فهرست

آمار و احتمال

ریاضیات گسسته

آمار
و
احتمال

- » درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
- » درس دوم: مجموعه – زیرمجموعه
- » درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها

فصل اول:

آشنایی با مبانی ریاضیات

نکته قاعدهٔ رشد: **بچه‌های عزیز! توی ریاضیات یه قاعده‌ای داریم که نشون می‌ده بعضی از توابع معروف وقتی n از یک تا بی‌نهایت زیاد میشه، با چه سرعتی زیاد می‌شن یا در اصطلاح رشد می‌کنن. به این قاعده، قاعدهٔ سرعت رشد می‌گن که برای توابع معروف به‌صورت زیر هست: (ایشالا روزی به دردتون بخوره!)**

$$\begin{matrix}\sin n\\ \cos n\end{matrix} \ll \log n \ll \sqrt{n} \ll n^c \ll c^n \ll n! \ll n^n$$

c یک عدد ثابت است.

۵۶ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

☐ ۱) $\{n \mid n^۳ > n\}$

☐ ۲) $\{n \mid n^۲ \geq ۲^n\}$

☐ ۳) $\{n \mid ۲^n > n^۳\}$

☐ ۴) $\{n \mid ۲^n > n^۲\}$

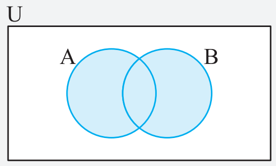
گزینهٔ «۲»

پاسخ: اگرچه برای حل این سؤال، می‌توان از عددگذاری هم استفاده کرد و روند هر کدام از توابع را تشخیص داد، ولی با توجه به نکتهٔ فوق، تنها مجموعهٔ مربوط به گزینهٔ (۲) می‌تواند متناهی باشد.

جبر مجموعه ها (قسمت اول)

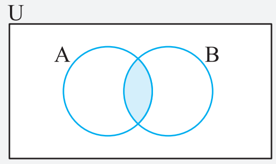
درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها

اجتماع مجموعه‌ها ($\cup$): اگر A و B دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعه یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام اعضای A و B باشد.



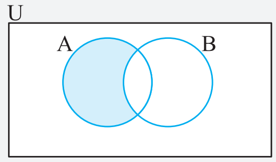
$A \cup B$

اشتراک مجموعه‌ها ($\cap$): اگر A و B دو مجموعه باشند، اشتراک دو مجموعه یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام اعضای مشترک A و B باشد.



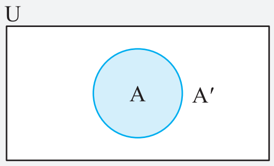
$A \cap B$

تفاضل مجموعه‌ها: اگر A و B دو مجموعه باشند، $A - B$ یعنی اعضایی که در A باشد ولی در B نباشد.



$A - B$

نکته اگر مجموعهٔ مرجع را با نماد U و مجموعهٔ تهی را با نماد ∅ نمایش دهیم، داریم:



۱) $A \cup U = U$

۲) $A \cup A' = U$

۳) $A \cap A' = \varnothing$

۴) $A \cap U = A$

نکته تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A - B$ را به صورت $n(A \cup B)$ و $n(A - B)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

گاهی در اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، ممکن است با بیش از دو مجموعه سر و کار داشته باشیم که به صورت زیر آن‌ها را نمایش می‌دهیم:

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n \quad , \quad \bigcap_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n$$

مثال

اگر $A_n = [۰, \frac{۱}{n})$ باشد، حاصل $\bigcap_{n=۱}^{+\infty} A_n$ را به‌دست آورید.

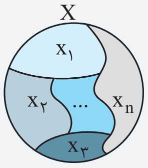
پاسخ

$$(A_۱ = [۰,۱)) \cap (A_۲ = [۰,\frac{۱}{۲})) \cap \cdots \cap (A_n = [۰,\frac{۱}{n})) \Rightarrow \bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n = \{۰\}$$

توجه کنید که برای n های خیلی خیلی بزرگ $(n \to +\infty)$، $[۰,\frac{۱}{n}) = \{۰\}$ است.

خط ویژه

افراز یک مجموعه: اگر X یک مجموعهٔ ناتهی باشد و $X_۱ , X_۲ , \cdots , X_n$ زیرمجموعه‌های X باشند، می‌گوییم مجموعهٔ X به n زیرمجموعهٔ $X_۱ , X_۲ , \cdots , X_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:



۱- همهٔ زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، یعنی: $\forall ۱\le i\le n; X_i \ne \varnothing$

۲- هر دو زیرمجموعهٔ X مجزا باشند، یعنی: $\forall i,j(i\ne j); X_i \cap X_j = \varnothing$

۳- اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌ها برابر خود X باشد، یعنی: $X_۱ \cup X_۲ \cup \cdots \cup X_n = \bigcup_{i=۱}^{n} X_i = X$

۵۷ **اگر مجموعهٔ مرجع به صورت $U=\{۵x-۲ \mid x\in\mathbb{N}\}$ فرض شود و $A=\{x\in U \mid x>۲۰\}$ باشد، آن‌گاه A' چند عضو دارد؟**

☐ ۱) صفر ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) بی‌شمار

گزینهٔ «۳»

پاسخ: مجموعه‌ها را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

$$U=\{۵x-۲ \mid x\in\mathbb{N}\}=\{۳,۸,۱۳,۱۸,۲۳,\cdots\} \quad , \quad A=\{x\in U \mid x>۲۰\}=\{۲۳ , ۲۸ , \cdots\} \Rightarrow A'=U-A=\{x\in U \mid x\le ۲۰\}=\{۳,۸,۱۳,۱۸\}$$

بنابراین A' دارای ۴ عضو می‌باشد.

۵۸ **اجتماع دو مجموعهٔ $A=\{\{\{\varnothing\},\{a\},a\}\}$ و $B=\{a,\varnothing\}$ چند عضو دارد؟**

☐ ۱) ۳ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۲

گزینهٔ «۱»

پاسخ: با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه، داریم:

$$\begin{cases} A=\{\{\{\varnothing\},\{a\},a\}\} \\ B=\{a,\varnothing\} \end{cases} \Rightarrow A\cup B=\{a,\varnothing,\{\{\varnothing\},\{a\},a\}\} \Rightarrow n(A\cup B)=۳$$

۵۹ **کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک افراز از مجموعهٔ $A=$ { فاطمه، حسین، حسن، علی } است؟**

☐ ۱) {فاطمه، حسن، حسین} ، {حسن، علی}
☐ ۲) {فاطمه، حسین} ، {حسن، علی} ، { }
☐ ۳) {فاطمه} ، {حسن} ، {علی}
☐ ۴) {فاطمه، حسین، حسن} ، {علی}

گزینهٔ «۴»

پاسخ: گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد، حال سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): اشتراک دو زیرمجموعه تهی نیست. زیرا «حسن» در دو مجموعه مشترک است.

گزینهٔ (۲): یکی از زیرمجموعه‌ها تهی است.

گزینهٔ (۳): اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها با خود A برابر نیست. زیرا «حسین» در هیچ یک از زیرمجموعه‌ها نیامده است.

۶۰ **اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$ ، $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ باشند، آن‌گاه کدام‌یک از روابط زیر صحیح است؟** *(ریاضی داخل ۹۴)*

☐ ۱) $A-B=C$ ☐ ۲) $B-C=\varnothing$ ☐ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ☐ ۴) $A-B=\{C\}$

گزینهٔ «۴»

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $A-B=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}-\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}=\{\{۱,۲,۳\}\}=\{C\}\ne C$

گزینهٔ (۲): $B-C=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}-\{۱,۲,۳\}=\{\{۱,۲\}\}\ne\varnothing$

گزینهٔ (۳): $B-C=\{\{۱,۲\}\}\ne\{۱,۲\}$

گزینهٔ (۴): طبق گزینهٔ (۱): $A-B=\{C\}$

بنابراین تنها گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

۶۱ **اگر $۳n(A\cap B)=n(A)+n(B)$ باشد، آنگاه حاصل $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ کدام است؟ ($n(A)$ تعداد اعضای مجموعهٔ A است.)**

☐ ۱) ۴ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۱

گزینهٔ «۲»

پاسخ: می‌دانیم که رابطهٔ مقابل بین اعضای مجموعه‌ها برقرار است: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

بنابراین داریم:

$$\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{\overbrace{n(A)+n(B)}^{۳n(A\cap B)}-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=۲$$

نکته با توجه به تعریف فاکتوریل می‌دانیم که: $n!=n\times(n-۱)\times\cdots\times ۲\times ۱$

برای افراز یک مجموعه n عضوی به k زیرمجموعه داریم: ($n(A)$ به معنای تعداد اعضای مجموعهٔ A است.) $n(A_۱)+n(A_۲)+\cdots+n(A_k)=n$

حالت اول: تعداد عضوهای زیرمجموعه‌های $A_۱$ تا A_k دوبه‌دو متمایز باشند:

$$\text{تعداد حالات افراز}=\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

فصل دوم:

احتمال

درس اول: مبانی احتمال

پیشامد، فضای نمونه‌ای و ترکیبات

مقایسهٔ علم آمار و علم احتمال: علم احتمال دقیقاً نقطهٔ مقابل علم آمار می‌باشد به‌طوری که در علم احتمال جامعه برای ما معلوم است و ما به دنبال به‌دست آوردن اطلاعاتی در مورد نمونه‌ای از آن هستیم ولی در علم آمار عکس این حالت رخ می‌دهد و ما با استفاده از نمونهٔ به‌دست آمده می‌خواهیم در مورد کل جامعه تصمیم‌گیری کنیم.

