

سرشناسه: خوشنویسان، محمد مهدی
 عنوان: ریاضی دهم
 مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین المللی گاج؛ ۱۳۹۷.
 مشخصات ظاهری: ۱۶۸ ص نمودار.
 فروست: مجموعه کتاب های خط ویژه
 شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۵۹-۸۶۵-۲
 وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر.
 شناسه افزوده: محسنی، ابراهیم
 شماره کتابشناسی ملی: ۵۱۶۱۸۲۷

شناسنامه

[ناشر: انتشارات بین المللی گاج]
 [مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]
 [معاونت علمی: مهندس محمد جوکار]
 [واحد پژوهش و برنامه ریزی کتاب های: خط ویژه]
 [مدیر تألیف و نظارت بر محتوا: مهندس علیرضا شعبانی نصر]
 [عنوان کتاب: ریاضی دهم]
 [مؤلفان: محمد مهدی خوشنویسان - ابراهیم محسنی]
 [ویراستاران: محمد حسن دیندارلو - علی عیوضی - سجاد همایون زاده]
 [هماهنگی و امور اجرایی: سحر رجبعلیان]
 [ویرایش فنی: نسرین یوسفی قهی]
 [مدیر واحد فنی و گرافیک: حسن حاجی محمدی]
 [صفحه آرایی: سیده فاطمه دیوبند]
 [اجرا: سیما مهجور - نفیسه کلیچ]
 [رسام: گزیزه علی پورا]
 [آماده سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: گاج] + [لیتوگرافی: گاج]
 [چاپ خانه و صحافی: گاج] + [ناظر چاپ: علی مزرعتی]
 [نوبت چاپ: اول (۹۸-۱۳۹۷)]
 [شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه]
 [قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان]



فهرست

۷	فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله
۸	درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۱۰	درس دوم: متمم یک مجموعه
۱۵	درس سوم: الگو و دنباله
۲۰	درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی
۳۳	فصل دوم: مثلثات
۳۴	درس اول: نسبت‌های مثلثاتی
۴۳	درس دوم: دایره مثلثاتی
۴۹	درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۵۷	فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۵۸	درس‌های اول و دوم: ریشه و توان - ریشه n ام
۶۰	درس سوم: توان‌های گویا
۶۲	درس چهارم: عبارت‌های جبری
۷۳	فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها
۷۴	درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۸۲	درس دوم: سهمی
۸۵	درس سوم: تعیین علامت
۹۸	فصل پنجم: تابع
۹۹	درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۱۰۲	درس دوم: دامنه و برد توابع
۱۰۷	درس سوم: انواع توابع
۱۱۷	فصل ششم: شمارش بدون شمردن
۱۱۸	درس اول: شمارش
۱۲۲	درس دوم: جایگشت
۱۲۸	درس سوم: ترکیب
۱۳۵	فصل هفتم: آمار و احتمال
۱۳۶	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۴۹	درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۱۵۰	درس سوم: متغیر و انواع آن
۱۵۲	آزمون‌های جامع

« درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

« درس دوم: متمم يك مجموعه

« درس سوم: الگو و دنباله

« درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

فصل اوّل:

مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در سال‌های گذشته با زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R} : Real) آشنا شدیم. این مجموعه‌ها عبارتند از:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

۱. مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N} : Natural):

$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

۲. مجموعه اعداد مساب (\mathbb{W} : Whole):

توجه: همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این دو مجموعه فقط در عضو صفر با هم فرق دارند. یعنی $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ می‌باشد که مجموعه‌ای تک‌عضوی است.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

۳. مجموعه اعداد صحیح (\mathbb{Z} : Zahlen): این مجموعه شامل اعداد حسابی و قرینه آن‌ها می‌باشد.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

واضح است که $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$ می‌باشد، همین‌طور داریم:

۴. مجموعه اعداد گویا (\mathbb{Q} : Quotient): اجتماع اعداد صحیح و اعداد کسری به شکل $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ را مجموعه اعداد گویا می‌نامند.

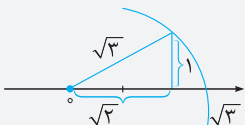
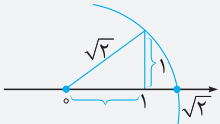
اعداد گویا به دو دسته اعداد اعشاری با پایان مانند $\frac{1}{4} = 0.25$ و اعداد متناوب (اعشار با تکرار) مانند $\frac{2}{3} = 0.666\dots$ دسته‌بندی می‌شوند.

۵. مجموعه اعداد گنگ (\mathbb{Q}' یا \mathbb{Q}^c): هر عدد حقیقی که گویا نباشد را گنگ می‌نامند (Complement Q)، پس $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ مانند اعداد

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$

نکته: با توجه به اینکه اعداد گنگ اعشار بی‌پایان و غیرتکراری دارند مانند $\sqrt{2} \approx 1.4142\dots$ ، برای نشان دادن این اعداد روی محور از مثلث قائم‌الزاویه

استفاده می‌کنیم. برای نشان دادن عدد $\sqrt{3}$ روی محور اعداد، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلع قائم ۱ رسم می‌کنیم، بنابراین طول وتر $\sqrt{3}$ می‌شود. حال از مبدأ مختصات دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی کمان رسم شده با محور اعداد بیانگر عدد $\sqrt{3}$ است.



برای نشان دادن $\sqrt{3}$ نیز کافی است از مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه $\sqrt{2}$ و ۱ استفاده کنیم.

۱. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

$\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ (۴)

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (۳)

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (۲)

$\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (۱)

پاسخ: هر عدد حسابی، عددی گویاست و در نتیجه گنگ نیست.

بازه‌ها

به زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی که مشخص‌کننده قسمتی از محور اعداد باشد، فاصله یا بازه می‌گویند.

بازه بسته $[a, b]$ ، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ و بازه باز (a, b) ، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ و بازه نیم‌باز $(a, b]$ ، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ و برای $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ از بازه $(a, +\infty)$ استفاده می‌کنیم.

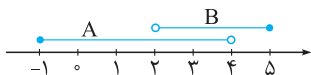
۲. اگر $A = [-1, 4]$ و $B = (2, 5]$ ، آنگاه مجموعه $B - A$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



پاسخ: مجموعه‌ها را روی محور اعداد نشان می‌دهیم:

$B - A = [4, 5]$

بازه $[4, 5]$ شامل دو عدد صحیح $\{4, 5\}$ می‌باشد.

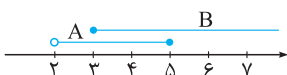
۳. حاصل $(2, 5] - [3, +\infty)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ بی‌شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخ: بازه‌های $A = [2, 5]$ و $B = [3, +\infty)$ را روی محور نشان می‌دهیم و تفاضل این دو را به دست می‌آوریم:

$(2, 5] - [3, +\infty) = (2, 3)$

بازه $(2, 3)$ هیچ عدد صحیحی ندارد.

اگر $A = [-3, 0]$ و $A \cup B = [-5, 3]$ ، آن گاه کوچک ترین مجموعه B دارای چند عضو است؟

- گزینه «۲»
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۹

$B = [-5, 3] - [-3, 0]$

پاسخ: کوچک ترین مجموعه B ، مجموعه ای است که با A اشتراکی نداشته باشد، به عبارت دیگر: پس $B = [-5, -3) \cup (0, 3]$ که شامل اعداد صحیح $\{3, 2, 1, -4, -5\}$ می باشد.

