فهرست

فصل اوّل:

جبر و معادله

» درس اوّل: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

» درس دوم: معادلات درجه دوم

» درس سوم: معادلات گویا و گنگ

» درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

» درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

دنبالهٔ حسابی

درس اوّل: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

یادآوری اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر می‌باشند:

$$\underbrace{a_1}_{\text{جملهٔ اول}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a_1+d}_{\text{جملهٔ دوم}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a_1+2d}_{\text{جملهٔ سوم}} \xrightarrow{+d} \underbrace{a_1+3d}_{\text{جملهٔ چهارم}}, \dots$$

نکات در هر دنبالهٔ حسابی نکات زیر برقرار می‌باشد:

۱) جملهٔ n اُم به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ یا $a_n = a_m + (n-m)d$ می‌باشد. به عنوان مثال $a_{14} = a_1 + 13d$ ، $a_{14} = a_6 + 8d$ و $a_{14} = a_2 + 12d$ می‌باشد.

۲) قدرنسبت دنباله را می‌توان از رابطه‌های $d = a_n - a_{n-1}$ و $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ به دست آورد.

۳) جملهٔ n اُم، عبارتی درجه یک بر حسب n است که در آن ضریب n ، همان قدر نسبت دنباله (d) می‌باشد. به عنوان مثال $a_n = 5 - 3n$ و $b_n = \frac{n}{2} + 1$ جملات n اُم (یا عمومی) دو دنبالهٔ حسابی هستند که قدرنسبت آن‌ها به ترتیب ۳- و $\frac{1}{2}$ است، ولی $c_n = 3n^2 + 5$ نمی‌تواند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد چون درجهٔ یک نیست.

۴) اگر $d > 0$ ، آن‌گاه دنباله صعودی و اگر $d < 0$ ، آن‌گاه دنباله نزولی می‌باشد.

۵) اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی یا متساوی‌الفاصله از یک دنبالهٔ حسابی (عددی) باشند، آن‌گاه $2b = a + c$ ، یعنی دو برابر جملهٔ وسط، برابر است با مجموع دو جملهٔ دیگر، در این صورت b را واسطهٔ حسابی (یا عددی) بین a و c می‌نامند.

تست آموزشی

جملهٔ سوم یک دنبالهٔ حسابی ۷ و قدرنسبت آن ۲ می‌باشد. جملهٔ عمومی این دنباله کدام است؟

۱) $a_n = 3n - 2$ ۲) $a_n = 2n + 1$

۳) $a_n = n + 4$ ۴) $a_n = 2n + 5$

پاسخ گزینهٔ «۲»؛ روش اول: جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی برابر $a_n = a_1 + (n-1)d$ می‌باشد. $a_3 = 7$ و $d = 2$ ، بنابراین داریم:

$$a_3 = 7 \Rightarrow a_1 + 2d = 7 \Rightarrow a_1 + 2 \times 2 = 7 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \times 2 \Rightarrow a_n = 2n + 1$$

روش دوم: چون قدرنسبت دنباله برابر ۲ می‌باشد، پس $a_n = 2n + \square$. حال برای تعیین $\square$ ، چون $a_3 = 7$ ، پس در جملهٔ عمومی، اگر $n = 3$ را جایگذاری کنیم، حاصل باید ۷ شود. بنابراین $\square = 1$ و در نتیجه $a_n = 2n + 1$ می‌باشد.

۱ در یک دنبالهٔ حسابی $2a_4 + 3a_7 - a_9 = 20$ است، جملهٔ پنجم این دنباله، کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۴

گزینهٔ «۳»

پاسخ: با استفاده از رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، کافی است جملات را برحسب a_1 و d بنویسیم:

$$2(a_1 + 3d) + 3(a_1 + 6d) - (a_1 + 8d) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 6d + 3a_1 + 18d - a_1 - 8d = 20 \Rightarrow 4a_1 + 16d = 20 \xrightarrow{\div 4} \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5} = 5 \Rightarrow a_5 = 5$$

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات چهارم و هفدهم به ترتیب ۷ و ۱۳- می‌باشند. جملهٔ سی‌ام این دنباله کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۳- ۳) $\frac{20}{13}$ ۴) $-\frac{20}{13}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

روش اول: با استفاده از رابطهٔ $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ قدر نسبت را پیدا می‌کنیم:

$$a_4 = 7 \text{ و } a_{17} = -13 \Rightarrow d = \frac{a_{17} - a_4}{17 - 4} = \frac{-13 - 7}{13} = -\frac{20}{13}$$

$$a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 7 = a_1 + 3 \times (-\frac{20}{13}) \Rightarrow a_1 = \frac{151}{13} \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29d = \frac{151}{13} + 29 \times (-\frac{20}{13}) = -\frac{429}{13} = -33$$

روش دوم: می‌توانیم از رابطهٔ $a_n = a_m + (n-m)d$ استفاده کنیم:

$$a_{17} = a_4 + 13d \Rightarrow -13 = 7 + 13d \Rightarrow d = -\frac{20}{13} \Rightarrow a_{30} = a_{17} + 13d = -13 + 13 \times (-\frac{20}{13}) = -13 - 20 = -33$$

۳ دنبالهٔ $\cdots, -۱۲۹, -۱۴۱, -۱۵۳$ چند جملهٔ منفی دارد؟

گزینهٔ «۲»

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: جملات فوق یک دنبالهٔ حسابی هستند (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$d = a_2 - a_1 = -۱۴۱ - (-۱۵۳) = ۱۲\ ,\ a_1 = -۱۵۳ \Rightarrow a_n = -۱۵۳ + (n-۱)۱۲ \Rightarrow a_n = ۱۲n - ۱۶۵ \xrightarrow{a_n<۰} ۱۲n - ۱۶۵ < ۰ \Rightarrow n < \frac{۱۶۵}{۱۲}$$

$\Rightarrow n < ۱۳/۷۵ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n = ۱, ۲, \dots, ۱۳ \Rightarrow$ ۱۳ جملهٔ منفی دارد.

۴ شمعی به طول ۲۰ سانتی‌متر پس از روشن شدن، در هر ۳ دقیقه ۲/۳ میلی‌متر کوتاه می‌شود. در چندمین دقیقه، طول شمع به ۱۵/۴ سانتی‌متر می‌رسد؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۶۰ ۴) ۶۳

پاسخ: بعد از ۳ دقیقه ۲/۳ میلی‌متر از طول شمع کاسته می‌شود، پس طول شمع تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲۰cm و قدرنسبت ۲/۳mm− می‌دهد.

$a_1 = ۲۰cm = ۲۰۰mm$ ، $d = -۲/۳mm$ و $a_n = ۱۵/۴cm = ۱۵۴mm$

$a_n = a_1 + (n-۱)d \Rightarrow ۱۵۴ = ۲۰۰ + (n-۱)\times(-۲/۳) \Rightarrow n = \frac{۴۶}{۲/۳} + ۱ = ۲۱ \Rightarrow$ زمان مورد نیاز $= (۲۱-۱)\times ۳ = ۶۰$ دقیقه

یعنی پس از گذشت ۶۰ دقیقه طول شمع به ۱۵/۴ سانتی‌متر می‌رسد. (توجه کنید که برای $a_1 = ۲۰cm$ هنوز زمانی سپری نشده است و پس از گذشت ۳ دقیقه اول طول شمع به a_2 می‌رسد و ...)

تعیین تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی

اگر a و b به ترتیب جملات اول و آخر یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشند، آن‌گاه تعداد جملات این دنباله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n = \frac{b-a}{d} + ۱$$

۵ چند عدد سه رقمی طبیعی و بخش‌پذیر بر ۱۳ وجود دارد؟

گزینهٔ «۴»

۱) ۷۹ ۲) ۷۸ ۳) ۶۸ ۴) ۶۹

پاسخ: اولین عدد سه رقمی طبیعی و بخش‌پذیر بر ۱۳، عدد ۱۰۴ و آخرین آن‌ها ۹۸۸ می‌باشد، پس اعداد سه‌رقمی طبیعی بخش‌پذیر بر ۱۳، یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت ۱۳ و جملهٔ اول ۱۰۴ و جملهٔ آخر ۹۸۸ تشکیل می‌دهند، بنابراین تعداد آن‌ها برابر است با:

$$n = \frac{۹۸۸ - ۱۰۴}{۱۳} + ۱ = ۶۸ + ۱ = ۶۹$$

درج n واسطهٔ حسابی بین دو عدد

برای درج n واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b، می‌توان قدرنسبت دنبالهٔ حاصل را از رابطهٔ مقابل به‌دست آورد:

$$d = \frac{b-a}{n+۱}$$

توجه با استفاده از رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-۱)d$ نیز می‌توان مسائل مربوط به واسطه‌های حسابی را حل کرد. به عنوان مثال، اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، ۵ واسطهٔ حسابی درج کنیم، آن‌گاه a را جملهٔ اول و b را جملهٔ هفتم در نظر می‌گیریم و از رابطهٔ $\underbrace{a_7}_{b} = \underbrace{a_1}_{a} + ۶d$ می‌توان d را محاسبه می‌کنیم.

