $\beta$  دارد، کافی است مقادیر جمع و ضرب ریشه‌ها ( $S$  و  $P$ ) را تعیین کرده و در معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  قرار دهیم. زیرا:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

**نکته:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، آن‌گاه معادله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

کتاب درسی

**مثال:** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  باشند.

**پاسخ:** اگر فرض کنیم  $\alpha = \frac{1}{3}$  و  $\beta = \frac{2}{3}$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \\ P = \alpha\beta = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$$

توجه داشته باشید که برای حل این مثال، معادله مورد نظر را به صورت  $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) = 0$  نیز می‌توان نوشت که با ضرب دو پرانتز و ساده کردن آن به جواب  $x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$  می‌رسیم.

**تشکیل معادله درجه دوم جدید:** هرگاه معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  را داشته باشیم و بخواهیم معادله درجه دوم جدیدی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادله اول رابطه‌ای خاص داشته باشند، ابتدا  $S'$  و  $P'$  (جمع و ضرب ریشه‌ها) را برای معادله جدید به دست آورده و سپس با قرار دادن در رابطه  $x^2 - S'x + P' = 0$  معادله مطلوب را به دست می‌آوریم.

**تست:** معادله درجه دومی که ریشه‌هایش به ترتیب ۹ برابر ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 3 = 0$  باشد، کدام است؟

$$x^2 + 9x - 27 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 9x - 243 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 18x - 27 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + 18x - 243 = 0 \quad (3)$$

**پاسخ:** اگر ریشه‌های معادله  $x^2 + x - 3 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر بگیریم، آن‌گاه  $S = \alpha + \beta = -1$  و  $P = \alpha\beta = -3$  است. از طرفی ریشه‌های معادله مطلوب  $9\alpha$  و  $9\beta$  است. بنابراین:

$$S' = 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha + \beta) = 9S = -9 \quad \text{و} \quad P' = 9\alpha \times 9\beta = 81\alpha\beta = 81P = 81(-3) = -243$$

بنابراین معادله به صورت  $x^2 + 9x - 243 = 0$  درمی‌آید و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** ریشه‌های معادله  $x^2 - x = a$  از دو برابر ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x = 1$  یک واحد کم‌تر است.  $a$  کدام است؟

$$-2 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

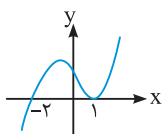
**پاسخ:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  باشند، آن‌گاه  $S = \alpha + \beta = \frac{3}{2}$  و  $P = \alpha\beta = -\frac{1}{2}$  است. در معادله  $x^2 - x - a = 0$  نیز جمع و ضرب دو ریشه برابر  $S' = 1$  و  $P' = -a$  می‌باشد. از طرفی طبق فرض سؤال، ریشه‌های این معادله  $2\alpha - 1$  و  $2\beta - 1$  است. حال برای محاسبه  $a$  کافی است، مقدار  $P'$  را تعیین کنیم:

$$P' = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = -a \Rightarrow 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = -a \Rightarrow 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = -a$$

$$\Rightarrow 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = -a \Rightarrow -4 = -a \Rightarrow a = 4$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**صفرهای تابع:** برای تابع  $f(x)$ ، جواب‌های معادله  $f(x) = 0$  را در صورت وجود، صفرهای تابع  $f$  می‌نامیم. صفرهای تابع  $f$  مقادیری از  $x$  هستند که به ازای آن‌ها  $f(x)$  صفر می‌شود. اگر نمودار  $y = f(x)$  را رسم کنیم، صفرهای  $f$ ، طول نقاط تلاقی یا تماس نمودار با محور طول‌ها است.



برای مثال اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه صفرهای تابع برابر  $-2$  و  $1$  می‌باشند، زیرا  $x = 1$  طول

نقطه تلاقی و  $x = -2$  طول نقطه تماس نمودار  $y = f(x)$  با محور طول‌ها است.  $-2$  و  $1$  ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$

محسوب می‌شوند.

**نکته:** اگر  $x = a$  یکی از صفرهای تابع  $f(x)$  باشد، در این حالت  $x = a$  ریشه معادله  $f(x) = 0$  است و در نتیجه  $(x - a)$  را یک **فاکتور** یا

**عامل**  $f(x)$  می‌نامند. برای به دست آوردن فاکتورهای دیگر آن باید  $f(x)$  را بر  $(x - a)$  تقسیم کنیم. چنان‌چه همه صفرهای تابع را بخواهیم تعیین کنیم، باید تمامی فاکتورها را مساوی صفر قرار دهیم.

**مثال:** اگر  $x = 2$  یکی از صفرهای تابع  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$  باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید. **کتاب درسی**

**پاسخ:** در تابع  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$  چون  $f(2) = 0$  است، پس  $(x - 2)$  یک فاکتور یا عامل  $f(x)$  محسوب می‌شود. برای تعیین عامل‌های دیگر باید  $f(x)$  را بر  $(x - 2)$  تقسیم کرد:

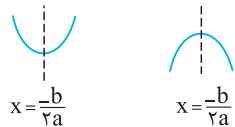
$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \phantom{+ 4} \\ x^2 - 4x + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 4} \\ -2x + 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array} \quad \Rightarrow f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 2) = (x - 2)(x + 2)(x - 1) \xrightarrow{f(x)=0} x = 2, x = -2, x = 1$$

در نتیجه ریشه‌های معادله یا همان صفرهای تابع، عبارت است از: ۱، -۲، و ۲.

### نمودار تابع درجه دوم

در تابع درجه دوم به شکل کلی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) به نکات زیر توجه کنید:

۱ نمودار این تابع یک سهمی قائم است و علامت  $a$  جهت سهمی را تعیین می‌کند. اگر  $a > 0$  باشد، (انحنای) سهمی رو به بالا است و در نتیجه نمودار، مینیمم دارد و اگر  $a < 0$  باشد، (انحنای) سهمی رو به پایین است و در نتیجه نمودار، ماکزیمم دارد.



۲ خط عمودی به معادله  $x = \frac{-b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.

۳ نقطه رأس سهمی (S) محل برخورد نمودار با محور تقارن است، بنابراین طول آن  $x = \frac{-b}{2a}$  می‌باشد. برای به دست آوردن عرض نقطه رأس، این طول را به جای  $x$  در تابع قرار می‌دهیم و با محاسبه  $f(\frac{-b}{2a})$  به مقدار  $\frac{-\Delta}{4a}$  خواهیم رسید. پس می‌توان گفت مختصات نقطه رأس سهمی  $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$  می‌باشد. کاملاً مشخص است که نقطه رأس سهمی، همان نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع است.



**مثال:** مقدار ماکزیمم تابع  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$  را به دست آورید.

**پاسخ:** منظور از ماکزیمم تابع، عرض نقطه ماکزیمم یا همان عرض نقطه رأس سهمی می‌باشد. برای پیدا کردن عرض نقطه رأس یا باید  $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$  را حفظ بود یا باید مقدار تابع را به ازای  $x_S = \frac{-b}{2a}$  به دست آورد:

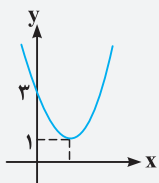
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$$

روش اول:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(16 + 4)}{-4} = \frac{20}{4} = 5$$

روش دوم:

**تست:** اگر نمودار  $f(x) = 2x^2 + bx + c$  به صورت روبه‌رو باشد، مقدار  $b$  کدام است؟



۴ (۱)

-۴ (۲)

۲ (۳)

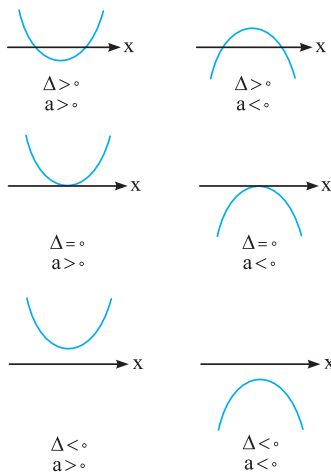
-۲ (۴)

**پاسخ:** نمودار تابع از نقطه  $(0, 3)$  می‌گذرد، پس  $f(0) = 3$  و در نتیجه  $c = 3$  می‌شود. هم‌چنین عرض نقطه رأس سهمی برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$f(x) = 2x^2 + bx + 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{4} \Rightarrow f\left(\frac{-b}{4}\right) = 2\left(\frac{b^2}{16}\right) - \frac{b^2}{4} + 3 = 1 \Rightarrow \frac{-b^2}{8} = -2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

چون طول رأس سهمی مثبت است، پس  $\frac{-b}{4} > 0$  و از آن‌جا  $b$  منفی می‌شود. بنابراین  $b = -4$  بوده و گزینه (۲) صحیح است.

**وضعیت نمودار تابع درجه دوم نسبت به محور طول‌ها:** در نمودار تابع درجه دوم بستگی به علامت  $\Delta$  و  $a$  حالت‌های مختلف زیر را داریم:



۱ اگر  $\Delta > 0$  باشد، نمودار تابع محور  $x$  را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

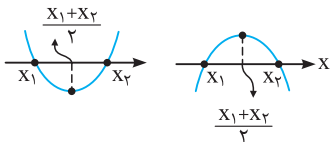
۲ اگر  $\Delta = 0$  باشد، نمودار تابع بر محور  $x$  مماس است.

۳ اگر  $\Delta < 0$  باشد، نمودار تابع و محور  $x$  نقطه مشترک ندارند.

**نکات:**

از نمودارهای بالا نکات زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

- ۱ شرط همواره مثبت بودن تابع درجه دوم  $a > 0$  و  $\Delta < 0$  است.
- ۲ شرط همواره منفی بودن تابع درجه دوم  $a < 0$  و  $\Delta < 0$  است.
- ۳ شرط همواره نامنفی بودن تابع درجه دوم  $a > 0$  و  $\Delta \leq 0$  است.
- ۴ شرط همواره نامثبت بودن تابع درجه دوم  $a < 0$  و  $\Delta \leq 0$  است.



**نکته:** در تابع درجه دوم اگر  $\Delta > 0$  باشد، طول رأس سهمی، وسط صفرهای تابع است. یعنی اگر نمودار تابع درجه دوم محور  $x$  را در نقاط  $x_1$  و  $x_2$  قطع کند، طول نقطه رأس سهمی  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  می‌باشد.

**مثال:** اگر صفرهای تابع  $f(x) = -x^2 + bx + c$  برابر ۲ و -۳ باشد، طول رأس سهمی را تعیین کنید.

**پاسخ:** با توجه به نکته قبل، طول رأس سهمی ( $S$ ) وسط صفرهای تابع است، پس  $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$

**ریاضی خارج ۸۵**

**تست:** به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = (m + 2)x^2 - 2mx + 1$  همواره بالای محور  $x$  است؟

- (۱)  $m > -2$
- (۲)  $-2 < m < -1$
- (۳)  $-2 < m < 2$
- (۴)  $-1 < m < 2$

**پاسخ:** چون نمودار تابع، بالای محور  $x$  است، پس این تابع، همواره مثبت است، در نتیجه باید  $\Delta$  منفی و ضریب  $x^2$  مثبت باشد:

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب } > 0 \Rightarrow m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m + 2) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 8 < 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 2) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (2) \end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲) مجموعه جواب به صورت  $-1 < m < 2$  می‌شود. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**روش رسم نمودار تابع درجه دوم:** برای رسم نمودار یک تابع درجه دوم به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  معمولاً مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

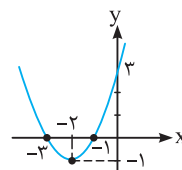
- ۱ جهت سهمی را معلوم می‌کنیم، اگر  $a > 0$  سهمی رو به بالا و اگر  $a < 0$  سهمی رو به پایین است.
- ۲  $\Delta$  را محاسبه می‌کنیم و در صورتی که مثبت یا صفر باشد، صفرهای تابع را مشخص می‌کنیم.
- ۳ مختصات نقطه رأس سهمی  $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$  را تعیین می‌کنیم.
- ۴ نقطه تلاقی نمودار با محور عرض‌ها را به دست می‌آوریم.

**مثال:** نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  را رسم کنید و مختصات رأس سهمی و معادله محور تقارن آن را مشخص نمایید. **کتاب درسی**

**پاسخ:** چون  $a = 1 > 0$ ، پس سهمی رو به بالا است و چون  $f(0) = 3$ ، پس نمودار، محور  $y$  را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. حال صفرهای تابع و مختصات رأس سهمی را معلوم می‌کنیم:

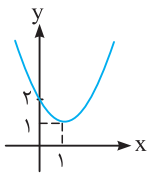
مختصات رأس سهمی  $S(-2, -1)$   $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow f(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$

صفرهای تابع  $f(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -3$



ملاحظه می‌شود که خط به معادله  $x = -2$  محور تقارن این سهمی است.