نکته عبارت‌هایی همانند «چقدر امکان دارد»، «چقدر ممکن است» و ... یعنی «احتمال اینکه ...»، بنابراین مربوط به علم احتمال است.

مثال

کدام‌یک از عبارت‌های زیر مربوط به علم احتمال می‌باشد؟

۱- «در یک نمونهٔ ۱ متر مکعبی از هوای تهران ٪۲ سرب وجود دارد. سرب موجود در هوای تهران چقدر است؟»

۲- «می‌دانیم هوای تهران ٪۲ سرب دارد. اگر یک متر مکعب از آن را برداریم، چقدر امکان دارد سرب داخل آن نباشد؟»

پاسخ عبارت دوم، چون جامعه معلوم است و ما در پی یافتن اطلاعاتی در مورد نمونه‌ای از آن هستیم.

برای بیان مفهوم احتمال ابتدا چند تعریف زیر را مطرح می‌کنیم.

آزمایش تصادفی: در نظریهٔ احتمال، هر پدیده‌ای که نتوان قبل از وقوع آن به‌طور قطع در مورد نتیجهٔ آن نظر داد را آزمایش تصادفی می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای: به مجموعهٔ تمام حالاتی که ممکن است در یک آزمایش تصادفی رخ دهد، فضای نمونه‌ای می‌گویند و آن را با نماد « S » نمایش می‌دهند.

پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد می‌گویند.

اعمال جبری روی پیشامدها: از آن‌جایی که پیشامد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است و ما در فصل قبل به تفصیل در مورد اعمال جبری روی مجموعه‌ها $(\cup,\cap,-)$ بحث کردیم، از تکرار مکررات پرهیز می‌کنیم.

برآمد: به هر عضو از فضای نمونه‌ای، یک برآمد می‌گویند.

پیشامد ساده: پیشامدی که تک‌عضوی باشد را یک پیشامد ساده می‌گوییم (پیشامد یک برآمد).

دوستان عزیز! اگرچه در کتاب درسی صحبتی از ترکیبات (آنالیز ترکیبی) نشده است ولی بیان خلاصهٔ نکات آن برای حل مسائل احتمال، خالی از لطف نیست.

۱) اصل ضرب: اگر عملی به n طریق و بلافاصله عمل دیگری به m طریق صورت گیرد، تعداد کل حالات ممکن برای انجام توام این دو عمل برابر با $n \times m$ طریق است.

۲) جایگشت: اگر بخواهیم n شیء متمایز را در یک ردیف قرار دهیم، تعداد کل حالات قرارگیری آن‌ها کنار هم $n!$ می‌باشد ولی اگر همین n شیء متمایز را بخواهیم دور میز گرد قرار دهیم، تعداد حالات قرارگیری آن‌ها برابر $(n-1)!$ است. (چرا؟)

دو تعریف خیلی مهم در بحث آنالیز ترکیبی وجود دارد که انتخابِ r شیء از n شیِء متمایز می‌باشد. $(n \geq r)$

۳) ترکیب: ترتیب انتخاب اشیاء مهم نیست. ⇐ $C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

۴) ترتیب: ترتیب انتخاب اشیاء مهم است. ⇐ $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

۱ **عبارت‌های «میزان سود یک شرکت در سال گذشته چقدر بوده است؟» و «چقدر تولید داشته باشیم که حداقل ٪ ۵۰ از بازار سهم ما باشد؟» به‌ترتیب مربوط به علوم .... و .... می‌باشند.**

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) آمار – آمار ☐ ۲) آمار – احتمال ☐ ۳) احتمال – آمار ☐ ۴) احتمال – احتمال

پاسخ: در عبارت اول می‌خواهیم اطلاعاتی در مورد جامعه به‌دست آوریم، بنابراین مربوط به علم آمار است ولی در عبارت دوم چون می‌خواهیم در مورد نمونه‌ای از جامعه (سهم ما در بازار) بحث کنیم، مربوط به علم احتمال است.

۲ **کدام‌یک از گزینه‌های زیر مربوط به علم آمار می‌باشد؟**

گزینهٔ «۱»

☐ ۱) یک نمونهٔ ۱۰ تایی به تصادف از نمرهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ باقرالعلوم در اختیار ما می‌باشد. چند درصد از کل دانش‌آموزان مدرسهٔ باقرالعلوم نمرهٔ بالای ۱۸ دارند؟

☐ ۲) لیست نمرات دانش‌آموزان مدرسهٔ باقرالعلوم در دست ماست. تعداد دانش‌آموزان با معدل بالاتر از ۱۸ در این مدرسه چقدر است؟

☐ ۳) لیست نمرات دانش‌آموزان مدرسهٔ باقرالعلوم را داریم. سؤال اینجاست که تعداد دانش‌آموزان با معدل ۱۸ تا ۱۸/۵ بیشتر می‌باشند یا با معدل ۱۸/۵ تا ۲۰؟

☐ ۴) لیست نمرات دانش‌آموزان مدرسهٔ باقرالعلوم را داریم. از بین دانش‌آموزان معدل ۱۸ به بالا، چقدر امکان دارد که شخصی را انتخاب کنیم که معدل او از ۱۹ نیز بیشتر باشد؟

پاسخ: تنها در گزینهٔ (۱) می‌خواهیم از نمونه به جامعه برسیم.

۲۲ دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ *(ریاضی داخل ۹۶)*

گزینهٔ «۱»

☐ ۱) $\frac{۳}{۸}$ ☐ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ☐ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ☐ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

پاسخ: با تعریف پیشامدهای A و B به صورت مقابل داریم:

احتمال «رو» آمدن هر دو سکه: $A \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{۲}{۲}}{۲^۲} = \frac{۱}{۴}$

احتمال ۶ ظاهر شدن در پرتاب تاس: $B \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۶}$

صورت سوال $P(A \cup B)$ را از ما می‌خواهد: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

حال چون پرتاب تاس و دو سکه، مستقل از یکدیگر می‌باشند، داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

و در نهایت: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۶+۴-۱}{۲۴} = \frac{۹}{۲۴} = \frac{۳}{۸}$

تیپ چهارم: مسائل روز تولد

۲۳ اگر چهار دانش‌آموز یک کلاس بر روی یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنان یکسان است؟

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ☐ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ☐ ۳) $\frac{۵۵}{۱۴۴}$ ☐ ۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

پاسخ: با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ احتمال پیشامد متمم داریم:

$P(\text{ماه تولد حداقل ۲ نفر یکسان باشد.}) = ۱ - P(\text{ماه تولد همه متفاوت باشد.})$

$$P(\text{ماه تولد حداقل ۲ نفر یکسان باشد.}) = ۱ - \frac{\cancel{۱۲} \times ۱۱ \times \overset{۵}{\cancel{۱۰}} \times \overset{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\cancel{۹}}}{\cancel{۱۲} \times \underset{۶}{\cancel{۱۲}} \times \underset{۴}{\cancel{۱۲}} \times \underset{۴}{\cancel{۱۲}}} = ۱ - \frac{۵۵}{۹۶} = \frac{۴۱}{۹۶}$$

۲۴ احتمال اینکه روز تولد ۳ نفر در روزهای مختلف هفته باشد، چقدر است؟ *(ریاضی داخل ۸۴)*

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ☐ ۲) $\frac{۲۳}{۳۵}$ ☐ ۳) $\frac{۳۰}{۴۹}$ ☐ ۴) $\frac{۲۱}{۴۹}$

پاسخ: با توجه به تعداد روزهای هفته برای فضای نمونه‌ای داریم: $n(S) = ۷ \times ۷ \times ۷$

برای حالت مطلوب (A)، چون روزها باید با یک‌دیگر متفاوت باشد، اولین نفر ۷ انتخاب، دومی ۶ انتخاب و سومی ۵ انتخاب دارد:

$$n(A) = ۷ \times ۶ \times ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۷ \times ۷ \times ۷} = \frac{۳۰}{۴۹}$$

تیپ پنجم: مسائل اصل شمول و عدم شمول

نکته

تعداد اعضای بخش‌پذیر بر k در مجموعهٔ $\{n, n+۱, \cdots, m\}$ $(n, m \in \mathbb{N}, m > n, k > ۰)$ برابر است با: $[\frac{m}{k}] - [\frac{n-۱}{k}]$

۲۵ از بین مجموعه اعداد متوالی $\{۵۱, ۵۲, \ldots, ۳۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا ۷ بخش‌پذیر است ولی مضرب ۴۲ **نیست**؟ *(ریاضی داخل ۹۵)*