۶ بین دو عدد ۳ و ۶۵، هفده واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. مجموع ۳ واسطهٔ وسط کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) ۱۰۲ ۲) ۶۸ ۳) ۳۴ ۴) ۱۳۶

پاسخ: روش اول: $a = ۳$ ، $b = ۶۵$ و $n = ۱۷$ ، بنابراین با استفاده از رابطهٔ $d = \frac{b-a}{n+۱}$ داریم:

$$d = \frac{b-a}{n+۱} = \frac{۶۵-۳}{۱۷+۱} = \frac{۳۱}{۹}$$

در مجموع ۱۹ جمله داریم، پس جملهٔ وسط، جملهٔ دهم است، در نتیجه:

$$\text{مجموع سه واسطهٔ وسط} = a_9 + a_{10} + a_{11} = (a+۸d) + (a+۹d) + (a+۱۰d) = ۳a + ۲۷d = ۳\times۳ + ۲۷\times\frac{۳۱}{۹} = ۹ + ۹۳ = ۱۰۲$$

روش دوم: می‌دانیم جملهٔ وسط، دو برابر مجموع جملات طرفین است، پس:

$$۲a_{10} = a + b \Rightarrow ۲a_{10} = ۳ + ۶۵ \Rightarrow a_{10} = ۳۴$$

$$\text{مجموع سه واسطهٔ وسط} = \underbrace{a_9 + a_{11}}_{۲a_{10}} + a_{10} = a_{10} + ۲a_{10} = ۳a_{10} = ۳\times۳۴ = ۱۰۲$$

رابطهٔ اندیس‌ها در دنبالهٔ حسابی

بهتر است این قسمت را با مثال بیاموزید. در هر مورد باید به تعداد جملات در طرفین تساوی و نیز مجموع اندیس‌ها توجه شود:

در عبارت $a_۳ + a_{۱۱} = a_۵ + a_۹$، در هر طرف تساوی دو جمله وجود دارد و مجموع اندیس‌ها برابر ۱۴ می‌باشد. طرفین این تساوی $(a_۳ + a_{۱۱} = a_۵ + a_۹)$ را می‌توان با هر دو جملهٔ دیگری که مجموع اندیس‌هایشان برابر ۱۴ شود، جایگزین کرد. به عنوان مثال:

$$a_۳ + a_{۱۱} = a_۶ + a_۸ = a_۷ + a_۷ = ۲a_۷$$

به عنوان مثالی دیگر برای رابطهٔ اندیس‌ها در دنبالهٔ حسابی با سه جمله داریم:

$$a_۵ + a_{۱۹} + a_{۳۰} = a_۱ + a_۳ + a_{۵۰} = ۲a_{۲۰} + a_{۱۴} = ۳a_{۱۸}$$

توجه در رابطهٔ اندیس‌ها، اگر تعداد جملات در طرفین رابطه، با هم مساوی باشند ولی مجموع اندیس‌ها مساوی نباشند، می‌توان با اضافه یا کم کردن ضریب مناسبی از d، به تساوی درست رسید. به عنوان مثال:

$$\underbrace{a_۷ + a_{۱۱}}_{\text{مجموع اندیس‌ها}=۷+۱۱=۱۸} = \underbrace{a_۵ + a_۹}_{\text{مجموع اندیس‌ها}=۵+۹=۱۴} + ۴d \text{ یا } a_۷ + a_{۱۱} = a_۳ + a_{۲۰} - ۵d$$

تست آموزشی

در یک دنبالهٔ حسابی $a_۳ = ۷$، حاصل $a_۱ + a_۲ + a_۶$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۲۱ ۳) ۱۴ ۴) ۲۸

پاسخ گزینهٔ «۲»؛ روش اول:

$$a_۱ + a_۲ + a_۶ = a_۱ + (a_۱ + d) + (a_۱ + ۵d) = ۳a_۱ + ۶d = ۳\underbrace{(a_۱ + ۲d)}_{a_۳} = ۳a_۳ = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

روش دوم: مجموع اندیس‌ها در عبارت $a_۱ + a_۲ + a_۶$ برابر ۹ است و ۳ جمله داریم، پس طبق درسنامه خواهیم داشت:

$$a_۱ + a_۲ + a_۶ = a_۳ + a_۳ + a_۳ = ۳a_۳ = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

۷ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۲۱ و مجموع چهار جملهٔ بعدی ۵۶ است. جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

گزینهٔ «۱»

پاسخ: روش اول:

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۲۱ \Rightarrow ۳a_۱ + ۳d = ۲۱ \xRightarrow{\div ۳} a_۱ + d = ۷ \\ a_۴ + a_۵ + a_۶ + a_۷ = ۵۶ \Rightarrow ۴a_۱ + ۱۸d = ۵۶ \xRightarrow{\div ۲} ۲a_۱ + ۹d = ۲۸ \end{cases} \xRightarrow{\times(-۲)} \begin{cases} -۲a_۱ - ۲d = -۱۴ \\ ۲a_۱ + ۹d = ۲۸ \end{cases} \Rightarrow ۷d = ۱۴ \Rightarrow d = ۲ \Rightarrow a_۱ = ۵$$

$$\Rightarrow a_۴ = a_۱ + ۳d = ۵ + ۳ \times ۲ = ۱۱$$

روش دوم: ابتدا تمام جملات را جمع می‌کنیم، سپس طبق درسنامهٔ فوق داریم:

$$\begin{cases} a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۲۱ \\ a_۴ + a_۵ + a_۶ + a_۷ = ۵۶ \end{cases} \xRightarrow{\text{جمع}} a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۷ = ۷۷ \xRightarrow{\text{مجموع اندیس‌ها ۲۸ می‌باشد.}} a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۷ = ۷a_۴ = ۷۷ \Rightarrow a_۴ = ۱۱$$

۸ در دنباله‌های حسابی «$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, \ldots$» و «$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, \ldots$»، چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ موجود است؟ *(ریاضی خارج ۹۵)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

$$a_n: ۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \ldots \Rightarrow d_۱ = ۷ \ , \ b_n = ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \ldots \Rightarrow d_۲ = ۵$$

$d_۱$ و $d_۲$ کوچک‌ترین مضرب مشترک $= d = [d_۱, d_۲] = [۷, ۵] = ۳۵ \Rightarrow$ دنبالهٔ حاصل از جملات مشترک: $c_n = ۳۵n + ۲$، اولین جملهٔ مشترک $= ۳۷$

$$\xRightarrow{\text{اعداد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰}} ۱۰۰ \leq c_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰ \Rightarrow \frac{۹۸}{۳۵} \leq n < \frac{۲۹۸}{۳۵} \Rightarrow ۲/۸ \leq n < ۸/۵$$

$$\xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۳, ۴, \ldots, ۸ \Rightarrow \text{تعداد اعداد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰} = ۸ - ۳ + ۱ = ۶$$

۹ در یک دنبالهٔ حسابی، $a_۹^۲ - a_۳^۲ = ۲۴۰$، اگر $a_۶ = ۵$ باشد، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

گزینهٔ «۳»

پاسخ:

$$a_۹^۲ - a_۳^۲ = \underbrace{(a_۹ - a_۳)}_{۶d}\underbrace{(a_۹ + a_۳)}_{۲a_۶} = ۲۴۰ \Rightarrow ۶d \times ۱۰ = ۲۴۰ \Rightarrow d = ۴$$

نکته در حل سؤالات مربوط به دنبالهٔ حسابی برای سرعت بیشتر، سه جملهٔ متوالی را به صورت $a-d, a, a+d$، پنج جملهٔ متوالی را به صورت $a-۲d, a-d, a, a+d, a+۲d$ و چهار جملهٔ متوالی را به صورت $a-۳t, a-t, a+t, a+۳t$ می‌نویسیم، در این حالت قدر نسبت دنباله $d = ۲t$ می‌باشد.

۱۰ سه عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر مجموع آن‌ها ۲۱ و حاصل‌ضربشان ۸۴۰− باشد، بزرگ‌ترین عدد کدام است؟

۱) ۷ ☐ ۲) ۱۰ ☐ ۳) ۲۰ ☐ ۴) ۶− ☐

گزینهٔ «۳»

پاسخ: فرض کنیم عدد وسط a و قدرنسبت دنباله d باشد، پس این سه عدد به صورت $a-d, a, a+d$ می‌باشند.

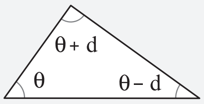
$$\text{مجموع جملات} = ۲۱ \Rightarrow a-d+a+a+d = ۲۱ \Rightarrow ۳a = ۲۱ \Rightarrow a = ۷$$

$$\text{حاصل‌ضرب جملات} = -۸۴۰ \Rightarrow (۷-d)\times ۷ \times (۷+d) = -۸۴۰ \Rightarrow ۴۹-d^۲ = -۱۲۰ \Rightarrow d^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow d = \pm ۱۳$$

اگر $d>۰$، آن‌گاه $a+d$ بزرگ‌ترین جمله و اگر $d<۰$، آن‌گاه $a-d$ بزرگ‌ترین جمله است و در هر حالت، بزرگ‌ترین جمله برابر $۲۰ = ۷+۱۳$ می‌باشد.

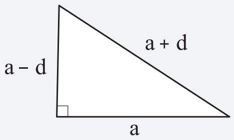
رابطهٔ مثلث با دنبالهٔ حسابی!