**مثال:** نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  را رسم کنید.



**پاسخ:** چون  $a = 1 > 0$  پس سهمی رو به بالا است و چون  $f(0) = 2$ ، پس نمودار، محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. هم‌چنین علامت  $\Delta$  منفی است، بنابراین نمودار محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند. حال مختصات رأس سهمی را معلوم می‌کنیم.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow S(1, 1)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

**نکته:** اگر  $x_1$  و  $x_2$  صفرهای تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشند، آن‌گاه:

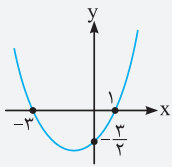
دلیل این نکته را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \stackrel{\text{اتحاد جمله مشترک}}{=} a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x^2 - Sx + P)$$

$$= a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c$$

**نکته:** در تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  اگر  $x_1$  ریشه مضاعف معادله  $f(x) = 0$  باشد، آن‌گاه:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$



کتاب درسی

**تست:** اگر نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به صورت زیر باشد، مقدار  $4a^2 + b$  کدام است؟

۱۷ (۲)

۱۸ (۱)

۲ (۴)

۵ (۳)

**پاسخ:** روش اول: چون  $x_1 = -3$  و  $x_2 = 1$  صفرهای تابع هستند، با استفاده از نکات قبل داریم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + 3)(x - 1)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه  $(0, \frac{-3}{4})$  می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$\frac{-3}{4} = a(0 + 3)(0 - 1) \Rightarrow \frac{-3}{4} = -3a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به صورت  $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)(x - 1)$  می‌باشد که پس از ساده‌سازی به صورت  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{3}{4}$  نوشته می‌شود. بنابراین  $4a^2 + b = 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 = 2$ .

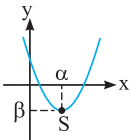
روش دوم: از آن‌جا که  $f(0) = -\frac{3}{4}$ ، می‌توان گفت  $c = -\frac{3}{4}$  و در نتیجه  $f(x) = ax^2 + bx - \frac{3}{4}$  است، حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow (-3)(1) = \frac{-\frac{3}{4}}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow (-3) + 1 = \frac{-b}{\frac{1}{4}} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 4a^2 + b = 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 = 2$$

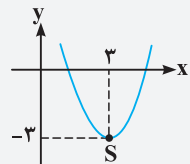
بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**نکته:** اگر مختصات رأس سهمی  $S(\alpha, \beta)$  باشد، معادله تابع را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$



**تست:** اگر نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  که در آن  $|a| = 1$  است به صورت زیر باشد، مقدار  $bc$  کدام است؟



کتاب درسی

۴۲ (۲)

-۴۲ (۱)

۳۶ (۴)

-۳۶ (۳)

**پاسخ:** روش اول: جهت سهمی رو به بالا بوده و در نتیجه  $a$  مثبت می‌شود، بنابراین از  $|a| = 1$  نتیجه می‌گیریم  $a = 1$  است. مختصات رأس سهمی  $S(3, -3)$  است، با توجه به نکته قبل داریم:

$$ax^2 + bx + c = a(x - 3)^2 - 3 \stackrel{a=1}{=} (x - 3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 6$$

بنابراین  $b = -6$  و  $c = 6$  و از آن‌جا  $bc = -36$  می‌شود.

روش دوم: مانند روش قبل  $a = 1$  می‌شود. از طرفی طول رأس سهمی برابر ۳ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a \stackrel{a=1}{\Rightarrow} b = -6$$

$$f(3) = -3 \Rightarrow 9a + 3b + c = -3 \stackrel{a=1}{\Rightarrow} 9 - 18 + c = -3 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow bc = -36$$

نمودار از نقطه  $(3, -3)$  می‌گذرد:

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

**بحث در علامت پارامترهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  از روی نمودار تابع:** در قسمت‌های قبل از روی ضابطه تابع درجه دوم، نمودار و ویژگی‌های آن را

مشخص کردیم، در این جا از روی نمودار تابع می‌خواهیم علامت پارامترهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را معلوم کنیم. برای این منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

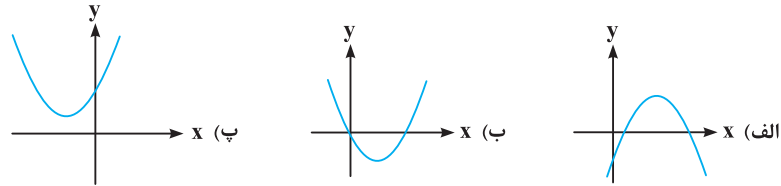
۱ اگر سهمی رو به بالا باشد  $a > 0$  و اگر رو به پایین باشد  $a < 0$  است.

۲ اگر طول رأس سهمی، سمت چپ محور  $y$ ها باشد،  $-\frac{b}{2a} < 0$  و اگر سمت راست باشد،  $-\frac{b}{2a} > 0$  و اگر روی محور  $y$ ها باشد،  $-\frac{b}{2a} = 0$  است. چون

در قسمت ۱ علامت  $a$  را مشخص کردیم، پس در این مرحله می‌توانیم علامت  $b$  را تعیین کنیم.

۳ عرض از مبدأ یا همان عرض نقطه تلاقی سهمی با محور عرض‌ها، اگر بالای محور  $x$ ها باشد،  $c > 0$ ، اگر پایین باشد،  $c < 0$  و اگر نمودار از مبدأ عبور کند،  $c = 0$  است.

مثال: اگر هر یک از شکل‌های زیر، نمودار سهمی به معادله  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد، علامت پارامترهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را برای هر کدام مشخص کنید.



پاسخ: الف) سهمی رو به پایین است، پس  $a$  منفی می‌شود. نقطه تلاقی سهمی با محور عرض‌ها زیر محور  $x$ ها است، پس  $c < 0$  می‌شود. هم‌چنین

رأس سهمی، سمت راست محور  $y$ ها است، پس طول رأس، مثبت می‌شود:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$

ب) سهمی رو به بالا است، پس  $a$  مثبت می‌شود. منحنی از مبدأ گذشته، پس  $c = 0$  است. هم‌چنین رأس سهمی، سمت راست محور  $y$ ها است، پس طول رأس، مثبت می‌شود:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$

پ) سهمی رو به بالا است، پس  $a$  مثبت می‌شود. نقطه تلاقی سهمی با محور عرض‌ها، بالای محور  $x$ ها است، پس  $c > 0$  می‌شود. هم‌چنین رأس

سهمی، سمت چپ محور  $y$ ها است، بنابراین طول رأس، منفی می‌شود:

$$\frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

**بحث در گذشتن یا نگذشتن نمودار تابع درجه دوم از ناحیه‌های محور مختصات:** در بعضی از سؤال‌ها باید معلوم کنیم که یک تابع درجه

دوم با چه شرطی از چه نواحی محور مختصات می‌گذرد یا نمی‌گذرد. برای این منظور باید جهت سهمی (به کمک علامت ضریب  $x^2$ )، داشتن یا نداشتن ریشه (به کمک علامت  $\Delta$ ) و در صورت وجود، علامت ریشه‌ها (به کمک  $S$  و  $P$ ) را مورد بررسی قرار داد.

نکته: در نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  اگر  $a > 0$  باشد، قطعاً از نواحی اول و دوم عبور می‌کند و اگر  $a < 0$  باشد، قطعاً از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.

نکته: نمودار تابع درجه دوم، زمانی از هر چهار ناحیه محوره‌های مختصات عبور می‌کند که  $P = \frac{c}{a} < 0$  باشد، زیرا در این حالت معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه غیر هم‌علامت دارد.

مثال: بررسی کنید سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  در چه حالتی از ناحیه اول محوره‌های مختصات نمی‌گذرد؟

پاسخ: اولین شرط این سؤال آن است که سهمی رو به پایین باشد، پس باید  $a$  منفی باشد. در مورد علامت  $\Delta$  دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر  $\Delta \leq 0$  باشد، سهمی از ناحیه اول نمی‌گذرد (زیرا پایین محور  $x$ ها یا مماس بر محور  $x$ ها می‌شود).

حالت دوم: اگر  $\Delta > 0$  باشد، چون معادله، دو ریشه دارد، زمانی از ناحیه اول نمی‌گذرد که ریشه مثبت نداشته باشد. ( $S < 0, P > 0$ )

تست: به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $y = mx^2 + (m-1)x$  از ناحیه سوم محوره‌های مختصات نمی‌گذرد؟

$$m \leq 1 \quad (1) \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (2) \quad m \geq 1 \quad (3) \quad 1 \leq m \leq 2 \quad (4)$$

پاسخ: چون نمودار از ناحیه سوم نمی‌گذرد، پس حتماً سهمی رو به بالا و  $m > 0$  می‌باشد. از طرفی معادله  $mx^2 + (m-1)x = 0$  دو ریشه دارد، بنابراین زمانی نمودار تابع از ناحیه سوم نمی‌گذرد که این ریشه‌ها نامنفی (مثبت یا صفر) باشند:

$$mx^2 + (m-1)x = 0 \Rightarrow x(mx + m-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{1-m}{m}$$

$$x = \frac{1-m}{m} \geq 0 \xrightarrow{m > 0} 1-m \geq 0 \Rightarrow m \leq 1$$

از اشتراک  $m > 0$  و  $m \leq 1$ ، محدوده  $0 < m \leq 1$  به دست می‌آید. در حالتی که  $m = 0$  باشد، تابع تبدیل به خط  $y = -x$  می‌شود که باز هم از ناحیه سوم عبور نمی‌کند، بنابراین مجموعه جواب به صورت  $0 \leq m \leq 1$  در می‌آید و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.



### وضعیت تلاقی یا تماس دو تابع نسبت به هم

برای این که وضعیت دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را نسبت به هم معلوم کنیم، ابتدا دو معادله را با هم برابر می‌گیریم، در نتیجه  $f(x) - g(x) = 0$  می‌شود. حال ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم، اگر ریشه به دست آمده ساده باشد، آن ریشه، طول نقطه تقاطع (تلاقی) دو تابع است و در صورتی که ریشه مکرر باشد، طول نقطه تماس می‌شود.

🔍 **نکته:** برای بررسی وضعیت یک خط و یک سهمی، ابتدا دو تابع را مساوی هم می‌گیریم، یعنی معادله تلاقی سهمی و خط را می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم تا به یک معادله درجه ۲ برسیم، در این جا سه حالت وجود دارد:

- ۱ اگر در معادله تلاقی  $\Delta > 0$  باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.
- ۲ اگر در معادله تلاقی  $\Delta = 0$  باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط، بر سهمی مماس است.
- ۳ اگر در معادله تلاقی  $\Delta < 0$  باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط و سهمی نقطه مشترک ندارند.

🔍 **تست:** خط به معادله  $y = (m+1)x - 2$  با منحنی به معادله  $y = 2x^2 + \frac{m}{p}$  هیچ نقطه مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر  $m$  به

کدام صورت است؟

- (۱)  $-3 < m < 5$       (۲)  $-3 < m < 4$       (۳)  $-2 < m < 4$       (۴)  $-1 < m < 5$

🔍 **پاسخ:** منحنی  $y = 2x^2 + \frac{m}{p}$  و خط  $y = (m+1)x - 2$  را قطع می‌دهیم، معادله تلاقی آن‌ها نباید ریشه داشته باشد:

$$2x^2 + \frac{m}{p} = (m+1)x - 2 \Rightarrow 2x^2 - (m+1)x + \frac{m}{p} + 2 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4\left(\frac{m}{p} + 2\right) < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

🔍 **تست:** به ازای کدام مقدار  $a$  منحنی به معادله  $ay = x^2 + 5x + 4$  بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟

- (۱) ۱      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۹

🔍 **پاسخ:** نیمساز ناحیه اول،  $y = x$  ( $x \geq 0$ ) است، چون این خط بر منحنی مماس است، پس باید معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف بدهد، بنابراین:

$$\begin{cases} y = x \\ ay = x^2 + 5x + 4 \end{cases} \Rightarrow ax = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x^2 + (\Delta - a)x + 4 = 0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه مضاعف}} (\Delta - a)^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta - a)^2 = 16 \Rightarrow \Delta - a = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 < 0 \text{ (غق)} \\ a = 9 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 > 0 \end{cases}$$

چون باید در ناحیه اول مماس باشد، پس طول نقطه تماس مثبت است، بنابراین  $a = 9$  قابل قبول می‌باشد.

برای این که تشخیص دهیم  $a = 1$  و  $a = 9$  کدام قابل قبول است، به جای روش بالا می‌توانیم، بگوییم طول ریشه مضاعف در معادله درجه دوم،  $\frac{-b}{2a}$  است، پس باید  $\frac{-(\Delta - a)}{p} > 0$  باشد و در نتیجه  $a > 5$  می‌شود. بنابراین  $a = 9$  قابل قبول است و در نتیجه گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

**معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم:** در بعضی از معادلات می‌توان با استفاده از تغییر متغیر، آن را به صورت معادله درجه

دوم  $at^2 + bt + c = 0$  تبدیل کرد تا حل آن به صورت ساده‌تری امکان پذیر باشد.

🔍 **مثال:** هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$       ب)  $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$       پ)  $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

🔍 **پاسخ:** با تغییر متغیر  $t = x^2$  هر یک از معادلات را حل می‌کنیم:

$$\text{الف) } x^4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

پس معادله  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$  دارای چهار ریشه است.

$$\text{ب) } x^4 = t \Rightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = -5 \Rightarrow x^2 = -5 \text{ (غق)} \end{cases}$$

پس معادله  $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$  دارای دو ریشه است.

$$\text{پ) } x^4 = t \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

پس معادله  $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$  دارای دو ریشه است.

