« فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

« فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

« فصل سوم: چندضلعی‌ها

« فصل چهارم: تجسم فضایی

پایهٔ دهم

فصل اول

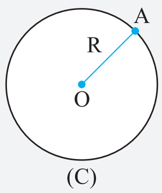
ترسیم‌های هندسی و استدلال

مکان‌هندسی - ۱

یک مجموعه از نقاط را «مکان‌هندسی» گوییم هرگاه اولاً همهٔ آن‌ها دارای ویژگی مشترکی باشند، دوماً هر نقطه که آن ویژگی را دارد، عضو آن مجموعه باشد.

دایره: مکان‌هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت، به فاصلهٔ ثابت قرار دارند. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

نقطهٔ A روی دایره است $\Leftrightarrow OA = R$



۱ **نقطهٔ ثابت A روی خط l در صفحه، مفروض است. مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ A بر خط l مماس‌اند، کدام است؟** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

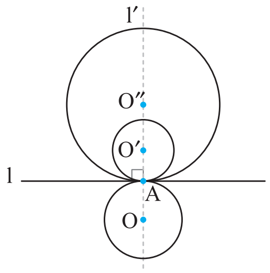
گزینهٔ «۲»

۱) یک خط

۲) یک خط به جز یک نقطه از آن

۳) دو خط به موازات l

۴) کل صفحه



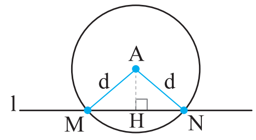
پاسخ: می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است، پس مرکز همهٔ این دایره‌ها روی خطی گذرنده از A و عمود بر l قرار دارند (خط l'). اما خود نقطهٔ A نمی‌تواند مرکز هیچ‌کدام از این دایره‌ها باشد، پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲ **نقطهٔ A و خط l در صفحه، مفروض‌اند. اگر m نقطه روی خط l وجود داشته باشد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ d باشد، m چند مقدار صحیح دارد؟** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۳»

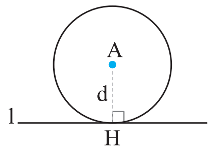
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ d قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع d است، پس جواب مسئله، محل برخورد دایره و خط l است که وضعیت‌های زیر را داریم:



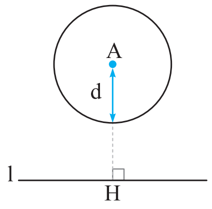
$AH < d$

دو جواب (نقاط M و N)



$AH = d$

یک جواب (نقطهٔ H)



$AH > d$

فاقد جواب

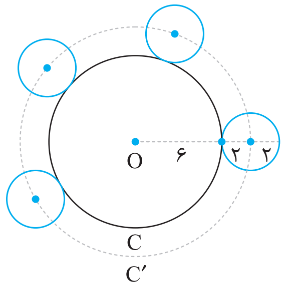
پس مقدار m می‌تواند صفر، یک یا دو باشد. یعنی سه مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۳ در صفحه، مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ واحد که بر دایرهٔ $C(O,6)$ مماس باشند، کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

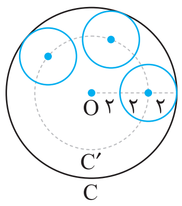
گزینهٔ «۳»

۱) دایره‌ای به شعاع ۸ ۲) دایره‌ای به شعاع ۴ ۳) دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ ۴) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۶

پاسخ: چون دو دایره می‌توانند مماس داخل یا مماس خارج باشند، دو وضعیت داریم:



دایرهٔ $C'(O,8)$



دایرهٔ $C'(O,4)$

بنابراین دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸، جواب مسئله‌اند.

۴ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷ واحد از یک‌دیگر در صفحه، مفروض‌اند. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ ۲ و از B به فاصلهٔ $3-4x$ واحد باشد، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

گزینهٔ «۴»

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۳ ۴) ۲ یا ۳

پاسخ:

نکته اگر نقطه‌ای با چند ویژگی خواسته شده باشد، ابتدا مکان‌هندسی مربوط به هر ویژگی را یافته، سپس اشتراک این مکان‌هندسی‌ها را مشخص می‌کنیم تا نقطهٔ مورد نظر، به‌دست آید.

مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، دایرهٔ $C(A,2)$ و مکان‌هندسی نقاطی که از B به فاصلهٔ $4x-3$ واحد باشند، دایرهٔ $C'(B,4x-3)$ است. پس جواب مسئله، محل برخورد این دو دایره است و چون فرض شده که مسئله فقط یک جواب دارد، دو دایره مماس‌اند. در نتیجه دو حالت داریم:

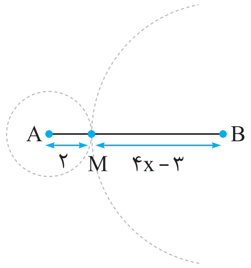
حالت اول: دو دایره، مماس خارج باشند.

در این صورت، داریم:

$AB = AM + MB$

$\Rightarrow 7 = 2 + 4x - 3$

$\Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$



حالت دوم: دو دایره، مماس داخل باشند.

در این صورت، داریم:

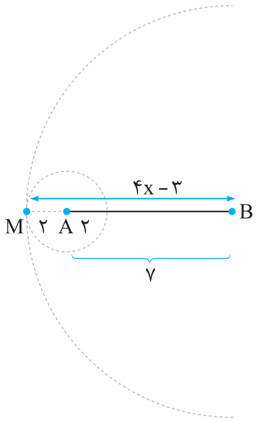
$AB = |AM - MB|$

$\Rightarrow 7 = |2 - 4x + 3|$

$\Rightarrow |5 - 4x| = 7$

$\Rightarrow 5 - 4x = \pm 7 \Rightarrow \underbrace{4x = -2}_{\text{غ ق ق}}$

یا $4x = 12 \Rightarrow x = 3$



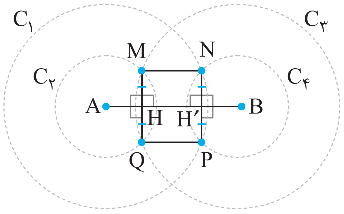
از دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم $x = 2$ یا $x = 3$.