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) ۰/۲۴ ☐ ۲) ۰/۲۶ ☐ ۳) ۰/۲۸ ☐ ۴) ۰/۳۱

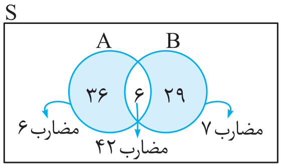
پاسخ: اگر مضارب ۶ را به عنوان پیشامد A و مضارب ۷ را به عنوان پیشامد B قرار دهیم، داریم:

تعداد مضارب ۶: $n(A) = [\frac{۳۰۰}{۶}] - [\frac{۵۰}{۶}] = ۴۲$

تعداد مضارب ۷: $n(B) = [\frac{۳۰۰}{۷}] - [\frac{۵۰}{۷}] = ۳۵$

تعداد مضارب ۴۲: $n(A \cap B) = [\frac{۳۰۰}{۴۲}] - [\frac{۵۰}{۴۲}] = ۶$

$\Rightarrow$



از نمودار ون متوجه می‌شویم که باید $n(A \cap B)$ را از $n(A)$ و $n(B)$ کم کنیم: $n(A) - n(A \cap B) = ۳۶ , n(B) - n(A \cap B) = ۲۹$

و در نهایت احتمال مورد نظر برابر است با: $P = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب مسئله}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{۳۶+۲۹}{۲۵۰} = ۰/۲۶$

۲۶ از مجموعهٔ اعداد $\{۱۰۰, ۱۰۱, \ldots, ۶۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) $\frac{۲}{۹}$ ☐ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ☐ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ☐ ۴) $\frac{۱۳}{۳۶}$

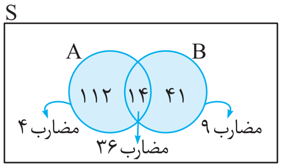
پاسخ: اگر مضارب ۴ را به عنوان پیشامد A و مضارب ۹ را به عنوان پیشامد B قرار دهیم، داریم:

تعداد مضارب ۴: $n(A)=[\frac{۶۰۰}{۴}]-[\frac{۹۹}{۴}]=۱۵۰-۲۴=۱۲۶$

تعداد مضارب ۹: $n(B)=[\frac{۶۰۰}{۹}]-[\frac{۹۹}{۹}]=۶۶-۱۱=۵۵$

تعداد مضارب ۳۶: $n(A\cap B)=[\frac{۶۰۰}{۳۶}]-[\frac{۹۹}{۳۶}]=۱۶-۲=۱۴$

$\Rightarrow$



تعداد مضارب ۹ یا ۴: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲۶+۵۵-۱۴=۱۶۷$

و در نهایت اگر $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باشد، داریم:

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{۱۶۷}{۵۰۱}=\frac{۱}{۳}$$

۲۷ **از مجموعهٔ اعداد $\{۲۵۱,۲۵۲,\dots,۶۰۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۹ می‌باشد یا مضرب ۱۲ و ۱۵ است؟**

گزینهٔ «۱»

☐ ۱) $\frac{۴۳}{۳۵۰}$ ☐ ۲) $\frac{۳۹}{۳۵۰}$ ☐ ۳) $\frac{۳۰}{۳۵۰}$ ☐ ۴) $\frac{۶}{۳۵۰}$

پاسخ: اگر مضارب ۹، مضارب ۱۲ و مضارب ۱۵ را به ترتیب به عنوان پیشامدهای A، B و C در نظر بگیریم، داریم:

تعداد مضارب ۹: $n(A)=[\frac{۶۰۰}{۹}]-[\frac{۲۵۰}{۹}]=۳۹$

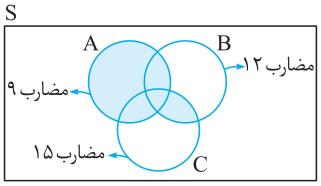
تعداد مضارب ۱۲: $n(B)=[\frac{۶۰۰}{۱۲}]-[\frac{۲۵۰}{۱۲}]=۳۰$

تعداد مضارب ۱۵: $n(C)=[\frac{۶۰۰}{۱۵}]-[\frac{۲۵۰}{۱۵}]=۲۴$

تعداد مضارب ۱۲ و ۱۵: $n(B\cap C)=[\frac{۶۰۰}{۶۰}]-[\frac{۲۵۰}{۶۰}]=۶$

تعداد مضارب ۹ و ۱۲ و ۱۵: $n(A\cap B\cap C)=[\frac{۶۰۰}{۱۸۰}]-[\frac{۲۵۰}{۱۸۰}]=۲$

$\Rightarrow$



با توجه به نمودار ون بالا متوجه می‌شویم که احتمال مطلوب، $P(A\cup(B\cap C))$ می‌باشد، داریم:

$$n(A\cup(B\cap C))=n(A)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)=۳۹+۶-۲=۴۳$$

و در نهایت اگر $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باشد، داریم:

$$P(A\cup(B\cap C))=\frac{n(A\cup(B\cap C))}{n(S)}=\frac{۴۳}{۳۵۰}$$

تیپ ششم: مسائل شکست و پیروزی

نکته

اگر بخواهیم در n بازی به k پیروزی برسیم، داریم: (شانس برد و باخت یکسان و برابر $\frac{۱}{۲}$ است.)

$$P(\text{پیروزی})=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

۲۸ **در یک خانوادهٔ ۴ فرزندی، با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟** (تجربی داخل ۹۰)

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) $\frac{۳}{۸}$ ☐ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ☐ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ☐ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$P(\text{مطلوب سوال})=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}+\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

۲۹ **شخصی آنقدر سکه‌ای را پرتاب می‌کند تا «رو» بیاید. با کدام احتمال حداکثر در پرتاب چهارم نتیجه حاصل می‌شود؟**

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ☐ ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ☐ ۳) $\frac{۸}{۱۶}$ ☐ ۴) $\frac{۱۰}{۱۶}$

پاسخ: با کمک رابطهٔ محاسبهٔ احتمال پیشامد متمم داریم: $P(\text{حداکثر در چهارمین پرتاب «رو» بیاید.})=۱-P(\text{در چهار پرتاب «رو» نیاید.})$

$$P(\text{مطلوب})=۱-\frac{\binom{۴}{۰}}{۲^۴}=۱-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

- » درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها
- » درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
- » درس سوم: معیارهای پراکندگی

فصل سوم:

آمار توصیفی

درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها

متغیر: هر ویژگی از اشیا یا اشخاص که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گوییم و عددی که به آن ویژگی نسبت داده می‌شود را مقدار متغیر یا مشاهده می‌گوییم.

متغیرها به دو دستهٔ کیفی و کمّی دسته‌بندی می‌شوند:

متغیرهای کمّی: متغیری است که مقادیر عددی به خود می‌گیرد. مثل وزن، قد و . . . .

متغیر کیفی: متغیری است که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا به کار می‌رود. مثل رنگ چشم دانش‌آموزان یک کلاس و . . . .

انواع متغیرهای کمّی:

۱) **متغیر کمّی پیوسته:** به متغیری کمّی گفته می‌شود که اگر دو مقدار a و b را بپذیرد، بتواند اعداد بین مقادیر a و b را نیز اختیار کند. مانند قد دانشجویان یک دانشگاه، معدل دانش‌آموزان یک کلاس و . . . .

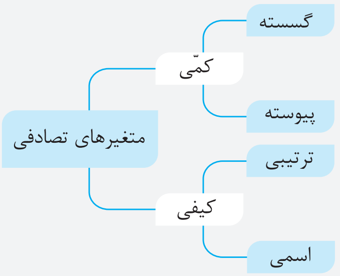
۲) **متغیر کمّی گسسته:** به متغیری کمّی که پیوسته نباشد، گسسته می‌گوییم. به عبارت دیگر، متغیرهایی که فقط قابل شمارش باشند را کمّی گسسته می‌گوییم. مثل تعداد دانش‌آموزان یک کلاس، تعداد فرزندان و . . . .

انواع متغیرهای کیفی:

۱) **متغیر کیفی ترتیبی:** متغیرهای کیفی که در آن‌ها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد. مثل مراحل تحصیل افراد، مراحل رشد انسان و . . . .

۲) **متغیر کیفی اسمی:** به متغیری کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم. در این نوع متغیرها هیچ ترتیب طبیعی وجود ندارد. مثل رنگ چشم افراد، نوع بیماری و . . . .

دسته‌بندی متغیرها را می‌توان با نمودار روبه‌رو نشان داد:



۱ **کدام‌یک از گزینه‌های زیر متغیر نمی‌باشد؟**

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) قد دانش‌آموزان کلاس سوم مدرسهٔ ابوریحان

☐ ۲) مراحل تحصیلی دانش‌آموزان

☐ ۳) ماشین‌هایی که از کنار مدرسهٔ ابوریحان عبور می‌کنند.

☐ ۴) تعداد دانش‌آموزان المپیادی مدرسهٔ ابوریحان

پاسخ: در گزینهٔ (۳) در مورد هیچ ویژگی از این جامعه (ماشین‌های عبوری) صحبتی نشده است. به عنوان نمونه ممکن است نوع، تعداد، وزن یا هر ویژگی دیگری از ماشین‌های عبوری موردنظر باشد. پس این عبارت، متغیر نمی‌باشد.