۱) اگر زوایای داخلی مثلثی تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه یکی از زاویه‌های مثلث °۶۰ است.

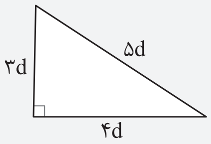


$$(\theta+d)+\theta+(\theta-d) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\theta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

۲) اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d دهند، آن‌گاه طول اضلاع این مثلث $۳d$، $۴d$ و $۵d$ است.



$$a^۲ + (a-d)^۲ = (a+d)^۲ \Rightarrow a^۲ + a^۲ - ۲ad + d^۲ = a^۲ + ۲ad + d^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴ad \Rightarrow a = ۴d$$



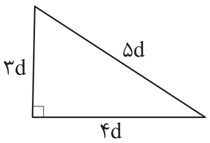
$$\xrightarrow{\text{طول اضلاع دیگر}} \begin{cases} a-d = ۴d-d = ۳d \\ a+d = ۴d+d = ۵d \end{cases}$$

۱۱ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر مساحت این مثلث ۵۴ باشد، طول وتر آن کدام است؟

۱) ۳ ☐ ۲) ۹ ☐ ۳) ۱۲ ☐ ۴) ۱۵ ☐

گزینهٔ «۴»

پاسخ: با توجه به درسنامهٔ فوق، طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند، برابر $۳d$، $۴d$ و $۵d$ می‌باشد، بنابراین داریم:



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}\times ۳d \times ۴d = ۶d^۲ \Rightarrow ۶d^۲ = ۵۴ \Rightarrow d^۲ = ۹ \Rightarrow d = ۳ \Rightarrow \text{طول وتر} = ۵d = ۵\times ۳ = ۱۵$$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی (S_n) با قدرنسبت d را می‌توان از دو روش محاسبه کرد:

الف) اگر جملهٔ اول و جملهٔ آخر دنباله را داشته باشیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{\text{تعداد جملات}}{۲}(\text{جملهٔ اول} + \text{جملهٔ آخر})$$

توجه در رابطهٔ فوق، مجموع اندیس‌های عبارت داخل پرانتز برابر $(n+۱)$ است. دقت کنید که به جای $a_۱ + a_n$، می‌توان مجموع دو جملهٔ دیگر را هم نوشت، به شرطی که مجموع اندیس‌های آن‌ها نیز $(n+۱)$ شود. به‌عنوان مثال:

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(a_۱ + a_{۲۰}) = \frac{۲۰}{۲}(a_۲ + a_{۱۹}) = \frac{۲۰}{۲}(a_۷ + a_{۱۴})$$

ب) اگر جملهٔ اول دنباله و قدرنسبت آن را داشته باشیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$$

توجه در رابطهٔ فوق، مجموع دو برابر اندیس a با ضریب d، برابر با $(n+۱)$ می‌شود، پس S_n را می‌توان به صورت‌های دیگر نیز نوشت. به‌عنوان مثال:

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲a_۱ + ۱۹d) = \frac{۲۰}{۲}(۲a_۵ + ۱۱d)$$

تست آموزشی

در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات هفتم و سیزدهم برابر ۱۸ می‌باشد. مجموع ۱۹ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱۷۱ ☐ ۲) ۱۸۹ ☐ ۳) ۱۶۹ ☐ ۴) ۱۴۴ ☐

پاسخ گزینهٔ «۱»؛ با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$، داریم:

$$S_{۱۹} = \frac{۱۹}{۲}(a_۱ + a_{۱۹}) = \frac{۱۹}{۲}(a_۷ + a_{۱۳}) = \frac{۱۹}{۲}\times ۱۸ = ۱۹\times ۹ = ۱۷۱$$

۱۲ اعداد $1, x, y, \frac{5}{2}, \cdots$ ، چهار جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی هستند. مجموع پانزده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ *(ریاضی خارج ۸۶)*

گزینهٔ «۳»

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

پاسخ: ابتدا قدر نسبت دنبالهٔ حسابی را به‌دست می‌آوریم:

$$a_1 = 1, a_4 = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 + 3d = \frac{5}{2} \xrightarrow{a_1=1} 1 + 3d = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2+7) = 7/5 \times 9 = 67/5$$

۱۳ در بیست جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: برای حل سریع می‌توان از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ استفاده کرد:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + \cdots + a_{19} = 135 \\ a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 135 \\ \frac{10}{2}(a_2 + a_{20}) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_{19} = 27 \\ a_2 + a_{20} = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_1 + 20d = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} d = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 0$$

۱۴ در یک تصاعد عددی (حسابی)، مجموع چهار جملهٔ اول ۱۵ و مجموع پنج جملهٔ بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جملهٔ یازدهم این تصاعد کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

پاسخ: مجموع ۴ جملهٔ اول $= 15 \Rightarrow S_4 = 15$ ، مجموع ۴ جملهٔ اول + مجموع ۵ جملهٔ بعدی $= 15 + 30 = 45 \Rightarrow S_9 = 45$

$$\begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ a_1 + 4d = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} d = \frac{1}{2}, a_1 = 3 \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10(\frac{1}{2}) = 8$$

۱۵ اعداد طبیعی را به طریق دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1),(2,3,4),(5,6,7,8,9),\cdots$ مجموع جملات در دستهٔ دهم کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

پاسخ: آخرین جملهٔ دستهٔ نهم $81 = 9^2$ می‌باشد، پس اولین جملهٔ دستهٔ دهم ۸۲ و آخرین جملهٔ دستهٔ دهم برابر $100 = 10^2$ می‌باشد، بنابراین مجموع جملات دستهٔ دهم برابر است با:

$$\underbrace{82 + 83 + \cdots + 100}_{\text{تعداد}=100-82+1=19} = \frac{19}{2}(82+100) = \frac{19}{2} \times 182 = 19 \times 91 = 1729$$

۱۶ اعداد طبیعی فرد را به طریق دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شمارهٔ آن دسته باشد: $(1),(3,5),(7,9,11),\cdots$. جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۱)*

گزینهٔ «۲»

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۱۹ ۳) ۴۲۱ ۴) ۴۲۳

پاسخ:

$$(1),(3,5),\underbrace{(7,9,11)}_{\text{دستهٔ سوم}},\cdots,\underbrace{(\text{۲۰ تا عدد فرد})}_{\text{دستهٔ بیستم}}$$

تعداد کل اعداد در این ۲۰ دسته برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = \frac{20}{2}(1+20) = 10 \times 21 = 210$$

پس آخرین جملهٔ دستهٔ بیستم، در واقع ۲۱۰ اُمین عدد فرد طبیعی است که برابر با $a_{210} = 1 + (210-1) \times 2 = 419$ می‌باشد.

۱۷ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چه‌قدر افزوده می‌شود؟

گزینهٔ «۴»

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

پاسخ: مجموع بیست جملهٔ اولیه را با S_{20} و مجموع بیست جملهٔ دوم را با S'_{20} نشان می‌دهیم. حال با استفاده از رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$\begin{cases} S_{20} = \frac{20}{2}(2a + 19d) = 20a + 190d & (1) \\ S'_{20} = \frac{20}{2}(2a + 19(d+1)) = 20a + 190(d+1) = 20a + 190d + 190 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(2),(1)} S'_{20} = S_{20} + 190$$

نکته در هر دنبالهٔ حسابی، مجموع تعداد فردی از جملات برابر با حاصل‌ضرب تعداد جملات، ضرب در جملهٔ وسط می‌باشد، به‌عنوان مثال:

$$S_{11} = 11 \times a_6 \quad , \quad a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 5 \times a_8$$

نتیجه: اگر در یک دنبالهٔ حسابی، $a_n = 0$ باشد، آن‌گاه $S_{(2n-1)} = 0$ است، به‌عنوان مثال اگر $a_8 = 0$ باشد، $S_{15} = 0$ است.

۱۸ در یک تصاعد عددی، جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است. مجموع چند جملهٔ اول این تصاعد برابر صفر است؟ *(تجربی خارج ۸۸)*

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

گزینهٔ «۴»

پاسخ: با توجه به نکته داریم:

$$a_7=\frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1+6d=\frac{1}{2}(a_1+2d)\xRightarrow{\times 2}2a_1+12d=a_1+2d\Rightarrow a_1+10d=0\Rightarrow a_{11}=0\Rightarrow S_{21}=0$$

۱۹ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ *(تجربی خارج ۹۱)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۳»

پاسخ: روش اول: می‌دانیم مجموع تعداد فردی از جملات برابر با حاصل‌ضرب تعداد جملات ضرب در جملهٔ وسط می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_1+a_2+\dots+a_5=\frac{1}{3}(a_6+a_7+\dots+a_{10})\Rightarrow 5\times a_3=\frac{1}{3}\times 5\times a_8\Rightarrow 3a_3=a_8$$

$$\Rightarrow 3(a_1+2d)=a_1+7d\Rightarrow 3a_1+6d=a_1+7d\Rightarrow 2a_1=d\Rightarrow \frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{a_1+2a_1}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$$