۵ پاره‌خط AB به اندازهٔ ۸ واحد در صفحهٔ مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟ (ریاضی ۹۹ داخل)

گزینهٔ «۳»

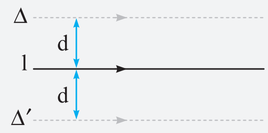
۱) لوزی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) مستطیل ۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

پاسخ: اولاً چون دایره‌ها دوبه‌دو هم‌نهشت‌اند، $MQ = NP$. می‌دانیم خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است، پس $MH = NH'$ و چون $MH \parallel NH'$ و $\hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ$، چهارضلعی $MNH'H$ مستطیل است. در نتیجه $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$. به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم $\hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$. بنابراین چهارضلعی MNPQ هم مستطیل است.



مکان‌هندسی - ۲

مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصلهٔ ثابت d باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات l و به فاصلهٔ d در طرفین آن می‌باشند.

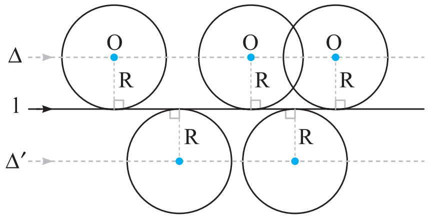


۶ **خط l در صفحه، مفروض است. مکان‌هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط l مماس باشند، کدام است؟ $(R > 0)$** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۳»

۱) یک خط به موازات l
۲) یک خط عمود بر l
۳) دو خط به موازات l
۴) دو خط عمود بر l

پاسخ: می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است. پس مرکز تمام دایره‌های مورد نظر، از خط l به فاصلهٔ ثابت R قرار دارند و برعکس. بنابراین مکان‌هندسی مرکز این دایره‌ها، دو خط Δ و Δ' به موازات l و در طرفین آن است.



۷ **مربع ABCD به ضلع ۳ واحد، مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد که از قطر AC به فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}$ باشد؟** *(کنکورهای قدیم)*

گزینهٔ «۴»

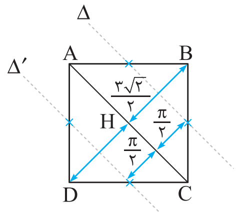
۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) چهار

پاسخ:

نکته طول قطر مربعی به ضلع a، برابر است با $a\sqrt{2}$.

مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که از AC به فاصلهٔ $\frac{\pi}{2}$ باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات آن است.

حال چون $BH = \frac{1}{2}BD = \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 2/1$ و $\frac{\pi}{2} \simeq 1/5$، نتیجه می‌گیریم $\frac{\pi}{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$. پس Δ و Δ' محیط مربع را در چهار نقطه، قطع می‌کنند.

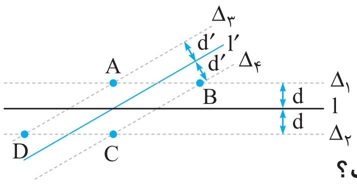


۸ **دو خط متقاطع l و l′ در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از l به فاصلهٔ d و از l′ به فاصلهٔ d′ باشد؟ $(d, d' > 0)$** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۴»

۱) صفر یا دو
۲) صفر یا چهار
۳) دقیقاً دو
۴) دقیقاً چهار

پاسخ: مکان‌هندسی نقاطی که از l به فاصلهٔ d باشند، دو خط Δ_1 و Δ_2 به موازات l و مکان‌هندسی نقاطی که از l′ به فاصلهٔ d′ باشند، دو خط Δ_3 و Δ_4 به موازات l′ می‌باشند. حال چون l و l′ متقاطع‌اند، Δ_1 و Δ_2 با Δ_3 و Δ_4 متقاطع‌اند و مسئله، چهار جواب دارد.

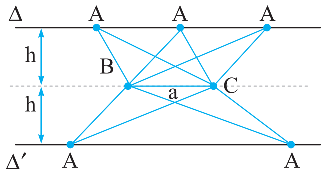


۹ **در صفحه، مکان‌هندسی رئوس مثلث‌های هم‌ارزی (هم‌مساحتی) که قاعدهٔ آن‌ها مشترک باشد، کدام است؟**

گزینهٔ «۳»

۱) یک خط
۲) دو خط متقاطع
۳) دو خط موازی
۴) دو خط عمود برهم

پاسخ: می‌دانیم مساحت مثلث، برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع $(S = \frac{1}{2}ah)$. حال چون مساحت و طول قاعدهٔ این مثلث‌ها یکسان است، ارتفاع آن‌ها (h) هم یکسان است. پس رأس سوم این مثلث‌ها (نقطهٔ A)، به فاصله‌ای ثابت (h) از ضلع BC قرار دارد و برعکس. در نتیجه، مکان هندسی نقطهٔ A روی دو خط Δ و Δ' به موازات BC و در طرفین آن می‌باشد.

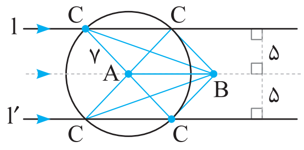


۱۰ **چند نقطهٔ متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحهٔ مختصات، می‌توان یافت که فاصلهٔ رأس C از نقطهٔ A و پاره‌خط AB، به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟** *(ریاضی ۹۹ خارج)*

گزینهٔ «۴»

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۷ واحد باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۵ واحد باشند، دو خط l و l′ به موازات آن و در طرفین آن است. پس نقطهٔ C، محل برخورد دایره با l و l′ است که چون $7 > 5$، دایره با هر دو خط، متقاطع است و مسئله چهار جواب دارد.



تذکر چون پاره‌خط AB معلوم نیست، نقطهٔ B می‌تواند درون، بیرون یا روی دایره باشد که در هر صورت، تأثیری در پاسخ این سوال ندارد.

فصل دوم

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

نسبت دو عدد: دو عدد حقیقی a و b مفروض‌اند $(b \neq ۰)$. عبارت $\frac{a}{b}$ را نسبت این دو عدد گوییم.

تناسب: اگر دو نسبت با هم برابر باشند، یک تناسب تشکیل می‌دهند، مانند $\frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$.

خواص تناسب: اعداد حقیقی a ، b ، c و d مفروض‌اند. در این‌صورت:

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

۲) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ترکیب در صورت)

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ (ترکیب در مخرج)

۶) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (تفضیل در صورت)

۷) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (تفضیل در مخرج)

۸) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

۹) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$

(در عبارت‌های بالا، همهٔ کسرها با معنا فرض شده‌اند.)