۲ **نوع کدام متغیر با سایرین متفاوت است؟**

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) طول مکالمات تلفنی کارمندان یک اداره

☐ ۲) میزان حقوق دریافتی مدیران یک شهر

☐ ۳) تعداد مراجعه‌کنندگان به یک سوپر مارکت در طول روز

☐ ۴) وضعیت تحصیلی کارمندان یک شرکت

پاسخ: هر سه گزینهٔ اول، متغیر کمّی می‌باشند ولی گزینهٔ (۴)، متغیر کیفی است.

۳ **گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟** *(تجربی داخل ۹۰)*

گزینهٔ «۱»

☐ ۱) کیفیِ اسمی

☐ ۲) کیفیِ ترتیبی

☐ ۳) کمّیِ پیوسته

☐ ۴) کمّیِ گسسته

پاسخ: گروه خونی قابل تفسیر با عدد نیست (قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد)، بنابراین یک متغیر کیفی می‌باشد و از طرفی ترتیبی در آن وجود ندارد، بنابراین کیفیِ اسمی است.

۴ **«نوع آلایندگی هوا» و «میزان آلودگی هوا» به ترتیب چگونه متغیری می‌باشند؟** *(تجربی خارج ۹۱ و انسانی ۹۰ با تغییر)*

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) کمّی پیوسته – کیفی اسمی

☐ ۲) کمّی گسسته – کیفی ترتیبی

☐ ۳) کیفی اسمی – کمّی پیوسته

☐ ۴) کیفی ترتیبی – کمّی گسسته

پاسخ: نوع آلایندگی هوا قابل شمارش و اندازه‌گیری نبوده و ترتیبی نیز ندارد، بنابراین متغیری از نوع کیفی اسمی است. اما میزان آلودگی هوا قابل اندازه‌گیری بوده و هر عددی را می‌تواند اختیار کند، بنابراین متغیری از نوع کمّی پیوسته است.

۲۶ اگر در داده‌های آماری $۸,۹,۱۴,۱۲,۲a+b\ ,\ ۴a-b,۱۰,۱۶,۸$ مد فقط ۱۲ باشد، حاصل $a+۲b$ کدام است؟

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) ۱۰ ☐ ۲) ۱۲ ☐ ۳) ۱۴ ☐ ۴) ۱۶

پاسخ: چون در داده‌ها ۲ تا ۸ داریم، اگر بخواهیم فقط ۱۲ مد جامعه باشد، باید فراوانی آن حداقل ۳ باشد، داریم:

$$\begin{cases}۴a-b=۱۲\\ ۲a+b=۱۲\end{cases}\Rightarrow a=۴\Rightarrow b=۴\ \Rightarrow a+۲b=۴+۲\times۴=۱۲$$

نکته می‌دانیم هر تغییری در داده‌ها ایجاد شود، همان تغییر نیز در میانگین ایجاد می‌شود. حال با توجه به این ویژگی و برای سرعت بخشیدن به محاسبات مربوط به میانگین، می‌توانیم ابتدا تمام داده‌ها را بر مقدار مشخصی تقسیم کنیم و یا از تمام داده‌ها مقدار مشخصی را کم کنیم و بعد از محاسبهٔ میانگین داده‌های جدید، همان مقدار را در میانگین به‌دست آمده ضرب یا به میانگین به‌دست آمده اضافه کنیم.

۲۷ در جدول فراوانی زیر، میانگین به‌صورت $\bar{x}=۱۲+۲\bar{a}$ محاسبه شده است. $\bar{a}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۸)

گزینهٔ «۱»

۱۶	۱۴	۱۲	۱۰	۸	x
۳	۹	۵	۵	۲	f

☐ ۱) ۰/۲۵ ☐ ۲) ۰/۳۶

☐ ۳) ۰/۴۵ ☐ ۴) ۰/۵۴

پاسخ: کافی است برای سرعت بخشیدن به محاسبات، از تمام داده‌ها ۱۲ واحد کم کرده و سپس آن‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. با این کار، میانگین داده‌های جدید نیز برابر $\bar{a}$ می‌شود. داریم:

۲	۱	۰	−۱	−۲	$x_{\text{جدید}}$
۳	۹	۵	۵	۲	f

$$\frac{\bar{x}-۱۲}{۲}=\bar{a}=\frac{۲(-۲)+۵(-۱)+۵(۰)+۹(۱)+۳(۲)}{۲+۵+۵+۹+۳}=\frac{-۴-۵+۰+۹+۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

۲۸ در جدول زیر، اگر میانگین داده‌ها برابر ۱۸/۴ باشد، آن‌گاه در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به $[۲۱,۲۵)$ چند درجه است؟ (تجربی داخل ۹۰)

گزینهٔ «۴»

۲۵−۲۹	۲۱−۲۵	۱۷−۲۱	۱۳−۱۷	۹−۱۳	**حدود دسته**
۱	a	۷	۴	۳	**فراوانی**

☐ ۱) ۶۰°

☐ ۲) ۸۰°

☐ ۳) ۸۰°

☐ ۴) ۹۰°

پاسخ: ابتدا مرکز دسته‌ها را تعیین می‌کنیم:

۲۷	۲۳	۱۹	۱۵	۱۱	مرکز دسته
۱	a	۷	۴	۳	فراوانی

حال برای سرعت بخشیدن به محاسبات، از مرکز دسته‌ها ۱۹ واحد کم می‌کنیم. با این‌کار از میانگین نیز ۱۹ واحد کم می‌شود. داریم:

۸	۴	۰	−۴	−۸	مرکز دسته
۱	a	۷	۴	۳	فراوانی

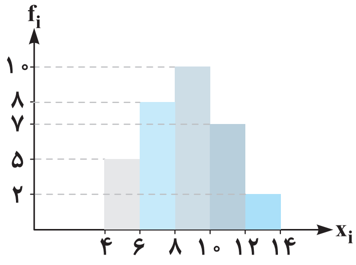
میانگین داده‌های جدید برابر $۱۸/۴-۱۹=-۰/۶$ است. داریم:

$$\bar{x}=\frac{۳\times(-۸)+۴\times(-۴)+۷\times(۰)+a\times(۴)+۱\times(۸)}{۳+۴+۷+a+۱}=-\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow\frac{۴a-۳۲}{۱۵+a}=\frac{-۶}{۱۰}\Rightarrow a=۵$$

حال با استفاده از رابطهٔ $\alpha=\frac{f_i}{n}\times۳۶۰^\circ$ داریم: زاویهٔ مربوط به‌دستهٔ $[۲۱,۲۵)$ در نمودار دایره‌ای $=\frac{a}{۱۵+a}\times۳۶۰^\circ=\frac{۵}{۲۰}\times۳۶۰^\circ=۹۰^\circ$

۲۹ با توجه به نمودار مستطیلی مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟

گزینهٔ «۲»



☐ ۱) ۸/۴۲

☐ ۲) ۸/۵۶

☐ ۳) ۸/۶۵

☐ ۴) ۸/۷۵

پاسخ: ابتدا جدول فراوانی داده‌ها را رسم می‌کنیم:

۱۲−۱۴	۱۰−۱۲	۸−۱۰	۶−۸	۴−۶	حدود دسته
۱۳	۱۱	۹	۷	۵	مرکز دسته
۲	۷	۱۰	۸	۵	فراوانی

حال برای کاهش حجم محاسبات، از مرکز دسته‌ها ۹ واحد کم می‌کنیم. با این‌کار از میانگین داده‌های اولیه نیز ۹ واحد کم می‌شود.

۴	۲	۰	−۲	−۴	مرکز دستهٔ جدید
۲	۷	۱۰	۸	۵	فراوانی

حال داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۵+(-۴)+۸\times(-۲)+۱۰\times۰+۷\times۲+۲\times۴}{۵+۸+۱۰+۷+۲} = \frac{-۱۴}{۳۲}$$

و در نهایت میانگین داده‌های اولیه برابر است با:

$$\bar{x}_{\text{اولیه}} = \bar{x}_{\text{جدید}} + ۹ = -\frac{۱۴}{۳۲} + ۹ \simeq ۸/۵۶$$

نکته انحراف دادهٔ x_i از میانگین، برابر $x_i - \bar{x}$ است و همواره مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین برابر صفر است. (چرا؟)

$$\sum_{i=۱}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = ۰$$

۳۰ گزینهٔ «۴» **جدول زیر مقادیر انحراف از میانگین داده‌های آماری دسته‌بندی شده را مشخص می‌کند. فراوانی دستهٔ ششم چقدر است؟** *(تجربی خارج ۸۵)*

۳	۲	۱	۰	−۱	−۲	−۴	**انحراف از میانگین**
۳	x	۸	۴	۹	۱۱	۵	**فراوانی**

☐ ۱) ۱۴

☐ ۲) ۱۵

☐ ۳) ۱۶

☐ ۴) ۱۷

پاسخ: می‌دانیم که همواره مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=۱}^{۷} f_i(x_i - \bar{x}) = ۰ \Rightarrow ۵\times(-۴)+۱۱\times(-۲)+۹\times(-۱)+۴\times۰+۸\times۱+x\times۲+۳\times۳ = ۰ \Rightarrow x = ۱۷$$