از مثال بالا می‌توان نکته زیر را نتیجه گرفت.

**نکته:** معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  در دو حالت زیر یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد ( $x^2 = t$ ):

۱ در معادله  $at^2 + bt + c = 0$ ،  $P = \frac{c}{a} < 0$  باشد. (مانند قسمت (ب) مثال قبل)

۲ در معادله  $at^2 + bt + c = 0$ ،  $\Delta = 0$  و  $\frac{-b}{2a} > 0$  باشد. (مانند قسمت (پ) مثال قبل)

**تست:** اگر معادله  $x^2 + 4x^2 + m = 0$  دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $m < 0$       ۲)  $m < 3$       ۳)  $m > 1$       ۴)  $0 < m < 3$

**پاسخ:** با توجه به نکته قبل، ۲ حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول:  $P < 0$  و در نتیجه  $m < 0$ .

حالت دوم:  $\Delta = 0$  و  $\frac{-b}{2a} > 0$  که در این جا  $-\frac{4}{2} = -2 < 0$  است و این شرط هیچ‌گاه برقرار نیست. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**نکته:** معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  زمانی دارای چهار ریشه است که بعد از تبدیل به معادله درجه دوم، سه شرط  $\Delta > 0$ ،  $S > 0$  و  $P > 0$  برای آن برقرار باشد. (زیرا باید معادله  $at^2 + bt + c = 0$  دو ریشه مثبت داشته باشد).

**تست:** منحنی  $f(x) = x^2 + (m+2)x + 9$  محور  $x$ ها را در چهار نقطه قطع می‌کند، حدود  $m$  کدام است؟

- ۱)  $m < -8$       ۲)  $m < -2$       ۳)  $m > 4$       ۴)  $m > -2$

**پاسخ:** با تغییر متغیر  $x^2 = t$  به معادله  $t^2 + (m+2)t + 9 = 0$  می‌رسیم که با توجه به نکته قبل داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 36 > 0 \Rightarrow (m+2)^2 > 36 \Rightarrow m+2 > 6 \text{ یا } m+2 < -6 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -8$$

$$S > 0 \Rightarrow -(m+2) > 0 \Rightarrow m < -2 ; P > 0 \Rightarrow 9 > 0$$

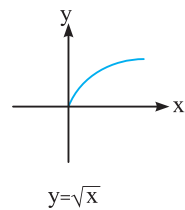
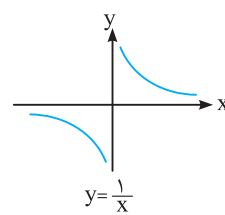
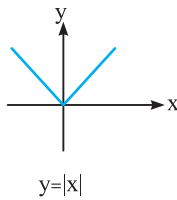
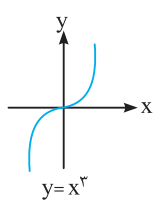
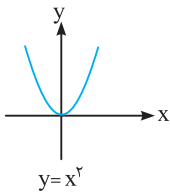
همواره برقرار است. از اشتراک محدوده‌های به دست آمده، حدود  $m$  به صورت  $m < -8$  می‌باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**حل معادلات به روش هندسی:** اگر  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی یا تماس این دو نمودار، جواب‌های

معادله  $f(x) = g(x)$  خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی یا تماس این دو نمودار است. این روش حل معادله که

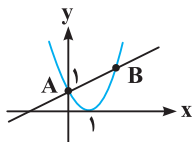
از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است را روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.

جهت حل هندسی معادلات، بهتر است نمودار توابع زیر را به خاطر بسپارید:



کتاب درسی

**مثال:** تعداد و علامت ریشه‌های معادله  $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$  را به روش هندسی به دست آورید.



**پاسخ:** نمودار دو تابع  $y = \frac{1}{4}x + 1$  و  $y = (x-1)^2$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل روبه‌رو نمودار دو تابع در نقاط  $A$  و  $B$  مشترک‌اند. طول نقطه  $A$  برابر صفر و طول نقطه  $B$  یک عدد مثبت است (از روش جبری  $x_B = \frac{5}{4}$  می‌شود). بنابراین این معادله یک ریشه صفر و یک ریشه به طول مثبت دارد.

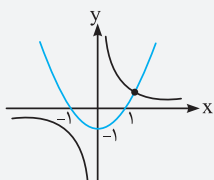
**تست:** معادله  $1 + \frac{1}{x} = x^2$  چند جواب دارد؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) صفر

**پاسخ:** برای راحتی کار، معادله را به صورت  $\frac{1}{x} = x^2 - 1$  نوشته، سپس نمودار توابع  $y = \frac{1}{x}$  و  $y = x^2 - 1$  را

در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

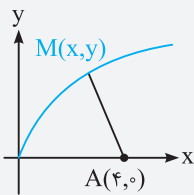
با توجه به شکل روبه‌رو، نمودار دو تابع در یک نقطه مشترک‌اند، پس این معادله یک ریشه دارد و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.



**کاربرد ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم در حل مسائل:** گاهی اوقات به مسائلی برخورد می‌کنیم که در آن بیشترین یا کمترین مقدار یک کمیت مطلوب است. در این موارد که معمولاً کمیت برابر یک عبارت دو متغیره است، ابتدا با توجه به داده‌های مسأله آن را تبدیل به یک عبارت تک متغیره می‌کنیم، سپس اگر به عبارت درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  رسیدیم، به کمک  $\frac{-\Delta}{2a}$  یا  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  مقدار ماکزیمم یا مینیمم آن را تعیین می‌کنیم.

**تست:** نقطه A به طول ۴ روی محور طول‌ها واقع است. کوتاه‌ترین فاصله روی منحنی  $y = 2\sqrt{x}$  از نقطه A کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{2}$   
 (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{2}$



**پاسخ:** اگر نقطه‌ای روی منحنی  $y = 2\sqrt{x}$  که کوتاه‌ترین فاصله را تا A دارد M به مختصات  $(x, y)$  بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$d = AM = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (2\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

زمانی d کم‌ترین مقدار را دارد که عبارت  $x^2 - 4x + 16$  مینیمم باشد، بنابراین:

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow d_{\min} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

### تعیین علامت

برای این‌که معلوم کنیم علامت یک عبارت جبری، مثبت، منفی، صفر یا تعریف‌نشده است، از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم.

**تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول:** چندجمله‌ای درجه اول  $P(x) = ax + b$  (با  $a \neq 0$ ) به‌ازای  $x = \frac{-b}{a}$ ، صفر می‌شود و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$\frac{-b}{a}$
P(x)	مخالف علامت a   موافق علامت a

**تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم:** جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم  $P(x) = ax^2 + bx + c$  (با  $a \neq 0$ )، بستگی به علامت  $\Delta$ ، به یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

۱) اگر  $\Delta > 0$  باشد، چندجمله‌ای دو ریشه ساده  $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  دارد. با فرض  $x_2 > x_1$ ، جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$x_1$	$x_2$
P(x)	مخالف علامت a   موافق علامت a	مخالف علامت a   موافق علامت a

۲) اگر  $\Delta = 0$  باشد، چندجمله‌ای یک ریشه مضاعف  $x_0 = \frac{-b}{2a}$  دارد که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$\frac{-b}{2a}$
P(x)	مخالف علامت a   موافق علامت a

۳) اگر  $\Delta < 0$  باشد، چندجمله‌ای ریشه ندارد و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	
P(x)	مخالف علامت a

**مثال:** هر یک از عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$P_1 = x^2 - 5x + 6 \qquad P_2 = -x^2 + 2x - 1 \qquad P_3 = x^2 + x + 1$$

**پاسخ:** در عبارت  $P_1$ ، دلتا مثبت است و  $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ ، پس دو ریشه ساده  $x = 2$  و  $x = 3$  دارد. دلتا در عبارت  $P_2$  صفر است و  $-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$ ، بنابراین ریشه مضاعف  $x = 1$  دارد. در عبارت  $P_3$  دلتا منفی است و معادله ریشه ندارد. پس جدول تعیین علامت این عبارات به صورت زیر می‌باشد:

x	2	3	
P <sub>1</sub>	+   -	-   +	

x	1
P <sub>2</sub>	-   -

x	
P <sub>3</sub>	+

تعیین علامت عبارات به شکل  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  چندجمله‌ای باشند، برای تعیین علامت عبارت  $\frac{f(x)}{g(x)}$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ریشه‌های  $f$  و  $g$  را پیدا کرده و از کوچک به بزرگ در یک جدول قرار می‌دهیم.
- ۲ از سمت راست، علامت اولین قسمت جدول را تعیین می‌کنیم. این علامت را می‌توان با امتحان یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، تعیین کرد.
- ۳ در جدول از سمت راست، علامت‌ها را یک در میان عوض می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که علامت در ریشه‌های مکرر مرتبه زوج به شکل  $(x-a)^{2n} = 0$  تغییر نمی‌کند.

مثال: عبارت  $P(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2(3-x)^{15}}{(x-2)^5(x+3)}$  را تعیین علامت کنید.

پاسخ: ابتدا ریشه‌ها را در جدول وارد می‌کنیم. برای تعیین علامت در بازه  $(-\infty, +3)$  علامت  $P(4)$  را معلوم می‌کنیم.  $(P(4) < 0)$  بنابراین داریم:

x	-3	-2	1	2	3
P(x)	-	+	-	+	-

ملاحظه می‌شود که در این عبارت  $x=1$  ریشه مضاعف (مکرر مرتبه زوج) می‌باشد و به همین خاطر است که در اطراف آن، عبارت  $P(x)$  تغییر علامت نمی‌دهد.

### معادلات درجه دوم و مسائل مربوط به آن

۶۸- اگر معادله  $k(x+1)(x+4) = x$  ریشه حقیقی نداشته باشد، حدود تغییرات  $k$  کدام است؟

- (۱)  $-1 < k < -\frac{1}{9}$  (۲)  $1 < k < 9$  (۳)  $\frac{1}{9} < k < 1$  (۴)  $-\frac{1}{9} < k < \frac{1}{9}$

۶۹- به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $m(x^2+1) + (x+2)^2 = 5 - x^2$  دو ریشه حقیقی دارد؟

- (۱)  $-3 < m < 2$  (۲)  $-2 < m < 3$  (۳)  $-1 < m < 4$  (۴)  $-4 < m < 1$

۷۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع  $a$ ،  $a+2$  و  $a+4$  مساحت کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۷۱- اگر معادله  $2mx^2 + (m+1)x + n = 0$  دارای ریشه مضاعف  $x=3$  باشد،  $\frac{n}{m}$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۱۸ (۴) -۱۸

۷۲- اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، مجموع سن فعلی آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۷۳- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است.

اگر این آبراه در همه جا دارای پهنای یکسان و دارای مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آبراه چند

متر است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۷۴- یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب

برابر باشد، محیط این قاب عکس کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۸۰

۷۵- طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت  $52\frac{1}{8}$  متر مربع، تعداد ۲۰۰۰

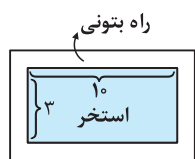
کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳

۷۶- فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد،

مساحت قالی کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۸



کتاب درسی

کتاب درسی

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

۷۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{\alpha^2}{\beta+1} + \frac{\beta^2}{\alpha+1}$  کدام است؟

- ۱۵ (۱)  $\frac{47}{3}$  (۲)  $\frac{44}{3}$  (۳) ۱۶ (۴)

ریاضی داخل ۸۷

۷۸- در معادله  $3x^2 - 17x + m = 0$  یک ریشه از ۳ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر می‌باشد.  $m$  کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

ریاضی خارج ۹۲

۷۹- در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

۸۰- به ازای کدام مقدار  $m$ ، یکی از ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x + m = 5$ ، مجذور دیگری می‌باشد؟

- ۳۲ (۱) ۱۳ (۲) -۳۲ (۳) -۳ (۴)

۸۱- به ازای چه مقدار  $m$ ، معادله  $3x^2 + (m^2 - 16)x + m + 3 = 0$  دارای دو ریشه قرینه است؟

- ۴ (۱)  $\pm 4$  (۲) -۳ (۳)  $\pm 3$  (۴)

۸۲- به ازای چند مقدار  $k$  معادله  $k^2x^2 + 3kx + (k+2) = 0$  دو ریشه حقیقی معکوس دارد؟

- ۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) صفر (۱)

۸۳- حدود  $m$  برای آن‌که معادله  $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$  دو ریشه غیر هم‌علامت داشته باشد، کدام است؟

- $m > 2$  (۱)  $1 < m < 3$  (۲)  $m < 1$  (۳)  $0 < m < 1$  (۴)

ریاضی داخل ۹۶

۸۴- به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله درجه دوم  $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$  دارای دو ریشه مثبت است؟

- $-2 < a < 2$  (۱)  $2 < a < 5$  (۲)  $2 < a < 14$  (۳)  $5 < a < 14$  (۴)

۸۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 4x = 1$  باشند، حاصل عبارت  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$  کدام است؟

- ۳۲۲ (۱) ۲۸۷ (۲) ۲۵۲ (۳) ۱۹۴ (۴)

ریاضی خارج ۸۵

۸۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $4x^2 - 12x + 1 = 0$  باشند، مقدار  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  چقدر است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۸۷- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$  کدام است؟