۱ اگر $\frac{a}{b} = \frac{۲}{۵}$، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

گزینهٔ «۴»

۱) $-\frac{۷}{۳}$　۲) $\frac{۳}{۷}$　۳) $\frac{۷}{۳}$　۴) $-\frac{۳}{۷}$

پاسخ: روش اول: به کمک ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{۲}{۵} \xRightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{a-b}{b} = \frac{۲-۵}{۵} = -\frac{۳}{۵} \\ \frac{a}{b} = \frac{۲}{۵} \xRightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{a}{a+b} = \frac{۲}{۲+۵} = \frac{۲}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow (\frac{a-b}{b})(\frac{a}{a+b}) = (-\frac{۳}{۵})(\frac{۲}{۷}) \Rightarrow (\frac{a-b}{a+b})(\frac{a}{b}) = -\frac{۶}{۳۵} \xRightarrow{\frac{a}{b}=\frac{۲}{۵}} (\frac{a-b}{a+b})(\frac{۲}{۵}) = -\frac{۶}{۳۵}$$

$$\xRightarrow{\times\frac{۵}{۲}} \frac{a-b}{a+b} = (-\frac{۶}{۳۵})(\frac{۵}{۲}) = -\frac{۳}{۷}$$

روش دوم: چون $\frac{a}{b} = \frac{۲}{۵}$، فرض می‌کنیم $a = ۲k$ و $b = ۵k$. بنابراین:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{۲k-۵k}{۲k+۵k} = \frac{-۳k}{۷k} = -\frac{۳}{۷}$$

روش سوم: با فرض $a = ۲$ و $b = ۵$، داریم:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{۲-۵}{۲+۵} = -\frac{۳}{۷}$$

۲ در چهارضلعی محدب ABCD ، رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{۳} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{C}}{۵} = \frac{۵\hat{D}}{۱۲}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل A و C چند درجه است؟

(تجربی ۹۶ داخل)

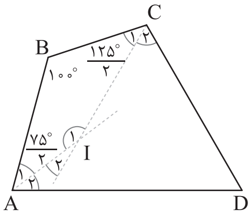
گزینهٔ «۱»

۱) ۲۰　۲) ۲۵　۳) ۳۰　۴) ۳۵

پاسخ: می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است. حال طبق ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\frac{\hat{A}}{3}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{C}}{5}=\frac{\hat{D}}{\frac{12}{5}}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{3+4+5+\frac{12}{5}}=\frac{360^\circ}{\frac{72}{5}}=25^\circ \Rightarrow \hat{A}=75^\circ,\hat{B}=100^\circ,\hat{C}=125^\circ,\hat{D}=60^\circ$$

از طرف دیگر، در چهارضلعی ABCI ، داریم:



$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1+\hat{I}_1=360^\circ \Rightarrow \frac{75^\circ}{2}+100^\circ+\frac{125^\circ}{2}+\hat{I}_1=360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{I}_1=160^\circ \Rightarrow \hat{I}_2=180^\circ-\hat{I}_1=20^\circ$$

میانگین حسابی و هندسی

دو عدد a و b مفروض‌اند. در این‌صورت:

الف) میانگین حسابی (واسطهٔ حسابی) a و b ، عدد $c=\frac{a+b}{2}$ است. (یعنی a ، c و b سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند.)

ب) میانگین هندسی (واسطهٔ هندسی) a و b ، عددی مانند c است به‌طوری‌که $\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ یا به‌عبارت دیگر، $c^2=ab$. (یعنی a ، c و b، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند.)

۳ میانگین حسابی دو عدد a و b برابر ۱۸ و میانگین هندسی آن‌ها $6\sqrt{5}$ است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰

گزینهٔ «۳»

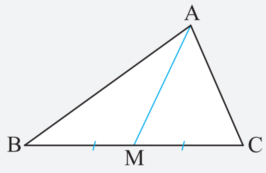
پاسخ:

نکته اگر مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، به ترتیب برابر با S و P باشند، آن دو عدد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-Sx+P=0$ خواهند بود.

فرض سؤال $\Rightarrow \begin{cases}\frac{a+b}{2}=18\\ ab=(6\sqrt{5})^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=36\\ ab=180\end{cases} \xrightarrow{\text{نکتهٔ فوق}} x^2-36x+180=0 \Rightarrow (x-30)(x-6)=0 \Rightarrow a=30,b=6 \Rightarrow |a-b|=24$

نکاتی دربارهٔ مساحت مثلث

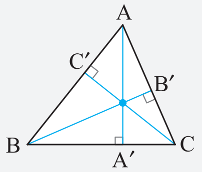
۱) اگر قاعده و ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، مساحت آن‌ها یکسان است.



نتیجه هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌ارز (هم‌مساحت) تقسیم می‌کند و برعکس.

$S_{\overset{\Delta}{AMB}}=S_{\overset{\Delta}{AMC}} \Leftrightarrow$ نقطهٔ M وسط BC است

۲) در هر مثلث داریم:



الف) حاصل‌ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن، مقداری ثابت است (دو برابر مساحت مثلث است).

$$ah_a=bh_b=ch_c=2S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

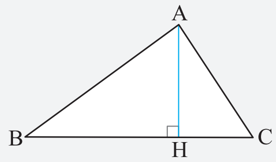
ب) نسبت هر دو ارتفاع، عکس نسبت اضلاع نظیر آن‌ها است.

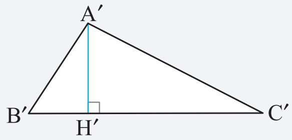
$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}\ ,\ \frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}\ ,\ \frac{h_b}{h_c}=\frac{c}{b}$$

ج) ترتیب طول ارتفاع‌ها، عکس ترتیب طول اضلاع نظیر آن‌ها است.

$$a\ge b\ge c \Leftrightarrow h_a\le h_b\le h_c$$

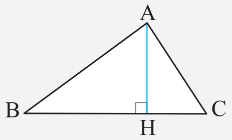
۳) اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت ارتفاع‌های متناظر آن‌ها و برعکس.