۳۱ گزینهٔ «۴» **در کارنامهٔ علی معدل ۱۸/۷ ثبت شده است. با توجه به جدول نمرات زیر، نمرهٔ زبان او چقدر است؟**

فارسی	زبان	ریاضی	شیمی	فیزیک	**نام درس**
۱	۱	۳	۲	۳	**ضریب درس**
۲۰	a	۱۸/۵	۱۹/۵	۱۸	**نمره**

☐ ۱) ۱۹/۵

☐ ۲) ۲۰

☐ ۳) ۱۸

☐ ۴) ۱۸/۵

پاسخ: نمرهٔ هر درس (x_i) به تناسب ضریب آن (w_i) در میانگین مؤثر است. بنابراین با توجه به رابطهٔ میانگین موزون داده‌ها داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=۱}^{۵} w_i x_i}{\sum_{i=۱}^{۵} w_i} = \frac{۳\times۱۸+۲\times۱۹/۵+۳\times۱۸/۵+a+۲۰}{۳+۲+۳+۱+۱} \Rightarrow ۱۸/۷۰ = \frac{۱۶۸/۵+a}{۱۰} \Rightarrow ۱۸۷ = ۱۶۸/۵+a \Rightarrow a = ۱۸/۵$$

سعی کنید این سؤال را به روش میانگین سریع نیز حل کنید.

۳۲ گزینهٔ «۱» **اگر میانگین داده‌های $x_۱-۱, x_۲-۲, \cdots, x_n-n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $x_۱+۱, x_۲+۲, \cdots, x_n+n$ کدام است؟**

☐ ۱) $\bar{x}+n+۱$

☐ ۲) $\bar{x}+\frac{n(n+۱)}{۲}$

☐ ۳) $\bar{x}+\frac{n+۱}{۲}$

☐ ۴) $۲\bar{x}$

پاسخ: با کمی دقت میانگین مربوط به داده‌های $x_۱-۱, x_۲-۲, \ldots, x_n-n$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{x} = \frac{x_۱-۱+x_۲-۲+\cdots+x_n-n}{n} = \frac{(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)-(۱+۲+\cdots+n)}{n} = \frac{(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)-\frac{n(n+۱)}{۲}}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)}{n} - \frac{n+۱}{۲}$$

همچنین میانگین مربوط به داده‌های $x_۱+۱, x_۲+۲, \ldots, x_n+n$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{y} = \frac{x_۱+۱+x_۲+۲+\cdots+x_n+n}{n} = \frac{(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)}{n} + \frac{(n+۱)}{۲}$$

و در نهایت رابطهٔ بین $\bar{x}$ و $\bar{y}$ برابر می‌شود با:

$$\Rightarrow \bar{y} = \underbrace{\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n} - \frac{n+۱}{۲}}_{\bar{x}} + (n+۱) \Rightarrow \bar{y} = \bar{x}+n+۱$$

ریاضیات
گسسته

- » درس اوّل: استدلال ریاضی
- » درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح
- » درس سوم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

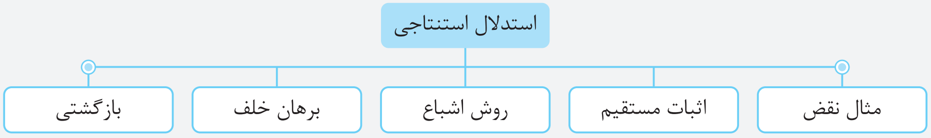
فصل اول:

آشنایی با نظریهٔ اعداد

استدلال استنتاجی

درس اوّل: استدلال ریاضی

استدلال استنتاجی: اگر برای اثبات درستی یک گزاره از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع زیر است:



تذکر برای اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. موارد زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضی کمک مهمی به شما می‌کند:

۱) عدد زوج : $۲k$

۲) عدد فرد : $۲k+۱$

۳) دو عدد زوج : $۲k, ۲k'$

۴) دو عدد فرد : $۲k+۱, ۲k'+۱$

۵) عدد مضرب ۳ : $۳k$

۶) دو عدد فرد متوالی : $۲k-۱, ۲k+۱$

۷) دو عدد زوج متوالی : $۲k, ۲k+۲$

۸) عدد مربع کامل : $k^۲$

۹) عدد فرد مربع کامل : $(۲k+۱)^۲$

۱۰) سه عدد متوالی : $k-۱, k, k+۱$

۱۱) وارون عدد a : $\frac{۱}{a}$

۱۲) عدد گویا : $\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰$

۱ درستی کدام گزینه با استفاده از استدلال استنتاجی قابل استدلال **نیست**؟

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.

☐ ۲) مربع هر عدد فرد به شکل ۸q + ۱ است.

☐ ۳) مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

☐ ۴) مجموع ۲ عدد زوج متوالی مضرب ۴ است.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $(۲k-۱)+(۲k+۱)=۴k$

گزینهٔ (۲): $(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲q}+۱=۸q+۱$

گزینهٔ (۳): $k+(k+۱)+(k+۲)=۳k+۳=۳(k+۱)=۳k'$

گزینهٔ (۴): $(۲k)+(۲k+۲)=۴k+۲\neq ۴k'$

روش‌های اثبات

۱) **حکم کلی:** اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند.

تذکر احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر **هر**، **همه**، **تمام** یا **هیچ** بیان می‌شوند.

۲) **مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

تذکر با ارائهٔ مثال نقض نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد. بلکه فقط برای بیان نادرستی یک حکم، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۳) **روش اشباع:** گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همهٔ حالت‌های ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را روش اشباع می‌نامند.

۴) **برهان خلف:** یک روش اثبات غیرمستقیم برای اثبات درستی احکام کلی است. برای استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم داده شده نادرست است، سپس نشان می‌دهیم که این فرضِ باطل، حقایق دانسته شده را نقض می‌کند. حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

۵) **بازگشتی:** گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها با فرض درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند وگرنه درستی اثبات، تأیید نمی‌شود.

۲ درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض **نمی‌توان** رد کرد؟

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

☐ ۲) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

☐ ۳) برای هر دو عدد طبیعی x و y همواره $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

☐ ۴) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر $n=۴$ باشد، $۲^۴-۱=۱۵$ می‌باشد که عددی مرکب است.

گزینهٔ (۲): می‌دانیم $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند، اما مجموع آن‌ها برابر صفر است که یک عدد گویا است.

گزینهٔ (۳): اگر $x=۱$ و $y=۱$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{۱}+\sqrt{۱}\neq\sqrt{۲}$.

گزینهٔ (۴): این گزاره درست است و با مثال نقض رد نمی‌شود:

$$k=n(n+۱)\Rightarrow ۴k+۱=۴(n)(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$$

۳ کدام گزاره برای تمام اعداد طبیعی درست است؟

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) عبارت $n^۲+۳n$ همواره مضرب ۴ است.

☐ ۲) عبارت $n^۲+۳n+۵$ همواره فرد است.

☐ ۳) عبارت $n^۳+n^۲$ همواره مضرب ۳ است.

☐ ۴) عبارت $n^۲+۳n$ به ازای هیچ مقداری از n مربع کامل نیست.

پاسخ:

گزینهٔ (۲): $n^۲+۳n+۵=\underbrace{n(n+۳)}+۵=۲k+۵=$ فرد

۳واحد اختلاف دارند بنابراین
همواره یکی زوج و یکی فرد است

گزینهٔ (۱): $n=۳\Rightarrow n^۲+۳n=۹+۹=۱۸\neq ۴k$

گزینهٔ (۴): $n=۱\Rightarrow\ n^۲+۳n=۴=$ مربع کامل

گزینهٔ (۳): $n=۱\Rightarrow n^۳+n^۲=۲\neq ۳k$

۴ درستی کدام گزاره را **نمی‌توان** به کمک برهان خلف، اثبات کرد؟

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

☐ ۲) $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

☐ ۳) اگر دو عدد a و b گنگ باشند $\sqrt{ab}$ نیز گنگ است.

☐ ۴) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

پاسخ: اگر $a=\sqrt{۲}-۱$ و $b=\sqrt{۲}+۱$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{ab}$ برابر است با: $\sqrt{ab}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=\sqrt{۱}=۱\in Q$

بنابراین گزارهٔ گزینهٔ (۳) با مثال نقض رد شده و با برهان خلف قابل اثبات نیست.