روش دوم:

$$a_1+a_2+\dots+a_5=\frac{5}{2}(a_1+a_5)=\frac{5}{2}(2a_1+4d)\quad,\quad a_6+a_7+\dots+a_{10}=\frac{5}{2}(a_6+a_{10})=\frac{5}{2}(2a_1+14d)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}}\frac{5}{2}(2a_1+4d)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}(2a_1+14d)\Rightarrow 6a_1+12d=2a_1+14d\Rightarrow 4a_1=2d\Rightarrow 2a_1=d$$

$$\Rightarrow\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{a_1+2a_1}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$$

۲۰ اگر در یک دنبالهٔ حسابی $S_8-S_5=7$، حاصل‌جمع $a_4+a_5+\dots+a_{10}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) ۴۹ ۴) $\frac{49}{3}$

گزینهٔ «۴»

پاسخ:

$$S_8-S_5=7\Rightarrow a_8+a_7+a_6=7\Rightarrow 3a_7=7\Rightarrow a_7=\frac{7}{3}$$

$$\underbrace{a_4+a_5+\dots+a_{10}}_{\text{۷ جمله است.}}=7\times\text{جملهٔ وسط}=7a_7=7\times\frac{7}{3}=\frac{49}{3}$$

۲۱ بین دو عدد $1-\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ و $(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}$ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم، مجموع این واسطه‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینهٔ «۲»

پاسخ: چون سه واسطه درج شده است، پس با دو عدد فوق، دنبالهٔ حسابی مجموعاً ۵ جمله دارد، از طرفی:

$$a_1=1-\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=1-\sqrt[3]{\sqrt{8}}=1-\sqrt{2}\ ,\ a_5=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\Big(\underbrace{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{\text{گویا کردن}}\Big)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$$

$$\text{جملهٔ وسط}=a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{2}=1\Rightarrow \text{مجموع واسطه‌ها}=a_2+a_3+a_4=3a_3=3\times1=3$$

۲۲ ریشهٔ معادلهٔ $(1+x)+(3+2x)+(5+3x)+\dots+(47+24x)=360$ کدام است؟

۱) $0/54$ ۲) $-0/54$ ۳) $-0/72$ ۴) $0/72$

گزینهٔ «۳»

پاسخ: سمت چپ معادله، مجموع ۲۴ جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $1+x$ و قدرنسبت $d=2+x$ می‌باشد، بنابراین طبق رابطهٔ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S_{24}=\frac{24}{2}(a_1+a_{24})=12(1+x+47+24x)=360\xRightarrow{\div 12}48+25x=30\Rightarrow 25x=-18\Rightarrow x=-\frac{18}{25}=-\frac{72}{100}=-0/72$$

نکته در دنبالهٔ حسابی، S_n همواره عبارتی درجه دوم به صورت $S_n=an^2+bn$ می‌باشد که در آن ضریب n^2، نصف قدر نسبت دنباله است.

۲۳ کدام‌یک از عبارت‌های زیر می‌تواند مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشد؟

۱) $3n^2-2n$ ۲) $3n^2-2n+1$ ۳) $2n^3+n$ ۴) $\sqrt{n^2+3n}$

گزینهٔ «۱»

پاسخ: گزینه‌های (۳) و (۴) درجهٔ دو نیستند، پس حذف می‌شوند. در گزینهٔ (۲) مقدار ثابت ۱ وجود دارد، در نتیجه نادرست است. گزینهٔ (۱) می‌تواند مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{d}{2}=3\Rightarrow d=6$ باشد.

۲۴ در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ عمومی از رابطهٔ $a_n = an - b$ و مجموع n جملهٔ اول از دستور $S_n = 3n^2 + 7n + c$ به‌دست می‌آیند. $a + b + c$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -10 ۳) 10 ۴) 2

گزینهٔ «۴»

پاسخ: در S_n دنبالهٔ حسابی عدد ثابت نداریم، پس $c = 0$ می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases} S_n = 3n^2 + 7n \Rightarrow d = 2\times(\text{ضریب } n^2) = 2\times 3 = 6 \quad (I) \\ a_n = an - b \Rightarrow d = \text{ضریب } n = a \quad (II) \end{cases} \xrightarrow{(I),(II)} a = 6, a_n = 6n - b \text{ و } a_1 = S_1 \Rightarrow 6 - b = 10 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a + b + c = 6 - 4 + 0 = 2$$

نکته در تمامی دنباله‌ها (حسابی، هندسی و ...) همواره داریم:

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

۲۵ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول، $S_n = 3n^2 - 2n$ می‌باشد. جملهٔ عمومی این دنباله کدام است؟

۱) $a_n = 3n - 2$ ۲) $a_n = 6n - 5$ ۳) $a_n = 2n - 1$ ۴) $a_n = n^2 - n$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: روش اول: طبق نکتهٔ فوق خواهیم داشت:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 2n - (3(n-1)^2 - 2(n-1)) = 3n^2 - 2n - (3n^2 - 6n + 3 - 2n + 2) = 3n^2 - 2n - 3n^2 + 8n - 5 = 6n - 5$$

روش دوم:

$$a_1 = S_1 = 3 - 2 = 1 \ , \ d = 2\times(\text{ضریب } n^2) = 2\times 3 = 6 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$$

۲۶ مجموع n جملهٔ اول از یک دنبالهٔ عددی به‌صورت $S_n = \dfrac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

گزینهٔ «۴»

پاسخ: می‌دانیم مجموع جملات هفتم تا هجدهم از یک دنبالهٔ حسابی برابر $S_{18} - S_6$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_7 + a_8 + a_9 + \cdots + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18\times 3}{6} - \frac{6\times(-9)}{6} = 9 + 9 = 18$$

۲۷ در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ هفتم برابر ۱۵ و مجموع n جملهٔ اول برابر $S_n = an^2 + 2n + b$ است. مجموع جملات با شروع از جملهٔ ششم و ختم به جملهٔ یازدهم، کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۹۵ ۳) ۹۸ ۴) ۱۰۵

گزینهٔ «۱»

پاسخ: می‌دانیم جملهٔ هفتم یک دنباله برابر $S_7 - S_6$ و مجموع جملات ششم تا یازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، برابر $S_{11} - S_5$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_n = an^2 + 2n + b \xrightarrow{S_0 = 0} b = 0 \Rightarrow S_n = an^2 + 2n$$

$$a_7 = S_7 - S_6 \Rightarrow (49a + 14) - (36a + 12) = 15 \Rightarrow 13a + 2 = 15 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow S_n = n^2 + 2n$$

$$a_6 + a_7 + \cdots + a_{11} = S_{11} - S_5 = (121 + 22) - (25 + 10) = 143 - 35 = 108$$

دنبالهٔ هندسی

یادآوری اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی a_1 و قدرنسبت آن q باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر می‌باشند:

$$\underbrace{a_1}_{\text{جملهٔ اول}} \xrightarrow{\times q} , \underbrace{a_1q}_{\text{جملهٔ دوم}} \xrightarrow{\times q} , \underbrace{a_1q^2}_{\text{جملهٔ سوم}} \xrightarrow{\times q} , \underbrace{a_1q^3}_{\text{جملهٔ چهارم}} , \ldots$$

نکات در هر دنبالهٔ هندسی نکات زیر برقرار می‌باشد:

۱) جملهٔ nاُم به صورت $a_n = a_1q^{n-1}$ می‌باشد. به عنوان مثال: $a_{14} = a_1q^{13}$ می‌باشد.

توجه کنید که a_n را با استفاده از جملات دیگر هم می‌توان نوشت. به عنوان مثال $a_n = a_8 \times q^{n-8}$ یا $a_n = a_3 \times q^{n-3}$ و به طور کلی $a_n = a_m \times q^{n-m}$، به عنوان مثال $a_{14} = a_{17} \times q^{-3}$ یا $a_{14} = a_4 \times q^{10}$ یا $a_{14} = a_2 \times q^{12}$ می‌باشد.

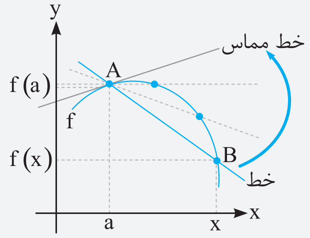
۲) اگر $a_1 \neq 0$ و $q < 0$، آن‌گاه دنباله، نه صعودی و نه نزولی و به بیان دیگر، دنباله غیریکنواست. اگر a_1 مثبت باشد، آن‌گاه وقتی‌که $q > 1$، دنباله صعودی و برای $0 < q < 1$ نزولی است و اگر a_1 منفی باشد، آن‌گاه برای $q > 1$، دنباله نزولی و برای $0 < q < 1$، دنباله صعودی است.

۳) دنبالهٔ هندسی برای $q = 1$، دنباله‌ای ثابت است و در نتیجه، دنباله‌ای حسابی هم هست. (هر دنبالهٔ ثابت، هم حسابی و هم هندسی است.)

۴) اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یا جملات متساوی‌الفاصله از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه: $b^2 = a\cdot c$ در این صورت b را واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و c می‌نامیم ($b = \pm\sqrt{ac}$). اگر تعداد جملات فرد باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب جملهٔ اول در جملهٔ آخر برابر با مربع جملهٔ وسط می‌باشد.