- $\sqrt{5}$  (۱) ۵ (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۳ (۴)

۸۸- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - mx + 2 = 0$  و اعداد ۴،  $x_1 + x_2$  و  $x_1x_2$  تشکیل دنباله حسابی دهند، آن‌گاه مقدار  $m$  کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

۸۹- به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربع‌های دو ریشه حقیقی معادله  $x^2 + mx + 2 - m = 0$  برابر ۴ می‌باشد؟

- ۲ (۱) -۴ (۲) ۲، -۴ (۳) -۲، ۴ (۴)

ریاضی داخل ۸۴

۹۰- به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه حسابی بین دو ریشه معادله  $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$  است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

ریاضی خارج ۸۴

۹۱- به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\sqrt{2}$  واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - 5x + m^2 = 3$  است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)

ریاضی داخل ۹۶

۹۲- به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم  $\frac{1}{8} - (m+1)x + 2x^2 = 0$  برابر ۲ می‌باشد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۹۳- اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$  باشند، حاصل عبارت  $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$  کدام است؟

- $2\sqrt{4}$  (۱) ۲ (۲) ۱ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)

۹۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 36x - 1 = 0$  باشند، حاصل عبارت  $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$  کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

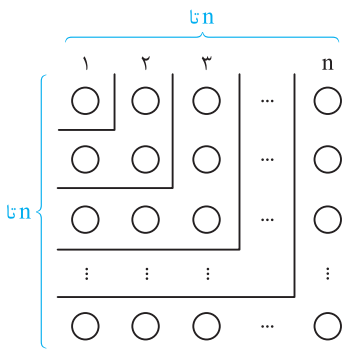
# پایه نهم

**روش اول:** مجموع  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$  با جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $d = 2$  است. بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2} (2(1) + (n - 1)2) = \frac{n}{2} (2n) = n^2$$

**روش دوم:** چون  $a_n = 2n - 1$  را داریم، پس از رابطه  $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$  نیز می‌توان استفاده کرد:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (1 + (2n - 1)) = \frac{n}{2} (2n) = n^2$$



در این تیپ تست‌ها می‌تونی از عددگذاری هم استفاده کنی، یعنی این‌که می‌دونیم در این‌جا، مجموع یک جمله اول برابر ۱ و مجموع دو جمله اول برابر ۴ هست، حالا آگه توی گزینه‌ها  $n = 1$  و  $n = 2$  رو بگذاریم، تنها گزینه‌ای که جواب درست می‌ده گزینه یک.

**توجه:** مطابق آنچه در کتاب درسی به آن اشاره شده، مجموع  $n$  جمله اول اعداد فرد را از شکل روبه‌رو نیز می‌توان به‌دست آورد. بدین ترتیب که اگر در  $n$  سطر و  $n$  ستون، دایره قرار دهیم، بدیهی است که تعداد دایره‌ها برابر  $n^2$  می‌شود. حال به‌صورتی که در شکل، مشخص است کل دایره‌ها را  $n$  قسمت می‌کنیم، طوری که در قسمت اول ۱ دایره، در قسمت دوم ۳ دایره، در قسمت سوم ۵ دایره و به همین صورت در قسمت  $n$ ام،  $2n - 1$  دایره وجود دارد. می‌دانیم مجموع تعداد آن‌ها باید برابر  $n^2$  باشد، پس:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

**روش اول:** نقطه اول را به هریک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم، در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸

وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم تا ۱۷ وتر حاصل شود. با ادامه این عمل، تعداد وترهای حاصل برابر  $1 + 2 + \dots + n$  می‌شود. می‌دانیم  $1 + 2 + \dots + n$  مجموع جملات یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۱ می‌باشد که بعد از

ساده کردن به رابطه  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$1 + 2 + \dots + 17 + 18 + 19 = \frac{19(19+1)}{2} = 190$$

**روش دوم:** با توجه به سؤال  $a_1 = 1$  و  $a_4 = \frac{5}{2}$  است. بنابراین:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_4 = 1 + 3d = \frac{5}{2} \Rightarrow 3d = \frac{3}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (2 + 14(\frac{1}{2})) = 67.5$$

**روش اول:**

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_{19} = a_1 + 18d = 10 \quad (*)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_{37} = \frac{37}{2} (2a_1 + 36d) = \frac{37}{2} (2(a_1 + 18d)) = 37(a_1 + 18d) \stackrel{رابطه (*)}{=} 37(10) = 370$$

**روش دوم:** از رابطه  $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$  استفاده می‌کنیم:

$$S_{37} = \frac{37}{2} (a_1 + a_{37}) \stackrel{رابطه اندیس‌ها}{=} \frac{37}{2} (2a_{19}) = 37a_{19} = 37(10) = 370$$

**روش اول:**

$$a_7 = \frac{1}{2} a_3 \Rightarrow 2a_7 = a_3 \Rightarrow 2(a_1 + 6d) = a_1 + 2d \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) = 0 \stackrel{a_1 = -10d}{\Rightarrow} \frac{n}{2} (-20d + (n - 1)d) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} (d(-20 + n - 1)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{nd}{2} (n - 21) = 0 \stackrel{nd \neq 0}{\Rightarrow} n - 21 = 0 \Rightarrow n = 21$$

**روش اول:** با توجه به این‌که  $S_7 = a_1 + a_7$  و  $S_1 = a_1$  است، داریم:

$$\begin{cases} S_1 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow a_1 = 7 \quad (*) \\ S_7 = 4(7) + 3(2) = 22 \Rightarrow a_1 + a_7 = 22 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 7 + a_7 = 22 \Rightarrow a_7 = 15 \end{cases} \Rightarrow d = a_7 - a_1 = 15 - 7 = 8$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 7 + (n - 1)(8) = 8n - 1$$

**توجه!** برای تعیین  $d$  می‌تونستی از این نکته استفاده کنی که ضریب  $n^2$  برابر نصف قدرنسبت، پس  $d = 8$  نتیجه می‌شه.

**روش دوم:** از رابطه  $a_n = S_n - S_{n-1}$  استفاده می‌کنیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + 3n - (4(n-1)^2 + 3(n-1)) = 4n^2 + 3n - (4n^2 - 8n + 4 + 3n - 3) = 8n - 1$$



۴ ۷ ابتدا با تشکیل  $a_4$  و  $a_{16}$  و محاسبه تفاضل آن‌ها مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس  $S_{13}$  را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{16} = a_1 + 15d \end{cases} \Rightarrow a_{16} - a_4 = (a_1 + 15d) - (a_1 + 3d) = 12d$$

$$\Rightarrow 17 - 1 = 12d \Rightarrow 16 = 12d \Rightarrow d = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 1 \xrightarrow{d = \frac{4}{3}} a_1 + 3\left(\frac{4}{3}\right) = 1 \Rightarrow a_1 + 4 = 1 \Rightarrow a_1 = -3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}\left(2(-3) + 12\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{13}{2}(-6 + 16) = \frac{13}{2}(10) = 13 \times 5 = 65$$

البته می‌توان در قسمت اول راه‌حل از رابطه  $a_m - a_n = (m-n)d$  استفاده کرد.

۱ ۸ چون  $-21, x, -27$ ، سه جمله متوالی دنباله حسابی هستند، داریم:

$$2x = (-27) + (-21) \Rightarrow 2x = -48 \Rightarrow x = -24$$

پس جملات دنباله حسابی به صورت  $-27, -24, -21, \dots$  در می‌آیند و در نتیجه  $a_1 = -27$  و  $d = -24 - (-27) = 3$  می‌شود. حال جمله عمومی دنباله را

تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -27 + (n-1)(3) = 3n - 30$$

برای یافتن تعداد جملات منفی، نامعادله  $a_n < 0$  را حل می‌کنیم:

$$3n - 30 < 0 \Rightarrow 3n < 30 \Rightarrow n < 10 \Rightarrow n \leq 9$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}(2(-27) + 8(3)) = \frac{9}{2}(-54 + 24) = \frac{9}{2}(-30) = 9(-15) = -135$$

۲ ۹

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow a_1 = 5, d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(5) + (n-1)3) = \frac{n}{2}(10 + 3n - 3) = \frac{n}{2}(3n + 7)$$

برای این که  $S_n > 500$  شود، به جای حل نامعادله  $\frac{n}{2}(3n + 7) > 500$  که وقت‌گیر است، بهتر است از اعداد گزینه‌ها استفاده کنیم:

$$n = 17 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 7) = \frac{17}{2}(58) = 493 < 500$$

$$n = 18 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 7) = \frac{18}{2}(61) = 549 > 500$$

بنابراین اگر حداقل ۱۸ جمله را با هم جمع کنیم، حاصل از ۵۰۰ بیشتر می‌شود.

۱ ۱۰ چون ۲۰ واسطه درج می‌کنیم، پس دنباله حاصل ۲۲ جمله دارد که جمله اول برابر ۱۳- و جمله بیست و دوم برابر ۷۱ است. برای پیدا کردن

مجموع ۲۰ واسطه حسابی، ابتدا مجموع کل اعداد را حساب کرده و حاصل را منهای اعداد ۱۳- و ۷۱ می‌کنیم:

$$\underbrace{-13, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{20 \text{ جمله}}, 71}_{a_1 \quad a_{22}}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22}) = 11(-13 + 71) = 11(58) = 638$$

$$\text{مجموع } 20 \text{ واسطه} = 638 - (-13 + 71) = 638 - 58 = 580$$

حال برای تعیین قدرنسبت، کافی است  $a_{22}$  را تشکیل دهیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{22} = a_1 + 21d \Rightarrow 71 = -13 + 21d \Rightarrow 84 = 21d \Rightarrow d = 4$$

تذکره: برای این که مجموع بیست واسطه رو حساب کنی، این طوری هم می‌شود:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_2 + a_{21}) = 10(a_1 + a_{22}) = 10(-13 + 71) = 10(58) = 580$$

۲ ۱۱ با توجه به رابطه  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  داریم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d \quad ; \quad S_{12} = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 12a_1 + 66d$$

$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow -8d = 16a_1 \Rightarrow d = -2a_1$$

از طرفی جمله سوم برابر ۶ می‌باشد، پس  $a_1 + 2d = 6$ ، در نتیجه داریم:

$$a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{d = -2a_1} a_1 - 4a_1 = 6 \Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{d = -2a_1} d = 4$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = -2 + 36 = 34$$

۱۲ ۴ مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی با جمله اول  $a$  و قدرنسبت  $d$  برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{1} (2a + 19d) = 20a + 190d \quad (*)$$

حال مجموع ۲۰ جمله اول دنباله با جمله اول  $a$  و قدرنسبت  $d+1$  را حساب می‌کنیم:

$$S'_{20} = \frac{20}{1} (2a + 19(d+1)) = 20a + 190(d+1) = (20a + 190d) + 190 \stackrel{(*)}{=} S_{20} + 190$$

بنابراین اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، به مجموع ۲۰ جمله اول، ۱۹۰ واحد افزوده خواهد شد.

۱۳ ۳ **روش اول:** اولین عدد طبیعی فرد مضرب ۳ برابر خود عدد ۳ و آخرین آن که کوچک‌تر از ۱۰۱ باشد، عدد ۹۹ است. بنابراین اعداد فرد مضرب ۳ کوچک‌تر از ۱۰۱ به صورت ۳، ۹، ۱۵، ۲۱، ۲۷، ۳۳، ۳۹، ۴۵، ۵۱، ۵۷، ۶۳، ۶۹ هستند که دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۶ را تشکیل می‌دهند. ابتدا تعداد جملات این دنباله و سپس مجموع آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 3 + (n-1)(6) \Rightarrow 96 = 6n - 6 \Rightarrow 6n = 102 \Rightarrow n = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (3 + 99) = \frac{17}{2} (102) = 17 \times 51 = 867$$

**روش دوم:** با توجه به صورت سؤال این اعداد تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ و جمله اول ۳ می‌دهند. ابتدا جمله عمومی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)(6) \Rightarrow a_n = 6n - 3$$

با حل نامعادله  $a_n < 101$  تعداد جملات فرد مضرب ۳، کم‌تر از ۱۰۱ به دست می‌آید:

$$6n - 3 < 101 \Rightarrow 6n < 104 \Rightarrow n < \frac{104}{6} = \frac{52}{3} \approx 17.3 \Rightarrow n \leq 17$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (2(3) + 16(6)) = \frac{17}{2} (6 + 96) = \frac{17}{2} (102) = 867$$

۱۴ ۴ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۷ به ترتیب برابر ۱۰۵ و ۹۹۴ است. اعداد سه رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۰۵ و قدرنسبت ۷ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$105, 112, \dots, 994$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 994 = 105 + (n-1)(7) \Rightarrow 889 = 7(n-1) \Rightarrow 127 = n-1 \Rightarrow n = 128$$

پس این دنباله، ۱۲۸ جمله دارد، حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{128} = \frac{128}{2} (105 + 994) = 64(1099) = 70336$$

به پای این که ۶۴ رو در ۱۰۹۹ ضرب کنی می‌تونی یکی یکان عدد حاصل برابر ۶ می‌شه، پس گزینه (۴) درسته.