طول بزرگ ترین بازه ای که شامل یک عدد صحیح می باشد، کدام است؟

- گزینه «۲»
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱/۵ (۴) ۲/۵

پاسخ: بزرگ ترین بازه ای که شامل یک عدد صحیح مانند a باشد بازه $(a-1, a+1)$ است که دارای طول ۲ می باشد.

اگر $[b, 10] \cup [-2, a] = [-3, 12]$ باشد، آن گاه $-2b + a$ برابر با کدام است؟

- گزینه «۴»
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۱۸

پاسخ: با توجه به اینکه $A_2 \cup A_1 = A_1 \cup A_2$ ، پس $[-2, a] \cup [b, 10] = [b, 10] \cup [-2, a] = [-3, 12]$ ، بنابراین $b = -3$ و $a = 12$ می باشد در نتیجه داریم: $-2b + a = -2(-3) + 12 = 18$

اگر $A_n = (\frac{-2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر با کدام بازه است؟

- گزینه «۳»
 (۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۳) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

پاسخ: ابتدا مجموعه های A_3 و A_6 را با توجه به A_n تشکیل می دهیم:

$A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ، $A_6 = (-\frac{1}{3}, \frac{6-2}{6}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$(A_3 \cup A_6) - A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

بنابراین:

مجموعه های متناهی و نامتناهی

اگر مجموعه ای تعداد محدودی عضو داشته باشد آن را متناهی می گویند و اگر تعداد اعضای یک مجموعه بی نهایت باشد آن را نامتناهی می گویند. به عبارت دیگر مجموعه ای که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد متناهی است و در غیر این صورت آن را نامتناهی گویند.

نکات ۱: مجموعه های اعداد Q, W, Z, N و Q' نامتناهی می باشند و همچنین در یک بازه با طول محدود تعداد اعداد متعلق به مجموعه های W, Z, N متناهی و تعداد اعداد متعلق به مجموعه های Q, Q', R نامتناهی است.

۲: مجموعه تهی $\emptyset = \{\}$ عضوی ندارد و متناهی است، پس برای مجموعه دلخواه A داریم:

۳: اگر A و B متناهی باشند، آن گاه $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ متناهی اند.

۴: اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، آن گاه $A \cup B$ نامتناهی است، اما در مورد $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ نمی توان نظر داد.

۵: اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن گاه $A \cap B$ و $B - A$ متناهی و $A \cup B$ و $A - B$ نامتناهی است.

۸: کدام یک از مجموعه های زیر متناهی است؟

- گزینه «۴»
 (۱) اعداد گویای بازه $(0, 200)$ (۲) اعداد گنگ بازه $(-1, 100)$

(۳) اعداد گویای بازه $(\frac{1}{3}, 1)$ (۴) $(A - B) \cup (B - A)$ اگر $A = W$ و $B = N \cup \{-5\}$

$A = W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ، $B = \{-5, 1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{0\} \cup \{-5\} = \{0, -5\}$

پاسخ:

که مجموعه ای دو عضوی و متناهی است.

۹: کدام مجموعه زیر متناهی است؟

- گزینه «۳»
 (۱) مجموعه اعداد طبیعی فرد (۲) مجموعه اعداد گویا در بازه $(1, 2)$

- (۳) مجموعه سنگ ریزه های کره زمین (۴) $(N \cup Z) \cap W$ مجموعه اعداد

پاسخ: اگر چه سنگ ریزه های کره زمین بسیار زیاد هستند، ولی با داشتن امکانات کافی و صرف وقت می توان تعداد آن ها را به دست آورد.

۱۰ کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

- گزینه «۴»
- (۱) مجموعه انسان‌های روی کره زمین
 - (۲) مجموعه مولکول‌های کل یک مدرسه
 - (۳) بازه $(2, 500000) \cap (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$
 - (۴) مجموعه تمام دایره‌ها به مرکز مبدأ مختصات
- پاسخ: مجموعه‌های ذکر شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هرچند که تعداد اعضای بسیار زیادی دارند، اما متناهی هستند، ولی در گزینه (۴) بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ مختصات می‌توان رسم کرد.

۱۱ اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در \mathbb{Z} متناهی است؟

- گزینه «۲»
- (۱) $A - B$
 - (۲) $\mathbb{Z} - A$
 - (۳) $A \cap B$
 - (۴) $A \cup B$
- پاسخ: اعضای مجموعه A و B را می‌نویسیم:

$A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ $B = \{-99, -98, \dots, 98, 99\}$

واضح است که A نامتناهی و B متناهی است. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): با توجه به نامتناهی بودن A ، اگر تعدادی عضو (اعضای B) را از آن برداریم، مجموعه باقی‌مانده یعنی $A - B$ نامتناهی می‌باشد.

گزینه (۲): $\mathbb{Z} - A = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

ملاحظه می‌کنید که $\mathbb{Z} - A$ نیز نامتناهی است.

گزینه (۳): اشتراک یک مجموعه نامتناهی (A) با مجموعه متناهی (B) مجموعه‌ای متناهی است.

گزینه (۴): اجتماع یک مجموعه نامتناهی (A) با مجموعه متناهی (B) مجموعه‌ای نامتناهی است.

$A \cap B = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$

$A \cup B = \{-99, -98, \dots, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 99, 102, 105, \dots\}$

۱۲ کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟

- گزینه «۴»
- (۱) $\{\mathbb{Z}\}$
 - (۲) مجموعه اعداد اول سه‌رقمی
 - (۳) \emptyset
 - (۴) مجموعه اعداد حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$

پاسخ: گزینه (۱) مجموعه‌ای تک‌عضوی است، در نتیجه متناهی می‌باشد. گزینه (۲) مجموعه‌ای با تعداد عضوهای محدود و طبیعی می‌باشد، پس متناهی است و گزینه (۳) مجموعه‌ای صفرعضوی است، بنابراین متناهی می‌باشد و فقط مجموعه اعداد حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$ دارای بی‌شمار عضو است.

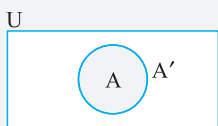
۱۳ اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی و C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟

- گزینه «۱»
- (۱) $(C - A) \cup B$
 - (۲) $(A \cup B) \cap C$
 - (۳) $(A - C) \cup B$
 - (۴) $(A \cap B) \cap C$

پاسخ: می‌دانیم اجتماع یک مجموعه نامتناهی با یک مجموعه متناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است. از طرفی چون C نامتناهی و A متناهی است، بنابراین $(C - A) \cup B$ نامتناهی می‌باشد؛ در نتیجه $(C - A) \cup B$ نامتناهی است. طبق نکات گفته شده، گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) متناهی می‌باشند.

مجموعه مرجع

درس دوم: متمم یک مجموعه



$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$

$(A')' = A, U' = \emptyset, \emptyset' = U$

مجموعه مرجع: در هر بحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشد، مجموعه مرجع می‌نامند و آن را با نماد U (Universal Set) نشان می‌دهند و اگر A زیرمجموعه‌ای از U باشد، آن‌گاه $U - A$ را متمم A می‌نامند و با A' نشان می‌دهند، پس:

همین‌طور داریم:

مثال آموزشی

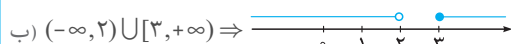
متمم بازه‌های زیر را در \mathbb{R} تعیین کنید و روی محور اعداد نشان دهید.