خط مماس بر یک منحنی

درس اوّل: آشنایی با مفهوم مشتق



شیب خط مماس: اگر f یک تابع باشد، می‌دانیم شیب خطی که نقطهٔ ثابت $A(a,f(a))$ و نقطهٔ دلخواه $B(x,f(x))$ از منحنی f را به‌هم وصل می‌کند، برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حال اگر نقطهٔ B روی منحنی f حرکت کند و به نقطهٔ A نزدیک شود، آن‌گاه خط AB حول نقطهٔ A دوران می‌کند و وقتی که نقطهٔ B به نقطهٔ A خیلی نزدیک شود، آن‌گاه خط AB بر خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A منطبق می‌شود. در نتیجه:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A}=\lim_{x_B\to x_A}(m_{AB})=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در رابطهٔ فوق اگر $x=a+h$ فرض شود، آن‌گاه $x-a=h$ ، در نتیجه وقتی $x\to a$ آن‌گاه $h\to ۰$. بنابراین:

$$\text{شیب خط مماس برمنحنی f در نقطهٔ A}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

توجه حدهای فوق در صورت وجود، برابر با شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A هستند. اگر این حدها موجود نباشند، آن‌گاه مماس بر منحنی در نقطهٔ A تعریف نمی‌شود.

تست آموزشی

شیب خطی که دو نقطه به طول‌های ۲ و x از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را به‌هم وصل می‌کند، برابر $-x^۲+۱۰x$ می‌باشد. شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ گزینهٔ «۴»؛ طبق توضیحات فوق داریم:

$$A(۲,f(۲))\ ,\ B(x,f(x))\Rightarrow \text{شیب خط AB}=m_{AB}=\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-x^۲+۱۰x$$

می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در $x=۲$ برابر حد شیب خط AB وقتی $x\to ۲$ می‌باشد، بنابراین:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی f در } x=۲ = \lim_{x\to ۲}(m_{AB})=\lim_{x\to ۲}(-x^۲+۱۰x)=-۴+۲۰=۱۶$$

۱ دو نقطه به طول‌های ۱ و $۱+h$ را روی نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^۲+۱۰x$ در نظر بگیرید. شیب خط گذرنده از این دو نقطه، وقتی $h\to ۰$ کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۲»

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) -۲

پاسخ: کافی است شیب خط گذرنده از نقاط $A(۱,f(۱))$ و $B(۱+h,f(۱+h))$ را با در نظر گرفتن $h\to ۰$ ، حساب کنیم:

$$\text{شیب خط گذرنده از نقاط A و B با فرض } h\to ۰ = \lim_{h\to ۰}\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{۱+h-۱}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۱+h)^۲+۱۰(۱+h)-۹}{h}$$

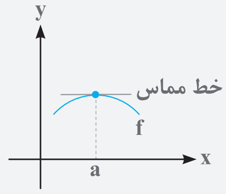
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^۲+۸h}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(-h+۸)}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۸)=۰+۸=۸$$

تعریف مشتق تابع در یک نقطه

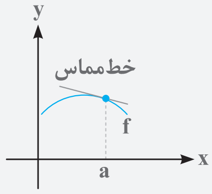
تعریف: اگر f یک تابع باشد، آن‌گاه هر یک از حدهای زیر را در صورت وجود، مشتق f در نقطهٔ $x=a$ می‌نامیم و با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad \text{یا}\quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

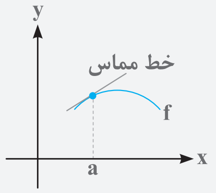
نکته طبق تعریف صفحهٔ قبل، $f'(a)$ در صورت وجود، برابر با شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای به طول a واقع بر منحنی f است ($f'(a) = m_{\text{مماس}}$). با توجه به نمودارهای زیر، $f'(a)$ می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.



$m_{\text{مماس}} = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$



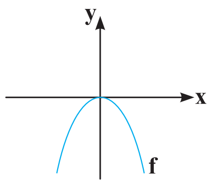
$m_{\text{مماس}} < 0 \Rightarrow f'(a) < 0$

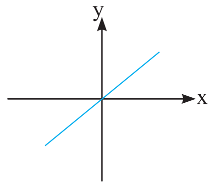


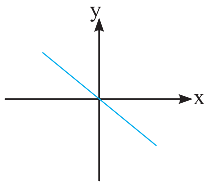
$m_{\text{مماس}} > 0 \Rightarrow f'(a) > 0$

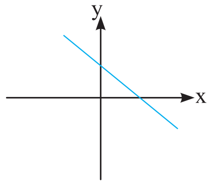
تست آموزشی

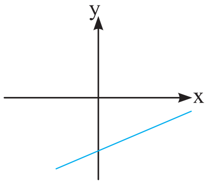
نمودار مشتق تابع مقابل کدام است؟



۱) 

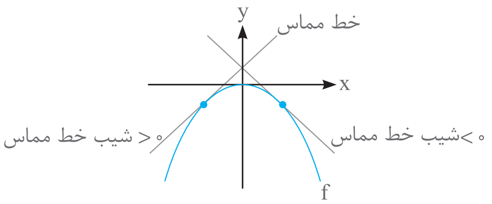
۲) 

۳) 

۴) 

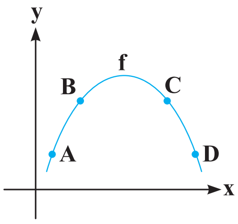
پاسخ گزینهٔ «۲»؛ خط مماس بر f در مبدأ مختصات، خطی افقی است، در نتیجه شیب آن صفر است، بنابراین $f'(0) = 0$ می‌باشد. پس نمودار مشتق تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) حذف‌اند.

هم‌چنین برای x های منفی، شیب خط مماس بر تابع f، مثبت است. پس برای x های منفی، نمودار f' بالای محور x ها است. درنتیجه گزینهٔ (۱) حذف است و پاسخ صحیح گزینهٔ (۲) می‌باشد.



۲ با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟ (شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه را با m نمایش داده‌ایم.) *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۲»



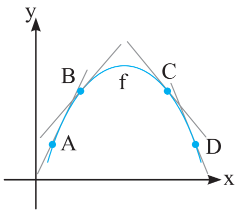
۱) شیب خط مماس بر منحنی، در نقاط C و D منفی است.

۲) $m_A < m_B$

۳) $m_D < m_C$

۴) شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A و B مثبت است.

پاسخ: واضح است که شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A و B مثبت و در نقاط C و D منفی است، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) صحیح هستند. از طرفی خط مماس بر f در نقطهٔ D نسبت به خط مماس بر f در نقطهٔ C، به حالت عمود نزدیکتر است. ($|m_D| > |m_C|$) و چون شیب خط مماس در این دو نقطه منفی است، پس $m_D < m_C$، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است. اما خط مماس بر f در نقطهٔ A نسبت به خط مماس بر f در نقطهٔ B به حالت عمود نزدیکتر است ($|m_A| > |m_B|$) و چون شیب خط مماس در این دو نقطه مثبت است، پس $m_A > m_B$ می باشد، در نتیجه گزینهٔ (۲) نادرست است.

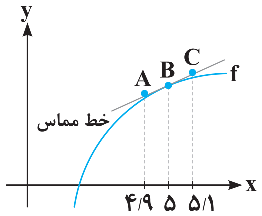


توضیح بیشتر: هر چه یک خط به حالت عمود نزدیکتر شود، قدر مطلق شیب آن بزرگتر می‌شود. حال اگر شیب خط منفی باشد، شیب آن کوچکتر می‌شود ($m_D < m_C$) و اگر شیب خط مثبت باشد، شیب آن بزرگتر می‌شود ($m_A > m_B$).

۳ برای تابع f در شکل مقابل $f'(۵)=۱/۵$ و $f(۵)=۲۰$ می‌باشد. مقدار $\frac{y_A+y_B+y_C}{۲}$ کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

گزینهٔ «۳»

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰



پاسخ: روش اول: طبق فرض‌های مسأله، ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم: $B(۵, ۲۰)$ ، $۱/۵ =$ شیب خط مماس در نقطهٔ $f'(۵)=۱/۵ \Rightarrow x=۵$

معادلهٔ خط مماس: $y-y_B=m(x-x_B) \Rightarrow y-۲۰=۱/۵(x-۵) \Rightarrow y=۱/۵x+۱۲/۵$

$$\left.\begin{array}{l} x_A=۴/۹ \Rightarrow y_A=۱/۵\times۴/۹+۱۲/۵ \\ x_C=۵/۱ \Rightarrow y_C=۱/۵\times۵/۱+۱۲/۵ \end{array}\right\} \Rightarrow y_A+y_C=۱/۵\times(۴/۹+۵/۱)+۲\times۱۲/۵=۱۵+۲۵=۴۰ \Rightarrow \frac{y_A+y_B+y_C}{۲}=\frac{۴۰+۲۰}{۲}=۳۰$$

روش دوم: چون نقاط A، B و C روی یک خط هستند و نقطهٔ B، وسط A و C می‌باشد، پس $y_B=\frac{y_A+y_C}{۲}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{y_A+y_B+y_C}{۲}=\frac{۲y_B+y_B}{۲}=\frac{۳}{۲}y_B=\frac{۳}{۲}\times۲۰=۳۰$$

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

شرط لازم برای مشتق‌پذیری

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در $x=a$ پیوسته است.

نتیجه: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

به عنوان مثال توابع $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\frac{۱}{x}$ و $h(x)=\begin{cases} ۱ & ; \; x\geq ۰ \\ ۲ & ; \; x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته نیستند، بنابراین $f'(۰)$ ، $g'(۰)$ و $h'(۰)$ موجود نیستند.