۱۵ ۳ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددی که باقی‌مانده تقسیم آن بر عدد ۴ برابر ۲ است، برابر ۲۲ و ۱۹۸ می‌باشد. پس اعداد مورد نظر، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۲۲ و قدرنسبت ۴ می‌دهند که با نوشتن جمله عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$22, 26, \dots, 198$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 198 = 22 + (n-1)(4) \Rightarrow 176 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 44 \Rightarrow n = 45$$

بنابراین این دنباله ۴۵ جمله دارد، حال مجموع این اعداد را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{45} = \frac{45}{2} (22 + 198) = \frac{45}{2} (220) = 45(110) = 4950$$

۱۶ ۳ دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد، باید مسافت  $2(3) = 6$  متر را طی کند، برای توپ دوم باید  $2(3+3) = 12$  متر و برای توپ سوم  $2(3+3+3) = 18$  متر و ...، بنابراین مسافت‌های طی شده در هر مرحله، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهند. اگر  $n$ ، تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد، از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی، داریم:

$$6, 12, 18, \dots$$

$$S = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} (12 + (n-1)6) \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} (6n + 6) \Rightarrow 918 = 3n(n+1) \Rightarrow 306 = n(n+1)$$

برای حل معادله  $306 = n(n+1)$  به جای استفاده از دلتا بهتر است، بگوییم ضرب دو عدد طبیعی متوالی  $306$  شده و چون  $306 = 17 \times 18$ ، پس  $n = 17$  می‌باشد.

۱۷ ۴ چون رابطه  $S_n$  را داریم، برای محاسبه  $a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$  کافی است، مجموع هجده جمله اول را منهای مجموع شش جمله اول کنیم:

$$S_n = \frac{n(n-15)}{6} \Rightarrow S_{18} = \frac{18(18-15)}{6} = 9; S_6 = \frac{6(6-15)}{6} = -9$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6$$

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6 = 9 - (-9) = 18$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{18}$$

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

نتیجه: با در اختیار داشتن  $S_n$ ، برای تعیین مجموع جملات  $m$  تا  $n$  ( $n > m$ ) داریم:

۱۸ ۲ چون  $a_n$  یک عبارت درجه اول بر حسب  $n$  می‌باشد، پس این دنباله، حسابی است. (با نوشتن چند جمله اول دنباله هم می‌توان فهمید که دنباله حسابی است.)

روش اول: می‌خواهیم مجموع جملات  $a_1, a_2, \dots, a_{21}, a_{30}$  را تعیین کنیم، این دنباله ۲۱ جمله دارد (زیرا  $1 + (30 - 1) = 30$ ). حال با توجه به این که  $a_n = \frac{n}{2} - 1$  پس  $a_{10} = \frac{10}{2} - 1 = 4$  و  $a_{30} = \frac{30}{2} - 1 = 14$ ، بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{21} = \frac{21}{2}(4 + 14) = \frac{21}{2}(18) = 21 \times 9 = 189$$

روش دوم:

$$a_n = \frac{n}{2} - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_r = 0 \end{cases} \Rightarrow d = a_r - a_1 = \frac{1}{2}$$

مجموع جملات با شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی‌ام، برابر است با  $S_{30} - S_9$ ، بنابراین:

$$S_{30} - S_9 = \frac{30}{2}(2(-\frac{1}{2}) + 29(\frac{1}{2})) - \frac{9}{2}(2(-\frac{1}{2}) + 8(\frac{1}{2})) = 15(-1 + \frac{29}{2}) - \frac{9}{2}(-1 + 4) = 15(\frac{27}{2}) - \frac{9}{2}(3) = \frac{405}{2} - \frac{27}{2} = 189$$

۱۹ ۲ مجموع ۴ جمله اول، برابر ۱۵ ( $S_4 = 15$ ) و مجموع ۵ جمله بعدی برابر ۳۰ است. پس نتیجه می‌گیریم مجموع ۹ جمله اول آن برابر  $30 + 15 = 45$  می‌باشد ( $S_9 = 45$ ). بنابراین داریم:

$$\begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \Rightarrow \frac{1}{2}(2(a_1 + 4d)) = 5 \Rightarrow a_1 + 4d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$$

جمله یازدهم:  $a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10(\frac{1}{2}) = 3 + 5 = 8$

۲۰ ۳ مجموع پنج جمله اول  $S_5$  و مجموع پنج جمله بعدی  $S_{10} - S_5$  است. بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$S_5 = \frac{1}{2}(S_{10} - S_5) \Rightarrow 2S_5 = S_{10} - S_5 \Rightarrow 3S_5 = S_{10} \Rightarrow 3 \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) \Rightarrow 15(2a_1 + 4d) = 10(2a_1 + 9d)$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 8d = 2a_1 + 9d \Rightarrow d = 2a_1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} \stackrel{d=2a_1}{=} \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۲۱ ۲ چون دنباله، ۴۱ جمله دارد، پس جمله وسط، جمله ۲۱ ام است (زیرا  $\frac{41+1}{2} = 21$ ). بنابراین:

رابطه اندیس‌ها  $\Rightarrow 5a_{21} = 20 \Rightarrow a_{21} = 4$  مجموع پنج جمله وسط:  $a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} = 20$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{41} = \frac{41}{2}(a_1 + a_{41}) \stackrel{\text{رابطه اندیس‌ها}}{\Rightarrow} \frac{41}{2}(2a_{21}) = 41(a_{21}) = 41(4) = 164$$

برای تعیین مجموع جملات از نکته زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

نکته: اگر در یک دنباله حسابی تعداد جملات فرد باشد، مجموع جملات آن برابر است با تعداد جملات ضرب در جمله وسط.

بنابراین در این تست می‌توان نوشت:

$$S_{41} = 41(a_{21}) = 41(4) = 164$$

۲۲ ۱ می‌دانیم  $S_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_7$  و  $S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ ، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_{10} - S_7 = a_8 + a_9 + a_{10} = 6 \stackrel{\text{رابطه اندیس‌ها}}{\Rightarrow} 3a_9 = 6 \Rightarrow a_9 = 2$$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{12} = (a_2 + a_{12}) + (a_3 + a_{11}) + (a_4 + a_{10}) + a_9 = 2a_9 + 2a_9 + 2a_9 + a_9 = 7a_9 = 7(2) = 14$$

۲۳ ۱ مجموع جملات زوج و فرد را نوشته و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \\ - a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \\ \hline \end{array}$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = 15 \Rightarrow \underbrace{d + d + \dots + d}_{10} = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1/2$$

می‌دانیم  $S_{20} = 150 + 135 = 285$ ، بنابراین:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 285 \stackrel{d=1/2}{=} 10(2a_1 + 19 \times 1/2) = 285 \Rightarrow 285 = 20a_1 + 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

۱ ۲۴

**نکته:** اگر دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های  $d_1$  و  $d_2$  دارای جملات مشترک باشند، این جملات مشترک، با یکدیگر تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبتی برابر ک.م.م  $d_1$  و  $d_2$  خواهند داد.

$$\begin{cases} 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 2 \\ 5, 8, 11, 14, 17, \dots \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 3 \end{cases}$$

دنباله جملات مشترک به صورت  $8, 14, 20, \dots$  می‌باشد که جمله اول آن برابر ۸ و قدرنسبت آن برابر ۶ است (ک.م.م اعداد ۲ و ۳ برابر عدد ۶ می‌باشد). حال تعداد جملات کمتر از ۱۰۰ این دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_1 = 8, d = 6; a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n + 2$$

$$6n + 2 < 100 \Rightarrow 6n < 98 \Rightarrow n < \frac{98}{6} = 16\frac{2}{3} \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 16$$

این دنباله ۱۶ جمله دارد، بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}(2 \times 8 + 15 \times 6) = 8(16 + 90) = 8 \times 106 = 848$$

۲ ۲۵

$$\begin{array}{cccc} \text{جمله چهارم} & \text{جمله سوم} & \text{جمله دوم} & \text{جمله اول} \\ a_{13}, \dots, a_{16} & a_9, \dots, a_{12} & a_5, \dots, a_8 & a_1, \dots, a_4 \end{array}$$

مجموع چهار جمله چهارم را منهای مجموع چهار جمله دوم می‌کنیم. با توجه به رابطه  $a_m - a_n = (m-n)d$  داریم:

$$\begin{array}{r} a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \\ - a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \end{array}$$

$$(a_{13} - a_5) + (a_{14} - a_6) + (a_{15} - a_7) + (a_{16} - a_8) = 8d + 8d + 8d + 8d = 32d$$

$$d = a_7 - a_1 = (5 + \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2 \Rightarrow 32d = 64$$

که رابطه  $a_m - a_n = (m-n)d$  را یادآوری کنید، کافیه جمله عمومی هر کدوم رو بنویسید و از هم کم کنید. مثلاً:  $a_{13} - a_5 = (a_1 + 12d) - (a_1 + 4d) = 8d$

با توجه به رابطه  $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$  داریم:

$$S_8 = S_{16} \Rightarrow \frac{8}{2}(2a + 7d) = \frac{16}{2}(2a + 15d) \Rightarrow 8a + 28d = 16a + 120d \Rightarrow 8a + 92d = 0$$

$$\Rightarrow 2(2a + 23d) = 0 \Rightarrow 2a + 23d = 0 \quad (*)$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(2a + 21d) \stackrel{(*)}{=} S_{22} = 11 \times 0 = 0$$

**تذکره:** به طور کلی می‌توان گفت در هر دنباله حسابی، اگر  $(m \neq n)S_m = S_n$  باشد، آن‌گاه  $S_{m+n}$  برابر صفر است. اثبات این موضوع را در تست‌های بعد خواهید دید.

۴ ۲۷

دنباله  $1, 4, 7, 10, \dots$  یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d = 3$  می‌باشد، پس:

$$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 21 = 22, a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 27 = 28$$

بنابراین جملات  $a_4, a_8, a_{12}, \dots, a_{100}$  به صورت  $10, 22, \dots, 178$  درمی‌آیند که خود یک دنباله عددی با جمله اول ۱۰ و قدرنسبت ۱۲ را تشکیل می‌دهند. در نتیجه داریم:

$$178 = 10 + (n-1)(12) \Rightarrow 12(n-1) = 168 \Rightarrow 12n = 180 \Rightarrow n = 15$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2(10) + (15-1)(12)) = \frac{15}{2}(188) = 15 \times 94 = 1410$$

برای تعیین قدرنسبت دنباله جدید از نکته زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

**نکته:** اگر در دنباله حسابی  $\{a_n\}$  با قدرنسبت  $d$ ، جملات آن را با فاصله  $k$  از هم انتخاب کنیم، جملات حاصل، تشکیل یک دنباله حسابی جدید با قدرنسبت  $kd$  می‌دهند.

در این تست چون جملات چهارم، هشتم، دوازدهم و ... با فاصله ۴ تا از هم هستند، پس قدرنسبت برابر  $4 \times 3 = 12$  است.

۱ ۲۸

با توجه به مطالب درسنامه،  $a_n$  باید یک عبارت درجه اول برحسب  $n$  و  $S_n$  یک عبارت درجه دوم بدون عدد ثابت باشد که فقط گزینه (۱) این شرایط را دارد.

۳۲۹ با توجه به مطالب درسنامه می‌دانیم جمله عمومی یک دنباله حسابی، عبارتی درجه اول برحسب  $n$  است و ضریب  $n$  برابر قدرنسبت می‌باشد. پس برای این که  $a_n$  عبارت درجه دوم نباشد، باید ضریب  $n^2$  را صفر بگیریم:

$$p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow a_n = 3n - 5 \Rightarrow d = 3, a_1 = -2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2(-2) + 9(3)) = 5(-4 + 27) = 115$$

۳۳۰ می‌دانیم زمانی  $S_n = (2p-1)n^2 + qn^2 + pn + q + 1$  می‌تواند مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی باشد که جمله درجه سوم و جمله مستقل از  $n$  نداشته باشد. بنابراین:

$$2p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}, q + 1 = 0 \Rightarrow q = -1 \Rightarrow S_n = -n^2 + \frac{n}{2}$$

$$S_{10} - S_5 = (-100 + 5) - (-25 + \frac{5}{2}) = -72\frac{1}{2}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + a_{11} = 70; \quad a_6 + a_{10} + \dots + a_{11} + a_{15} = 51$$

$$(a_1 + a_6) + (a_2 + a_{10}) + \dots + (a_{10} + a_{11}) + (a_{11} + a_{15}) = 121 \quad (*)$$

$$a_1 + a_6 = a_2 + a_{10} = \dots = a_{11} + a_{15} \xrightarrow{(*)} 11(a_1 + a_6) = 121 \Rightarrow a_1 + a_6 = 11$$

مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی به فرم  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  می‌باشد، بنابراین:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 30 \times 11 = 330$$

۳۳۲ فرض می‌کنیم دنباله،  $n$  جمله دارد. بنابراین با جمع سه جمله اول و سه جمله آخر داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 69 \end{cases} \Rightarrow (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 84$$

$$3(a_1 + a_n) = 84 \Rightarrow a_1 + a_n = 28$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 168 = \frac{n}{2}(28) \Rightarrow 168 = 14n \Rightarrow n = 12$$

۳۳۳ در دسته اول، یک عدد فرد، در دسته دوم، دو عدد فرد، در دسته سوم، سه عدد فرد و به همین ترتیب در دسته بیستم، بیست عدد فرد وجود دارد. ابتدا تعداد کل جملات را از دسته اول تا دسته بیستم تعیین می‌کنیم:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

بنابراین آخرین جمله دسته بیستم، ۲۱۰ امین جمله دنباله اعداد فرد می‌باشد:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[\begin{smallmatrix} a_1=1 \\ d=2 \end{smallmatrix}]{d=2} a_{210} = 1 + 209 \times 2 = 419$$

۳۳۴ با توجه به فرض سوال، جمله آخر دسته  $n$  ام برابر  $n^2$  است. پس آخرین عدد دسته نهم و دهم به ترتیب ۸۱ و ۱۰۰ هستند و در نتیجه دسته دهم به صورت (۸۲, ۸۳, ..., ۱۰۰) خواهد بود، بنابراین دنباله دسته دهم، ۱۹ جمله دارد (زیرا  $19 + 1 = 100 - 82$ ) که  $S_{19}$  را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(82 + 100) = 1729$$

۳۳۵ ۵ جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت  $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$  نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 5a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

$$\text{جمله وسط} = 1$$

$$(1 - 2d)^2 + (1 - d)^2 + 1^2 + (1 + d)^2 + (1 + 2d)^2 = 45$$

$$\Rightarrow 1 + 4d^2 - 4d + 1 + d^2 - 2d + 1 + 1 + d^2 + 2d + 1 + 4d^2 + 4d = 45 \Rightarrow 5 + 10d^2 = 45 \Rightarrow d^2 = 4$$

جمله وسط برابر ۱ و  $d^2 = 4$  است، بنابراین جمله وسط،  $\frac{1}{4}$  مجذور قدرنسبت می‌باشد.