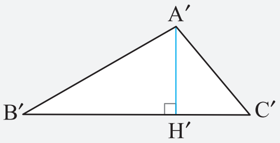




$$BC=B'C' \Leftrightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=\frac{AH}{A'H'}$$

۴) اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های متناظر آن‌ها و برعکس.





$$AH=A'H' \Leftrightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=\frac{BC}{B'C'}$$

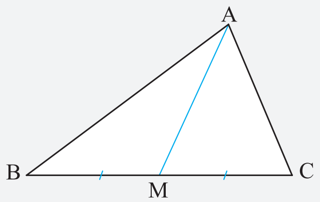
فصل سوم

چندضلعی‌ها

نکاتی دربارهٔ میانه در مثلث[1]

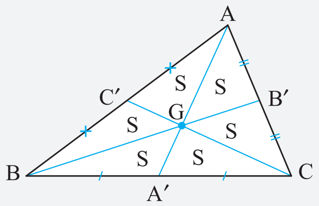
۱ هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌ارز (هم‌مساحت) تقسیم می‌کند و برعکس.

$$S_{\overset{\Delta}{AMB}} = S_{\overset{\Delta}{AMC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Leftrightarrow AM \text{ میانه است}$$



۲ سه میانهٔ هر مثلث، همرس‌اند و یک‌دیگر را به نسبت دو به یک تقسیم می‌کنند.

$$AG = ۲GA' \ ,\ BG = ۲GB' \ ,\ CG = ۲GC'$$

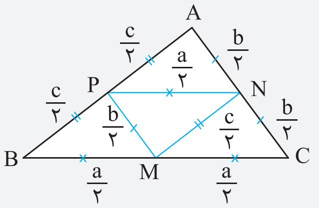


۳ محل همرسی میانه‌های یک مثلث، مرکز ثقل آن مثلث است.

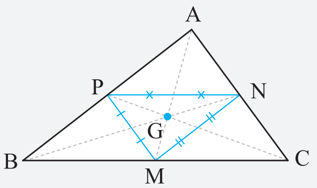
۴ سه میانهٔ هر مثلث، آن را به شش مثلث هم‌ارز تقسیم می‌کنند.

(شش مثلث ایجاد شده لزوماً هم‌نهشت نیستند، مگر این‌که مثلث اولیه، متساوی‌الاضلاع باشد.)

۵ اگر وسط‌های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شوند. (دقت کنید که اضلاع مثلث MNP با اضلاع مثلث ABC موازی‌اند.)

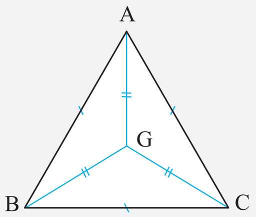


۶ اگر M، N و P وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، آن‌گاه میانه‌های مثلث ABC، شامل میانه‌های مثلث MNP بوده و مرکز ثقل دو مثلث، یکسان است.



۷ اگر مرکز ثقل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به رئوس آن وصل کنیم، سه مثلث حاصل، هم‌نهشت‌اند.

$$AB = BC = CA \Rightarrow \overset{\Delta}{GAB} \cong \overset{\Delta}{GBC} \cong \overset{\Delta}{GCA}$$



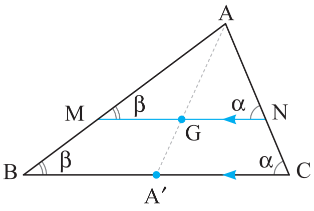
۱- این فصل از کتاب درسی با مبحث «قطرهای چندضلعی» شروع می‌شود که آن را در فصل ۱ مطرح کردیم. ضمناً به‌دلیل کاربرد ویژگی‌های میانهٔ مثلث در حل مسائل مربوط به متوازی‌الاضلاع و …، آن‌ها را زودتر مطرح کردیم.

۱ از مرکز ثقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت چهارضلعی MNCB، کدام است؟

گزینهٔ «۱»

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۹

پاسخ: فرض کنیم نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC است. چون MN || BC، دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و داریم:



$$\text{نسبت تشابه} = \text{نسبت میانه‌ها} = \frac{AG}{AA'} \xrightarrow[\triangle ABC\ \text{است}]{G\ \text{مرکز ثقل}} \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = 4S\ ,\ S_{\triangle ABC} = 9S \Rightarrow S_{MNCB} = 9S - 4S = 5S$$

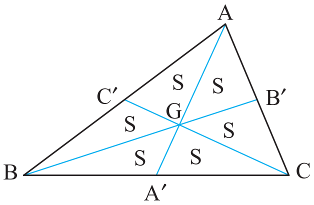
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{MNCB}} = \frac{4S}{5S} = \frac{4}{5} = 0/8$$

۲ میانه‌های BB' و CC' از مثلث ABC در نقطهٔ G متقاطع‌اند. مساحت چهارضلعی $AC'GB'$، چند برابر مساحت مثلث BCG است؟

گزینهٔ «۱»

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

پاسخ: با رسم میانهٔ AA'، مثلث ABC به شش مثلث هم‌ارز تقسیم می‌شود و داریم:

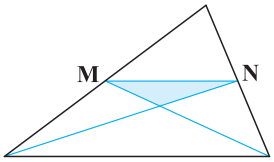


$$\frac{S_{AC'GB'}}{S_{\triangle BCG}} = \frac{2S}{2S} = 1$$

۳ در شکل مقابل، نقاط M و N وسط‌های دو ضلع‌اند. مساحت بزرگ‌ترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث رنگی است؟

(ریاضی ۸۹ خارج)

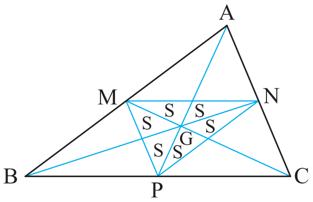
گزینهٔ «۴»



۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: فرض کنیم نقطهٔ P وسط ضلع BC است. طبق مطالب درسنامه، داریم:



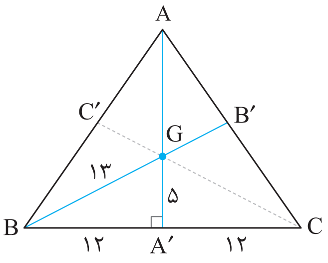
$$S_{\triangle GMN} = \frac{2}{6} S_{\triangle MNP} = \frac{2}{6}\left(\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 12 S_{\triangle GMN}$$