نکته پیوستگی، شرط لازم برای مشتق‌پذیری است ولی کافی نیست، یعنی ممکن است تابعی پیوسته باشد ولی مشتق‌پذیر نباشد، به بیان دیگر از پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

۴ کدام یک از توابع زیر در $x=۰$ شرط لازم برای مشتق‌پذیری را **ندارد**؟

گزینهٔ «۲»

۱) $y=|x|$
۲) $y=\sqrt{x}$
۳) $y=\sqrt[۳]{x}$
۴) $y=\sin x$

پاسخ: کافی است تابعی را انتخاب کنیم که در $x=۰$ پیوسته نباشد. از گزینه‌های داده شده فقط تابع $y=\sqrt{x}$ در $x=۰$ پیوسته نیست، پس شرط لازم برای مشتق‌پذیری را ندارد.

مشتق راست و مشتق چپ

مشتق راست تابع: هر یک از حدهای زیر را در صورت وجود، مشتق راست تابع f در $x=a$ می‌نامند و با نماد $f'_+(a)$ نمایش می‌دهند. به مشتق راست تابع شیب نیم‌مماس راست نیز می‌گویند.

$$f'_+(a)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ تابع: هر یک از حدهای زیر را در صورت وجود، مشتق چپ تابع f در $x=a$ می‌نامند و با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهند. به مشتق چپ تابع شیب نیم‌مماس چپ می‌گویند.

$$f'_-(a)=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکات

۱) شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که مشتق راست و مشتق چپ f در این نقطه، موجود (متناهی) و برابر باشند، یعنی: یک عدد حقیقی $= f'_+(a)=f'_-(a)$

۲) توابع قدر مطلقی در ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق، مشتق‌پذیر نیستند مگر آنکه ضریب صفرکننده داشته باشند.

به عنوان مثال تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|x^{2}-1|$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست چون $x=\pm 1$، ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. ولی تابع g با ضابطهٔ $g(x)=(x-1)|x^{2}-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر می‌باشد زیرا در $x=1$ ضریب صفر کننده دارد. دقت کنید که $x=\pm 1$ هر دو ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق هستند ولی به ازای $x=1$ عبارت $(x-1)$ صفر می‌شود و در نتیجه تابع g هم صفر می‌شود، بنابراین $x-1$ ضریب صفر کننده به حساب می‌آید، پس تابع g در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

تست آموزشی

کدام یک از توابع زیر در $x=0$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $y=\sqrt{x}$ ۲) $y=x\sqrt{x}$ ۳) $y=|x|$ ۴) $y=\sqrt[3]{x}\,|x|$

پاسخ گزینهٔ «۴»؛ گزینه‌های (۱) و (۲) در $x=0$ پیوسته نیستند چون حد چپ توابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x\sqrt{x}$ در $x=0$ موجود نمی‌باشند، پس در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیستند. تابع گزینهٔ (۳) در $x=0$ پیوسته است ولی چون $x=0$ ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق است، پس $y=|x|$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست. اما تابع گزینهٔ (۴) یعنی $y=\sqrt[3]{x}\,|x|$ در $x=0$ پیوسته و مشتق‌پذیر است زیرا اگرچه $x=0$ ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق است ولی تابع در $x=0$ ضریب صفر کننده دارد.

۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x^{2}}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟ *(ریاضی داخل ۸۷)*

گزینهٔ «۱»

۱) پیوسته و مشتق پذیر است. ۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) پیوسته و مشتق‌پذیر نیست. ۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

پاسخ: روش اول: ابتدا پیوستگی تابع f را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=x\sqrt{x^{2}}=x|x|\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}}f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}}f(x)=0\ ,\ f(0)=0$$

پس f در $x=0$ پیوسته است، حال مشتق‌پذیری تابع f در $x=0$ را با محاسبهٔ $f'_{+}(0)$ و $f'_{-}(0)$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0}|x|\Rightarrow\begin{cases}f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}|x|=0\\ f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}|x|=0\end{cases}\Rightarrow f'(0)=f'_{+}(0)=f'_{-}(0)=0$$

بنابراین f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیز می‌باشد. در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

روش دوم: تابع $f(x)=x\sqrt{x^{2}}=x|x|$ در $x=0$ پیوسته است زیرا توابع $y=x$ و $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته‌اند، پس حاصل ضرب آن‌ها نیز در $x=0$ پیوسته می‌باشد. همچنین $x=0$ ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق است ولی به ازای $x=0$ عبارت پشت قدر مطلق (ضریب قدر مطلق) صفر می‌شود، پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر هم هست (ضریب صفر کننده دارد).

۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]|x|$ حاصل $f'_{-}(0)-f'_{+}(0)$ کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -2

پاسخ: طبق تعریف مشتق چپ و راست داریم:

$$\left.\begin{aligned}f'_{+}(0)&=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{[x]|x|-0}{x}\xrightarrow{x\to 0^{+}\Rightarrow |x|=x}\lim_{x\to 0^{+}}\frac{[x]x}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}[x]=[0^{+}]=0\\ f'_{-}(0)&=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{[x]|x|-0}{x}\xrightarrow{x\to 0^{-}\Rightarrow |x|=-x}\lim_{x\to 0^{-}}\frac{[x](-x)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}-[x]=-[0^{-}]=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'_{-}(0)-f'_{+}(0)=1-0=1$$

۷ مشتق چپ تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^{2}}}$ در نقطهٔ $x=0$ کدام است؟ *(ریاضی داخل ۸۹)*

گزینهٔ «۱»

۱) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: با کمک تعریف مشتق چپ داریم:

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^{2}}}-0}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow[\text{زیر رادیکال ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج را در مزدوج عبارت}}\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^{2}}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^{2}}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^{2}}}}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt{1-(1-x^{2})}}{x\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^{2}}}\right)}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{|x|}{x\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^{2}}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^{2}}}\right)}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^{2}}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

مشتق‌ناپذیری

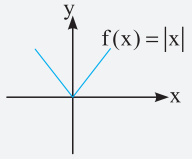
به طور خلاصه می توان گفت تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) در نقاط ناپیوستگی: تابع f در نقاط ناپیوسته، «الزاما مشتق‌ناپذیر است».

۲) اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه در حالت‌های زیر مشتق‌پذیر نیست:

الف) مشتق چپ و مشتق راست f در $x=a$ دو عدد حقیقی نابرابر باشند که در این حالت نقطهٔ $x=a$ را نقطهٔ گوشه یا زاویه‌دار نمودار تابع f می‌نامیم.

مانند: $f(x)=|x|$ در $x=0$.

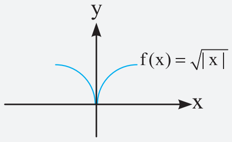


$$f(x)=|x|\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\Rightarrow\begin{cases}x>0\Rightarrow f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1\\ x<0\Rightarrow f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1\end{cases}$$

ب) مشتق چپ و مشتق راست f در $x=a$ هردو نامتناهی و مختلف‌العلامه باشند (یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ باشد).

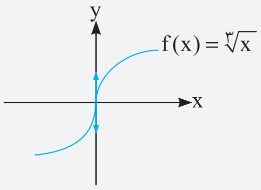
در این حالت نقطهٔ $x=a$ را نقطهٔ بازگشت نمودار تابع f می‌گوییم. به بیان دیگر، تابع f در $x=a$ بازگشتی است.

مانند: $f(x)=\sqrt{|x|}$ در $x=0$.



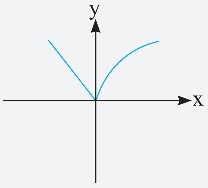
ج) مشتق چپ و مشتق راست f در $x=a$ هر دو نامتناهی و هم‌علامت باشند (هردو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$) در این صورت مماس بر f در $x=a$ موازی محور y هاست (اصطلاحاً f در $x=a$ مماس قائم دارد).

مانند: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$.

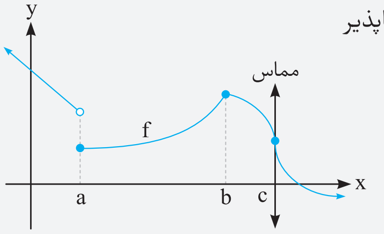


د) اگر یکی از مشتق های راست یا چپ در $x=a$، عدد حقیقی و دیگری نامتناهی باشد.

مانند: $f(x)=\begin{cases}-x & ; & x<0\\ \sqrt{x} & ; & x\geq 0\end{cases}$ در $x=0$.



به عنوان مثال در تابع f، نقاط $x=a$ (نقطهٔ ناپیوسته)، $x=b$ (نقطهٔ گوشه ای) و $x=c$ (مماس قائم) مشتق‌ناپذیر می‌باشد.