۳۳۶ هریک از کسرها را گویا می‌کنیم. تفاضل جملات متوالی برابر قدرنسبت  $d$  است:

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d}$$

$$= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{169} + \sqrt{4}} = \frac{n-1}{15}$$

$$a_n = a_{n+3} + 9 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = a_1 + (n+2)d + 9 \Rightarrow 3d = -9 \Rightarrow d = -3$$

۱ ۳۷

$$a_r = 3a_r \Rightarrow a_1 + d = 3(a_1 + 2d) \xrightarrow{d=-3} a_1 - 3 = 3a_1 - 18 \Rightarrow a_1 = \frac{15}{2}$$

برای تعیین مجموع چهار جمله سوم، دو روش وجود دارد:

روش اول:

$$\text{مجموع ۴ جمله سوم} = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = a_1 + 8d + a_1 + 9d + a_1 + 10d + a_1 + 11d = 4a_1 + 38d = 30 - 114 = -84$$

روش دوم:

$$\text{مجموع ۴ جمله سوم} = S_{12} - S_8 = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) - \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 6(15 - 33) - 4(15 - 21) = -84$$

۴ ۳۸ با فرض  $a_1 = 5$  و  $a_n = 53$  داریم:

$$\Delta, a_r, \dots, a_{n-1}, \Delta \Rightarrow a_{n-1} - a_r = 36 \Rightarrow a_1 + (n-2)d - (a_1 + d) = 36 \Rightarrow (n-3)d = 36 \quad (1)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 53 = 5 + (n-1)d \Rightarrow (n-1)d = 48 \quad (2)$$

از تقسیم دو رابطه (۱) و (۲)، تعداد جملات و قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(n-3)d}{(n-1)d} = \frac{36}{48} \Rightarrow \frac{n-3}{n-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4n - 12 = 3n - 3 \Rightarrow n = 9 \xrightarrow{(n-3)d=36} d = 6$$

بنابراین واسطه‌های عددی به صورت ۱۱, ۱۷, ۰۰۰, ۴۷ می‌باشند که شامل ۷ جمله هستند. در نتیجه:

$$S_7 = \frac{7}{2}(11 + 47) = 7 \times 29 = 203$$

در دنباله  $a_n = 2n - 1$  جمله اول برابر ۱ و جمله دوم برابر ۳ است، پس قدرنسبت دنباله ۲ می‌شود. از طرفی می‌دانیم اگر هر جمله را از جمله

۳ ۳۹

بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{2}{a_3 a_4} + \dots + \frac{2}{a_{12} a_{13}} &= \frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \frac{d}{a_3 a_4} + \dots + \frac{d}{a_{12} a_{13}} \\ &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{a_{13} - a_{12}}{a_{12} a_{13}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{12}} - \frac{1}{a_{13}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{13}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2(13)-1} = 1 - \frac{1}{25} = 1 - \frac{4}{100} = 0.96 \end{aligned}$$

۴ ۴۰

$$S_m = S_n \Rightarrow \frac{m}{2}(2a + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow 2am + m(m-1)d = 2an + n(n-1)d$$

$$\Rightarrow 2a(m-n) + (m^2 - m - n^2 + n)d = 0 \Rightarrow 2a(m-n) + ((m^2 - n^2) - (m-n))d = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } (m-n) \text{ فاکتور می‌گیریم}} (m-n)(2a + (m+n-1)d) = 0 \xrightarrow{m \neq n} 2a + (m+n-1)d = 0 \Rightarrow S_{m+n} = 0$$

$$a_6 - a_1 = 24 \Rightarrow a_1 q^5 - a_1 = 24 \Rightarrow a_1(q^5 - 1) = 24$$

۲ ۴۱ می‌دانیم  $a_6 - a_1 = 24$  است، پس با توجه به  $a_n = a_1 q^{n-1}$  داریم:

از طرفی  $S_5 = 12$  است، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} \xrightarrow{a_1(q^5-1)=24} 12 = \frac{-24}{1-q} \Rightarrow 1-q = \frac{-24}{12} \Rightarrow 1-q = -2 \Rightarrow q = 3$$

۲ ۴۲ می‌دانیم اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آنگاه  $b^2 = ac$ . پس ابتدا مقدار  $x$  را به دست می‌آوریم و به کمک آن  $q$  را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 = 2\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2, 1, \frac{1}{2}, \dots \Rightarrow \text{دنباله نزولی} \\ x = -1 \Rightarrow 2, -1, \frac{1}{2}, \dots \Rightarrow \text{دنباله غیرنزولی} \Rightarrow q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{a(1-q^6)}{1-q} = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2(1 - \frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{2(\frac{63}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

۴ ۴۳ طبق واسطه هندسی بین سه جمله متوالی دنباله هندسی داریم:

$$a^2 = 4 \times 9 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \Rightarrow 4, 6, 9, \dots \Rightarrow \text{دنباله صعودی است.} \\ a = -6 \Rightarrow 4, -6, 9, \dots \Rightarrow \text{دنباله نه صعودی و نه نزولی است.} \end{cases}$$

پس  $a = 6$  قابل قبول است و در نتیجه  $q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$  می شود. بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}} = -8(1-\frac{729}{64}) = -8(-\frac{665}{64}) = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

با توجه به رابطه  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  ( $q \neq 1$ ) داریم: ۴۴

$$\begin{cases} S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 153 \\ S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 136 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1+q^3}{1-q^3} = \frac{153}{136}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

حال نسبت  $\frac{a_1}{a_5}$  را تعیین می کنیم:

یادت باشه در تست های این بخش، هر جا در معادله ای  $(1-q)$  رو با هم سازه کردیم، با فرض  $q \neq 1$  این کار رو انجام دادیم.

**تذکره:** با توجه به درسنامه بین مجموع  $n$  جمله اول و مجموع  $2n$  جمله اول، رابطه  $\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$  ( $q \neq \pm 1$ ) برقرار است، بنابراین در این تست از همان ابتدا می توانستیم بگوییم  $\frac{S_6}{S_3} = q^3 + 1$  تا محاسبات ما بسیار کوتاه تر شود. در تست های بعد هم می توانید در صورت امکان این کار را انجام دهید.

از معادله  $S_5 = (4\sqrt{2} + 1)S_4$  مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس حاصل  $\frac{S_8}{S_4}$  را به دست می آوریم: ۴۵

$$S_5 = (4\sqrt{2} + 1)S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = (4\sqrt{2} + 1) \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \xrightarrow{\text{مزدوج}} (1-q^5)(1+q^4) = (4\sqrt{2} + 1)(1-q^4)$$

$$1+q^4 = 4\sqrt{2} + 1 \Rightarrow q^4 = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = (\sqrt{2})^4 \Rightarrow q = \sqrt{2} \quad (*)$$

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} \xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 1+q^4 \stackrel{(*)}{=} 1+(\sqrt{2})^4 = 1+2^2 = 5$$

۴۶

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_4)^3} = \frac{a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2}{(a_1 q^3)^3} = 64 \Rightarrow \frac{a_1^3 q^3}{a_1^3 q^9} = 64 \Rightarrow q^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{دنباله نزولی با جمله اول مثبت}} q = \frac{1}{4}$$

باز هم یاد آور می شویم که اگر  $q < 0$  باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است. حال  $\frac{S_6}{a_1}$  را تعیین می کنیم:

$$\frac{S_6}{a_1} = \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{a_1} = \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{3}{4}} = \frac{63}{32}$$

چون شش جمله درج می کنیم، پس دنباله حاصل ۸ جمله دارد که جمله اول ۲ و جمله هشتم برابر  $16\sqrt{2}$  است: ۴۷

$$a_8 = a_1 q^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = 2q^7 \Rightarrow 8\sqrt{2} = q^7 \Rightarrow 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = q^7 \Rightarrow 2^{\frac{7}{2}} = q^7 \Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^7 = q^7 \Rightarrow (\sqrt{2})^7 = q^7 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-30}{1-\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۴۸

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q)(1+q)(1+q^2)}{1-q} = 3 \Rightarrow a_1(1+q)(1+q^2) = 3$$

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1$$

از تقسیم دو رابطه بالا داریم:

$$\frac{a_1(1+q)(1+q^2)}{a_1(1+q^2)} = 3 \Rightarrow 1+q = 3 \Rightarrow q = 2 \xrightarrow{a_1(1+q^2)=1} a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{\frac{1}{5}(1-64)}{-1} = \frac{1}{5}(63) = 12\frac{3}{5}$$

**۴۹** **روش اول:** هر لایه، مقداری از مواد، مضر را جذب و مقداری را رد می‌کند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا مجموع جذب لایه‌ها بیشتر از ۹۷ درصد شود.

اولین لایه، نصف مواد مضر را جذب و نصف آن را رد می‌کند، دومین لایه از نیم باقی مانده، نیمی از مواد مضر یعنی  $\frac{1}{4}$  آن را جذب می‌کند و به همین ترتیب مقداری که هر لایه، مواد مضر را جذب می‌کند به صورت دنبالهٔ زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{2}$  می‌باشد. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از جملات این دنباله جمع شود تا حاصل، حداقل ۹۷ درصد شود:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \approx 33.3 \Rightarrow n \geq 6$$

توجه کنید که با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادلهٔ  $2^n \geq 33.3$  و این‌که  $2^6 = 64$ ، در می‌یابیم که حداقل مقدار  $n$  برابر ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل ۶ تا باشد.

**روش دوم:** وقتی می‌گوییم ۹۷ درصد مواد، جذب لایه‌های محافظتی شده، بدین معنی است که ۳ درصد مواد مضر از لایه‌ها رد شده‌اند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا کم‌تر از ۳ درصد مواد از لایه‌ها خارج شوند. اولین لایه شدت تابش را  $\frac{1}{2}$  می‌کند، یعنی نصف مواد مضر از آن رد می‌شوند، لایهٔ دوم از نیم باقی مانده، نیمی از مواد مضر یعنی  $\frac{1}{4}$  را رد می‌کند و به همین ترتیب در لایهٔ  $n$  ام  $\frac{1}{2^n}$  از مواد مضر از آن خارج می‌شود. بنابراین:

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \Rightarrow n \geq 6$$

روش اول، روش کتاب درسیه، اما روش دوم، سریع‌تر و کوتاه‌تره. سعی کن مفهوم هر دو روش رو فوب یاد بگیری.