۴ طول میانه‌های AA' و BB' از مثلث ABC، به ترتیب ۱۵ و ۱۹/۵ واحد و طول ضلع BC، ۲۴ واحد است. مساحت مثلث ABC، کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۱۹۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۷۰

پاسخ: محل برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. حال داریم:



$$\left.\begin{aligned} GA' &= \frac{1}{3}AA' = \frac{1}{3}(15) = 5 \\ GB &= \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}(19/5) = 13 \\ BA' &= \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(24) = 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow GB^2 = GA'^2 + BA'^2 \xrightarrow{\text{عکس فیثاغورس}} \hat{A'} = 90^\circ$$

پس میانهٔ AA'، ارتفاع هم می‌باشد و داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times AA' = \frac{1}{2}(24)(15) = 180$$

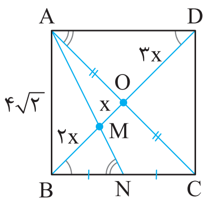
۵ در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$، خط واصل از یک رأس به وسط ضلع مقابل آن، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از مرکز مربع، کدام است؟

(کنکورهای قدیم و مشابه تمرین کتاب درسی)

گزینهٔ «۲»

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

پاسخ: روش اول: رأس A را به نقطهٔ N وسط BC وصل کرده و قطر AC را نیز رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطرهای مربع، یک‌دیگر را نصف می‌کنند. پس BO و AN میانه‌های مثلث ABC می‌باشند و داریم:



$$MO = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BD\right) = \frac{1}{6}BD = \frac{1}{6}(AB\sqrt{2}) = \frac{1}{6}(4\sqrt{2})(\sqrt{2}) = \frac{4}{3}$$

پایهٔ یازدهم

فصل اول

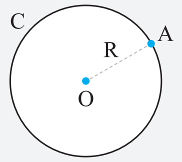
دایره

مفاهیم اولیه در دایره

دایره: مکان‌هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز)، به فاصله‌ای ثابت قرار دارند.

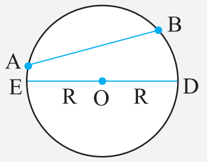
شعاع دایره: پاره‌خطی است که مرکز دایره را به یک نقطه از محیط آن وصل می‌کند.

قرارداد: دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

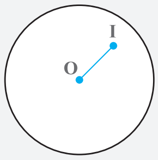


وتر: پاره‌خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.

قطر: وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد.

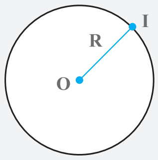


نکته یک نقطه مانند I نسبت به یک دایره مانند $C(O,R)$، سه وضعیت دارد:



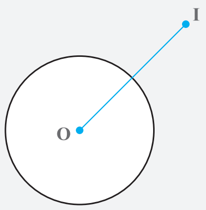
I درون دایره است

$OI < R$



I روی دایره است

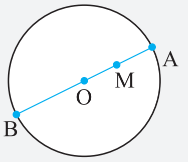
$OI = R$

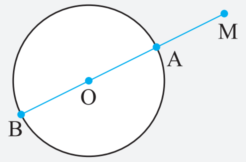


I بیرون دایره است

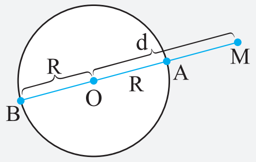
$OI > R$

نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از یک نقطه: نقطهٔ M و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. نقاط برخورد خط گذرنده از M و O با دایره، نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطهٔ M می‌باشند.





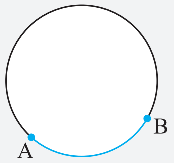
نتیجه نقطهٔ M به فاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. اگر خط شامل OM، دایره را در A و B قطع کند، طول پاره‌خط‌های MA و MB، کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ M از دایره می‌باشند.



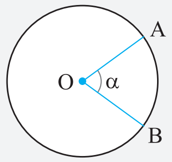
کم‌ترین فاصلهٔ M از دایره $= MA = |R - d|$

بیشترین فاصلهٔ M از دایره $= MB = R + d$

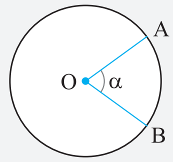
کمان: اگر دو نقطهٔ A و B روی یک دایره باشند، دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند. هر یک از این بخش‌ها را کمان AB گوییم و با نماد $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم.



زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن، مرکز دایره باشد.

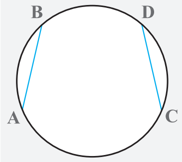


اندازهٔ کمان: اندازهٔ یک کمان را همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن کمان، تعریف می‌کنیم.



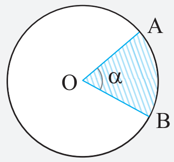
$\hat{O} = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \alpha$

نکته در یک دایره، دو کمان با هم برابرند اگر و تنها اگر وترهای نظیر آن‌ها برابر باشند.



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$

قطاع: ناحیه‌ای از درون و روی دایره است که به دایره و دو شعاع آن، محدود است.



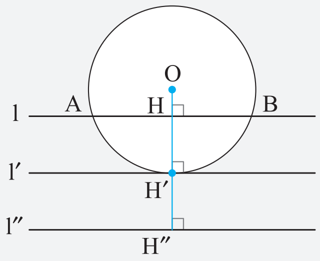
قرارداد: اگر زاویهٔ مرکزی ایجاد شده توسط شعاع‌های یک قطاع، α درجه باشد، آن قطاع را «قطاع α درجه» گوییم.

وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم

۱) خط و دایره، دو نقطه برخورد دارند (متقاطع‌اند)، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، کم‌تر از شعاع دایره باشد.

۲) خط و دایره، فقط یک نقطهٔ برخورد دارند (مماس‌اند)، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، برابر با شعاع دایره باشد.

۳) خط و دایره، هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، بیشتر از شعاع دایره باشد.



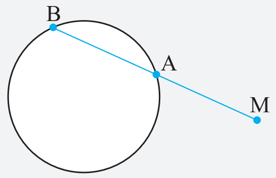
$(OH < R) \Leftrightarrow$ (خط l با دایره متقاطع است.)

$(OH' = R) \Leftrightarrow$ (خط l' بر دایره مماس است.)

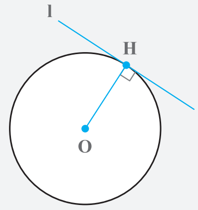
$(OH'' > R) \Leftrightarrow$ (خط l''، دایره را قطع نمی‌کند.)