۸) **کدام تابع در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست؟**

گزینهٔ «۴»

۱) $f(x)=\sqrt{x}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; & x\geq 0\\ x^3 & ; & x<0\end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; & x\geq 0\\ -x^2 & ; & x<0\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}x & ; & x\geq 0\\ -x & ; & x<0\end{cases}$

پاسخ: تابع گزینهٔ (۱) در $x=0$ پیوسته نیست، درنتیجه نادرست است. گزینه‌های (۲) و (۳) در $x=0$ پیوسته و مشتق پذیرند و در هردوآن‌ها $f'_+(0)=f'_-(0)=0$ می‌باشد. (چرا؟) تابع گزینهٔ (۴) در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. در گزینهٔ (۴) داریم:

مشتق راست: $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1$

مشتق چپ: $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$

تابع مشتق

اگر x عضوی از دامنهٔ تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تمام نقاطی از دامنهٔ تابع f که برای آن‌ها f' موجود باشد را دامنهٔ تابع مشتق f $(D_{f'})$ می‌نامیم.

نکته توابع چند جمله‌ای و توابع مثلثاتی $y=\sin(ax+b)$ و $y=\cos(ax+b)$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند.

۹ برای تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+5x & x\neq 2 \\ 5 & x=2 \end{cases}$، دامنهٔ f' شامل کدام نقطهٔ زیر **نیست**؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینهٔ «۱»

پاسخ: تابع در $x=2$ پیوسته نیست، پس در $x=2$ مشتق پذیر هم نمی‌باشد و بنابراین $D_{f'}=\mathbb{R}-\{2\}$ می‌باشد. دقت کنید که برای $x\neq 2$ ضابطهٔ تابع، چند جمله‌ای است، پس در تمام نقاط به‌جز $x=2$، تابع f، مشتق‌پذیر است.

محاسبهٔ تابع مشتق برخی توابع (قواعد مشتق‌گیری)

فرض کنید c مقداری ثابت باشد، اگر u و v توابعی برحسب x باشند داریم: (y'، u' و v' به‌ترتیب همان مشتق توابع y، u و v نسبت به x می‌باشند.)

تابع	تابع مشتق	مثال
$y=c$	$y'=0$	$y=\sqrt{3}\Rightarrow y'=0$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=x^3\Rightarrow y'=3x^2$, $y=\frac{1}{x}\Rightarrow y=x^{-1}\Rightarrow y'=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$
$y=\sqrt{ax+b}$	$y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$y=\sqrt{3x-1}\Rightarrow y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
$y=\sqrt[3]{ax+b}$	$y'=\frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$	$y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=x^4-5x^2+7x-8\Rightarrow y'=4x^3-10x+7$
$y=c.u$	$y'=cu'$	$y=5(x^2-\sqrt{3}x+1)\Rightarrow y'=5(2x-\sqrt{3})$
$y=u.v$	$y'=u'.v+v'.u$	$y=(x^3+1)(-x^2+\sqrt{2}x+5)\Rightarrow y'=(3x^2)(-x^2+\sqrt{2}x+5)+(-2x+\sqrt{2})(x^3+1)$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$y=\frac{x^3-4}{5x+1}\Rightarrow y'=\frac{3x^2(5x+1)-5(x^3-4)}{(5x+1)^2}$
$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(x^2+3x)^7\Rightarrow y'=7(2x+3)(x^2+3x)^6$
$y=\sin u$	$y'=u'.\cos u$	$y=\sin\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos x^3\Rightarrow y'=-3x^2\sin x^3$
$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\tan^2\sqrt{x})$
$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot x^2\Rightarrow y'=-2x(1+\cot^2 x^2)$

۱۰ اگر $f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+5}-x}$ و $g(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+5}+x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{5}$

گزینهٔ «۱»

پاسخ: می‌دانیم $(f.g)'=f'.g+g'.f$، بنابراین ابتدا $f.g$ را تشکیل می‌دهیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$(f\times g)(x)=\sqrt{(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}=\sqrt{x^2+5-x^2}=\sqrt{5}\Rightarrow (f\times g)'(x)=0$$

تذکر در حل مسائل مربوط به مشتق، قبل از مشتق‌گیری، تا جای ممکن ساده سازی‌های مورد نیاز را انجام دهید تا حل مسئله، سریع‌تر و کوتاه‌تر شود. مثلاً در حل سوال فوق، ممکن است قبل از تشکیل تابع $f\times g$، شروع به مشتق‌گیری از توابع f و g کرده باشید که این کار خیلی وقت‌گیر است.

۱۱ اگر $f(۳)=۲$ ، $f'(۳)=۱۰$ ، $g(۳)=۴$ و $g'(۳)=۵$ ، حاصل $\dfrac{(\frac{f}{g})'(۳)}{(f.g)'(۳)}$ کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) $۰/۰۳۷۵$ ۲) $\frac{۴۸}{۵۰}$ ۳) $\frac{۵}{۸۰}$ ۴) $۰/۰۲۵$

پاسخ: به کمک قواعد مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{(\frac{f}{g})'(۳)}{(f.g)'(۳)}=\frac{\frac{f'(۳)g(۳)-g'(۳)f(۳)}{(g(۳))^۲}}{f'(۳)g(۳)+g'(۳)f(۳)}=\frac{\frac{(۱۰)(۴)-(۵)(۲)}{۴^۲}}{(۱۰)(۴)+(۵)(۲)}=\frac{\frac{۳۰}{۱۶}}{\frac{۵۰}{۱}}=\frac{۳۰}{۱۶\times ۵۰}=\frac{۳}{۸۰}=۰/۰۳۷۵$$

۱۲ مشتق تابع $y=\tan ۳x+\cos ۲x$ در $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ:

$$y'=۳(۱+\tan^۲ ۳x)-۲\sin ۲x\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۱۲})=۳(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})-۲\sin\frac{\pi}{۶}=۳(۱+۱)-۲\times\frac{۱}{۲}=۶-۱=۵$$

۱۳ مشتق تابع $f(x)=\tan(\sin ۵x)$ به ازای $x=۰$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ: می‌دانیم اگر u تابع دلخواهی برحسب x باشد و $y=\tan(u)$ ، آن‌گاه $y'=u'(۱+\tan^۲(u))$ می‌باشد، بنابراین با درنظرگرفتن $u=\sin ۵x$ داریم:

$$y'=(\sin ۵x)'(۱+\tan^۲(\sin ۵x))=(۵\cos ۵x)(۱+\tan^۲(\sin ۵x))\Rightarrow y'(۰)=۵(\cos ۰)(۱+\tan^۲ ۰)=۵(۱)(۱+۰)=۵$$

۱۴ مشتق تابع $f(x)=۳+\frac{۲}{\pi}\cos\frac{\pi}{x}$ به ازای $x=۶$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۰۹}{۳۶}$

پاسخ:

$$y'=۰+\frac{۲}{\pi}(\frac{\pi}{x^۲})\sin\frac{\pi}{x}\Rightarrow y'(۶)=\frac{۲}{\pi}\times\frac{\pi}{۳۶}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

(تجربی خارج ۹۳)

۱۵ مشتق تابع $y=\sin^۳\sqrt{۲x}$ به ازای $x=\frac{\pi^۲}{۱۸}$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۲۷}{۸\pi}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴\pi}$

پاسخ: می‌دانیم اگر $y=u^n$ باشد، آن‌گاه $y'=nu'u^{n-۱}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$y=(\underbrace{\sin\sqrt{۲x}}_{u})^{\overset{n}{۳}}\Rightarrow y'=۳(\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\cos\sqrt{۲x})(\sin\sqrt{۲x})^{۳-۱}\Rightarrow y'(\frac{\pi^۲}{۱۸})=۳\frac{۱}{\frac{\pi}{۳}}\cos\frac{\pi}{۳}\sin^۲\frac{\pi}{۳}=\frac{۲۷}{۸\pi}$$

۱۶ اگر $f(۰)=۰$ و $f(x)=\sin(۶x-f(x))$ باشد، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: می‌دانیم اگر u تابع دلخواهی برحسب x باشد و $y=\sin u$ ، آن‌گاه $y'=u'.\cos u$ می‌باشد. چون $u=۶x-f(x)$ ، پس:

$$f'(x)=(۶-f'(x))\times\cos(۶x-f(x))\Rightarrow f'(۰)=(۶-f'(۰))\times\cos(۰-f(۰))\Rightarrow f'(۰)=(۶-f'(۰))\times\cos ۰$$

$$\Rightarrow f'(۰)=۶-f'(۰)\Rightarrow ۲f'(۰)=۶\Rightarrow f'(۰)=۳$$

فرمول‌های کمکی مشتق‌گیری

برای سرعت بیش‌تر در حل تست‌های مربوط به مشتق‌گیری، فرمول‌های زیر را به خاطر بسپارید. (u تابعی برحسب x است.)