۵ در اثبات نامساوی $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+xz+yz$ به کمک اثبات بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی زیر خواهیم رسید؟

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) $(x-xz+y)^۲\geq ۰$

☐ ۲) $(x-yz)^۲+(yz-z)^۲\geq ۰$

☐ ۳) $(x+yz+z)^۲\geq ۰$

☐ ۴) $(x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$

پاسخ: طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲xz+۲yz\Rightarrow\ x^۲-۲xy+y^۲+x^۲-۲xz+z^۲+y^۲-۲yz+z^۲\geq ۰\Rightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$$

بخش‌پذیری

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b\neq ۰$ بخش‌پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که:

$$a=bq$$

در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم b عاد می‌کند (می‌شمارد) a را. به‌عنوان مثال:

$$۶=۲\times ۳\Rightarrow\ ۲|۶,۳|۶$$

برای رابطهٔ $b|a$ چند تعبیر مختلف می‌توان به کار برد:

۱) b شمارنده یا مقسوم‌علیه (عامل) a است.

۲) a مضرب b است.

۳) a بر b بخش‌پذیر است.

۶ کدام گزینه صحیح **نیست**؟

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) $۷|۳۵$

☐ ۲) $۲۴|۶$

☐ ۳) $۴|۱۲$

☐ ۴) $۸|۲۴$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): $۲۴=۴\times ۶\Rightarrow ۶|۲۴\Rightarrow ۲۴\nmid ۶$

گزینهٔ (۱): $۳۵=۷\times ۵\Rightarrow ۷|۳۵$

گزینهٔ (۴): $۲۴=۳\times ۸\Rightarrow ۸|۲۴$

گزینهٔ (۳): $۱۲=۴\times ۳\Rightarrow ۴|۱۲$

فصل دوم:

گراف و مدل‌سازی

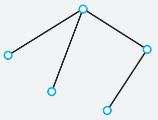
گراف

درس اوّل: معرفی گراف

تعریف: گراف در واقع مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها است به‌طوری که این نقطه‌ها توسط پاره‌خط‌ها به هم وصل شده‌اند.

نقاط را رأس‌های گراف و خطوط را یال‌های گراف می‌نامند.

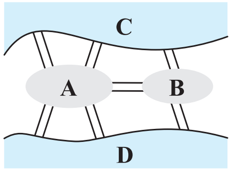
به‌عنوان مثال، گراف مقابل دارای ۵ رأس و ۴ یال است:



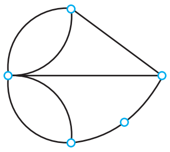
تذکر اگر سادهٔ شدهٔ یک نقشه را با استفاده از نقاط و خطوط رسم کنیم، از مدل‌سازی مسئله توسط گراف استفاده کرده‌ایم.

۱ کدام یک از گراف‌های زیر، مدل‌سازی مناسبی برای نقشهٔ مقابل است؟

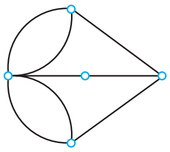
گزینهٔ «۳»



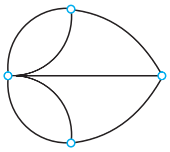
☐ ۱)



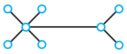
☐ ۲)



☐ ۳)



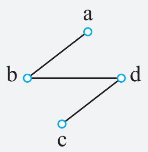
☐ ۴)



پاسخ: چون در نقشهٔ داده شده چهار ناحیهٔ A ، B ، C و D دیده می‌شود، بنابراین گراف دارای ۴ رأس است و چون ۷ پل وجود دارد، گراف دارای ۷ یال خواهد بود و برای رسم گراف کافی است ناحیه‌ها را با نقطه نمایش دهیم و به جای هر پل، یال متناظر با آن را بین نقاط (ناحیه‌ها) رسم کنیم.

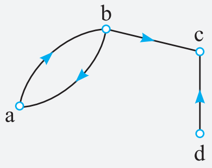
مجموعهٔ رأس‌ها و یال‌های گراف

اگر G یک گراف باشد، مجموعهٔ رأس‌های گراف G را با V(G) و تعداد رأس‌ها را با |V(G)| یا n(V(G)) مشخص می‌کنند. همچنین مجموعهٔ یال‌های گراف را با E(G) و تعداد یال‌ها را با |E(G)| یا n(E(G)) نشان می‌دهند.



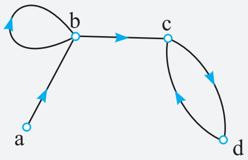
$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a,b,c,d\} \Rightarrow |V(G)| = ۴ \\ E(G) = \{ab,bd,cd\} \Rightarrow |E(G)| = ۳ \end{cases}$$

۱) اگر یال‌های گراف جهت‌دار باشند، باید یال‌ها را به صورت زوج مرتب نشان دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a,b,c,d\} \\ E(G) = \{(a,b),(b,a),(b,c),(d,c)\} \end{cases}$$

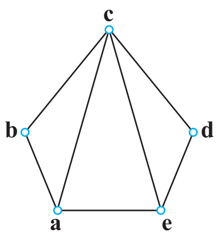
۲) در بعضی از گراف‌ها، یالی وجود دارد که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. این یال را طوقه می‌نامند.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a,b,c,d\} \\ E(G) = \{(a,b),\underbrace{(b,b)}_{\text{طوقه}},(b,c),(c,d),(d,c)\} \end{cases}$$

۲ اگر نمودار گراف G به صورت مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟

گزینهٔ «۱»



☐ ۱) $|V(G)| = ۵ \ , \ |E(G)| = ۷$

☐ ۲) $|V(G)| = ۵ \ , \ |E(G)| = ۸$

☐ ۳) $|V(G)| = ۷ \ , \ |E(G)| = ۵$

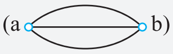
☐ ۴) $|V(G)| = ۶ \ , \ |E(G)| = ۱۲$

پاسخ: گراف دارای ۵ رأس است، بنابراین $n(V(G)) = ۵$ و همچنین گراف دارای ۷ یال است، بنابراین $n(E(G)) = ۷$، به عبارت دیگر:

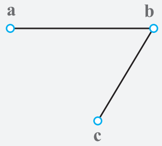
$$V(G) = \{a,b,c,d,e\} \Rightarrow |V(G)| = ۵$$

$$E(G) = \{ab,bc,cd,de,ea,ca,ce\} \Rightarrow |E(G)| = ۷$$

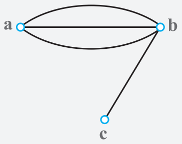
گراف ساده

تعریف: به گرافی که در شکل آن، یال جهت‌دار  ، یال موازی  و طوقه  وجود نداشته باشد، گراف ساده می‌گویند.

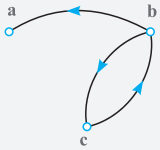
تذکر گراف‌ها به چهار دستهٔ کلی گراف جهت‌دار، گراف طوقه‌دار، گراف چندگانه و گراف ساده تقسیم‌بندی می‌شوند:



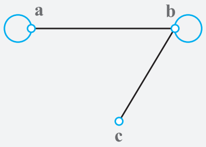
گراف ساده



گراف چندگانه



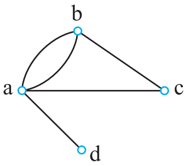
گراف جهت‌دار

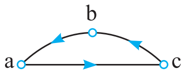


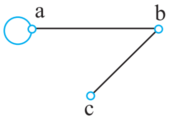
گراف طوقه‌دار

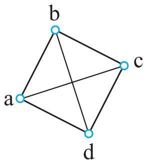
۳ کدام یک از گراف‌های زیر، یک گراف ساده است؟

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) 

☐ ۲) 

☐ ۳) 

☐ ۴) 

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): بین دو رأس a و b یال‌های موازی وجود دارد؛ بنابراین گراف ساده نیست.

گزینهٔ (۲): یال‌های گراف جهت‌دار هستند؛ بنابراین گراف ساده نیست.

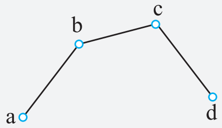
گزینهٔ (۳): رأس a دارای طوقه است؛ بنابراین گراف طوقه‌دار است و ساده نیست.

گزینهٔ (۴): گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز حداکثر یک یال وجود دارد و گراف، طوقه و یال جهت‌دار ندارد.

مرتبه و اندازه گراف

مرتبه: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ گراف G می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم.