خط قاطع دایره: خطی است که دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

قرارداد: اگر از نقطهٔ M (غیرواقع بر دایره) قاطعی رسم کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، پاره‌خط‌های MA و MB را دو قطعهٔ قاطع گوییم.



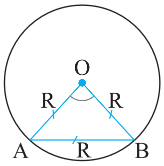
نکته یک خط بر یک دایره مماس است اگر و تنها اگر در نقطه‌ای از دایره، بر شعاع گذرنده از آن نقطه، عمود باشد.



(خط l بر دایره مماس است.) $\Leftrightarrow (l \perp OH)$

نتیجه از هر نقطه واقع بر دایره، یک و فقط یک خط مماس بر دایره می‌گذرد.

۱ در دایرهٔ $C(O,R)$، وتر AB به طول R رسم شده است. اندازهٔ کمان AB، کدام است؟ (کنکورهای قدیم)



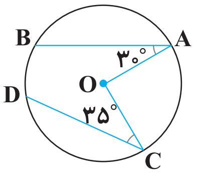
۱) 60° ۲) 45° ۳) 90° ۴) 75°

گزینهٔ «۱»

پاسخ: مرکز دایره را به نقاط A و B وصل می‌کنیم. پس $OA = OB = AB = R$ و مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه:

$A\hat{O}B = 60^\circ \xRightarrow{A\hat{O}B \text{ مرکزی است}} \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$

۲ در شکل مقابل، حاصل $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}$ کدام است؟



۱) 145°

۲) 140°

۳) 135°

۴) 130°

گزینهٔ «۴»

فصل دوم

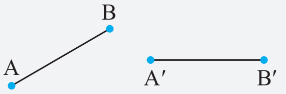
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

آشنایی با تبدیل‌های هندسی

تبدیل: تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطه از صفحهٔ P مانند A، دقیقاً یک نقطه مانند A' از صفحهٔ P را نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، دقیقاً تصویر یک نقطه مانند A از صفحهٔ P است.

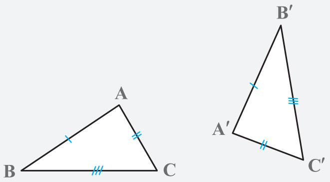
قرارداد: تبدیل T در صفحهٔ P را با نماد $T: P \to P$ نشان داده و اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A باشد، می‌نویسیم $T(A) = A'$.

تبدیل طولپا (ایزومتری): تبدیلی است که طول پاره‌خط (فاصلهٔ بین نقاط) را حفظ می‌کند (یعنی طول هر پاره‌خط، با طول تصویر آن، برابر است).



$$\left.\begin{array}{l} T(A) = A' \\ T(B) = B' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{T طولپا است}} |AB| = |A'B'|$$

نکته هر شکل و تصویر آن تحت یک تبدیل طولپا، هم‌نهشت‌اند.



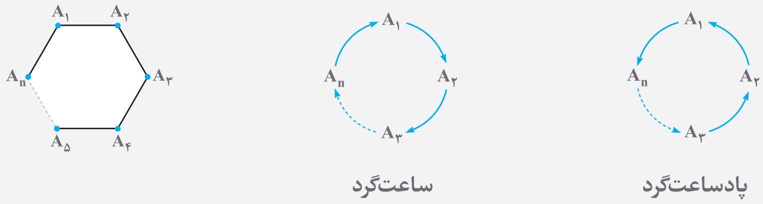
$$\left.\begin{array}{l} T(A) = A' \\ T(B) = B' \\ T(C) = C' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{T طولپا است}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

نتیجه هر تبدیل طولپا، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند. به عنوان مثال، در شکل فوق داریم: $\hat{A} = \hat{A'}$ ، $\hat{B} = \hat{B'}$ و $\hat{C} = \hat{C'}$.

قرارداد: اگر تصویر یک خط تحت یک تبدیل، با آن خط موازی باشد، گوییم این تبدیل، شیب را حفظ کرده است.

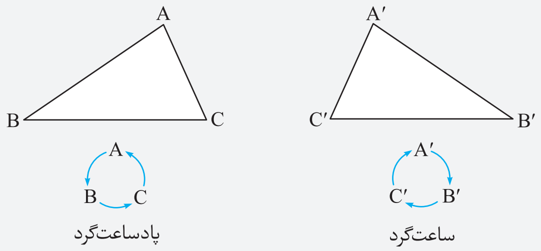
تذکر تبدیل‌های ایزومتری، لزوماً شیب را حفظ نمی‌کنند. (مانند شکل قبل)

نکته n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را در نظر می‌گیریم. اگر از یک رأس شروع به حرکت کرده و تمام رئوس را طی کنیم تا دوباره به آن رأس برسیم، آن‌گاه جهت این حرکت، ساعت‌گرد (در جهت عقربه‌های ساعت) یا پادساعت‌گرد (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) است.



قرارداد: اگر جهت یک مسیر روی یک چندضلعی، با جهت همان مسیر روی تصویر آن چندضلعی تحت یک تبدیل، یکسان باشد، گوییم این تبدیل، جهت شکل را حفظ کرده است.

نتیجه اگر جهت یک شکل تحت یک تبدیل عوض شود، آن شکل، پشت و رو شده است و اگر جهت حفظ شود، آن شکل، پشت و رو نشده است. به‌عنوان مثال، در شکل مقابل اگر A' ، B' و C' به‌ترتیب تصویر A ، B و C باشند، این تبدیل جهت را حفظ نکرده است.

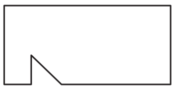


تذکر تبدیل‌های ایزومتری لزوماً جهت شکل را حفظ نمی‌کنند.

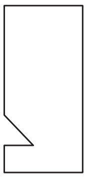
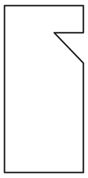
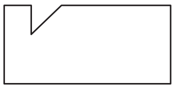
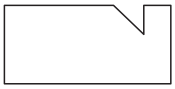
نقطهٔ ثابت تبدیل: نقطه‌ای است که تصویر آن، خودش باشد.

تبدیل همانی: تبدیلی است که هر نقطه را بر خودش تصویر می‌کند.