**۵۰** **روش اول:** مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحلهٔ اول  $\frac{1}{4}$ ، مرحلهٔ دوم  $\frac{1}{16}$ ، مرحلهٔ سوم  $\frac{1}{64}$  و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول  $a_1 = \frac{1}{4}$  و قدرنسبت  $q = \frac{1}{4}$  می‌دهند:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{99}{100}$  باشد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 4^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

یعنی بعد از مرحلهٔ هفتم، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

**روش دوم:** به جای این‌که بگوییم، مجموع مساحت‌های رنگ شده بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{99}{100}$  باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ نشده کم‌تر یا مساوی  $\frac{1}{100}$  باشد. در مرحلهٔ اول  $\frac{3}{4}$ ، مرحلهٔ دوم  $\frac{9}{16}$ ، مرحلهٔ سوم  $\frac{27}{64}$  و به همین ترتیب در مرحلهٔ  $n$  ام،  $\frac{3^n}{4^n}$  از مساحت مربع رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{3^n}{4^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 4^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

**۵۱** می‌دانیم اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی  $a_1$ ، قدرنسبت آن  $q$  و تعداد جملات آن  $n$  باشد، آن‌گاه مجموع تمام جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

دنبالهٔ جملات ردیف فرد، یک دنبالهٔ هندسی است که جملهٔ اول آن  $a_1$ ، قدرنسبت آن  $q^2$  و تعداد جملات آن  $\frac{n}{2}$  می‌باشد. پس مجموع جملات ردیف فرد برابر است با:

$$S_{\frac{n}{2}} = \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2}$$

در نتیجه داریم:

$$S_n = 2S_{\frac{n}{2}} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 2 \times \frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{2}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{1}{1+q} = 1 \Rightarrow q+1=2 \Rightarrow q=1$$



۵۲ جملات اول، دوم و ششم دنباله حسابی به صورت  $a, a+d, a+\delta d$  هستند. چون این جملات، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس می‌توان نوشت:

$$a(a+\delta d) = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + \delta ad = a^2 + d^2 + 2ad \Rightarrow \delta ad = d^2 \xrightarrow{d \neq 0} d = \delta a$$

$$S_n = \frac{n}{\delta} (\delta a + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{1}{\delta} (\delta a + \delta d) \xrightarrow{d=\delta a} S_n = \delta(2a + \delta a) = \delta(2+\delta)a = 14\delta a$$

۵۳ روش اول: جملات اول، پنجم و هفدهم دنباله حسابی به صورت  $a, a+4d, a+16d$  هستند. چون این جملات، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند پس می‌توان نوشت:

$$a(a+16d) = (a+4d)^2 \Rightarrow a^2 + 16ad = a^2 + 16d^2 + 8ad \Rightarrow 8ad = 16d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a = 2d$$

با جایگزینی  $a = 2d$  جملات  $a, a+4d, a+16d$  به صورت  $2d, 6d, 18d$  در می‌آیند. چون این اعداد، جملات متوالی دنباله هندسی‌اند، پس  $q = 3$  می‌شود. حال مجموع چهار جمله اول دنباله هندسی را به دست می‌آوریم:

$$S_4 = \frac{a(1-q^4)}{1-q} = \frac{a(1-3^4)}{1-3} = \frac{a(-80)}{-2} = 40a$$

یادآوری: اگر در یک دنباله حسابی غیر ثابت جملات  $m$ ام،  $n$ ام و  $p$ ام ( $p > n > m$ ) به ترتیب جملات متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه

$$\text{قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه } q = \frac{p-n}{n-m} \text{ به دست می‌آید.}$$

روش دوم: با توجه به مطلب بالا  $q = \frac{17-5}{5-1} = \frac{12}{4} = 3$  می‌باشد و در ادامه مانند راه حل اول  $S_4 = 40a$  به دست می‌آید.

۵۴ تعداد گندم‌های موجود در هر خانه تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند که جمله اول آن ۱، قدرنسبت آن ۲ و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد. تعداد

کل گندم‌ها حاصل جمع جملات این دنباله است:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1 = (2^4)^{16} - 1 = 16^{16} - 1$$

حال  $16^{16} - 1$  گرم را با ۱۰۰۰ میلیارد تن مقایسه می‌کنیم. (با صرف نظر کردن از یک گرم عدد  $16^{16} - 1$  را به صورت ساده‌تر  $2^{64}$  می‌نویسیم). می‌دانیم هزار میلیارد برابر  $10^{12}$  و هر یک تن برابر  $10^6$  گرم است، پس هزار میلیارد تن برابر  $10^{18}$  گرم می‌باشد. از طرفی  $(10^3)^6 = 10^{18}$  و  $2^6 = 64 = (2^{10})^6 = 2^{60}$  است.

$$2^{64} > 10^{18} \Rightarrow 2^4 (2^{10})^6 > (10^3)^6 \Rightarrow 2^4 (2^{10})^6 > (10^3)^6 \Rightarrow 2^{10} > 10^3 \Rightarrow 2^{10} > 10^3, 10^3 = 1000 \Rightarrow 2^{10} = 1024, 10^3 = 1000$$

بنابراین داریم:

پس وزن کل گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است. (البته با مقایسه بالا حتی می‌توان گفت از ۱۶۰۰۰ میلیارد تن هم بیشتر است.)

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروفه که ابوریحان بیرونی، ریاضی‌دان برهسته ایرانی به روش خاص خودش اون رو حل کرده. عدد حاصل، این قدر زیاده که اگر کل مساحت کره زمین رو هم گندم بکاریم باز پاسخگوی این میزان گندم نیست.

۵۵ جملات دنباله به صورت  $1, 2, 4, 8, \dots$  است که باید  $S_n \geq 64(1000)$  باشد. (هر کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است.) در نتیجه داریم:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} \geq 64(1000) \Rightarrow 2^n - 1 \geq 64(1000) \Rightarrow 2^n \geq 64(1000) + 1$$

برای حل ساده‌تر نامعادله بالا ابتدا از عدد ۱ صرف نظر می‌کنیم:

$$2^n \geq 64(1000) \Rightarrow 2^n \geq 2^6(1000) \Rightarrow \frac{2^n}{2^6} \geq 1000 \Rightarrow 2^{n-6} \geq 1000$$

می‌دانیم  $2^{10} = 1024$  و  $2^9 = 512$  می‌باشد، بنابراین نامعادله بالا زمانی برقرار است که  $n - 6 \geq 10$  و در نتیجه  $n \geq 16$  باشد.

۵۶ روش اول: می‌دانیم حاصل تقسیم دو جمله متوالی یک دنباله هندسی برابر قدرنسبت است:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{27}$$

در نتیجه نسبت مجموع چهار جمله اول به مجموع چهار جمله دوم برابر است با:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3}{a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7} = \frac{a_1(1+q+q^2+q^3)}{q^4(a_1(1+q+q^2+q^3))} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\sqrt[4]{27})^4} = \frac{1}{27}$$

روش دوم: قدرنسبت مانند روش اول برابر  $q = \sqrt[4]{27}$  است.

مجموع چهار جمله اول  $S_4$  و مجموع چهار جمله دوم  $S_8 - S_4$  می‌باشد. حال می‌خواهیم  $\frac{S_4}{S_8 - S_4}$  را تعیین کنیم. برای راحتی کار ابتدا  $\frac{S_8 - S_4}{S_4}$  را

به دست آورده و جواب حاصل را معکوس می‌کنیم:

$$\frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{S_8}{S_4} - 1 = \frac{\frac{a(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a(1-q^4)}{1-q}} - 1 = \frac{1-q^8}{1-q^4} - 1 = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} - 1 = 1+q^4 - 1 = q^4 = (\sqrt[4]{27})^4 = 27 \Rightarrow \frac{S_4}{S_8 - S_4} = \frac{1}{27}$$

۴۵۷ می‌دانیم اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  دنباله‌های هندسی تشکیل دهند، آن‌گاه  $b^2 = ac$  است، بنابراین:

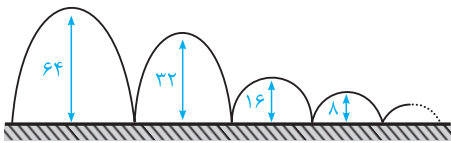
$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 2(x^2) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ (غ‌ق‌ق)} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

از جواب  $x = -2$  دنباله هندسی  $8, -4, 2, \dots$  به دست می‌آید که نزولی نیست، اما از جواب  $x = 2$  دنباله هندسی نزولی  $8, 4, 2, \dots$  به دست می‌آید که قدرنسبت آن برابر  $q = \frac{1}{2}$  و  $a_1 = 8$  است. در نتیجه داریم:

$$S_7 = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = 16(1 - (\frac{1}{2})^7) = 16 - 16 \times \frac{1}{2^7} = 16 - \frac{16}{2^7} = 16 - \frac{16}{128} = 16 - \frac{1}{8} = \frac{127}{8}$$

اگره نمونه حل معادله  $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$  رو فوب نفهمیدی، در بخش بعدی این نوع معادلات رو توضیح می‌دیم.



۴۵۸ وقتی توپ را پرتاب می‌کنیم، ۶۴ متر بالا می‌رود و بعد ۶۴ متر پایین می‌آید، یعنی از لحظه پرتاب تا برخورد اول  $2 \times 64 = 128$  متر مسافت طی می‌کند، سپس ۳۲ متر بالا و ۳۲ متر پایین می‌آید، یعنی در مرحله دوم ۶۴ متر طی می‌کند. بنابراین دنباله مسافت‌های طی شده (برحسب متر) در هر مرحله به صورت زیر است:

$128, 64, 32, \dots$

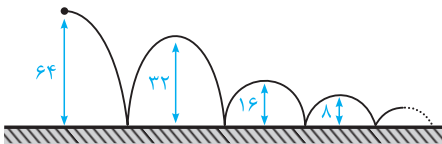
این دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 128$  و قدرنسبت  $q = \frac{1}{2}$  است.

برای این‌که کل مسافت پیموده شده در لحظه‌ای که توپ برای بار دهم به زمین برخورد می‌کند را حساب کنیم، کافی است  $S_{10}$  را به دست آوریم:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{128(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = 256(1 - \frac{1}{2^{10}}) = 256(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}) = 256 \times (\frac{1024 - 1}{1024}) = \frac{1023}{4} = 255.75 \text{ متر}$$

سؤال: در شرایط این تست اگر توپ را از ارتفاع ۶۴ متری رها کنیم چه مسافتی را طی خواهد کرد؟

در این حالت توپ فقط در مرتبه اول برخورد به زمین، یک مسافت از بالا به پایین را طی می‌کند. اما در مراتب بعدی یک مسافت پایین به بالا و یک مسافت بالا به پایین را طی می‌کند. یعنی در اولین برخورد ۶۴ متر، دومین برخورد  $64 = 2 \times 32$  متر و سومین برخورد  $32 = 2 \times 16$  متر را می‌پیماید که به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. یعنی کل مسافت حاصل  $a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 + 64 + 64 + 32 + 16 + \dots + a_1$  می‌باشد که  $64$  متر کم‌تر از حاصل این تست می‌باشد، بنابراین:  $191.75 - 64 = 127.75$ .



۴۵۹ اگر موجودی اولیه را  $m$  در نظر بگیریم، بعد از یک سال، سود آن برابر  $\frac{2}{100}m = \frac{2}{100}m$  است. پس در پایان سال اول، موجودی برابر

$$a_1 = m + \frac{2}{100}m = m(1 + \frac{2}{100})$$

$$a_2 = a_1 + \frac{2}{100}a_1 = a_1(1 + \frac{2}{100}) = m(1 + \frac{2}{100})(1 + \frac{2}{100}) = m(1 + \frac{2}{100})^2$$

به همین ترتیب مقدار موجودی در هر سال، جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $1 + \frac{2}{100} = \frac{102}{100}$  می‌باشد. بنابراین مقدار موجودی بعد از  $n$  سال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = m(1 + \frac{2}{100})^n \Rightarrow a_{10} = 200000(1 + \frac{2}{100})^{10} = 2 \times 10^5 (\frac{102}{100})^{10} = 2 \times 10^5 \times \frac{102^{10}}{100^{10}} = 20(250000) = 5000000$$

۴۶۰ محیط دایره به قطر  $d$  برابر است با  $P = \pi d$ ، پس محیط نیم‌دایره  $\frac{\pi d}{2}$  می‌باشد.

در این سؤال هر بار که موج به محور برخورد می‌کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کم می‌شود، یعنی ۸۰ درصد از طول قطر آن باقی می‌ماند، بنابراین داریم:

$$1, \frac{4}{5}, (\frac{4}{5})^2, \dots ; \text{ دنباله محیط نیم‌دایره‌ها } : \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}(\frac{4}{5}), \frac{\pi}{2}(\frac{4}{5})^2, \dots$$

ملاحظه می‌شود که محیط نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{\pi}{2}$  و قدرنسبت  $\frac{4}{5}$  می‌دهند، در نتیجه:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{\frac{\pi}{2}(1 - (\frac{4}{5})^{\infty})}{1 - \frac{4}{5}} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{5\pi}{2}(1 - (\frac{4}{5})^{\infty})$$

۱ ۶۱ چون دنباله نه صعودیه و نه نزولی، پس  $q < 0$  و از همون اول گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شن.

مجموع جملات پنجم تا دوازدهم برابر  $S_{12} - S_4$  می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_4 = \frac{1}{r^0}(S_{12} - S_4) \Rightarrow r^0 S_4 = S_{12} - S_4 \Rightarrow S_{12} = 21S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = \frac{21a_1(1-q^4)}{1-q} \Rightarrow 1-q^{12} = 21(1-q^4)$$

$$\Rightarrow (1-q^4)(1+q^4+q^8) = 21(1-q^4) \Rightarrow 1+q^4+q^8 = 21 \Rightarrow q^8+q^4-20=0 \Rightarrow (q^4+5)(q^4-4)=0$$

$$\begin{cases} q^4 = -5 \text{ (غ قق)} \\ q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{4} \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{q < 0} q = -\sqrt{2} \end{cases}$$

۳ ۶۲ اگر جملات دنباله را  $a$ ،  $aq$  و  $aq^2$  در نظر بگیریم، داریم:

$$a + aq + aq^2 = 21 \Rightarrow a(1+q+q^2) = 21 \Rightarrow 1+q+q^2 = \frac{21}{a} \quad (*)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{q^2+q+1}{aq^2} = \frac{7}{12} \xrightarrow{(*)} \frac{21}{aq^2} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{21}{a^2q^2} = \frac{7}{12} \Rightarrow a^2q^2 = \frac{21 \times 12}{7} = 36 \Rightarrow aq = \pm 6$$

اگر  $aq = 6$  در نظر بگیریم، آن‌گاه  $a = \frac{6}{q}$  می‌شود، در نتیجه:

$$a + aq + aq^2 = 21 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6 + 6q = 21 \Rightarrow 6q - 15 + \frac{6}{q} = 0 \xrightarrow{\times q \neq 0} 6q^2 - 15q + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow q = 2, \frac{1}{2} \xrightarrow{a = \frac{6}{q}} a = 3, 12$$

پس سه عدد به صورت ۱۲، ۶، ۳ می‌باشند که عدد بزرگ‌تر برابر ۱۲ می‌شود. این تست با  $aq = -6$  نیز جواب می‌دهد که در گزینه‌ها نیست.