۱) $y=\frac{c}{x^n}\Rightarrow y'=\frac{-nc}{x^{n+۱}}$

۲) $y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$

۳) $y=\frac{au+b}{cu+d}\Rightarrow y'=\frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^۲}$

۴) $y=\sin^۲ u\Rightarrow y'=u'.\sin ۲u$

۵) $y=\cos^۲ u\Rightarrow y'=-u'.\sin ۲u$

مثال آموزشی

مشتق تابع $f(x)=\sin^۲ x+۳\cos^۲ x$ کدام است؟

۱) $۴\sin ۲x$ ۲) $-۲\sin ۲x$ ۳) $-۴\sin ۲x$ ۴) $۲\sin ۲x$

پاسخ گزینهٔ «۲»؛ می‌دانیم $(\sin^۲ x)'=\sin ۲x$ و $(\cos^۲ x)'=-\sin ۲x$ ، پس: $f'(x)=\sin ۲x-۳\sin ۲x=-۲\sin ۲x$

۱۷ مقدار مشتق $y=\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳x})$ به ازای $x=۴$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۲}$

گزینهٔ «۱»

پاسخ: اگر u تابعی دلخواه برحسب x باشد و $y=\cos^{۲}u$، آن‌گاه $y'=-u'\sin ۲u$ است، بنابراین با درنظرگرفتن $u=\frac{\pi}{۳x}$ داریم:

$$y'=-\frac{-\pi}{۳x^{۲}}\sin ۲(\frac{\pi}{۳x})\Rightarrow y'(۴)=\frac{\pi}{۳(۴)^{۲}}\sin\frac{۲\pi}{۳(۴)}=\frac{\pi}{۴۸}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۴۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۹۶}$$

۱۸ مشتق تابع $y=۲\cos^{۲}(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۶)

۱) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

گزینهٔ «۳»

پاسخ:

$$y'=-۲(\frac{-۱}{۴})\sin ۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۹ مقدار مشتق $y=\frac{۱-\cos^{۲}x}{۲-\sin^{۲}x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۱)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: با در نظر گرفتن روابط $\sin^{۲}x$ ، $۱-\cos^{۲}x=\sin^{۲}x$ ، $(\sin^{۲}x)'=\sin ۲x$ و $(\frac{au+b}{cu+d})'=\frac{(ad-cb)u'}{(cu+d)^{۲}}$ داریم:

$$y=\frac{\overset{a}{۱}\overbrace{\sin^{۲}x}^{u}+\overset{b}{۰}}{\underset{c}{-۱}\underbrace{\sin^{۲}x}_{u}+\underset{d}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{(۲-۰)(\sin ۲x)}{(-\sin^{۲}x+۲)^{۲}}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲(۱)}{(-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}+۲)^{۲}}=\frac{۲}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۸}{۹}$$

۲۰ اگر $f'(۱)=۲$ و $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، مشتق عبارت $y=f^{۲}(x)+\frac{۱}{f(x)}$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینهٔ «۲»

پاسخ:

$$y'=۲f'(x)f(x)+\frac{۰-f'(x)}{(f(x))^{۲}}\xrightarrow{x=۱}y'(۱)=۲f'(۱)f(۱)+\frac{-f'(۱)}{(f(۱))^{۲}}=(۲)(۲)(\frac{۱}{۲})+\frac{-۲}{(\frac{۱}{۲})^{۲}}=۲-۸=-۶$$

۲۱ اگر $f(x)=(x-۲)\sqrt[۳]{x}$ باشد، $\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: می‌دانیم $\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=f'(-۱)$ می‌باشد، پس $f'(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۱(\sqrt[۳]{x})+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}(x-۲)\Rightarrow f'(-۱)=-۱+\frac{۱}{۳}(-۳)=-۲$$

۲۲ اگر $f(x)=۵\sin\pi x^{۲}$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{(\Delta x)^{۲}+\Delta x}$ کدام است؟

۱) -۵π ۲) ۵π ۳) -۲π ۴) -۱۰π

گزینهٔ «۴»

پاسخ: ابتدا حاصل حد داده شده را به دست می آوریم:

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x(\Delta x+۱)}=\lim_{\Delta x\to ۰}(\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}\times\frac{۱}{\Delta x+۱})=f'(۱)\times\frac{۱}{۰+۱}=f'(۱)$$

حال از ضابطهٔ تابع $f(x)$، مشتق می‌گیریم و $f'(۱)$ را می‌یابیم:

$$f'(x)=۵(۲\pi x)\cos\pi x^{۲}\Rightarrow f'(۱)=۵(۲\pi)\cos\pi=-۱۰\pi$$

۲۳ برای تابع $f(x)=\frac{۱۲}{x^{۲}}$، مقدار $\lim_{x\to\sqrt[۳]{۶}}\frac{f(x)-f(\sqrt[۳]{۶})}{x-\sqrt[۳]{۶}}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۴ ۴) -۴

گزینهٔ «۴»

پاسخ: می‌دانیم $\lim_{x\to\sqrt[۳]{۶}}\frac{f(x)-f(\sqrt[۳]{۶})}{x-\sqrt[۳]{۶}}=f'(\sqrt[۳]{۶})$ ، از طرفی اگر $f(x)=\frac{c}{x^{n}}$ ، آن‌گاه $f'(x)=\frac{-nc}{x^{n+۱}}$. پس:

$$f(x)=\frac{۱۲}{x^{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲۴}{x^{۳}}\Rightarrow f'(\sqrt[۳]{۶})=\frac{-۲۴}{۶}=-۴$$

۲۴ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{\cos(۲x+۲h)-\cos ۲x}{h}$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $۲\cos ۲x$ ۲) $-۲\cos ۲x$ ۳) $-۲\sin ۲x$ ۴) $۲\sin ۲x$

پاسخ: ابتدا تعریف تابع مشتق f را با فرض $f(x)=\cos ۲x$ می‌نویسیم:

$$f'(x)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\cos ۲(x+h)-\cos ۲x}{h}$$

ملاحظه کنید که حد مطرح شده در صورت سوال همان $f'(x)$ می‌باشد، بنابراین حاصل آن برابر است با: $f'(x)=-۲\sin ۲x$

۲۵ اگر $g(x)=\sqrt{۲x}$ و $f(x)=x^۲-x$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+h)g(۲+h)-f(۲)g(۲)}{h}$ کدام است؟

گزینهٔ «۴»

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: طبق تعریف می‌دانیم:

$$\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)g(۲+h)-f(۲)g(۲)}{h}=(f.g)'(۲)=f'(۲).g(۲)+g'(۲).f(۲)$$

از طرفی داریم:

$$f(۲)=۴-۲=۲,\ f'(x)=۲x-۱\Rightarrow f'(۲)=۳,\ g(۲)=\sqrt{۴}=۲\ ,\ g'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\Rightarrow g'(۲)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f'(۲).g(۲)+g'(۲).f(۲)=۳\times ۲+\frac{۱}{۲}\times ۲=۷$$

۲۶ اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $x^۲f(x)$ در $x=-۲$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۶)*

گزینهٔ «۴»

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: در محاسبهٔ $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\dfrac{۱}{۲}$، مخرج صفر می‌شود ولی مقدار حد، بی‌نهایت نشده است، پس این حد باید به صورت $\frac{۰}{۰}$ باشد، درنتیجه صورت آن نیز وقتی که $h\to ۰$ باید صفر شود:

$$\lim\limits_{h\to ۰}(f(-۲+h)+۳)=۰\Rightarrow f(-۲)+۳=۰\Rightarrow f(-۲)=-۳$$

از اینجا با توجه به تعریف مشتق واضح است که $f'(-۲)=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، بنابراین:

$$y=x^۲f(x)\Rightarrow y'=۲x.f(x)+f'(x).x^۲\xrightarrow{x=-۲}y'(-۲)=-۴f(-۲)+f'(-۲)\times ۴=-۴\times(-۳)+\frac{۱}{۲}\times ۴=۱۲+۲=۱۴$$

شرط مشتق‌پذیری توابع چند ضابطه‌ای

توابع چند ضابطه‌ای: در توابع چند ضابطه‌ای، برای تعیین تابع مشتق و دامنه‌اش علاوه‌بر بررسی مشتق‌پذیر بودن تک‌تک ضابطه‌ها در دامنه‌های خود، باید مشتق‌پذیر بودن یا نبودن تابع را در نقاط مرزی آن نیز بررسی کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید f تابعی چند ضابطه‌ای باشد و ضابطهٔ f در $x=a$ عوض شود ($x=a$ نقطه‌ای مرزی است)، آنگاه f به‌شرطی در $x=a$ مشتق‌پذیر است که:

اولاً: در $x=a$ پیوسته باشد. **ثانیاً:** مشتق چپ و مشتق راست f در $x=a$ موجود و باهم برابر باشند $(f'_-(a)=f'_+(a))$.

مثال آموزشی

اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & ; & x\geq ۱\\ x^۳-x & ; & x<۱\end{cases}$، آنگاه تابع $f'(x)$ و دامنه‌اش را مشخص کنید.

پاسخ واضح است که f در $x=۱$ پیوسته نیست $(\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x))$، درنتیجه تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، پس:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & ; & x>۱\\ \text{موجود نیست} & ; & x=۱\\ ۳x^۲-۱ & ; & x<۱\end{cases}\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

دقت کنید که چون f در $x=۱$ پیوستگی چپ ندارد، در نتیجه f در $x=۱$ مشتق چپ ندارد.

$f'_+(۱)=۲(۱)=۲$

$f'_-(۱)=$ موجود نیست

مثال آموزشی

اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & ; & x\geq ۱\\ x^۳+x & ; & x<۱\end{cases}$، آنگاه تابع $f'(x)$ و دامنه‌اش را مشخص کنید.

پاسخ واضح است که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ از جمله $x=۱$ $(\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱))$ پیوسته است. از طرفی:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & ; & x>۱\\ \text{موجود نیست} & ; & x=۱\\ ۳x^۲+۱ & ; & x<۱\end{cases}\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

دقت کنید که $f'_+(۱)=۲$ ولی $f'_-(۱)=۴$، پس f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.