الف) $(2, +\infty)$

ب) $[2, 3)$

ج) $(-\infty, 3) \cup (3, 5) \cup (6, +\infty)$

پاسخ



دنباله هندسی: دنباله‌ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. به این عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً با r نمایش می‌دهیم. دقت کنید که جمله اول هم باید غیر صفر باشد.

اگر جمله اول یک دنباله هندسی، a_1 و قدر نسبت آن r باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر هستند:

$$a_1, \overset{\times r}{a_1 r}, \overset{\times r}{a_1 r^2}, \overset{\times r}{a_1 r^3}, \dots \Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

جمله دوم جمله سوم جمله چهارم

$$a_{14} = a_1 r^{13} = a_7 \cdot r^{-6} = a_6 \cdot r^{-8} = a_4 \cdot r^{12}$$

به عنوان مثال:

در طرف دوم هر یک از تساوی‌های فوق، مجموع اندیس a و توان r برابر با ۱۴ است، به بیان دیگر در هر دنباله هندسی که در آن n و m اعدادی طبیعی هستند، داریم:

$$a_n = a_m \cdot r^{n-m}$$

$n = m + (n - m)$

۹۵ در یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲، حاصل $\frac{a_1 \times a_7}{(a_4)^2}$ کدام است؟

- گزینه «۱» ۱۶ گزینه «۲» ۱۶ گزینه «۳» ۱۶ گزینه «۴» ۱۶

$$\frac{a_1 \times a_7}{(a_4)^2} = \frac{a_1 \times a_1 r^6}{(a_1 r^3)^2} = \frac{a_1^2 \cdot r^6}{a_1^2 \cdot r^6} = r^0 = 1 = 16$$

پاسخ: از رابطه $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ داریم:

۹۶ در یک دنباله هندسی $a_1, a_3, a_5 = \lambda a_2, a_6, a_7$ ، قدر نسبت دنباله کدام است؟

- گزینه «۱» $\frac{1}{2}$ گزینه «۲» ۲ گزینه «۳» $\frac{1}{3}$ گزینه «۴» $\frac{1}{3}$

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = \lambda a_2 \cdot a_6 \cdot a_7 \Rightarrow a_1 \cdot a_3 = \lambda a_2 \cdot a_6 \cdot a_7$$

پاسخ: از رابطه $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ داریم:

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_1 r^2 = \lambda a_1 r \cdot a_1 r^5 \cdot a_1 r^6 \Rightarrow r^2 = \lambda r^6 \Rightarrow 1 = \lambda r^4 \Rightarrow r^4 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

۹۷ در یک دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = \frac{2}{3^n}$ ، جمله چهارم چند برابر جمله ششم است؟

- گزینه «۱» ۲ گزینه «۲» ۳ گزینه «۳» ۴ گزینه «۴» ۹

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{\frac{2}{3^4}}{\frac{2}{3^6}} = \frac{3^6}{3^4} = 3^2 = 9$$

پاسخ: کافی است در جمله عمومی دنباله هندسی به جای n ، شماره جمله مورد نظر را جایگذاری کنیم.

۹۸ در یک دنباله هندسی، جملات چهارم و هفتم به ترتیب ۷ و ۵۶ می‌باشد. جمله نهم کدام است؟

- گزینه «۱» $50\sqrt{2}$ گزینه «۲» $56\sqrt{2}$ گزینه «۳» ۲۰۴ گزینه «۴» ۲۲۴

$$a_4 = 7, \quad a_7 = 56 \Rightarrow a_7 = a_4 \cdot r^3 \Rightarrow 56 = 7 \times r^3 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$$

پاسخ:

$$a_9 = a_4 \cdot r^5 = 7 \times 2^5 = 7 \times 32 = 224$$

۹۹ در یک دنباله هندسی $a_2, a_3, a_4 = 8$ ، حاصل a_1, a_5 کدام است؟

- گزینه «۱» ۴ گزینه «۲» ۸ گزینه «۳» ۲ گزینه «۴» ۱۶

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 8 \Rightarrow a_1 r \cdot a_1 r^2 \cdot a_1 r^3 = 8 \Rightarrow a_1^3 \cdot r^6 = 8 \Rightarrow (a_1 r^2)^3 = 2^3 \Rightarrow a_1 r^2 = 2 (*)$$

پاسخ:

$$a_1 \cdot a_5 = a_1 \cdot a_1 r^4 = a_1^2 \cdot r^4 = (a_1 r^2)^2 \xrightarrow{\text{طبق رابطه (*)}} (2)^2 = 4$$

۱۰۰ در یک دنباله هندسی، قدر نسبت برابر $\frac{1}{3}$ است. مجموع جملات پنجم و هفتم چند برابر مجموع جملات هشتم و دهم است؟

- گزینه «۱» $\frac{1}{8}$ گزینه «۲» ۸ گزینه «۳» ۲ گزینه «۴» ۴

$$\frac{a_5 + a_7}{a_8 + a_{10}} = \frac{a_1 r^4 + a_1 r^6}{a_1 r^7 + a_1 r^9} = \frac{a_1 r^4 (1 + r^2)}{a_1 r^7 (1 + r^2)} = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3} = 27$$

پاسخ:

۱۰۱ در دنباله هندسی $2\sqrt{2}, 2^3\sqrt{2}, 2^5\sqrt{2}, \dots$ حاصل $\frac{a_9 + a_5}{a_3 + a_7}$ کدام است؟

- گزینه «۱» $2^4\sqrt{2}$ گزینه «۲» 2^8 گزینه «۳» 2^4 گزینه «۴» $2^2\sqrt{2}$

پاسخ: ابتدا قدر نسبت دنباله هندسی داده شده را می‌یابیم:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2^3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2^2 = 4 \Rightarrow \frac{a_9 + a_5}{a_3 + a_7} = \frac{a_1 r^8 + a_1 r^4}{a_1 r^2 + a_1 r^6} = \frac{a_1 r^4 (r^4 + 1)}{a_1 r^2 (1 + r^4)} = \frac{r^4}{r^2} = r^2 = (2^2)^2 = 2^4\sqrt{2}$$

در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است. اگر جمله سیزدهم ۹ باشد، جمله پانزدهم کدام است؟

- گزینه «۴»
 ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ:

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{20} = 108 \\ a_{13} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^7 \cdot a_1 r^{19} = 108 \\ a_1 r^{12} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 r^{26} = 108 \\ a_1 r^{12} = 9 \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{a_1^2 r^{26}}{a_1 r^{12}} = \frac{108}{9} \Rightarrow a_1 r^{14} = 12 \Rightarrow a_{15} = 12$$

در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

- گزینه «۲»
 ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ:

جمله وسط را a فرض می‌کنیم، در نتیجه جمله قبلی $\frac{a}{r}$ و جمله بعدی ar است، پس این سه جمله به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19$$

$$\Rightarrow \frac{6}{r} + 6r = 13 \xrightarrow{\times r} 6 + 6r^2 = 13r \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0 \Rightarrow (3r-2)(2r-3) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3} \text{ یا } \frac{3}{2}$$

به ازای هر دو مقدار r به دست آمده، بزرگ‌ترین جمله برابر 9 و کوچک‌ترین جمله برابر 4 می‌باشد، در نتیجه تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جمله برابر 5 می‌باشد.