۴ ۶۳ ابتدا از  $x^3$  فاکتور می‌گیریم و بعد از اتحاد چاق و لاغر  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$  استفاده می‌کنیم:

$$x^9 + x^3y^3 = x^3(x^6 + y^3) = x^3((x^2)^3 + y^3) = x^3(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2)$$

۱ ۶۴ می‌دانیم اگر  $n$  فرد باشد  $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ ، یعنی  $x^n + y^n$  بر  $x+y$  بخش پذیر است، بنابراین عبارت

$$(x^3 - x^2 + 3)^9 + (x^3 + x^2 + 1)^9 \text{ نیز بر } (x^3 + 2) \text{ بخش پذیر است.}$$

۱ ۶۵ با استفاده از اتحاد  $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$  ( $n$  طبیعی و فرد) عبارت  $x^5 + 1$  را تجزیه می‌کنیم:

$$A = \frac{(x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} + x^5 + x^3 + x = x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{3}} (\sqrt{3})^5 + (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$$

۲ ۶۶ روش اول: عبارت  $1 + x + x^2 + \dots + x^8$  مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $x$  و عبارت  $1 - x + x^2 - \dots + x^8$  مجموع ۹ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت  $-x$  می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطه  $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$  داریم:

$$A = \frac{1(1-x^9)}{1-x} \times \frac{1-(-x)^9}{1+x} = \frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^9}{1-2} = \frac{1-512}{-1} = 511$$

روش دوم: از اتحادهایی که در درسنامه به آن‌ها اشاره شد استفاده می‌کنیم:

$$(n \text{ طبیعی}) \quad x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) \Rightarrow x^9 - 1 = (x-1)(x^8 + x^7 + \dots + 1)$$

$$(n \text{ طبیعی و فرد}) \quad x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) \Rightarrow x^9 + 1 = (x+1)(x^8 - x^7 + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8) = \frac{x^9-1}{x-1} \times \frac{x^9+1}{x+1} = \frac{x^{18}-1}{x^2-1} \xrightarrow{\text{مانند روش اول}} 511$$

**۶۷** عبارت  $A = 1 + t + t^2 + \dots + t^{10} + t^{11}$ ، مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $q = t$  می‌باشد. هم‌چنین عبارت  $B = 1 + t^3 + t^6 + t^9$  مجموع ۴ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $q = t^3$  می‌باشد، بنابراین:

$$A = S_{12} = \frac{1(1-t^{12})}{1-t}$$

$$B = S_4 = \frac{1(1-t^{12})}{1-t^3} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1-t^3}{1-t} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t} = 1+t+t^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{2\sqrt{5}-2+6-2\sqrt{5}}{4} = 1+1=2$$

**۶۸** ابتدا معادله را به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  درآورده و سپس شرط  $\Delta < 0$  را برای آن در نظر می‌گیریم:

$$k(x^2 + 5x + 4) = x \Rightarrow kx^2 + (\Delta k - 1)x + 4k = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (\Delta k - 1)^2 - 16k^2 < 0 \Rightarrow 2\Delta k^2 - 10k + 1 - 16k^2 < 0 \Rightarrow 9k^2 - 10k + 1 < 0$$

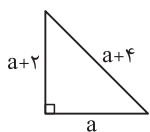
در معادله  $9k^2 - 10k + 1 = 0$  مجموع ضرایب برابر صفر می‌باشد، پس ریشه‌های آن برابر ۱ و  $\frac{1}{9}$  است، بنابراین جواب نامعادله به صورت  $\frac{1}{9} < k < 1$  درمی‌آید.

**۶۹** ابتدا معادله را به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  نوشته و سپس شرط  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  را بررسی می‌کنیم:

$$m(x^2 + 1) + (x + 2)^2 = 5 - x^2 \Rightarrow mx^2 + m + x^2 + 4x + 4 - 5 + x^2 = 0 \Rightarrow (m + 2)x^2 + 4x + m - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} 16 - 4(m + 2)(m - 1) > 0 \Rightarrow 16 - 4(m^2 + m - 2) > 0 \Rightarrow -4m^2 - 4m + 24 > 0 \Rightarrow -4(m^2 + m - 6) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + m - 6 < 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 3) < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -3 < m < 2$$



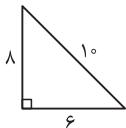
**۷۰** در مثلث قائم‌الزاویه، بزرگ‌ترین ضلع، وتر مثلث است، پس در این مثلث، طول وتر  $a + 4$  می‌باشد. بنابراین طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$(a + 4)^2 = (a + 2)^2 + a^2 \Rightarrow a^2 + 8a + 16 = a^2 + 4a + 4 + a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a + 2)(a - 6) = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ (غ‌ق‌ق)} \text{ و } a = 6$$

با توجه به این‌که  $a = 6$ ، پس طول اضلاع این مثلث به صورت ۶، ۸ و ۱۰ می‌شوند و در نتیجه داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$



**۷۱** روش اول: معادله درجه دومی که دارای ریشه مضاعف  $x = 3$  است به صورت  $kx^2 - 6kx + 9k = 0$  می‌باشد. حال با توجه به معادله  $2mx^2 + (m + 1)x + n = 0$  داریم:

$$\begin{cases} 2m = k \\ m + 1 = -6k \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{9k}{k} = 9 \\ n = 9k \end{cases}$$

روش دوم: اگر معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  ریشه مضاعف داشته باشد، آن‌گاه  $\Delta = 0$  است که طول ریشه مضاعف آن برابر  $-\frac{b}{2a}$  می‌باشد. پس داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(m+1)}{4m} = 3 \Rightarrow -m - 1 = 12m \Rightarrow 13m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{13} \quad (*)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4(2m)(n) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{13} + 1\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{13}\right)(n) = 0 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{-8n}{13}$$

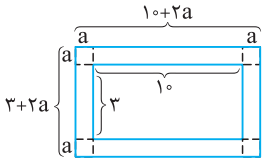
$$\Rightarrow \frac{144}{13} = -8n \Rightarrow n = -\frac{18}{13} \quad (*) \Rightarrow \frac{n}{m} = 18$$

**۷۲** سن فعلی دو برادر را  $X$  و  $Y$  در نظر می‌گیریم، چون اختلاف سن آن‌ها ۴ سال است، پس  $X - Y = 4$  و در نتیجه  $X = Y + 4$  است. از طرفی چهار سال بعد، سن دو برادر  $(X + 4)$  و  $(Y + 4)$  می‌شود، بنابراین:

$$(X + 4)(Y + 4) = 60 \xrightarrow{x=y+4} (y + 4 + 4)(y + 4) = 60 \Rightarrow (y + 8)(y + 4) = 60$$

$$\Rightarrow y^2 + 12y + 32 = 60 \Rightarrow y^2 + 12y - 28 = 0 \Rightarrow (y + 14)(y - 2) = 0 \Rightarrow y = -14 \text{ (غ‌ق‌ق)} \text{ و } y = 2$$

$$\xrightarrow{x=y+4} x = 6 \Rightarrow x + y = 8$$



**۷۳** با توجه به صورت سوال، مساحت استخر برابر  $3 \times 10 = 30$  و مساحت آبراه بتونی ۱۴ متر مربع است، پس مساحت کل برابر ۴۴ متر مربع می‌باشد. اگر پهنای آبراه بتونی را  $a$  در نظر بگیریم، طول کل آبراه برابر  $10 + 2a$  و عرض کل آن برابر  $3 + 2a$  می‌شود. بنابراین داریم:

$$S = (10 + 2a)(3 + 2a) = 44 \Rightarrow 30 + 20a + 6a + 4a^2 = 44$$

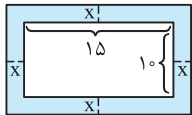
$$\Rightarrow 4a^2 + 26a - 14 = 0 \Rightarrow 2a^2 + 13a - 7 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 56}}{4} = \frac{-13 \pm 15}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -7 < 0 \text{ (غقیق)} \end{cases}$$

در نتیجه پهنای آبراه بتونی  $\frac{1}{2}$  متر می‌باشد.

**۷۴** اگر فاصله لبه عکس تا قاب را  $x$  در نظر بگیریم، طول و عرض قاب به ترتیب  $15 + 2x$  و  $10 + 2x$  می‌شود. چون مساحت قاب برابر  $300$  سانتی‌متر مربع است، پس داریم:

$$(15 + 2x)(10 + 2x) = 300 \Rightarrow 150 + 30x + 20x + 4x^2 = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$



$$\Rightarrow 2x^2 + 25x - 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 + 4 \times 2 \times 75}}{4} = \frac{-25 \pm \sqrt{25(25 + 24)}}{4}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{25 \times 49}}{4} = \frac{-25 \pm (5 \times 7)}{4} = \frac{-25 \pm 35}{4} \xrightarrow{x > 0} \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{طول قاب} = 15 + 2x = 20 \\ \text{عرض قاب} = 10 + 2x = 15 \end{cases}$$

$$\text{محیط قاب} = 2(\text{طول} + \text{عرض}) = 2(20 + 15) = 70$$

**توجه:** برای حل معادله  $4x^2 + 50x - 150 = 0$  از تجزیه نیز می‌توان کمک گرفت:

$$(2x)^2 + 25(2x) - 150 = 0 \Rightarrow (2x - 5)(2x + 30) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{5}{2}$$

**۷۵** اگر طول کاشی را با  $x$  و عرض آن را با  $y$  نمایش دهیم، طبق فرض  $x = 4y + 1$  است. از طرفی می‌دانیم هر متر مربع  $10000 = 100^2$  سانتی‌متر مربع می‌باشد، پس مساحت دیوار  $528000$  سانتی‌متر مربع است. در نتیجه باید مساحت  $2000$  مستطیل برابر  $528000$  بشود:

مساحت مستطیل

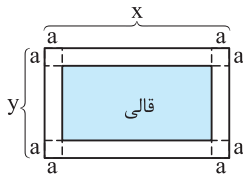
$$2000(xy) = 528000 \Rightarrow 2xy = 528 \Rightarrow xy = 264 \xrightarrow{x=4y+1} (4y+1)y = 264$$

$$\Rightarrow 4y^2 + y - 264 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(4)(-264)}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{8} = \frac{-1 \pm 65}{8} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \Rightarrow x = 4y + 1 = 33 \\ y = \frac{-66}{8} < 0 \text{ (غقیق)} \end{cases}$$

برای این که حاصل  $\sqrt{4225}$  رو تعیین کنی، می‌تونی از امتحان کردن پند تا عدد کمک بگیری. از اعداد رند شروع می‌کنیم. مثلاً  $50^2 = 2500$ ،  $60^2 = 3600$  و  $70^2 = 4900$ . پس معلومه که بین  $60$  تا  $70$  هست. حالا آگه پند تا عدد دیگه رو هم امتحان کنی به  $65$  میرسی.

البته آگه همون اول توی معادله  $(4y + 1)y = 264$ ، عدد  $264$  رو تجزیه کنی و ببینی ضرب کدوم عددها  $264$  می‌شه، چون  $8 \times 33 = 264$  پس  $y = 8$  به دست میار.

**۷۶** طول و عرض اتاق را به ترتیب  $x$  و  $y$  در نظر می‌گیریم. داریم:



$$\text{محیط اتاق} = 20 \Rightarrow 2(x + y) = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

$$\text{مساحت اتاق} = 24 \Rightarrow xy = 24 \xrightarrow{y=10-x} x(10-x) = 24 \Rightarrow -x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = 4 \\ x = 4 \Rightarrow y = 6 \text{ (غقیق)} \end{cases} \text{ (چون طول از عرض بزرگتر است.)}$$

پس طول اتاق برابر  $x = 6$  و عرض آن برابر  $y = 4$  است. اگر فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار را  $a$  در نظر بگیریم، طول قالی برابر  $x - 2a = 6 - 2a$  و عرض قالی برابر  $y - 2a = 4 - 2a$  می‌شود. بنابراین:

$$\text{محیط قالی} = 2(\text{طول قالی} + \text{عرض قالی}) = 2(6 - 2a + 4 - 2a) = 12 \Rightarrow 2(10 - 4a) = 12 \Rightarrow 10 - 4a = 6$$

$$\Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{طول قالی} = 6 - 2a = 6 - 2 = 4 \\ \text{عرض قالی} = 4 - 2a = 4 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت قالی} = 2 \times 4 = 8$$