۱ کدام گزینه از لغزش شکل مقابل در صفحه حاصل می‌شود؟ *(کنکورهای قدیم)*

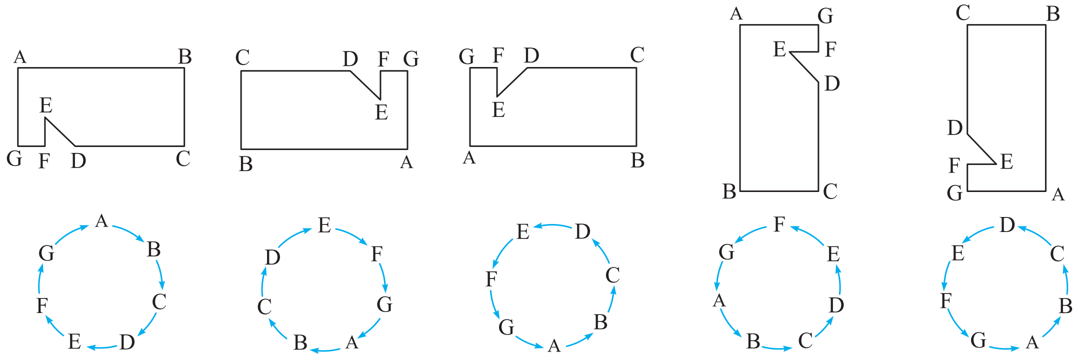


گزینهٔ «۴»

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: لغزاندن شکل در صفحه، جهت آن را عوض نمی‌کند (آن را پشت و رو نمی‌کند). پس باید گزینه‌ای را بیابیم که جهت آن با جهت شکل داده شده یکسان باشد. حال داریم:

گزینهٔ (۱) — گزینهٔ (۲) — گزینهٔ (۳) — گزینهٔ (۴) — (صورت سؤال)



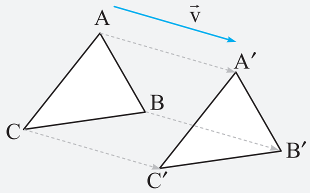
پادساعتگرد — پادساعتگرد — پادساعتگرد — ساعتگرد — ساعتگرد

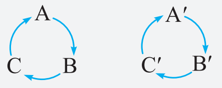
بنابراین فقط گزینهٔ (۴) قابل قبول است.

انتقال

انتقال با بردار $\vec{v}$ تبدیلی است که در آن، تصویر هر نقطه مانند A، نقطه‌ای مانند A' است به‌طوری که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

نکته انتقال، طولپا است و شیب و جهت را حفظ می‌کند.





ساعتگرد — ساعتگرد

۲ چند مورد از گزاره‌های زیر، درست است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۲»

الف) انتقال، نقطهٔ ثابت ندارد.

ب) انتقال یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای برابر با آن است.

ج) هر دو خط موازی، بی‌شمار بردار انتقال دارند.

د) انتقال یافتهٔ یک خط، برآن خط منطبق است اگر و تنها اگر بردار انتقال، صفر باشد.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

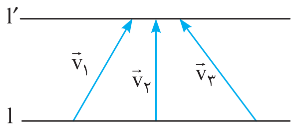
پاسخ: گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر بردار انتقال، بردار صفر باشد، همهٔ نقاط صفحه، ثابت می‌مانند و در غیر این‌صورت، هیچ نقطه‌ای ثابت نمی‌ماند. پس انتقال، صفر یا بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد و این گزاره، غلط است.

نتیجه انتقال غیر همانی، نقطهٔ ثابت ندارد.

ب) می‌دانیم انتقال، طولپا است و تبدیل‌های طولپا، اندازهٔ زاویه را هم حفظ می‌کنند. پس انتقال اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند و این گزاره، درست است.

ج) فرض کنیم دو خط l و l' موازی‌اند. در این‌صورت، هر برداری که ابتدای آن منطبق بر l و انتهای آن منطبق بر l' باشد، l را بر l' تصویر می‌کند و این گزاره، درست است.



د) اگر بردار انتقال، با یک خط موازی باشد هم انتقال یافتهٔ آن خط بر خودش منطبق می‌شود، پس این گزاره، غلط است.

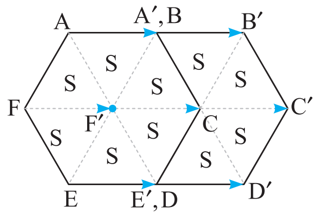
نتیجه انتقال یافتهٔ یک خط، بر آن خط منطبق است اگر و تنها اگر بردار انتقال، بردار صفر یا موازی با خط باشد.

۳ شش‌ضلعی منتظم ABCDEF را با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال داده‌ایم. مساحت شکل حاصل از اجتماع شش‌ضلعی و تصویرش، چند برابر مساحت شش‌ضلعی است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: می‌دانیم شش‌ضلعی منتظم، از شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود. حال با توجه به شکل، داریم:



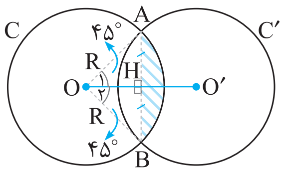
$$\frac{S_{AB'C'D'EF}}{S_{ABCDEF}}=\frac{۱۰S}{۶S}=\frac{۵}{۳}$$

۴ دایرهٔ $C(O,R)$ را با برداری به طول $R\sqrt{۲}$ انتقال داده‌ایم. مساحت ناحیهٔ بین دو دایره، چند برابر $R^۲$ است؟

گزینهٔ «۱»

۱) $\frac{\pi}{۲}-۱$ ۲) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: چون انتقال طولپا است، انتقال یافتهٔ دایرهٔ C، دایره‌ای به همان شعاع است و چون دو دایره هم‌نهشت‌اند، وترمشترک آن‌ها عمودمنصف خط‌المرکزین است. حال داریم:



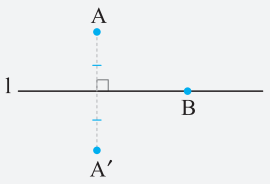
$$OH=HO'=\frac{۱}{۲}OO'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}R$$

$$\overset{\Delta}{OHA}:\hat{H}=۹۰^\circ\ ,\ OH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}OA\Rightarrow\hat{O}_۱=۴۵^\circ\Rightarrow\hat{O}_۲=۴۵^\circ\Rightarrow A\hat{O}B=۹۰^\circ$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ بین دو دایره}=۲S_{\text{رنگی}}=۲(S_{\text{قطاع }۹۰^\circ}-S_{\overset{\Delta}{OAB}})=۲(\frac{۱}{۴}\pi R^۲-\frac{۱}{۲}R^۲)=(\frac{\pi}{۲}-۱)R^۲$$