در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

- گزینه «۴»
 ۲ + $\sqrt{3}$ (۱) ۵ + $2\sqrt{3}$ (۲) ۵ + $4\sqrt{3}$ (۳) ۷ + $4\sqrt{3}$ (۴)

پاسخ:

$$a_2, 2a_5, a_8 \xrightarrow{\text{جملات دنباله هندسی اند.}} a_1 r, 2a_1 r^4, a_1 r^7 \xrightarrow{\text{چون تشکیل دنباله حسابی می‌دهند.}} 2(2a_1 r^4) = a_1 r + a_1 r^7 \xrightarrow{+a_1 r} 4r^3 = 1 + r^6 \Rightarrow r^6 - 4r^3 + 1 = 0$$

$$r^3 = t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow r^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

اکنون با معلوم بودن r^3 نسبت بزرگترین این سه عدد (یعنی a_8) به کوچکترین آن‌ها یعنی a_2 برابرست با:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r} = r^6 = (2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} 7 + 4\sqrt{3}$$

واسطه هندسی

نکته

اگر a, b, c سه جمله متوالی یا جملات متساوی الفاصله از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = a \cdot c$ و b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامیم. و به طور کلی حاصل ضرب k جمله از یک دنباله هندسی با حاصل ضرب k جمله دیگر از همان دنباله هندسی برابرند به شرطی که مجموع اندیس‌ها در دو طرف تساوی با هم برابر باشند.

به عنوان مثال: در دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots داریم:

الف) $a_6 \times a_8 = a_3 \times a_{11}$

زیرا در هر طرف تساوی ۲ جمله داریم و مجموع اندیس‌ها در دو طرف با هم مساوی است. ($6+8=3+11$)

ب) $a_3 \times a_7 \times a_9 = a_5 \times a_{10} \times a_{15}$ ، $a_{10} \times a_6 \times a_{14} = a_{10} \times a_{10} \times a_{10} = (a_{10})^3$

در رابطه بالا در هر طرف ۳ جمله داریم و مجموع اندیس‌ها در هر دو طرف با هم مساوی است.

تعداد جملات در دو طرف رابطه روبه‌رو با هم مساوی نیستند، بنابراین رابطه مقابل برقرار نمی‌باشد.

ج) $a_{10} \times a_6 \times a_{14} \neq a_{10} \times a_7$

در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟

- گزینه «۳»
 ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ:

$$a_3, a_7, a_9 \xrightarrow{\text{جملات متوالی یک دنباله هندسی می‌شوند.}} (a_1 + 2d), (a_1 + 6d), (a_1 + 8d) \xrightarrow{\text{جملات متوالی یک دنباله هندسی می‌شوند.}} (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1 d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1 d + 16d^2 \Rightarrow 20d^2 = -2a_1 d \xrightarrow{\div 2d} 10d = -a_1 \Rightarrow a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

« درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

« درس دوم: دایره مثلثاتی

« درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

فصل دوم:

مثلثات

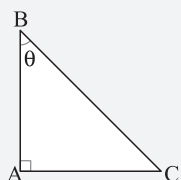
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

تعریف علم مثلثات:

مثلثات شاخه‌ای از علم ریاضی است که به حل مثلث‌های مختلف می‌پردازد. منظور از حل مثلث، پیدا کردن اجزاء مجهول مثلث (مانند زوایا و یا طول اضلاع) به کمک قسمت‌های معلوم آن می‌باشد. اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم نیز از اهداف این علم می‌باشد. این علم در علوم مختلف مهندسی، نقشه‌برداری، جنگ، دریانوردی، نجوم، فیزیک و ... کاربرد فراوانی دارد.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

چهار نسبت مثلثاتی را با توجه به مثلث قائم‌الزاویه ABC، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$\sin \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta} = \frac{AB}{AC}$$

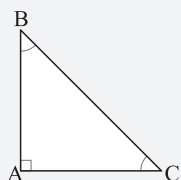
بنابراین از روابط فوق، می‌توان نتایج زیر را گرفت:

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \Rightarrow \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB} = \tan \theta$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC} = \cot \theta$$



نکته اگر جمع دو زاویه ۹۰° شود، آن دو زاویه را متمم هم گویند. به عنوان مثال در مثلث قائم‌الزاویه ABC دو زاویه B و C متمم یکدیگرند. ($\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$)

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم:

در مثلث فوق برای \hat{B} و \hat{C} داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin \hat{B} = \cos \hat{C}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos \hat{B} = \sin \hat{C}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan \hat{B} = \cot \hat{C}$$

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot \hat{B} = \tan \hat{C}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta$$

بنابراین اگر $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$ باشد، داریم:

به مثال‌های زیر دقت نمایید:

$$0^\circ + 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 0^\circ = \cos 90^\circ, \cos 0^\circ = \sin 90^\circ, \tan 0^\circ = \cot 90^\circ, \cot 0^\circ = \tan 90^\circ$$

$$1^\circ + 89^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 1^\circ = \cos 89^\circ, \cos 1^\circ = \sin 89^\circ, \tan 1^\circ = \cot 89^\circ, \cot 1^\circ = \tan 89^\circ$$

$$3^\circ + 87^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 3^\circ = \cos 87^\circ, \cos 3^\circ = \sin 87^\circ, \tan 3^\circ = \cot 87^\circ, \cot 3^\circ = \tan 87^\circ$$

$$45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 45^\circ = \cos 45^\circ, \tan 45^\circ = \cot 45^\circ$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۶۰°، ۴۵°، ۳۰° به کمک نکته مربوط به زوایای متمم، به سادگی می‌توان جدول زیر را به خاطر سپرد:

α	۳۰°	۴۵°	۶۰°
نسبت مثلثاتی			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

« درس اول و دوم: ریشه و توان - ریشه نام

« درس سوم: توان‌های گویا

« درس چهارم: عبارتهای جبری

فصل سوم:

توان‌های گویا و عبارتهای جبری

درس‌های اول و دوم: ریشه و توان- ریشه n ام

ریشه n ام: اگر n عددی طبیعی و مخالف ۱ باشد، ریشه n ام عدد a، عددی مانند b است به شرطی که $b^n = a$ باشد. به عنوان مثال ریشه سوم ۸ برابر ۲ است، زیرا $2^3 = 8$ ، اما از آنجایی که $(3)^4 = 81$ و $(-3)^4 = 81$ ، در نتیجه ریشه چهارم ۸۱، ۳ و -۳ می‌باشد. در واقع اگر n عددی زوج باشد و b ریشه n ام a ($a > 0$) باشد، آن‌گاه -b هم ریشه n ام a است. اما اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه هر عدد حقیقی مانند a فقط یک ریشه n ام دارد.

نکات اگر n فرد باشد، هر عدد حقیقی فقط یک ریشه n ام دارد.