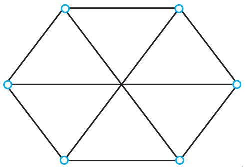
اندازه: تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \Rightarrow p(G)=|V(G)|=۴ \\ E(G)=\{ab,bc,cd\} \Rightarrow q(G)=|E(G)|=۳ \end{cases}$$

۴ در گراف شکل مقابل اگر مرتبه را با $p(G)$ و اندازه را با $q(G)$ نشان دهیم، حاصل $q(G)-p(G)$ کدام است؟

گزینهٔ «۲»



☐ ۱) -۳

☐ ۲) ۳

☐ ۳) -۶

☐ ۴) ۶

پاسخ: در این گراف ۶ رأس وجود دارد؛ بنابراین $p(G)=۶$ و همچنین تعداد یال‌ها برابر ۹ است؛ در نتیجه $q(G)=۹$، پس داریم:

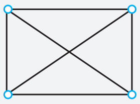
$$q(G)-p(G)=۹-۶=۳$$

رابطهٔ p و q

اگر مرتبهٔ یک گراف ساده p و اندازهٔ آن q باشد، آنگاه رابطهٔ روبه‌رو بین p و q برقرار است.

$$۰ \le q \le \frac{p(p-1)}{۲}$$

به‌عنوان مثال، یک گراف با ۴ رأس، حداکثر $۶=\frac{۴\times۳}{۲}$ یال را می‌تواند در خود جای دهد:



» درس اوّل: مباحثی در ترکیبیّات

» درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

فصل سوم:

ترکیبیّات (شمارش)

درس اوّل: مباحثی در ترکیبیّات

قرار دادن اشیاء متمایز در جایگاه‌های متفاوت

اگر بخواهیم n نفر را در k جایگاه متمایز قرار دهیم به طوری‌که تعداد افراد قرار گرفته در جایگاه‌ها مشخص باشد، با استفاده از انتخاب ترکیب ابتدا تعداد افراد یکی از جایگاه‌ها را از میان کل افراد موجود انتخاب می‌کنیم، سپس تعداد افراد جایگاه بعدی را از میان باقی‌ماندهٔ افراد انتخاب می‌کنیم و همین منوال را ادامه می‌دهیم.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در اتاق‌های ۲ نفره، ۳ نفره و ۳ نفره جای داد؟

پاسخ

$$\binom{۸}{۲}\overset{\text{۲نفر کم شد}}{\times}\binom{۶}{۳}\overset{\text{۳نفر کم شد}}{\times}\binom{۳}{۳}=\frac{۸!}{۲!\times ۶!}\times\frac{۶!}{۳!۳!}\times\frac{۳!}{۰!۳!}=\frac{۸!}{۲!۳!۳!}=۵۶۰$$

نکته هریک از اتاق‌های یک هتل (یا هر ساختمان دیگری در جهان!) در یک مختصات جغرافیایی منحصربه‌فرد قرار گرفته و به یقین، متفاوت از دیگری محسوب می‌شود.

۱ **به چند طریق می‌توان ۶ مهرهٔ متمایز را در ۳ ظرف متمایز قرار داد، به‌طوری‌که در هر ظرف، ۲ مهره قرار گیرد؟**

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) ۶۰ ☐ ۲) ۷۵ ☐ ۳) ۸۴ ☐ ۴) ۹۰

پاسخ:

$$\binom{۶}{۲}\overset{\text{۲مهره کم شد}}{\times}\binom{۴}{۲}\overset{\text{۲مهره کم شده}}{\times}\binom{۲}{۲}=\frac{۶!}{\cancel{۴}!۲!}\times\frac{\cancel{۴}!}{۲!۲!}\times\frac{۲!}{۰!۲!}=\frac{۶!}{۲!۲!۲!}=۹۰$$

۲ **به چند طریق می‌توان ۸ جایزهٔ متمایز را بین ۴ دانش‌آموز توزیع کرد، به‌طوری که به هر کدام دقیقاً دو جایزه برسد؟**

گزینهٔ «۲»

☐ ۱) ۲۶۸۰ ☐ ۲) ۲۵۲۰ ☐ ۳) ۲۱۱۴ ☐ ۴) ۱۰۲۴

پاسخ:

$$\binom{۸}{۲}\overset{\text{۲جایزه کم شده}}{\times}\binom{۶}{۲}\overset{\text{۲جایزه کم شده}}{\times}\binom{۴}{۲}\overset{\text{۲جایزه کم شده}}{\times}\binom{۲}{۲}=\frac{۸!}{۲!\cancel{۶}!}\times\frac{\cancel{۶}!}{۲!\cancel{۴}!}\times\frac{\cancel{۴}!}{۲!۲!}\times\frac{\cancel{۲}!}{۰!\cancel{۲}!}=۲۵۲۰$$

تیم‌بندی

وقتی صحبت از تیم‌های بدون نام می‌شود، صرفاً مسئلهٔ تقسیم‌بندی مطرح است؛ بدون آن‌که این افراد را بخواهیم در جایگاه مشخصی [همانند اتاق‌های یک هتل] قرار دهیم. بنابراین اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم باشد، باید پس از انتخاب، جواب را بر جایگشت تعداد تیم‌های با اعضای یکسان تقسیم کرد.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به سه تیم ۲ نفره، ۳ نفره و ۳ نفره تقسیم کرد؟

پاسخ ابتدا ۲ نفر از ۸ نفر را برای یک تیم انتخاب می‌کنیم، پس ۳ نفر بعدی را از ۶ نفر باقی‌مانده انتخاب کرده و ۳ نفر آخر را نیز برای تیم آخر انتخاب می‌کنیم. حال چون ۲ تیم ۳ نفره داریم، باید جواب را بر ۲! تقسیم کنیم:

$$\frac{\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}}{۲!}=\frac{۲۸\times ۲۰\times ۱}{۲}=۲۸۰$$

تذکر افراز کردن یک مجموعه، در واقع قرار دادن اشیای متمایز در جایگاه‌های یکسان است.

۳ **به چند طریق می‌توان ۶ نفر از کارمندان یک اداره را به ۳ گروه دو نفره تقسیم کرد؟**

گزینهٔ «۱»

☐ ۱) ۱۵ ☐ ۲) ۷۰ ☐ ۳) ۹۰ ☐ ۴) ۱۱۵

پاسخ: چون صرفاً مسئلهٔ تقسیم‌بندی مطرح است، داریم:

$$\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}=\frac{۱۵\times ۶\times ۱}{۶}=۱۵$$

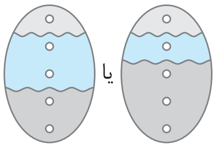
۴ به چند طریق می‌توان یک مجموعهٔ پنج عضوی را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) ۱۰   ☐ ۲) ۱۵   ☐ ۳) ۲۵   ☐ ۴) ۴۰

پاسخ:

$$\Rightarrow \text{تعداد افرازها} = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}+\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}}{۲!}=۱۵+۱۰=۲۵$$



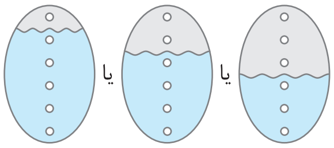
۵ به چند طریق می‌توان یک مجموعهٔ ۶ عضوی را به ۲ زیر مجموعه افراز کرد؟

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) ۱۵   ☐ ۲) ۲۱   ☐ ۳) ۲۵   ☐ ۴) ۳۱

پاسخ:

$$\Rightarrow \text{تعداد افرازها} = \binom{۶}{۱}\binom{۵}{۵}+\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۴}+\frac{\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}}{۲!}=۶+۱۵+۱۰=۳۱$$



توزیع اشیاء مشابه در ظرف‌های متمایز

برای پیدا کردن تعداد راه‌های توزیع n شیء کاملاً مشابه در k ظرف متمایز [یا ساختن یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل متفاوت] باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

توجه منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

مثـال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۴ مهرهٔ مشابه را در ۳ ظرف خالی قرار داد؟

پاسخ فرض می‌کنیم x_1 مهره در ظرف اول، x_2 مهره در ظرف دوم و x_3 مهره در ظرف سوم قرار گیرد. حال چون جمع این مهره‌ها باید ۴ باشد، داریم:

$$x_1+x_2+x_3=۴ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

تذکر در سؤالات قرار دادن اشیا در جایگاه‌های متفاوت، اگر اشیا مشابه باشند، برای حل سؤال از معادلات استفاده می‌کنیم. توجه کنید که میوه‌ها [سیب، پرتقال و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، گنجشک و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم؛ اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

۶ به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

گزینهٔ «۱»

☐ ۱) ۲۱   ☐ ۲) ۲۴   ☐ ۳) ۳۵   ☐ ۴) ۴۲

پاسخ: فرض می‌کنیم x_1 پرتقال در سبد اول، x_2 پرتقال در سبد دوم و x_3 پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال چون جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود، داریم:

$$x_1+x_2+x_3=۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۵+۲}{۲}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

۷ به چند طریق می‌توان ۸ مهرهٔ کاملاً مشابه را در ۴ ظرف متمایز قرار داد؟

گزینهٔ «۴»

☐ ۱) ۵۶   ☐ ۲) ۷۲   ☐ ۳) ۹۴   ☐ ۴) ۱۶۵

پاسخ: فرض می‌کنیم x_1 مهره در ظرف اول، x_2 مهره در ظرف دوم، x_3 مهره در ظرف سوم و x_4 مهره در ظرف چهارم قرار گیرد. حال چون جمع این مهره‌ها باید ۸ باشد، داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=۸ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۸+۳}{۳}=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$$

۸ به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل متمایز، یک دسته‌گل شامل ۷ شاخه درست کرد؟ (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است.)