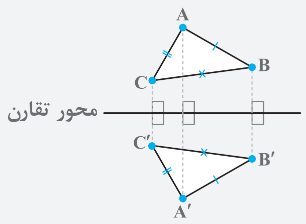
بازتاب نسبت به خط (تقارن محوری)

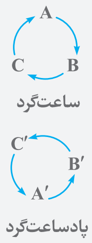
به ازای هر خط l در صفحه، بازتاب نسبت به l تبدیلی است که در آن، تصویر هر نقطه مانند A، نقطه‌ای چون A' است به‌طوری‌که اگر A روی l باشد، تصویر آن، خودش است و در غیر این‌صورت، خط l عمودمنصف AA' است.



$A\rightarrow A'$ و $B\rightarrow B$

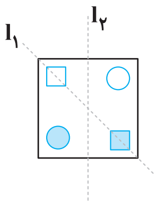
نکته تقارن محوری، طولپا است اما شیب و جهت را حفظ نمی‌کند.

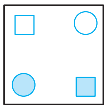
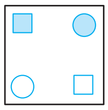
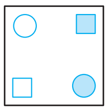
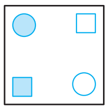




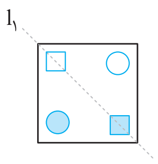
۵ اگر شکل زیر را نسبت به خط $l_۱$ و تصویر آن را نسبت به خط $l_۲$ بازتاب دهیم، کدام شکل ایجاد می‌شود؟

گزینهٔ «۴»

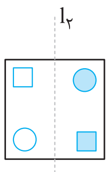


۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

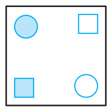
پاسخ: با توجه به شکل زیر، گزینهٔ (۴) درست است.



بازتاب نسبت به $l_۱$ ⟶



بازتاب نسبت به $l_۲$ ⟶



» آزمون جامع ۱

» آزمون جامع ۲

» پاسخنامهٔ تشریحی

آزمون‌های جامع

آزمون جامع (۱)

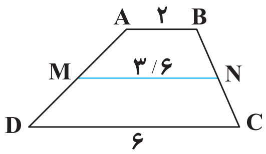
۱ ذوزنقه به قاعده‌های ۳ و ۱۱ و ساق‌های ۵ و x واحد، قابل رسم است. حدود x، کدام است؟

۱) $۳ < x < ۱۳$ ۲) $۴ < x < ۱۴$ ۳) $۲ < x < ۱۲$ ۴) $۵ < x < ۱۵$

۲ نقطهٔ E را روی میانهٔ AM از مثلث ABC انتخاب کرده و BE را امتداد می‌دهیم تا AC را در F قطع کند. اگر $\frac{AF}{FC} = \frac{۳}{۲}$، حاصل $\frac{EF}{BE}$ کدام است؟

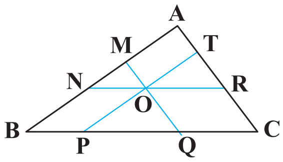
۱) ۰/۳   ۲) ۰/۴   ۳) ۰/۵   ۴) ۰/۶

۳ در ذوزنقهٔ مقابل، MN با قاعده‌ها موازی است. نسبت $\frac{AM}{MD}$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴ در شکل زیر، از نقطهٔ O سه خط به موازات اضلاع مثلث ABC رسم شده است. اگر مساحت مثلث‌های OMN، ORT و OPQ به‌ترتیب ۴، ۹ و ۱۶ واحد باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۵۲   ۲) ۴۹   ۳) ۸۱   ۴) ۹۰

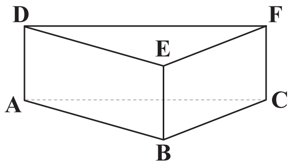
۵ مساحت یک لوزی ۶ واحد مربع و مجموع طول دو قطر آن، $۵\sqrt{۲}$ واحد است. طول ضلع این لوزی، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$

۶ طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، x، $۳x + ۳$ و $۳x + ۴$ واحد می‌باشد. مساحت این مثلث، کدام است؟

۱) ۸۰   ۲) ۸۴   ۳) ۸۸   ۴) ۹۰

۷ در منشور قائم مقابل، صفحهٔ گذرنده از نقاط A، C و E، حجم منشور را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

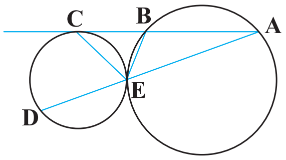


۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸ در مخروط قائم به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۸ واحد، صفحه‌ای به فاصلهٔ ۶ واحد از قاعده رسم کرده‌ایم تا مخروط به یک مخروط کوچک و یک مخروط ناقص تبدیل شود. حجم مخروط ناقص، چند برابر π است؟

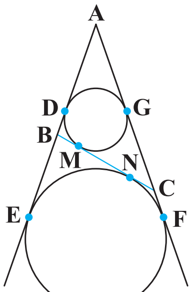
۱) $\frac{۱۸۹}{۸}$ ۲) $\frac{۱۹۰}{۹}$ ۳) $\frac{۱۹۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱۹۳}{۱۱}$

۹ در شکل مقابل، دایره‌ها برهم مماس و AC بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. زاویهٔ BEC چند برابر زاویهٔ CED است؟



۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۱۰ دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع BC از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. اگر $AB = BC = ۹$ و $AC = ۱۴$، حاصل $\frac{MN}{GF}$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۱ دایره‌ای به شعاع ۲ واحد، از دو رأس مجاور مربعی می‌گذرد. از یک رأس مربع، مماسی بر دایره رسم می‌کنیم. اگر طول پاره‌خط مماس، ۱/۵ برابر ضلع مربع باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{\sqrt{۳۷}}$ ۲) $\frac{۱۲}{\sqrt{۳۹}}$ ۳) $\frac{۱۴}{\sqrt{۴۳}}$ ۴) $\frac{۱۶}{\sqrt{۴۱}}$