۲ اگر n زوج باشد، هر عدد حقیقی و مثبت، دو ریشه n ام دارد که قرینه هم هستند. به بیان دیگر، ریشه n ام عدد مثبت a وقتی که n زوج است برابر با $\pm \sqrt[n]{a}$ می‌باشد.

۳ اگر n زوج باشد، برای اعداد منفی، ریشه n ام تعریف نمی‌شود و ریشه n ام مثبت عدد مثبت a را با نماد $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال ریشه‌های چهارم ۸۱ عبارت‌اند از ۳ و -۳، اما $\sqrt[4]{81} = 3$ است.

۴ اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه:

الف $a > a^2 > a^3 > \dots$ ب $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots$

۵ اگر $a > 1$ ، آن‌گاه:

الف $a < a^2 < a^3 < \dots$ ب $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots$

۱ کدام مورد نادرست است؟

گزینه «۱» هر عدد مثبت، دارای دو ریشه چهارم است که قرینه هم هستند.

گزینه «۲» هر عدد مثبت، یک ریشه سوم دارد.

گزینه «۳» هر عدد منفی، یک ریشه سوم دارد.

گزینه «۴» هر عدد منفی، دارای دو ریشه چهارم است که قرینه هم هستند.

پاسخ: عددهای منفی ریشه چهارم ندارند. در واقع برای اعداد منفی، ریشه زوج تعریف نمی‌شود.

۲ اگر $\sqrt[3]{a} > a$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

گزینه «۱» $a^2 - a > 0$ گزینه «۲» $a > 1$ گزینه «۳» $a^3 > a^4$ گزینه «۴» $a > \sqrt[3]{a}$

پاسخ: چون $\sqrt[3]{a} > a$ ، پس $0 < a < 1$ ، در نتیجه $a^3 > a^4$.

۳ اگر $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد، کوچکترین عضو مجموعه $\{a, \sqrt{a}, a^2, \sqrt[3]{a}\}$ کدام است؟

گزینه «۱» a گزینه «۲» a^2 گزینه «۳» \sqrt{a} گزینه «۴» $\sqrt[3]{a}$

پاسخ: چون $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ، عددی بین صفر و یک است، در نتیجه:

بنابراین کوچکترین عضو مجموعه A برابر با a^2 می‌باشد.

قوانین ریشه‌گیری

قوانین زیر در ریشه‌گیری مطرح می‌باشند:

۱ $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & ; \text{زوج } n \text{ مثال } \sqrt[6]{2^6} = |2| = 2 \\ a & ; \text{فرد } n \text{ مثال } \sqrt[3]{(-7)^3} = -7 \end{cases}$

۲ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ مثال } \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

اگر حداقل یکی از فرجه‌های m یا n زوج باشد و $a > 0$ ، آن‌گاه:

۳ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ مثال } \sqrt[2]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[6]{7}$

اگر m و n هر دو فرد باشند، آن‌گاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

۴ اگر n زوج و $b > 0$ ، آن‌گاه:

$$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n \cdot b} & ; a \geq 0 \text{ مثال } 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45} \\ -\sqrt[n]{a^n \cdot b} & ; a < 0 \text{ مثال } -2\sqrt{4} = -\sqrt{(-2)^2 \times 4} = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$$

مثال $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \implies 2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \times 4} = \sqrt[3]{32}$

۵ اگر n فرد باشد، آن گاه:

مثال $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \implies \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

۶ اگر n زوج باشد و a و b هر دو نامنفی باشند ($a \geq 0$ و $b \geq 0$)، آن گاه:

مثال $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \implies \sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{32}$

۷ اگر n فرد باشد، به ازای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

مثال $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \implies \sqrt[4]{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{3}}$

۸ اگر n زوج باشد و $a \geq 0$ و $b > 0$ ، آن گاه:

مثال $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \implies \sqrt[4]{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{2}}$

۹ اگر n فرد باشد و $b \neq 0$ ، آن گاه:

۴ حاصل $3\sqrt[4]{0.0625} + \sqrt[3]{-0.064}$ کدام است؟

۱/۹ (۴)

۱/۴ (۳)

۱/۱ (۲)

۰/۹ (۱)

گزینه «۲» پاسخ:

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt[4]{0.0625} &= \sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{10}\right)^4} = \frac{5}{10} \\ \sqrt[3]{-0.064} &= \sqrt[3]{-\frac{64}{1000}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{4}{10}\right)^3} = -\frac{4}{10} \end{aligned} \right. \Rightarrow 3\sqrt[4]{0.0625} + \sqrt[3]{-0.064} = 3 \times \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{11}{10} = 1.1$$

۵ اگر $x < 0$ باشد، حاصل $2\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4}$ کدام است؟

-۳x (۴)

-x (۳)

x (۲)

۳x (۱)

$2\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4} = 2x - x = x$

پاسخ: چون $x < 0$ ، پس: $\sqrt[4]{x^4} = |x| = -x$ ، بنابراین:

۶ حاصل عبارت $\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2}$ وقتی که $x > 0$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۲x+۲ (۳)

-۲ (۲)

-۲x-۲ (۱)

$\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2} = -x + |x| + |-2| \stackrel{x > 0 \Rightarrow |x|=x}{=} -x + x + 2 = 2$

۷ اگر $x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، مقدار عددی $x^2 + \sqrt{2}x - 3$ کدام است؟

$\sqrt{2}-1$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + \sqrt{2}x - 3 = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 3 = 2 + 2 - 3 = 1$

۸ ساده شده عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{\sqrt{54}} + \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{4}{\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ (۲)

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ (۱)

پاسخ: می دانیم $m\sqrt[n]{a} = m\sqrt[n]{a}$ ، بنابراین داریم:

$\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{\sqrt{54}} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{3\sqrt{3} \times 2} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt[3]{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{\sqrt{54}} + \sqrt[3]{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

۹ حاصل عبارت $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - 3\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{4\sqrt{2}})^6$ کدام است؟

۵۱۲ (۴)

$512\sqrt{2}$ (۳)

$1024\sqrt{2}$ (۲)

۱۰۲۴ (۱)

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}$ ، $3\sqrt[3]{16} = 3\sqrt[3]{2^4} = \sqrt{2}$ ، $4\sqrt[3]{4\sqrt{2}} = 4\sqrt[3]{(\sqrt{2})^5} = \sqrt{2}$

پاسخ: با استفاده از قواعد رادیکال ها داریم:

\Rightarrow عبارت داده شده $= (\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^6 \times (\sqrt{2})^6 = 2^6 \times 2^3 = 2^9 = 512$

۱۰ حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: با مخارج مشترک گیری داریم:

$\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4}{1-\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{1-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{-(\sqrt{2}-1)} = -4$

« درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

« درس دوم: سهمی

« درس سوم: تعیین علامت

فصل چهارم:

معادله‌ها و

نامعادله‌ها

معادله درجه دوم و حل به روش‌های تجزیه و مربع کامل

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

معادله درجه دوم: شکل کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد که در آن ضرایب a ، b و c اعداد حقیقی اند ($a \neq 0$) و x را متغیر یا مجهول معادله می‌نامند. برای حل معادله درجه دوم روش‌های مختلفی وجود دارند که آن‌ها را در ادامه مطرح می‌کنیم:

۱. **روش تجزیه:** در این روش ابتدا عبارت درجه دوم را تجزیه می‌کنیم، سپس تک تک پرانتزها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال آموزشی

معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

۲. **روش مربع کامل:** ابتدا به کمک رابطه $x^2 \pm bx = (x \pm \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$ عبارت را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، سپس کلیه اعداد را به سمت راست تساوی می‌بریم و از طرفین رابطه جذر می‌گیریم (در صورتی که عدد سمت راست تساوی منفی نباشد). دقت کنید اگر $A^2 = B^2$ باشد، آن‌گاه $A = \pm B$ می‌شود.

مثال آموزشی

۱. معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ

ابتدا عبارت $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ را به صورت $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ می‌نویسیم و در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 - 16 + 15 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 1 \Rightarrow x - 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5 \\ x - 4 = -1 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

۲. معادله $x^2 + 2x + 17 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ

عبارت $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ را به صورت $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ می‌نویسیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 2x + 17 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 - 1 + 17 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -16$$

معادله ریشه حقیقی ندارد، چون $\sqrt{-16}$ در اعداد حقیقی وجود ندارد.

۳. در حل معادله $2x^2 + 9x - 5 = 0$ به روش مربع کامل، از چه عددی جذر می‌گیریم؟

پاسخ

در عبارت $2x^2 + 9x$ از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم تا بتوانیم از رابطه مربع کامل استفاده کنیم:

$$2x^2 + 9x = 2(x^2 + \frac{9}{2}x) = 2[(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16}]$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 9x - 5 = 0 \Rightarrow 2[(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16}] - 5 = 0 \Rightarrow 2(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{2 \times 81}{16} - 5 = 0 \Rightarrow 2(x + \frac{9}{4})^2 = \frac{121}{8} \Rightarrow (x + \frac{9}{4})^2 = \frac{121}{16}$$

در ادامه حل کافی است از عدد $\frac{121}{16}$ جذر بگیریم.

۱ در حل معادله $2x^2 - 5x - 3 = 0$ به روش تجزیه به $A(x - 3) = 0$ می‌رسیم، A^2 کدام است؟

۱) $4x^2 + 4x + 1$

۲) $x^2 + 4x + 1$

۳) $4x^2 + 4x + 4$

۴) $4x^2 + x + 4$

پاسخ: ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم تا A به دست آید، سپس A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3) = A(x - 3) \Rightarrow A = 2x + 1 \Rightarrow A^2 = (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

۲ طول یک مستطیل دو واحد بیشتر از دو برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل 24 m^2 باشد، نصف عرض مستطیل برابر با کدام است؟

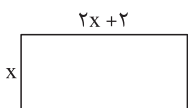
۱) ۸

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۱/۵

پاسخ: اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن $2x + 2$ می‌باشد، داریم:



$$\text{مساحت} = \text{طول} \times \text{عرض} = x(2x + 2) = 24 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1.5 \\ x = -4 \text{ غق} \end{cases}$$

« درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

« درس دوم: دامنه و برد تابع

« درس سوم: انواع توابع

فصل پنجم:

تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

تابع یکی از مفاهیم اصلی در ریاضیات است، بنابراین آن را از دیدگاه‌های مختلف بررسی می‌کنیم. قبل از اینکه مفهوم تابع را بیان کنیم ابتدا با زوج مرتب آشنا می‌شویم. **زوج مرتب:** به دسته‌ی (x, y) که ترتیب قرار گرفتن x و y در کنار هم مهم باشد، زوج مرتب می‌گویند. x را مؤلفه اول و y را مؤلفه دوم می‌نامند، پس $(x, y) \neq (y, x)$ (به شرطی که $x \neq y$ باشد). به عنوان نمونه $(3, 5) \neq (5, 3)$ ، همچنین برای اینکه $(x, y) = (z, t)$ ، باید $x = z$ و $y = t$ باشد.

تست آموزشی

اگر زوج مرتب‌های $(3x + y, 3)$ و $(7, 2x - y)$ برابر باشند، $x - y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

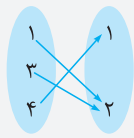
پاسخ گزینه «۲» صحیح است. $(3x + y, 3) = (7, 2x - y) \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 3(2) + y = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x - y = 1$

چون دو زوج مرتب با هم برابرند، بنابراین هر یک از مؤلفه‌های دو زوج مرتب نیز با یکدیگر برابر هستند.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود. بنابراین مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را یک تابع می‌نامیم هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن عضو اول یکسان نداشته باشند و اگر عضو اول آن یکسان باشد، عضو دوم نیز باید یکسان شود، بنابراین اگر (x, y_1) و (x, y_2) هر دو عضو یک تابع باشند، باید $y_1 = y_2$ باشد.

به عنوان مثال رابطه $f = \{(1, 2), (3, 2), (4, 1)\}$ تابع هست ولی رابطه $g = \{(1, 2), (1, 4)\}$ تابع نیست. (چرا؟)

نمایش تابع: یک تابع را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار مختصاتی، نمودار پیکانی (ون) و یا جدول، نمایش داد. به عنوان نمونه تابع f که در مثال بالا ذکر شده است را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:



نمودار پیکانی

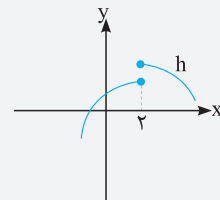
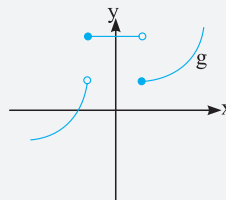
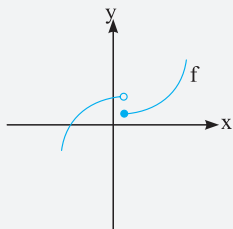


نمودار مختصاتی

x	۱	۳	۴
y	۲	۲	۱

جدول

تابع از دید نمودار مفصلی (دکارتی): نموداری نشان دهنده یک تابع است که هر خط موازی با محور y (عرض‌ها)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. به عنوان مثال f ، g و h را ببینید:

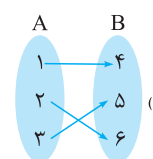
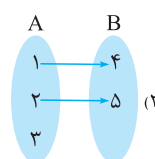
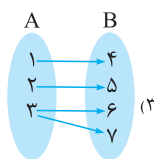


نمودارهای f و g تابع هستند، چون هر خط موازی با محور y نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، اما در نمودار h خط $x = 2$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس h تابع نیست.

تابع از دید نمودار پیکانی (ون): رابطه‌ای تابع است که به هر عضو از مجموعه A ، دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده شود. بنابراین باید از هر عضو A ، دقیقاً یک پیکان به اعضای مجموعه B رسم شوند.

مثال آموزشی

کدام رابطه نمایش یک تابع است؟



پاسخ با توجه به تعریف بالا، فقط رابطه نشان داده شده در مورد (۱) تابع هست. در مورد (۲) از عدد ۳ فلش یا پیکانی خارج نشده است، پس تابع نمی‌باشد (باید از تمام اعضای مجموعه A فلش یا پیکان خارج شود). در مورد (۳) از عدد ۳ دو پیکان خارج شده است، پس تابع نمی‌باشد، یعنی دو زوج مرتب متفاوت، با مؤلفه اول یکسان داریم: $(3, 6)$ و $(3, 7)$

- « آزمون جامع ۱
- « آزمون جامع ۲
- « آزمون جامع ۳
- « آزمون جامع ۴
- « پاسخنامه تشریحی

آزمون‌های جامع

۱. متمم مجموعه $(B-A) \cup (B-A')$ نسبت به مجموعه مرجع U کدام است؟

- ۱) B (۱) ۲) B' (۲) ۳) A (۳) ۴) A' (۴)

۲. اگر A مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳ و $B = \{a \in \mathbb{Z}, |a| < 20\}$ باشد، کدام مجموعه در \mathbb{Z} نامتناهی است؟

- ۱) B (۱) ۲) $A \cap B$ (۲) ۳) $B - A$ (۳) ۴) B' (۴)

۳. اگر $n(A) = 40$ ، $n(B) = 15$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، تعداد اعضای $A \cap B'$ کدام است؟

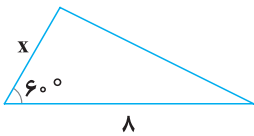
- ۱) ۱۰ (۱) ۲) ۲۰ (۲) ۳) ۲۵ (۳) ۴) ۳۰ (۴)

۴. حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ \cos 39^\circ \cos 27^\circ + \sin 27^\circ}{\cos 16^\circ \cot 27^\circ + \tan 6^\circ \tan 45^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$ (۱) ۲) $-\sqrt{3}$ (۲) ۳) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴)

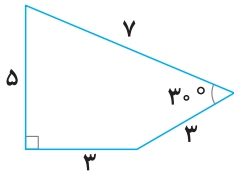
۵. مساحت مثلث مقابل با مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۲ برابر است. مقدار x چقدر است؟

- ۱) ۲ (۱) ۲) ۳ (۲) ۳) ۴ (۳) ۴) ۵ (۴)



۶. مساحت شکل مقابل کدام است؟

- ۱) ۹ (۱) ۲) ۱۸ (۲) ۳) $\frac{51}{4}$ (۳) ۴) ۳۶ (۴)



۷. اگر $\sqrt{5} = 3^{a+1}$ باشد، مقدار 9^{a-1} کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{9}$ (۱) ۲) ۵ (۲) ۳) ۴۵ (۳) ۴) $\frac{5}{81}$ (۴)

۸. اگر $A = \sqrt[3]{12} \sqrt[4]{54} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{6}$ باشد، مقدار $\sqrt[3]{A^2 - 9}$ کدام است؟

- ۱) ۳ (۱) ۲) $\sqrt[3]{36}$ (۲) ۳) $\sqrt[3]{6\sqrt{6}}$ (۳) ۴) $\sqrt[3]{42}$ (۴)

۹. مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x^2 - 16)(x^2 + 5)}{(x^2 + x + 1)(2x + 1)} > 0$ به صورت $(a, \frac{-1}{4}) \cup (b, +\infty)$ می‌باشد. $a + b$ کدام است؟

- ۱) صفر (۱) ۲) ۸ (۲) ۳) -۸ (۳) ۴) -۴ (۴)

۱۰. محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۲۰ متر و ۱۶ متر مربع می‌باشند. نسبت طول به عرض مستطیل برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{4}$ (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) $\frac{4}{5}$ (۳) ۴) ۴ (۴)

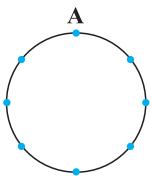
۱۱. اگر رابطه $f = \{(3, m^2 + 2m + 2), (m^2 + 1, 4), (2, 5), (3, 6m - 1)\}$ یک تابع باشد، آنگاه معادله $x^3 - (m^2 + 1)x^2 + 25x = 0$ چند ریشه متمایز دارد؟

- ۱) صفر (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) ۲ (۳) ۴) ۳ (۴)

۱۲. هشت نقطه مطابق شکل روی محیط یک دایره قرار دارند. چند چهارضلعی به رئوس این نقاط می‌توان رسم کرد، طوری که

حتماً این چهارضلعی‌ها شامل رأس A باشند؟

- ۱) $\binom{8}{3}$ (۱) ۲) ۳۵ (۲) ۳) ۱۴۰ (۳) ۴) ۳۶ (۴)



۱۳. حاصل $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6}$ برابر با کدام است؟

- ۱) ۲۱۶ (۱) ۲) ۳۶ (۲) ۳) ۳۲ (۳) ۴) ۶۴ (۴)

۱۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «GREEN» به طوری که E‌ها کنار هم نباشند، کدام است؟

- ۱) ۲۴ (۱) ۲) ۶۰ (۲) ۳) ۸۴ (۳) ۴) ۳۶ (۴)

۱۵. دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده متوالی هستند؟

- ۱) $\frac{2}{9}$ (۱) ۲) $\frac{5}{18}$ (۲) ۳) $\frac{7}{18}$ (۳) ۴) $\frac{4}{9}$ (۴)

(تقریبی داخل ۹۵)

۱۶ گروه خونی افراد یک جامعه چه نوع متغیر تصادفی است؟

- (۱) کمی - پیوسته
 (۲) کیفی - پیوسته
 (۳) کیفی - اسمی
 (۴) کیفی - ترتیبی

آزمون جامع (۲)

۱ اگر بازه $(5, 2a + 1)$ شامل سه عدد صحیح باشد، محدوده a کدام است؟

- (۱) $2/5 < a \leq 3$
 (۲) $3/5 < a \leq 4$
 (۳) $4 < a \leq 4/5$
 (۴) $4/5 < a \leq 5$

۲ در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۲۲
 (۲) ۱۵۹
 (۳) ۲۴۷
 (۴) ۲۵۵

۳ در یک دنباله هندسی صعودی، مجموع جملات پنجم و ششم ۴۸ و تفاضل جمله پنجم از هفتم برابر ۴۸ می‌باشد. قدرنسبت کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۵
 (۴) $\frac{1}{5}$

۴ اگر $\sin \alpha - \sqrt{3} = 0$ و $\tan \alpha = \sqrt{\frac{47}{22}} - x$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) $\sqrt{3}$

۵ اگر خط به معادله $(4m - 1)y - mx + 5m + 2 = 0$ با جهت مثبت محور x زاویه 45° بسازد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{1}{4}$

(تقریبی خارج ۹۵)

۶ مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ واحد مربع است. اندازه قطر کوچک آن، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$
 (۲) $3\sqrt{2}$
 (۳) $2\sqrt{3}$
 (۴) ۳

۷ حاصل $(\sqrt{50} + 1\sqrt[4]{64} - \sqrt{32} - 1\sqrt[4]{32})^4$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۴
 (۳) ۸
 (۴) ۱۶

(ریاضی داخل ۹۵)

۸ اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2} - 4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2} + 4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۸
 (۳) $6\sqrt{2}$
 (۴) $7\sqrt{2}$

۹ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + |x + 1|$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1)$
 (۲) $(-1, 1)$
 (۳) $(-1, 2)$
 (۴) $(1, 2)$

(تقریبی داخل ۹۶)

۱۰ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ کدام است؟

- (۱) $x < \frac{1}{3}$
 (۲) $x < 3$
 (۳) $-\frac{1}{3} < x < 3$
 (۴) $\frac{1}{3} < x < 3$

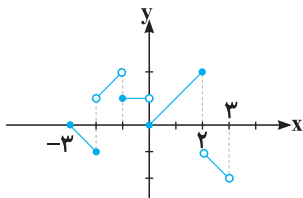
(ریاضی داخل ۹۷)

۱۱ معادله $(x^2 - 2x) = 2 - (x^2 - 2x)^2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۱۲ اگر نمودار $f(x)$ شکل مقابل باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-3, -2] \cup [0, 2]$
 (۲) $[-2, 2]$
 (۳) $[-3, -2] \cup [0, 3]$
 (۴) $[-2, 3]$



۱۳ حاصل $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{8}$ کدام است؟

- (۱) ۲۵۵
 (۲) ۲۵۶
 (۳) ۲۴۸
 (۴) ۲۴۷

۱۴ با حروف کلمه « talk » چند کلمه سه حرفی (با معنی یا بی معنی) می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف « t » باشد؟

- (۱) ۲۴
 (۲) ۶
 (۳) ۱۶
 (۴) ۱۸

۱۵ در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون بیاوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

(تقریبی داخل ۹۳)

- (۱) $\frac{28}{45}$
 (۲) $\frac{29}{45}$
 (۳) $\frac{31}{45}$
 (۴) $\frac{32}{45}$

$$\Rightarrow x^2 + 16 = 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=8 \end{cases}$$

توجه کنید که چون طول بزرگتر از عرض است، $x=8$ را در نظر گرفتیم.

$$x=8 \Rightarrow y = \frac{16}{x} = \frac{16}{8} = 2 \Rightarrow \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{8}{2} = 4$$

$$m^2 + 2m + 2 = 6m - 1 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$$

$m=1 \Rightarrow m^2 + 1 = 2 \Rightarrow (m^2 + 1 = 2, 4), (2, 5) \in f \Rightarrow f$ تابع نیست پس $m=1$ غیرقابل قبول می باشد.

$$m=3 \Rightarrow x^3 - 10x^2 + 25x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 10x + 25) = 0 \Rightarrow x(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x=0, x=5$$

با توجه به اینکه حتماً رأس A را دارند، پس می خواهیم از ۷ نقطه باقیمانده، سه نقطه انتخاب کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 4!} = 35$$

می دانیم یک مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است. $\binom{6}{0}$ تعداد زیرمجموعه های صفر عضوی یک مجموعه ۶ عضوی، $\binom{6}{1}$ تعداد زیرمجموعه های یک عضوی یک مجموعه ۶ عضوی و ... و $\binom{6}{6}$ تعداد زیرمجموعه های ۶ عضوی این مجموعه می باشد. پس مجموع آن ها $2^6 = 64$ می باشد. به خاطر بسپاریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تعداد کل کلمات را حساب می کنیم. سپس تعداد کلماتی که E ها کنار هم باشند را بدست می آوریم و از آن کسر می کنیم:

$$\text{تعداد کل کلمات} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

برای تکرار E

$$36 = 60 - 24 = \text{تعداد کلماتی که } E \text{ ها کنار هم نباشند} \Rightarrow 4! = 24 = \text{تعداد کلماتی که دو حرف } E \text{ کنار هم باشند.}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

اگر A پیشامد مورد نظر باشد، داریم:

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow n(A) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

گروه خونی افراد یک متغیر قابل شمارش نیست، بنابراین از نوع کیفی است. همچنین ترتیب خاصی ندارد، بنابراین کیفی اسمی می باشد.

پاسخنامه آزمون جامع (۲)



$$8 < 2a + 1 \leq 9 \Rightarrow 7 < 2a \leq 8 \Rightarrow 3.5 < a \leq 4$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 \Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 \Rightarrow a_3 = 2^3 - 1 \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow a_n = 2^n - 1 \Rightarrow a_8 = 2^8 - 1 = 255 \end{aligned}$$

روش اول:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 \\ &\vdots \\ a_8 &= 2a_7 + 1 = 2(127) + 1 = 255 \end{aligned}$$

طبق تعریف و دنباله هندسی داریم:

$$\begin{cases} a_5 + a_6 = 48 \\ a_7 - a_5 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 + a_5q = 48 \\ a_5q^2 - a_5 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5(1+q) = 48 \\ a_5(q^2-1) = 48 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \frac{a_5(q+1)(q-1)}{\text{طبق (I)}} = 48 \Rightarrow 48(q-1) = 48 \Rightarrow q-1=1 \Rightarrow q=2$$

$$\Delta \sin \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{22}{25}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{47}{22} - x = \frac{25}{22} \Rightarrow x = \frac{22}{22} + \frac{47}{22} - \frac{25}{22} \Rightarrow x = \frac{44}{22} = 2$$

$$(4m-1)y = mx - (\Delta m + 2)$$

$$y = \frac{m}{4m-1}x - \frac{\Delta m + 2}{4m-1} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{m}{4m-1}$$

از طرفی خط با جهت مثبت محور x ها زاویه 45° ساخته است، پس شیب آن برابر $\tan 45^\circ = 1$ می باشد.

$$\frac{m}{4m-1} = 1 \Rightarrow 4m-1 = m \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow 3a^2 = 2 \times 9 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = a\sqrt{3} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{26} - \sqrt{16 \times 2} - \sqrt{35})^4 = (\Delta\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4\sqrt{2} - \sqrt{2})^4 = (\sqrt{2})^4 = ((\sqrt{2})^2)^2 = 2^2 = 4$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + (\alpha\beta)^2$$

$$= (3\sqrt{2} - 4) + (3\sqrt{2} + 4) + \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)} = 6\sqrt{2} + \sqrt{18 - 16} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

می دانیم $x^2 + 1$ همواره مثبت است و در نتیجه $|x^2 + 1| = x^2 + 1$ می باشد.

$$\begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow 2x+1 - (x-2) > x^2+1 \Rightarrow x+3 > x^2+1 \Rightarrow x^2-x-2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x \geq 2} \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \Rightarrow 2x+1+x-2 > x^2+1 \Rightarrow x^2-3x+2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x < 2} 1 < x < 2 \end{cases}$$

روش اول:

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-3} < 0 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 & \text{(I)} \\ \frac{3x+1}{x-3} > -1 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ یا } x > 3 & \text{(II)} \end{cases} \Rightarrow \text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow x < \frac{1}{4}$$

(روش دوم (تستی): جواب نامعادله در آن صدق می کند، بنابراین با توجه به گزینه ها به x عدد دلخواهی می دهیم، که در برخی گزینه ها باشد.

$$x=1 \Rightarrow -1 < \frac{3+1}{1-3} < 3 \Rightarrow -1 < -2 < 3 \text{ غ ق}$$

بنابراین هر گزینه ای که شامل $x=1$ باشد، نادرست است. یعنی گزینه های (2)، (3) و (4) نادرست می باشند و گزینه (1) پاسخ صحیح تست است.

با تغییر متغیر $t = x^2 - 2x$ داریم:

$$x^2 - 2x = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه دارد} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشه حقیقی دارد.

عبارت زیررادیکال نمی تواند منفی باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} -3 \leq x \leq -2, f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \\ \text{منفی} \\ 0 \leq x \leq 2, f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \\ \text{مثبت} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = [-3, -2] \cup [0, 2]$$

4

5

6

7

8

9

10

11

12