گزینهٔ «۳»

☐ ۱) ۲۱   ☐ ۲) ۲۸   ☐ ۳) ۳۶   ☐ ۴) ۴۵

پاسخ: فرض می‌کنیم x_1 شاخه از گل نوع اول، x_2 شاخه از گل نوع دوم و x_3 شاخه از گل نوع سوم انتخاب شده باشد. در این صورت داریم:

$$x_1+x_2+x_3=۷ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۷+۲}{۲}=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

کنکور ریاضی داخل ۹۸

۱ اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲\},\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\}$ و $B=\{\{۱\},\{۱,۲\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A\cap B'$ ، کدام است؟

☐ ۱) ۴ ☐ ۲) ۸ ☐ ۳) ۱۶ ☐ ۴) ۳۲

۲ در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

☐ ۱) $\frac{۵}{۲۴}$ ☐ ۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$ ☐ ۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$ ☐ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۳ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A\cap B)=۰/۶$ و $P(A\cap B')=۰/۲$ ، آن‌گاه $P(A\cup B')$ ، کدام است؟

☐ ۱) ۰/۷ ☐ ۲) ۰/۷۵ ☐ ۳) ۰/۸۵ ☐ ۴) ۰/۹

۴ نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیرآمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

۱۸	۱۷	۱۵	۱۴	۱۲	۱۰	x
۴	۶	۱۰	۷	۸	۵	f

☐ ۱) ۱۴/۲ ☐ ۲) ۱۴/۲۵ ☐ ۳) ۱۴/۴ ☐ ۴) ۱۴/۷۵

۵ نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیراست، مقدار $\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}$ کدام است؟

۱۲/۷,۳۰/۲,۱۰/۶,۱۱/۹,۱۰/۶,۱۲/۳,۱۱/۲,۱۳/۵,۱۲/۸,۱۱/۵

☐ ۱) ۰/۲۲۵ − ☐ ۲) ۰/۱۲۵ − ☐ ۳) ۰/۱۷۵ ☐ ۴) ۰/۲۷۵

۶ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟

☐ ۱) ۲۹ ☐ ۲) ۳۲ ☐ ۳) ۴۰ ☐ ۴) ۴۱

۷ به ازای بعضی از مقادیر $n\in\mathbb{N}$ ، اگر $\alpha\,|\,۱۳n+۳$ و $\alpha\,|\,۷n+۴$ و $\alpha\neq۱$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n، کدام است؟

☐ ۱) ۷ ☐ ۲) ۸ ☐ ۳) ۹ ☐ ۴) ۱۰

۸ قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا خریداری کرد؟

☐ ۱) ۱۰ ☐ ۲) ۱۱ ☐ ۳) ۱۲ ☐ ۴) ۱۳

۹ اگر عدد $۷^{۱۳}+a$ بر ۲۳ بخش‌پذیرباشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a، کدام است؟

☐ ۱) ۲ ☐ ۲) ۳ ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) ۵

۱۰ یک گراف ساده ۶ رأسی ۴- منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

☐ ۱) ۹ ☐ ۲) ۱۰ ☐ ۳) ۱۲ ☐ ۴) ۱۵

۱۱ به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به‌طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

☐ ۱) ۱۶۰ ☐ ۲) ۱۸۰ ☐ ۳) ۲۱۰ ☐ ۴) ۲۲۰

۱۲ تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۶ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی، کدام است؟

☐ ۱) ۳۶۰ ☐ ۲) ۴۵۰ ☐ ۳) ۴۸۰ ☐ ۴) ۵۴۰

۱۳ از مجموعه اعداد $\{۵,۸,۱۱,\ldots,۶۵,۶۸,۷۱\}$ که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیرمجموعهٔ حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آن‌ها ۸۲ باشد؟

☐ ۱) ۱۱ ☐ ۲) ۱۲ ☐ ۳) ۱۳ ☐ ۴) ۱۴

۱۴ گزارهٔ $\sim(p\Rightarrow q)$ ، با کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارزش است؟

☐ ۱) $\sim p\vee q$ ☐ ۲) $p\vee\sim q$ ☐ ۳) $\sim p\wedge q$ ☐ ۴) $p\wedge\sim q$

پاسخنامهٔ آزمون جامع (۱)

۱ با استفاده از قضیهٔ ترکیب خطی داریم:

۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{matrix} a\,|\,b+c \\ a\,|\,۲c \end{matrix} \Rightarrow a\,|\,۲(b+c)-۲c \Rightarrow a\,|\,۲b$$

---

۲ می‌دانیم ۵۵ = ۱۱×۵ است، پس عدد $\overline{a۵۲b}$ هم مضرب ۵ بوده و هم مضرب ۱۱. حال چون این عدد مضرب ۵ است، پس b باید یا صفر باشد یا ۵. از آن‌جایی که عدد $\overline{a۵۲b}$ فرد است، پس b = ۵ می باشد و داریم:

۱ ۲ ۳ **۴**

$$\overline{a۵۲۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵-۲+۵-a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \xrightarrow{۰<a\leq ۹} a=۸ \Rightarrow ۸۸۵۵ \overset{۹}{\equiv} ۸+۸+۵+۵ \overset{۹}{\equiv} ۸$$

---

۳ عدد سه‌رقمی موردنظر را a می‌گیریم، بنابراین داریم:

۱ ۲ ۳ **۴**

$$\begin{cases} a \overset{۵}{\equiv} ۲ \overset{۵}{\equiv} -۳ \\ a \overset{۶}{\equiv} ۳ \overset{۶}{\equiv} -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overset{۴\times ۳۰}{\curvearrowright} \\ a \overset{۳۰}{\equiv} -۳ \overset{۳۰}{\equiv} ۱۱۷ \\ \overset{۱۶\times ۷}{\curvearrowright} \\ a \overset{۷}{\equiv} ۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱۷ \end{matrix} \Rightarrow a \overset{۲۱۰}{\equiv} ۱۱۷ \Rightarrow a = ۲۱۰k+۱۱۷ \xrightarrow{\text{عدد سه‌رقمی } a} k=۰,۱,۲,۳,۴ \Rightarrow \text{۵ مقدار}$$

بنابراین ۵ عدد سه رقمی برای a وجود دارد.

---

۴ عدد ۱۱۱۰ نه بر ۱۲ بخش‌پذیر است و نه بر ۲۵ و حدس زدن جواب هم به سادگی مقدور نیست. بنابراین یکی از جواب‌های x را با کمک معادلهٔ هم‌نهشتی به‌دست می‌آوریم:

۱ **۲** ۳ ۴

$$۲۵x+۱۲y \overset{۱۲}{\equiv} ۱۱۱۰ \Rightarrow x \overset{۱۲}{\equiv} \overset{۰}{\cancel{۱۲۰۰}} - \overset{۶}{\cancel{۹۰}} \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \overset{+۱\times ۱۲}{\curvearrowright} -۶ \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \Rightarrow x \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \Rightarrow x_۰ = ۶$$

به جای x در معادله ۶ می‌گذاریم و y را پیدا می‌کنیم:

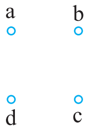
$$۲۵(۶)+۱۲y=۱۱۱۰ \Rightarrow ۱۲y=۹۶۰ \Rightarrow y_۰=۸۰$$

$$\begin{cases} x=۶+۱۲k>۰ \\ y=۸۰-۲۵k>۰ \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<k<\frac{۸۰}{۲۵}=۳/۲ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,۱,۲,۳ \Rightarrow \text{۴ جواب طبیعی}$$

---

۵ ابتدا گراف G را رسم می‌کنیم. برای این منظور ۴ نقطه به‌صورت مقابل به‌عنوان رأس‌های c, b, a و d در نظر می‌گیریم. حال:

۱ ۲ **۳** ۴

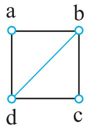


۱) چون $N_G(a)=\{b,d\}$ است، رأس a را به رأس‌های b و d وصل می‌کنیم.

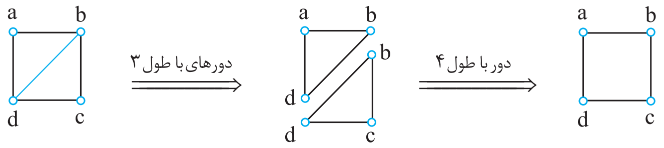
۲) چون $N_G(b)=\{a,c,d\}$ است، رأس b را به رأس‌های c،a و d وصل می‌کنیم.

۳) چون $N_G(c)=\{b,d\}$ است، رأس c را به رأس‌های b و d وصل می‌کنیم.

بنابراین شکل گراف G به‌صورت مقابل است:



این گراف می‌تواند دورهایی با طول ۳ و ۴ داشته باشد که به‌صورت زیر هستند.



بنابراین گراف G مجموعاً دارای ۳ دور است.

---

۶ عدد احاطه‌گری هریک از گراف‌های داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

۱ ۲ ۳ **۴**

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عدد احاطه گری گراف $C_۵$ برابر ۲ = $\lceil ۱/۶۶ \rceil = \left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil$ است.

گزینهٔ (۲): گراف ۵- منتظم مرتبهٔ ۶ همان گراف $K_۶$ است که عدد احاطه‌گری آن برابر ۱ است.

گزینهٔ (۳): عدد احاطه‌گری گراف $P_۶$ برابر ۲ = $\left\lceil \frac{۶}{۳} \right\rceil$ است.

گزینهٔ (۴): عدد احاطه‌گری گراف ۱- منتظم مرتبهٔ ۶ برابر ۳ = $\frac{۶}{۲}$ است: