Number Theory

Chapter 1

Lesson.1 | صفحه ۱ تا ۸ گسسته دوازدهم | استدلال ریاضی | درس اول | Bertrand Russell

Number Theory | اثبات مستقیم | تئوری اعداد

درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:

استدلال استنتاجی
- مثال نقض
- اثبات مستقیم
- روش اشباع
- برهان خلف
- بازگشتی

برای اثبات درستی یک گزاره به روش اثبات مستقیم، ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضیات کمک مهمی به شما می‌کند:

عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی
عدد زوج	$2k$	عدد مکعب کامل	k^3	دو عدد فرد متوالی	$2k-1, 2k+1$
عدد فرد	$2k+1$	عدد فرد مربع کامل	$(2k+1)^2$	دو عدد زوج متوالی	$2k, 2k+2$
عدد مضرب ۳	$3k$	دو عدد فرد	$2k+1, 2k'+1$	سه عدد متوالی	$k-1, k, k+1$
عدد مربع کامل	k^2	دو عدد زوج	$2k, 2k'$	پنج عدد متوالی	$k-2, k-1, k, k+1, k+2$

به کمک اثبات مستقیم نشان دهید جمع سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ است.

سه عدد طبیعی متوالی را با n و $n+1$ و $n+2$ نشان می‌دهیم، در این صورت داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$$

Test **اگر به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل برابر با .... است.**

۱) مجذور عدد فرد بین آن‌ها
۲) مجذور عدد فرد بلافاصله قبل از آن‌ها
۳) مجذور عدد فرد بلافاصله بعد از آن‌ها
۴) میانگین مجذور آن‌ها

1 دو عدد زوج متوالی را با $2k+2, 2k$ نشان می‌دهیم [عدد فرد بین آن‌ها نیز $2k+1$ است.] در این صورت داریم:

$$(2k)(2k+2)+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$$

یعنی حاصل برابر با مجذور عدد فرد بین آن‌هاست، در ضمن میانگین مجذور این دو عدد به صورت زیر به‌دست می‌آید که با عدد به دست آمده برابر نیست:

$$\frac{(2k)^2+(2k+2)^2}{2}=\frac{4k^2+4k^2+8k+4}{2}=4k^2+4k+2$$

اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند. احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر هر، همه، تمام و ... یا هیچ، هیچ‌یک، هیچکدام و ... بیان می‌شوند.

«تمام اعداد اول، فرد هستند.» یک حکم کلی نادرست است زیرا ۲ عددی اول است ولی فرد نیست.

«مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.» یک حکم کلی درست است.

به مثالی که نشان دهد یک حکم کُلی، نادرست است، مثال نقض [پاد نمونه] گفته می‌شود.

برای رد حکم کلی «به‌ازای همهٔ n های طبیعی، عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است» عدد $n=۴۰$ یک مثال نقض است زیرا:

$n=۴۰ \Rightarrow ۴۰^۲+۴۰+۴۱=۴۰(۴۰+۱)+۴۱=(۴۰\times۴۱)+۴۱=۴۱(۴۰+۱)=۴۱\times۴۱$ مرکب

با ارائه مثال نقض نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد، بلکه فقط برای نشان‌دادن نادرستی یک حکم، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

«عدد صحیحی وجود ندارد که دو برابر آن مربع کامل و سه برابر آن مکعب کامل باشد.» یک حکم کلی است که مثال نقض آن ۷۲ می‌باشد.

$۷۲\times۲=۱۴۴=۱۲^۲$ $\quad$ $۷۲\times۳=۲۱۶=۶^۳$

Test **درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را با مثال نقض می‌توان رد کرد؟**

- $\forall x,y\in\mathbb{R};|x+y|=|x|+|y|$
- $\forall x,y\in\mathbb{R};[x+y]=[x]+[y]$
- $\forall x,y\in\mathbb{R}^+;\log(x+y)\ge\log x+\log y$
- $\forall x,y\in\mathbb{R}^+;\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{x+y}$

۱) ۱ $\quad$ ۲) ۲ $\quad$ ۳) ۳ $\quad$ ۴) ۴

3 تنها مورد چهارم مثال نقض ندارد یعنی درستی سه مورد را می‌توان با مثال نقض رد کرد:

$x=-۲\,,\,y=۱\Rightarrow|x+y|\ne|x|+|y|$

$x=-۲/۵\,,\,y=۰/۵\Rightarrow[x+y]\ne[x]+[y]$

$\log(x+y)\ge\log x+\log y\Rightarrow\log(x+y)\ge\log xy\Rightarrow x+y\ge xy$ اگر $x=۲\,,\,y=۳$ فرض شود نامساوی نادرست است.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{x+y}\xrightarrow{x,y\in\mathbb{R}^+}x+y+۲\sqrt{xy}\ge x+y\Rightarrow ۲\sqrt{xy}\ge۰$ بدیهی است با مثال نقض رد نمی‌شود

برهان خُلف یک اثبات غیرمستقیم، برای اثبات درستی احکام کلی است. برای استفاده از برهان خلف، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم داده شده نادرست است. سپس نشان می‌دهیم که این فرضِ باطل، حقایق دانسته شده را نقض می‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف، باطل است و حکم ثابت می‌شود.

با استفاده از برهان خلف نشان دهید اگر $n^۲$ زوج باشد، n نیز زوج است.

فرض کنیم n زوج نباشد، پس عددی فرد مانند $۲k+۱$ است، بنابراین:

$n=۲k+۱\Rightarrow n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k)}_{k'}+۱=۲k'+۱$

همان طورکه می‌بینید $n^۲$ نیز عددی فرد شد که این خلاف فرض زوج بودن $n^۲$ است. پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

Test **برای اثبات درستی کدام گزاره استفاده از برهان خُلف متعارف و مناسب نیست؟**

۱) بیشمار عدد اول وجود دارد. $\quad$ ۲) $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۳) مربع هر عدد فرد، فرد است. $\quad$ ۴) اگر x گنگ باشد $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

3 برای اثبات گنگ بودن اعداد و همچنین نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول از برهان خُلف استفاده می‌شود، امّا برای اثبات درستی گزینهٔ ۳ بهتر است از روش اثبات مستقیم استفاده شود:

$$a=2k+1\Rightarrow a^2=4k^2+4k+1=\underbrace{4k(k+1)}_{2k'}+1=2k'+1$$

اقلیدس در سال ۵۰۰ قبل از میلاد برای اثبات نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول از بُرهان خُلف استفاده کرد بدین صورت که فرض کرد مجموعهٔ اعداد اول متناهی باشد و سپس به کمک قوانین بخش‌پذیری که در ادامهٔ این فصل خواهیم خواند، نشان داد که فرض خُلف باطل است !

Number Theory — تئوری اعداد
اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها [روش اشباع]

گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همهٔ حالت‌های ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را روش اشباع یا اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها می‌نامند. در واقع برای اثبات گزاره‌ها به روش اشباع از هم‌ارزی زیر در منطق گزاره‌ها استفاده می‌شود:

$$(p\vee q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$$

ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج است.

حاصل ضرب دو عدد متوالی را به‌صورت $n(n+1)$ نشان می‌دهیم و حال برای اثبات، برای n دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- $n=2k\Rightarrow n(n+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{k'}=2k'$
- $n=2k+1\Rightarrow n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k''}=2k''$

ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

حاصل ضرب سه عدد متوالی را به‌صورت $n(n+1)(n+2)$ نشان می‌دهیم و حال برای اثبات، ۶ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- $n=6k\Rightarrow n(n+1)(n+2)=6\underbrace{k(6k+1)(6k+2)}_{k'}=6k'$
- $n=6k+1\Rightarrow n(n+1)(n+2)=(6k+1)\underbrace{(6k+2)}_{2k_1}\underbrace{(6k+3)}_{3k_2}=6k''$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- $n=6k+5\Rightarrow n(n+1)(n+2)=(6k+5)\underbrace{(6k+6)}_{6k_1}(6k+7)=6k'''$

Test **در اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها می‌توان نشان داد، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت .... است.** (مسئلهٔ ۲ صفحهٔ ۱۵)

۱) $6k+1$ یا $6k+5$ ۲) $5k+1$ یا $5k+2$ ۳) $7k+1$ یا $7k-1$ ۴) $8k+1$ یا $8k+5$

1 هر عدد طبیعی را می‌توان به یکی از ۶ صورت $6k$ یا $6k+1$ یا $6k+2$ یا $6k+3$ یا $6k+4$ یا $6k+5$ نشان داد که $6k$ مضرب ۶ و $6k+2$ زوج، $6k+3$ مضرب ۳ و همچنین $6k+4$ نیز زوج و مرکب است، بنابراین اگر عددی بخواهد اول باشد یا به شکل $6k+1$ است یا به صورت $6k+5$.

Number Theory — تئوری اعداد
اثبات بازگشتی

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها با فرضِ درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در این طریقهٔ اثبات که آن را روش بازگشتی می‌گویند، از گزاره‌های دو شرطی برای ساده کردن حکم داده شده و رسیدن به یک فرض بدیهی استفاده می‌شود. [می‌دانیم گزارهٔ دو شرطی $P\Leftrightarrow Q$ در صورتی درست است که دو گزارهٔ P و Q هم‌ارزش باشند]

به کمک اثبات بازگشتی درستی نامساوی مقابل را نشان دهید. $\frac{1}{\sqrt a}+\frac{1}{\sqrt b}\geq\frac{4}{\sqrt a+\sqrt b}$

چون نمی‌دانیم اثبات را باید از کجا شروع کنیم، حکم داده شده را ساده می‌کنیم تا به یک رابطهٔ بدیهی و درست برسیم:

$$\frac{1}{\sqrt a}+\frac{1}{\sqrt b}\geq\frac{4}{\sqrt a+\sqrt b}\Leftrightarrow\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt{ab}}\geq\frac{4}{\sqrt a+\sqrt b}\Leftrightarrow(\sqrt a+\sqrt b)^2\geq4\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}\geq4\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq0$$

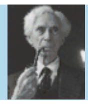
$\Leftrightarrow(\sqrt a-\sqrt b)^2\geq0$ بدیهی است

Test اگر a عددی مثبت باشد، برای اثبات درستی $a+\frac{1}{a}\ge 2$ به وسیلهٔ اثبات بازگشتی به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a+1)^2\ge 0$ ۲) $(a-1)^2\ge 0$ ۳) $(a-\frac{1}{a})^2\ge 0$ ۴) $(a+\frac{1}{a})^2\ge 0$

2

$$a+\frac{1}{a}\ge 2\Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a}\ge 2\xleftrightarrow{a>0} a^2+1>2a\Leftrightarrow a^2+1-2a\ge 0\Leftrightarrow (a-1)^2\ge 0$$


Bertrand Russell

درس دوم | بخش‌پذیری در اعداد صحیح | صفحه ۹ تا ۱۷ گسسته دوازدهم | Lesson.2

تئوری اعداد — بخش‌پذیری — Number Theory

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b\neq 0$ **بخش‌پذیر** می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به‌طوری که $a=bq$ در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم b **می‌شمارد** a را یا b عاد می‌کند a را. به عبارت دیگر:

$$b|a\Leftrightarrow a=bq$$

برای رابطهٔ $b|a$ دو تعبیر می‌توان به کار برد، که یکی از چپ به راست خوانده می‌شود و دیگری از راست به چپ:

1. b شمارنده یا مقسوم‌علیه یا عامل a است.
2. a مضرب b است یا a بر b بخش‌پذیر است.

چون $3\times 2=6$ است بنابراین $2|6$ و $3|6$ یعنی اعداد ۲ و ۳ عدد ۶ را می‌شمارند و همچنین ۶ بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است.

اگر عدد صحیح a بر عدد صحیح b **بخش‌پذیر نباشد**، در این صورت می‌نویسیم $b\nmid a$

چون هیچ عدد صحیحی مانند q یافت نمی‌شود که به ازای آن تساوی $12=5\times q$ برقرار باشد، بنابراین ۱۲ بر ۵ بخش‌پذیر نیست، یعنی: $5\nmid 12$

از اینجا به بعد تمامی پارامترهایی مانند $a, b, c, \ldots$ که در تمام مسائل تئوری اعداد به کار می‌رود همواره اعداد صحیح هستند.

برخی قوانین ابتدایی بخش‌پذیری

1 تمام اعداد را می‌شمارد. ± 1 — $\pm 1\|a$	2 هر عددی خودش را می‌شمارد. — $a\|a$
3 صفر، صفر را می‌شمارد. — $0\|0$	4 هر عددی صفر را می‌شمارد. — $a\|0$

5 صفر هیچ عددی را نمی‌شمارد مگر خودش. یعنی اگر عددی بر صفر بخش‌پذیر شود قطعاً آن عدد صفر است. $0|a\Rightarrow a=0$

6 ± 1 بر هیچ عددی بخش‌پذیر نیستند مگر بر خودشان. یعنی اگر ۱+ یا ۱− بر عددی بخش‌پذیر شوند آن عدد قطعاً ± 1 است. $a|\pm 1\Rightarrow a=\pm 1$

7 اگر یک عدد بر عددی دیگر بخش‌پذیر باشد، قرینهٔ آن نیز بر دیگری بخش‌پذیر است و به‌طور کلی داریم:

$$a|b\Leftrightarrow a|-b\Leftrightarrow -a|b\Leftrightarrow -a|-b$$

$15=(-5)(-3)\Rightarrow -5|15$ $-15=(+5)(-3)\Rightarrow 5|-15$ $-15=(-5)(3)\Rightarrow -5|-15$

9 اگر عدد صحیح و غیر صفر b بر عدد صحیح a بخش‌پذیر باشد، قطعاً عدد a از نظر قدرمطلق کوچک‌تر مساوی عدد b است، یعنی:

$$a|b\xrightarrow{b\neq 0}|a|\le|b|$$

اگر $a|b$ و $|a|>|b|$ است، آنگاه $b=0$ است.

اگر $a|b$ و $b|a$ است، آنگاه $|a|=|b|$ است.

برای اثبات قوانین مربوط به عاد کردن بهتر است آن را به تساوی تبدیل کنیم. به عنوان مثال اثبات قانون نهم به صورت زیر است:

$$a|b\Rightarrow b=aq\Rightarrow q=\frac{b}{a}$$

می‌دانیم $q\in\mathbb{Z}$ و $b\neq 0$ است، پس $q\in\mathbb{Z}-\{0\}$ در نتیجه $|q|\ge 1$ است؛ بنابراین:

$$|\frac{b}{a}|\ge 1\Rightarrow |b|\ge|a|$$

Test اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری‌که $a^2+b^2=0$ باشد و رابطهٔ $a+b \mid m^2-m-2$ برقرار باشد، مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۱- و ۲- ۳) ۱ و ۲- ۴) ۱- و ۲

4 می‌دانیم اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشد، باید تک تک آن‌ها صفر باشند، بنابراین:

$$a^2+b^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ \wedge \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0$$

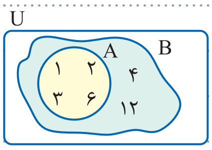
حال $0 \mid m^2-m-2$ بنابراین باید $m^2-m-2=0$ باشد، در نتیجه:

$$(m-2)(m+1)=0 \Rightarrow m=-1,2$$

تئوری اعداد — Number Theory

قانون لورل_هاردی [فشردهٔ بیش از ۱۰ قانون در یک جمله]

می‌دانیم $2\times 6=12$ بنابراین می‌توان گفت $6 \mid 12$ از طرفی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۶ به صورت $A=\{1,2,3,6\}$ و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۱۲ به صورت $B=\{1,2,3,4,6,12\}$ است و بدیهی است که $A \subseteq B$، بنابراین به طور کلی خواهیم داشت:



$\{b$ مقسوم‌علیه‌های$\} \subseteq \{a$ مقسوم‌علیه‌های$\}$ ⇦ $a \mid b$

عکس رابطهٔ فوق نیز درست است یعنی اگر $\{b$ مقسوم‌علیه‌های$\} \subseteq \{a$ مقسوم‌علیه‌های$\}$ آنگاه $a \mid b$.

در رابطهٔ بخش‌پذیری $a \mid b$، همواره به نوعی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های a کوچک‌تر یا مساوی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های b است. بنابراین از این به بعد به‌طور قراردادی در این کتاب سمت چپ رابطه عاد کردن را لاغر و سمت راست را چاق می‌نامیم.

چاق | لاغر

صفر چاق‌ترین عدد است، چون بر تمام اعداد بخش‌پذیر است.
± 1 لاغرترین اعداد هستند، چون همه اعداد را می‌شمارند.
هر عددی چاق‌تر یا لاغرتر از خودش محسوب می‌شود، چون به‌ازای هر a داریم $a \mid a$

همواره در یک بخش‌پذیری می‌توان چاق را چاق‌تر و همچنین لاغر را لاغرتر کرد. این قضیه را به‌طور قراردادی در این کتاب قانون لورل ـ هاردی می‌نامیم.

$$a \mid b \Rightarrow \downarrow a \mid b \uparrow$$

• $10 \mid b \Rightarrow 5 \mid b$ • $-12 \mid 36 \Rightarrow -4 \mid 36$ • $8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 24$ • $5 \mid b \Rightarrow 5 \mid 2b$ • $2 \mid 8 \Rightarrow 2 \mid 8\times(-3)$ • $4 \mid 12 \Rightarrow 4 \mid 12\times 5$

عوامل چاقی	عوامل لاغری
1 ضرب شدن در یک عدد صحیح	**1** تقسیم شدن بر یک عدد صحیح
• $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$ • $8 \mid b \Rightarrow 8 \mid ab$ • $a \mid b \Rightarrow a \mid 4b$	• $bc \mid a \Rightarrow b \mid a$ • $7b \mid a \Rightarrow 7 \mid a$ • $2b \mid a \Rightarrow b \mid a$
2 افزایش توان	**2** کاهش توان
• $a^2 \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^5$ • $a \mid b \Rightarrow a \mid b^2$ • $2 \mid 6 \Rightarrow 2 \mid 6^2$	• $a^3 \mid 36 \Rightarrow a^2 \mid 36$ • $2^3 \mid a \Rightarrow 2^2 \mid a$ • $a^2 \mid b \Rightarrow a \mid b$

بدیهی است که اگر لاغر، چاق شود یا چاق، لاغر شود نتایج به‌دست آمده الزاماً درست نیست.

بدیهی است که همزمان که چاق را چاق‌تر می‌کنیم می‌توانیم توأم با آن لاغر را نیز لاغرتر کنیم. در تمام موارد زیر لاغر، لاغرتر و در عین حال چاق، چاق‌تر شده است:

• $a^2 \mid 3b \Rightarrow a \mid 6b$ • $a^3 \mid b^2 \Rightarrow a^2 \mid b^3$ • $2a \mid b \Rightarrow a \mid b^2$ • $a^2 \mid b \Rightarrow a \mid b^3$

IR-MCI LTE 00:01 AM 100 %

Tweet

Bertrand Russell
@Bertrand 1872

در هندسه هیچ راه شاهانه‌ای وجود ندارد.

There is no royal way in geometry

Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

اقلیدس پدر هندسه و بنیانگذار هندسه است او نویسندهٔ موفق‌ترین کتاب درسی اصول هندسه است که به مدت ۲۰۰۰ سال شالودهٔ تمام آموزش هندسه در غرب بود.

5,337 7,412 7,120,910,208

Chapter 2

Graph & Modeling

گراف و مدل سازی

Add another Tweet

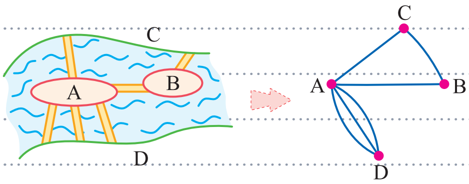
Euclid
Mid-4 century BC

Graph & Modeling Chapter 2

Graph & Modeling | انواع گراف و مدل سازی | گراف و مدل سازی

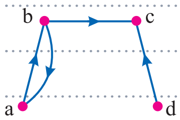
اگر سادهٔ شدهٔ یک نقشه را با استفاده از نقاط و خطوط رسم کنیم، از گراف برای مدل سازی مسأله استفاده کرده‌ایم.

نقشهٔ مقابل مربوط به یک منطقه است که ناحیه‌های خشکی توسط پل‌هایی به هم وصل شده‌اند. این نقشه را می‌توان توسط یک گراف نمایش داد. اگر به جای هر خشکی، یک نقطه و به جای هر پل، یک پاره‌خط (یا یک کمان) قرار دهیم به شکلی خواهیم رسید که از این به بعد آن را گراف می‌نامیم.



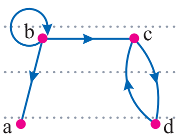
در واقع هر گراف مانند G تعدادی نقطه است که توسط پاره‌خط‌ها یا کمان‌هایی به هم وصل شده‌اند. نقاط را رأس و پاره‌خط‌ها را یال گراف می‌نامند. مجموعهٔ رأس‌های یک گراف را با V(G) و مجموعهٔ یال‌های آن را با E(G) نشان می‌دهند.

اگر برای یال‌های یک گراف، جهت تعیین شده باشد، این یال‌ها را یال جهت‌دار و گراف رسم شده را، گراف جهت‌دار می‌گوییم. اگر یال‌های گراف جهت‌دار باشد، یال‌های گراف را باید به صورت زوج مرتب نشان دهیم.



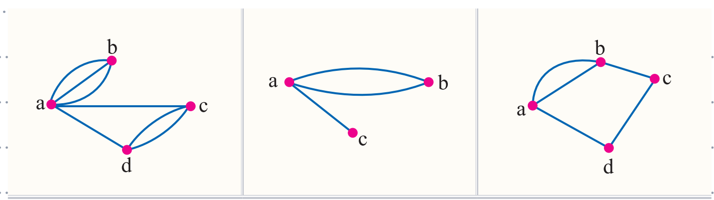
$$\begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{(a,b),(b,a),(b,c),(d,c)\} \end{cases}$$

در بعضی از گراف‌ها ممکن است یک یال، یک رأس را به خود همان رأس وصل کند، این یال‌ها را طوقه و گراف را، گراف طوقه‌دار می‌نامند.

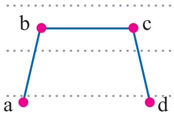


$$\begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{(b,a),(b,b),(b,c),(c,d),(d,c)\} \end{cases}$$

در بعضی از گراف‌ها بین دو رأس بیش از یک یال وجود دارد، این یال‌ها را یال‌های موازی و این گراف را، گراف چند گانه می‌نامند.



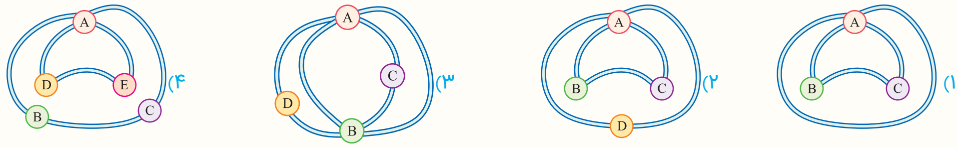
گرافی که یال جهت‌دار و یال موازی و طوقه نداشته باشد را گراف ساده می‌گویند.



$$\begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{ab,bc,cd\} \end{cases}$$

از این به بعد در تمام کتاب بحث دربارهٔ گراف‌های ساده است و هر جا گفته می‌شود «گراف»، منظور گراف ساده است.

Test گراف متناظر با نقشهٔ کدام یک از مناطق زیر نمایشگر یک گراف ساده است؟



4 بررسی گزینه‌ها:

گراف و مدل سازی — دو گراف یکسان — Graph & Modeling

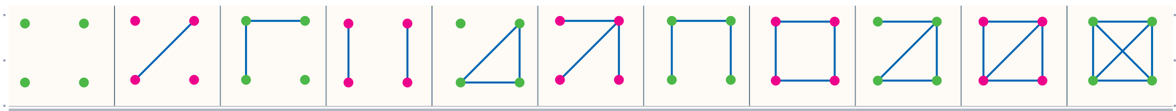
دو گراف سادهٔ G_1 و G_2 با هم برابرند (یکسان‌اند) هرگاه مجموعهٔ رأس‌های آن‌ها برابر و مجموعهٔ یال‌های آن‌ها نیز برابر باشد.

برای رسم نمودار یک گراف روشی یکتا مدنظر نیست فقط باید مشخص شود که گراف مورد نظر چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رأس‌ها متصل است.

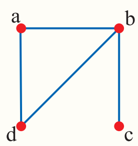
دو گراف G_1 و G_2 در شکل‌های زیر دارای ۵ رأس و ۴ یال هستند. این دو گراف، گراف‌هایی برابر هستند زیرا مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های آن‌ها یکسان است:

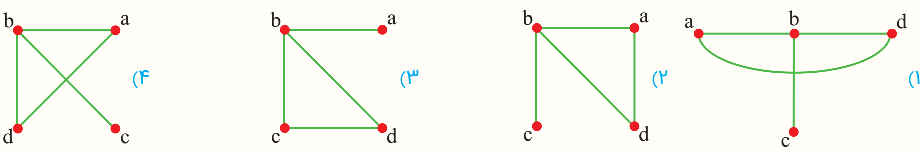
$V(G_1)=V(G_2)=\{a,b,c,d,e\}$ $E(G_1)=E(G_2)=\{ab,bd,cd,de\}$

در شکل‌های زیر همهٔ گراف‌های ساده با ۴ رأس [که در آن‌ها رأس‌ها بدون نام‌گذاری هستند] رسم شده‌اند:



Test گراف G مطابق شکل مقابل با کدام گراف زیر یکسان **نیست**؟

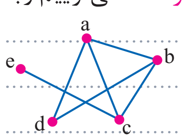




3 رأس a در گراف داده شده به دو رأس دیگر وصل است در حالی که در گزینهٔ ۳ تنها به یک رأس وصل شده است.

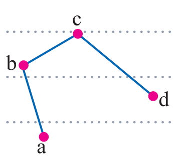
گراف و مدل سازی — مرتبه و اندازهٔ گراف — Graph & Modeling

اگر مجموعهٔ رأس‌های گراف سادهٔ G را با V(G) نشان دهیم آنگاه تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ گراف G می‌گوییم و با $p(G)$ یا به طور خلاصه با p نمایش می‌دهیم.



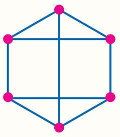
$V(G)=\{a,b,c,d,e\} \Rightarrow p(G)=|V(G)|=۵$

اگر مجموعهٔ یال‌های گراف سادهٔ G را با E(G) نشان دهیم آن‌گاه تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ یا به طور خلاصه با q نمایش می‌دهیم.



$E(G)=\{ab,bc,cd\} \Rightarrow q(G)=|E(G)|=۳$

Test در گراف شکل مقابل اگر مرتبه را با $p(G)$ و اندازه را با $q(G)$ نشان دهیم، حاصل $q(G)-p(G)$ کدام است؟



۱) ۳   ۲) ۳-

۳) ۲   ۴) ۲-

1 در این گراف ۶ رأس و ۹ یال وجود دارد بنابراین $p(G)=۶$, $q(G)=۹$ در نتیجه:

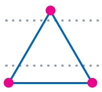
$q(G)-p(G)=۹-۶=۳$

Graph & Modeling — گراف و مدل‌سازی — رابطهٔ مرتبه و اندازهٔ گراف

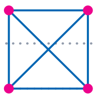
اگر مرتبهٔ یک گراف ساده p و اندازهٔ آن q باشد آنگاه رابطهٔ زیر بین p و q برقرار است:

$$۰\le q\le \frac{p(p-۱)}{۲}$$

از نامساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت در گرافی ساده با p رأس، تعداد یال‌ها حداکثر برابر با $\frac{p(p-۱)}{۲}=\binom{p}{۲}$ است.



یک گراف ۳ رأسی حداکثر ۳ یال را می‌تواند در خود جای دهد؛ یعنی ظرفیت ۳ رأس، حداکثر ۳ یال است.



یک گراف ۴ رأسی حداکثر $۶=\frac{۴\times۳}{۲}$ یال را می‌تواند در خود جای دهد؛ یعنی ظرفیت ۴ رأس، حداکثر ۶ یال است.

گراف ساده‌ای دارای ۸ یال است. این گراف حداقل چند رأس دارد؟

$۸\le\frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow p(p-۱)\ge۱۶\xrightarrow{\text{آزمون و خطا}}Min(p)=۵$

یادگیری اعداد زیر برای حل مسئله‌های مربوط به تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف، باعث افزایش سرعت عمل خواهد شد:

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	...
q(Max)	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶	...

اگر گرافی دارای ۳۰ یال باشد حداقل چند رأس دارد؟

با توجه به جدول فوق می‌گوییم ۳۰ از ۲۸ بیشتر است؛ یعنی در ۸ رأس نمی‌توان این ۳۰ یال را جای داد پس این گراف حداقل ۹ رأس دارد.

Test یک گراف ساده از مرتبهٔ p دارای ۲۵ یال است. حداقل مقدار p کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۷

۳) ۸   ۴) ۹

3

$۰\le q\le\frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow ۲۵\le\frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow p(p-۱)\ge۵۰\xrightarrow{\text{آزمون و خطا}}Min(p)=۸$

Graph & Modeling — گراف و مدل‌سازی — مجموع مرتبه و اندازه

اگر مجموع مرتبه و اندازهٔ یک گراف برابر k باشد بهتر است یک جدول صلیبی به شکل زیر رسم کنید و اعداد ممکن را درون آن بنویسید و سپس حالت‌های قابل قبول را با توجه به شرایط گراف ساده مشخص کنید. [اولین شرط همواره $۰\le q\le\binom{p}{۲}$ است.]

p	۱	۲	...
q	k-۱	k-۲	...

مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف ساده‌ای ۱۰ است. برای مرتبهٔ گراف چند جواب قابل قبول وجود دارد؟

از آن‌جا که $p+q=۱۰$ است یک جدول صلیبی به شکل زیر رسم می‌کنیم و با در نظر گرفتن رابطهٔ $۰ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲}$ درمی‌یابیم که برای مرتبهٔ گراف ۷ جواب قابل قبول وجود دارد.

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
q	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Test **در گراف G مجموع مرتبه و اندازه ۷ است. بیشترین مقدار اندازهٔ گراف کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

1 ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗

$Max(q)=۳$

گراف و مدل سازی — حاصل ضرب مرتبه و اندازه — Graph & Modeling

اگر حاصل ضرب مرتبه و اندازهٔ یک گراف ساده داده شود باید ابتدا عدد داده شده را به تمام حالت‌های ممکن به شکل حاصل ضرب دو عدد طبیعی بنویسیم، سپس یک جدول رسم کنیم و حالت‌های قابل قبول را با توجه به شرایط گراف ساده پیدا کنیم.

حاصل ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف ساده‌ای ۲۴ است، بیشترین مقدار ممکن برای اندازهٔ گراف کدام است؟

باید عدد ۲۴ را به تمام حالات ممکن بر حسب حاصل ضرب دو عدد طبیعی تجزیه کنیم و با توجه به شرط $۰ \le q \le \binom{p}{۲}$ متوجه می‌شویم که هیچ گراف ساده‌ای با ۱ رأس و ۲۴ یال یا ۲ رأس و ۱۲ یال یا ۳ رأس و ۸ یال وجود ندارد. پس برای تعداد رأس‌ها فقط اعداد ۲۴، ۱۲، ۸، ۶، ۴ قابل قبول هستند که در میان حالت‌های ممکن، گرافی با ۴ رأس و ۶ یال بیشترین اندازه را دارد.

p	۱	۲	۳	۴	۶	۸	۱۲	۲۴
q	۲۴	۱۲	۸	۶	۴	۳	۲	۱
	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓

Test **در گراف G حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه برابر ۴۵ است، حداکثر اندازهٔ گراف کدام است؟**

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

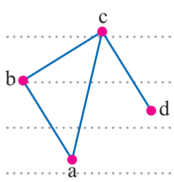
2

p	۴۵	۱۵	۹	۵	۳	۱
q	۱	۳	۵	۹	۱۵	۴۵
	✓	✓	✓	✓	✗	✗

$Max(q)=۹$

گراف و مدل سازی — درجهٔ رأس — Graph & Modeling

به تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند، درجهٔ رأس v گفته می‌شود و با نماد $deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهند.



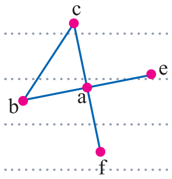
$deg(a)=۲$ $deg(b)=۲$ $deg(c)=۳$ $deg(d)=۱$

اگر G یک گراف ساده از مرتبهٔ p با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{v_۱, v_۲, \dots, v_p\}$ باشد آنگاه:

$$۰ \le deg(v_i) \le p-۱$$

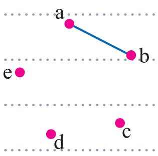
اگر درجهٔ یک رأس از گراف عددی فرد باشد، آن رأس را رأس فرد و اگر درجهٔ یک رأس از گراف عددی زوج باشد، آن رأس را رأس زوج می‌نامند.

در گراف مقابل رأس‌های a, b, c رأس‌های زوج و رأس‌های e و f رأس‌های فرد هستند؛ زیرا:



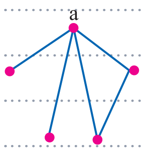
$\deg(a)=۴\ ,\ \deg(b)=۲\ ,\ \deg(c)=۲\ ,\ \deg(e)=۱\ ,\ \deg(f)=۱$

اگر درجهٔ یک رأس از گراف صفر باشد، یعنی هیچ یالی به آن وصل نباشد، آن رأس را رأس تنها یا ایزوله می‌نامند. [رأس‌های ایزوله جزء رأس‌های زوج هستند]



c, d, e ایزوله هستند.

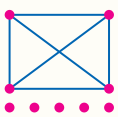
اگر در گرافی با p رأس، یک رأس به همهٔ رأس‌های دیگر متصل باشد، درجهٔ آن رأس برابر $p-۱$ است و به آن رأس، رأس فول (Full) گفته می‌شود.



$\begin{cases}\deg(a)=۴\\ p(G)=۵\end{cases}$ ⟸ رأس a فول است

Test **در یک گراف ساده با ۹ رأس و ۶ یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟**

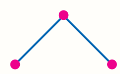
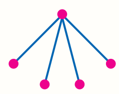
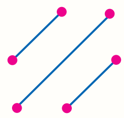
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



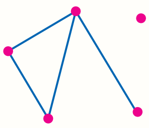
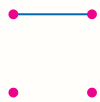
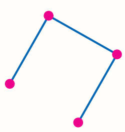
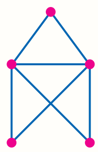
4 ۶ یال را می‌توان در ۴ رأس جای داد، بنابراین حداکثر ۵ رأس ایزوله وجود دارد.

گراف و مدل سازی — ماکسیمم و مینیمم درجهٔ رأس‌های گراف — Graph & Modeling

بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رأس‌های یک گراف را ماکزیمم درجهٔ گراف می‌نامیم و با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

			
$\Delta(G)=۲$	$\Delta(G)=۴$	$\Delta(G)=۰$	$\Delta(G)=۱$

کوچک‌ترین عدد در بین درجات رأس‌های یک گراف را مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم و با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

			
$\delta(G)=۰$	$\delta(G)=۰$	$\delta(G)=۱$	$\delta(G)=۲$

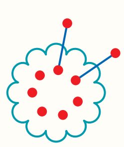
اگر G یک گراف ساده از مرتبهٔ p باشد آنگاه δ , Δ همواره در نامساوی مقابل صدق می‌کنند:

$$۰ \le \delta \le \deg(v_i) \le \Delta \le p-۱$$

Test **در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ ، دو رأس از درجهٔ $\delta=۱$ وجود دارد. اگر مرتبهٔ گراف ۹ باشد، گراف حداکثر چند یال دارد؟**

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

3 دو رأس را کنار می‌گذاریم و بقیه را پر از یال می‌کنیم، سپس دو رأس درجهٔ ۱ را اضافه می‌کنیم:



$$\text{Max}(q)=\binom{۷}{۲}+۱+۱=۲۳$$

ترکیبیات | تیم‌بندی | Combinations

اگر بخواهیم n شئ [n نفر] را در k جایگاه متمایز توزیع کنیم به‌طوری که تعداد اشیاء قرار گرفته در هر جایگاه مشخص باشد، ابتدا تعداد اشیاء یکی از جایگاه‌ها را از میان کل اشیاء موجود انتخاب می‌کنیم، سپس تعداد اشیاء جایگاه بعدی را از میان باقی‌ماندهٔ اشیاء انتخاب می‌کنیم و... برای درک بهتر به مثال زیر خوب دقت کنید:

به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در ۲ اتاق ۲ نفره و یک اتاق ۳ نفره واقع در یک هتل اسکان داد؟

ابتدا ۲ نفر را از میان ۷ نفر انتخاب می‌کنیم. بنابراین ۵ نفر می‌ماند که ۲ نفر بعدی را از میان ۵ نفر انتخاب می‌کنیم و ۳ نفر آخر را از میان ۳ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{3}=\frac{7!}{2!\cancel{5!}}\times\frac{\cancel{5!}}{2!\cancel{3!}}\times\frac{\cancel{3!}}{0!3!}=\frac{7!}{2!2!3!}=210$$

ترتیب انتخاب گروه‌ها هیچ اهمیتی ندارد و می‌توان هر گروه دلخواه را در ابتدا انتخاب کرد. مثلاً در همین مثال قبل می‌توان به‌صورت مقابل هم عمل کرد:

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=35\times6\times1=210$$

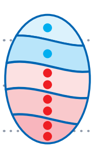
اگر بخواهیم n نفر را در k اتاق جای دهیم به‌طوری که n_1 نفر در اتاق اول، n_2 نفر در اتاق دوم و ... n_k نفر در اتاق kاُم جای بگیرند، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

می‌دانیم هریک از اتاق‌های یک هتل [یا اتاق‌های هر ساختمان دیگری در جهان] در یک مختصات جغرافیایی منحصربه‌فرد قرار گرفته و به یقین متفاوت از دیگری محسوب می‌شود. اما وقتی صحبت از تیم‌های بدون نام می‌شود، صرفاً مسألهٔ تقسیم‌بندی اشیاء یا افراد مطرح است بدون آن‌که این اشیاء یا افراد را بخواهیم در جایگاه مشخصی [همانند اتاق‌های یک هتل] قرار دهیم. به عبارت دیگر در این مدل مسئله‌ها می‌خواهیم اشیای متمایز را در مکان‌های یکسان توزیع کنیم. بنابراین اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم باشند، باید پس از انتخاب، جواب را بر جایگشت تعداد تیم‌های با تعداد اعضای یکسان تقسیم کنیم.

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به ۲ تیم ۱ نفره و ۳ تیم ۲ نفره تقسیم‌بندی کرد؟

ابتدا انتخاب‌ها را همانند جای دادن افراد در اتاق‌های هتل انجام می‌دهیم، سپس جواب به‌دست آمده را بر جایگشت شباهت‌ها تقسیم می‌کنیم:



$$\frac{\binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!\times3!}$$

اگر تیم‌ها اسم داشته باشند؛ مانند استقلال، رئال مادرید، پرسپولیس، تراکتور و... همانند اتاق‌های هتل، متمایز محسوب می‌شوند و نیازی به تقسیم بر جایگشت گروه‌های مشابه نیست.

به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در گروه‌های ۲ نفره به کشورهای سوئیس، آرژانتین و افغانستان فرستاد؟

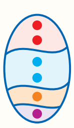
چون تیم‌ها اسم‌گذاری شده‌اند، پس از انتخاب اعضای تیم‌ها، نیاز به تقسیم بر جایگشت شباهت‌ها نیست. بنابراین ابتدا ۲ نفر را از میان ۶ نفر انتخاب می‌کنیم سپس از ۴ نفر باقی‌مانده ۲ نفر را انتخاب می‌کنیم و در انتها از ۲ نفر آخر ۲ نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{6!}{2!2!2!}=90$$

Test شش نفر به‌نام‌های F, E, D, C, B, A مفروض‌اند به چند طریق می‌توان آن‌ها را به دو تیم ۲ نفره و دو تیم ۱ نفره تقسیم کرد؟

۱) ۴۵
۲) ۶۰
۳) ۷۵
۴) ۵۵

1

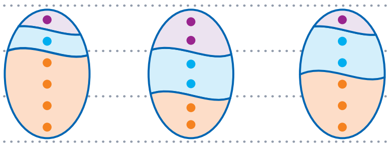


$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!\,2!}=\frac{15\times6\times2\times1}{2\times2}=45$$

پیداکردن **تعداد افرازهای** یک مجموعه، همانند پیداکردن تیم‌های بدون نام‌گذاری است. [یعنی اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم بود، پس از انتخاب، جواب را بر جایگشت شباهت‌ها تقسیم می‌کنیم.]

تعداد افرازهای سه بخشی یک مجموعهٔ ۶ عضوی کدام است؟

می‌دانیم ۶ را به ۳ صورت مختلف بر حسب مجموع ۳ عدد طبیعی می‌توان نوشت که عبارتند از: ۶=۱+۱+۴=۲+۲+۲=۱+۲+۳ بنابراین تعداد کل افرازهای ۳ عضوی یک مجموعهٔ ۶ عضوی برابر است با:

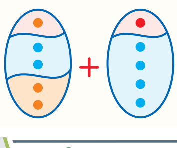


$$\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}}{۲!}+\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}+\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}=۱۵+۱۵+۶۰=۹۰$$

Test تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل فقط یک مجموعهٔ تک عضوی باشد، کدام است؟ (داخل - ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

4 دو حالت کلی برای چنین افرازی وجود دارد:



$$N=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}=۲۰$$

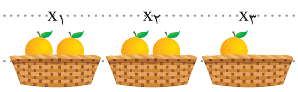
فرض کنیم می‌خواهیم تعداد راه‌های توزیع n **شیء کاملاً مشابه** در k **ظرف متمایز** [یا تعداد راه‌های ساختن یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل متفاوت] را پیدا کنیم، برای این کار فرض می‌کنیم $x_۱$ شیء در ظرف اول و $x_۲$ شیء در ظرف دوم و ... x_k شیء در ظرف k اُم [یا $x_۱$ شاخه گل از نوع اول و $x_۲$ شاخه گل از نوع دوم و ... x_k شاخه گل از نوع k اُم] باشد، آنگاه باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

این معادله به آمارهٔ اینشتین شهرت دارد و منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر مساوی صفر است.

به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

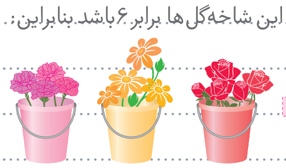
فرض کنیم $x_۱$ پرتقال در سبد اول، $x_۲$ پرتقال در سبد دوم و $x_۳$ پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود؛ [یکی از حالت‌ها در شکل زیر نمایش داده شده است.] بنابراین داریم:



$$x_۱+x_۲+x_۳=۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۵+۲}{۲}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۱\times۲}=۲۱$$

به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۶ شاخه از ۳ نوع گل مختلف ساخت؟

فرض کنیم $x_۱$ شاخه از نوع اول، $x_۲$ شاخه از نوع دوم و $x_۳$ شاخه از نوع سوم انتخاب شده باشد. در این صورت باید جمع این شاخه‌گل‌ها برابر ۶ باشد. بنابراین:



$$x_۱+x_۲+x_۳=۶ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۶+۲}{۲}=\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۱\times۲}=۲۸$$

به چند طریق می‌توان ۸ کبوتر را در سه لانهٔ متمایز قرار داد؟

فرض کنیم $x_۱$ کبوتر در لانهٔ اول و $x_۲$ کبوتر در لانهٔ دوم و $x_۳$ کبوتر در لانهٔ سوم قرار بگیرد، در این صورت خواهیم داشت:

$$x_۱+x_۲+x_۳=۸ \Rightarrow \text{تعداد راه‌ها}=\binom{۸+۲}{۲}=۴۵$$

میوه‌ها [سیب، پرتقال، گلابی، موز و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، گنجشک، گاو، گوسفند و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم، اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

Test تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=2$ برابر است، k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

4 باید $\binom{7+2}{2}=\binom{2+k-1}{k-1}$ باشد، در نتیجه: $\binom{k+1}{k-1}=\binom{9}{2}\Rightarrow\binom{k+1}{2}=\binom{9}{2}\Rightarrow k+1=9\Rightarrow k=8$

ترکیبیات — تعداد جواب‌های طبیعی — Combinations

می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت [جواب‌های طبیعی] معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ را به دست آوریم این مسئله معادل با این است که بخواهیم n پرتقال را بین k نفر توزیع کنیم به‌طوری که به هرکدام از افراد حداقل یک پرتقال برسد. برای ساده‌تر شدن حل معادله، ابتدا به هریک از افراد یک پرتقال می‌دهیم و $n-k$ پرتقال باقی‌مانده را طبق روال قبل بین افراد توزیع می‌کنیم.

به چند طریق می‌توان ۱۰ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد به‌طوری که به هریک از افراد حداقل یک پرتقال برسد؟

ابتدا به هریک از افراد یک پرتقال می‌دهیم [که اگر بعداً هیچ پرتقالی به آن‌ها نرسد هیچ مشکلی پیش نیاید]. حال ۶ پرتقال باقی‌مانده را بین افراد توزیع می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10-1-1-1-1=6\Rightarrow\binom{6+3}{3}=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}=84$$

به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل، یک دسته گل شامل ۷ شاخه ساخت، به‌طوری که از همهٔ گل‌ها در دسته گل استفاده شود؟

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم، حال باید یه دسته گل شامل ۴ شاخه گل بسازیم:

$$x_1+x_2+x_3=7\Rightarrow x_1+x_2+x_3=7-1-1-1=4\Rightarrow\binom{4+2}{2}=15$$

به طورکلی تعداد جواب‌های طبیعی [صحیح و مثبت] معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

Test به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به‌طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (داخل - ۹۸)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

3 باید تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_5=11$ را پیدا کنیم که برابر است با: $\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$

ترکیبیات — تعداد جواب‌هایی که مقدار چند متغیّر معلوم است — Combinations

اگر مقدار یک یا چند متغیر دقیقاً مشخص و معلوم باشد، به‌جای آن متغیرها عددهای داده شده را در معادله قرار می‌دهیم تا آن متغیرها از معادله حذف شوند. سپس تعداد جواب‌های معادلهٔ کوچک شده را پیدا می‌کنیم.

معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد که $x_3=2$ باشد؟

می‌توانیم فرض کنیم که می‌خواهیم ۶ پرتقال را بین ۴ نفر تقسیم کنیم به‌طوری که به نفر سوم، دقیقاً ۲ پرتقال برسد. برای یافتن تعداد حالت‌های ممکن، ابتدا در معادله به‌جای متغیر x_3، عدد ۲ را قرار می‌دهیم: $x_1+x_2+2+x_4=6\Rightarrow x_1+x_2+x_4=4$

حال چون جواب‌های صحیح و مثبت را می‌خواهیم، به هریک از افراد باقی‌مانده ۱ پرتقال می‌دهیم و جواب‌های معادلهٔ جدید را حساب می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_4=4-1-1-1=1 \Rightarrow N=\binom{1+2}{2}=\binom{3}{2}=3$$

Test تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_5=15$ به‌طوری که $\sqrt{x_1}=\frac{2}{x_2}=2$ باشد، کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲

3 ابتدا x_1, x_2 را به دست می‌آوریم سپس این اعداد را در معادله جایگذاری کرده و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x_1}=\frac{2}{x_2}=2\Rightarrow x_1=4,\ x_2=1\Rightarrow x_3+x_4+x_5=10\Rightarrow\binom{10+2}{2}=66$$

Rene Descartes
1596-1650

Logic & Set

Chapter 1

Rene Descartes

Lesson. 1	صفحه ۱ تا ۱۸ کتاب درسی	آشنایی با منطق ریاضی	درس اول

منطق ریاضی که به آن منطق نمادین نیز گفته می‌شود، دستور زبان ریاضی یا مطالعه در ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

هر جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را گزاره می‌نامند.

- مجموع هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است. — عدد $۲^{۱۰۱}-۱$ عددی اول است.

جملات امری، پرسشی، عاطفی، احساسی، تعجبی و دعایی گزاره محسوب نمی‌شوند.

- کتاب‌ها را روی میز بگذارید. [امری] — آیا ۹۹۷ عددی اول است؟ [پرسشی] — بیا و کشتی ما در شط شراب انداز. [احساسی]
- چه هوای دل‌انگیزی! [تعجبی] — ای کاش نرفته بودی! [دعایی] — تو را من چشم در راهم [عاطفی]

حدس‌های ریاضی که هنوز درستی آن‌ها اثبات یا رد نشده است، گزاره محسوب می‌شوند.

- هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. [حدس گلدباخ]
- بی‌نهایت عدد اول مانند p وجود دارد که $p+2$ هم اول باشد.

جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره محسوب نمی‌شوند.

- درس ریاضی از فیزیک آسان‌تر است. — عربی دشوارترین درس است.

Test **یکی از جملات زیر را به تصادف انتخاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد جملهٔ انتخاب شده یک گزاره باشد؟**

- **عدد $۲^{۵۲۳}-۱$ عددی اول است.** — **کتاب‌ها را روی میز بگذارید.** — **آیا ۲۰۳ عددی اول است؟**
- **چه صبح دل انگیزی!** — **کنکور امسال خیلی مفهومی بود.** — **کنکور سال ۹۹ در تیر ماه برگزار شد.**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

2 ابتدا بررسی می‌کنیم چه تعداد از جملات داده شده گزاره است:

- عدد $۲^{۵۲۳}-۱$ عددی اول است. [جملهٔ خبری با ارزش قابل تعیین] ✓ — کتاب‌ها را روی میز بگذارید. [جملهٔ امری] ✗
- آیا ۲۰۳ عددی اول است؟ [جملهٔ پرسشی] ✗ — چه صبح دل انگیزی! [جملهٔ تعجبی] ✗
- کنکور امسال خیلی مفهومی بود. [جملهٔ خبری با ارزش نامشخص] ✗ — کنکور سال ۹۹ در تیر ماه برگزار شد. [جملهٔ خبری با ارزش نادرست] ✓

بنابراین دو جمله از موارد داده شده گزاره محسوب می‌شود. در نتیجه احتمال آن‌که جملهٔ انتخاب شده گزاره باشد برابر است با $p=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

هر گزاره همواره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است. بنابراین اگر دو گزاره مانند p و q را در نظر بگیرید، آنگاه برای ارزش آن‌ها می‌توان یک جدول به شکل مقابل تشکیل داد که دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را با T و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد با F نشان می‌دهند.
[این دو حرف، حروف اول کلمات True و False هستند.]

به‌طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها دارای ۲^n سطر است.

Test اگر از میان تعدادی گزاره، یک گزاره را حذف کنیم از تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها ۳۲ سطر کم می‌شود، تعداد گزاره‌های اولیه کدام است؟

۱) ۳		۲) ۵		۳) ۴		۴) ۶

4 فرض کنیم تعداد گزاره‌ها در ابتدا برابر n باشد، در این صورت جدول ارزش آن‌ها دارای ۲^n سطر خواهد بود و در نتیجه:

$$۲^n - ۳۲ = ۲^{n-۱} \Rightarrow ۲^n - ۲^{n-۱} = ۳۲ \Rightarrow ۲^{n-۱} \times (۲-۱) = ۳۲ \Rightarrow ۲^{n-۱} = ۲^۵ \Rightarrow n-۱ = ۵ \Rightarrow n = ۶$$

جمله‌ای خبری که معنایی متضاد و مخالف با خود گزاره دارد را نقیض گزاره می‌نامند.

نقیض گزارهٔ «۵ عددی اول است» به صورت «۵ عددی اول نیست» خواهد بود.

ساده‌ترین روش برای ساختن نقیض یک گزاره، آوردن عبارت «این‌طور نیست که» قبل از گزارهٔ اصلی یا «منفی کردن فعل جملهٔ خبری» است.
نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نشان می‌دهند و به علامت «$\sim$» ناقض می‌گویند.

نقیض کلمات و نمادهای مهم و پرکاربرد را در جدول زیر ببینید:

نقیض کلمات	
زوج	فرد
گویا	گنگ
است	نیست

نقیض نمادها	
$\geq$	$<$
$\leq$	$>$
$\neq$	$=$

اگر دو گزارهٔ p و q دارای ارزش یکسانی باشند، آن را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

اگر p یک گزاره باشد، نقیضِ نقیض گزارهٔ p را به صورت $\sim(\sim p)$ نشان می‌دهند که همواره هم ارز منطقی با خود گزارهٔ p است، یعنی:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

معمولاً برای ساده کردن گزاره‌هایی که فعل‌های منفی در آن‌ها به کار رفته، می‌توان از نقیضِ نقیض استفاده کرد.

گزارهٔ «۲۴ عددی غیر زوج نیست» معادل است با:

۲۴ عددی زوج است $\equiv$ (۲۴ عددی غیر زوج است) $\sim \equiv$ ((۲۴ عددی غیر زوج نیست) $\sim$) $\sim$

Test **نقیض گزارهٔ «عدد a، عددی نامثبت نیست» کدام است؟**

۱) عدد a مثبت است. ۲) عدد a منفی است. ۳) عدد a نامنفی است. ۴) عدد a کوچکتر یا مساوی صفر است.

4 a کوچکتر یا مساوی صفر است ≡ a مثبت نیست ≡ a نامثبت است ≡ (a نامثبت نیست) ~

منطق و مجموعه | گزارهٔ مرکب | Logic & Set

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آید. [این ادات ربط ۴ تا هستند و عبارتند از «و، یا، اگر ... آنگاه، اگر و تنها اگر و ...»].

عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. — عدد ۲ فرد است یا عدد ۵ اول است.

اگر ۲ عددی زوج باشد آنگاه ۳ عددی فرد است. — یک مستطیل، مربع است اگر و تنها اگر اقطار آن عمود باشند.

Test **گزارهٔ .... یک گزارهٔ مرکب محسوب می‌شود.**

۱) عدد $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ گنگ است ۲) اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، آنگاه $2\sqrt{2}$ نیز گنگ است

۳) ۲ عددی اولِ زوج است ۴) از هر نقطه خارج یک صفحه بی‌شمار صفحه بر آن عمود می‌شود

2 «اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، آنگاه $2\sqrt{2}$ نیز گنگ است» که از ادات ربط «اگر ... آنگاه ...» در آن استفاده شده است.

منطق و مجموعه | ترکیب فصلی و ترکیب عطفی | Logic & Set

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب فصلی آن‌ها را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهند و «p یا q» خوانده می‌شود. در این ترکیب به نماد «∨» فاصل می‌گویند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزارهٔ مرکب، درست است.

گزارهٔ «۲ عددی فرد است یا ۵ عددی اول است.» گزارهٔ درستی است چون یکی از مؤلفه‌های آن ارزش درست دارد.

اگر چند گزاره با هم ترکیب فصلی شده باشند، در صورتی ارزش این گزارهٔ مرکب درست خواهد بود که لااقل (دست‌کم) یکی از گزاره‌ها درست باشد.

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی آن‌ها را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند و «p و q» خوانده می‌شود. در این ترکیب به نماد «∧» عاطف می‌گویند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزارهٔ مرکب نادرست است.

گزارهٔ «تهران پایتخت ایران است و عربستان یک کشور اروپایی است.» گزاره‌ای نادرست است چون یکی از مؤلفه‌های آن ارزش نادرست دارد.

اگر چندین گزاره با هم ترکیب عطفی شده باشند، ارزش این گزارهٔ مرکب در صورتی درست است که همهٔ گزاره‌ها درست باشند.

Test **کدام گزینه جملهٔ «اگر .... باشد، ارزش گزارهٔ $p \wedge (q \vee r)$ درست است» را به درستی تکمیل می‌کند؟**

۱) p درست ۲) q درست ۳) q و r درست ۴) p و q درست

4 اگر q درست باشد، ارزش ترکیب فصلی $q \vee r$ درست خواهد شد حال اگر p نیز درست باشد، ارزش کل گزارهٔ $p \wedge (q \vee r)$ درست خواهد بود. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

در بعضی از مسائل احتمال که به احتمال شرطی مشهور است، جمله‌ای گفته می‌شود که قسمتی از فضای نمونه را افشا می‌کند. در این موارد قسمت‌هایی از فضای نمونه را که پوچ شده است از فضای نمونه کنار می‌گذاریم و فضای نمونه را کوچک می‌کنیم و احتمال خواسته شده را روی این فضای نمونهٔ کوچک‌تر به دست می‌آوریم. بنابراین ساختار کلی احتمال‌های شرطی به صورت زیر است:

آزمایشی صورت گرفته است. ← پیشامد B رُخ داده است ← احتمال رخداد A چقدر است؟

بنابراین برای حل این مدل از مسائل احتمال، می‌توانیم به‌ترتیب زیر عمل کنیم:

1. فضای نمونهٔ اصلی را در نظر می‌گیریم
2. با توجه به شرط یا اطلاعی که از نتیجهٔ آزمایش به ما داده شده، فضای نمونهٔ جدیدی (پیشامد B) ایجاد می‌کنیم. به این فضای نمونهٔ جدید، «فضای نمونهٔ محدودشده» یا «فضای نمونهٔ کاهش یافته» می‌گویند.
3. احتمال پیشامد مطلوب (پیشامد A) را در فضای نمونهٔ جدید حساب می‌کنیم

ساختار کلی جملاتی که در احتمال‌های شرطی به کار می‌روند

۱ اگر ------- احتمال آن‌که ------- ؟	۵ مشاهده شده ------- احتمال آن‌که ------- ؟
۲ می‌دانیم ------- احتمال آن‌که ------- ؟	۶ دیدیم ------- احتمال آن‌که ------- ؟
۳ مشروط بر آن‌که ------- احتمال آن‌که ------- ؟	۷ در صورتی که ------- احتمال آن‌که ------- ؟
۴ ملاحظه شده است که ------- احتمال آن‌که ------- ؟	۸ به شرط آن‌که ------- احتمال آن‌که ------- ؟

در برخی از مسائل در احتمال‌های شرطی ممکن است طراح از به کار بردن واژه‌هایی مانند «اگر، می‌دانیم، در صورتی که بدانیم، مشروط بر آن‌که و ...» خودداری کند و آن‌ها را در مفهوم مسأله پنهان کند؛ یعنی خیلی ریلکس و عادی خبری را اعلام می‌کند که به وسیلهٔ آن قسمتی از فضای نمونه افشا می‌شود، سپس بلافاصله بعد از آن سؤالی مطرح می‌کند. این مسئله‌ها کمی فنی‌تر و دقیق‌تر از حالت قبل هستند و باید خوب به جمله‌بندی این‌گونه مسائل دقت کنید.

تاسی را پرتاب کردیم مضرب ۳ نیامده است احتمال آمدن عدد اول کدام است؟

خبری که ریلکس و عادی اعلام شد | احتمال خواسته‌شده

$S=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow S_{new}=\{1,2,4,5\} \Rightarrow A=\{2,5\} \Rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Test **از میان اعداد طبیعی نابیشتر از ۲۵ عددی به تصادف انتخاب کرده‌ایم. اگر این عدد مضرب ۳ باشد احتمال دو رقمی بودن آن چقدر است؟**

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

2 فضای نمونه در حالت اولیه به صورت $S=\{1,2,...,25\}$ است. حال چون می‌دانیم عدد انتخابی از این فضای نمونه مضرب ۳ است، پس فضای نمونهٔ جدید برابر $S=\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$ خواهد بود. در این فضای نمونه پیشامد این‌که عدد انتخابی دو رقمی باشد، $\{12,15,18,21,24\}$ است:

$P(A)=\frac{5}{8}$

پیشامدهای شرطی در پرتاب دو تاس، انواع متفاوتی دارد و حل مسائل آن از یک الگوی مشخص پیروی نمی‌کند و از استراتژی‌های مختلف برای حل مسائل آن استفاده می‌شود، بعضی از این استراتژی‌ها به شرح زیر است:

1 اولین و متداول‌ترین نوع پیشامد شرطی در پرتاب دو تاس حالتی است که مجموع یا تفاضل اعداد روشده را افشا می‌کند. در این حالت بهترین کار این است که حالاتی را که مسأله پوچ کرده کنار بگذاریم و باقی را به عنوان فضای نمونهٔ جدید به طور کامل بنویسیم و پیشامد خواسته شده را از درون آن پیدا کنیم.

در پرتاب دو تاس اگر «مجموع اعداد روشده ۷ باشد» احتمال آن‌که ...

$S_{new}=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

2 اگر در احتمال شرطی مربوط به پرتاب دو تاس، فضای نمونهٔ جدید را با اصطلاحاتی نظیر «هر دو تاس» یا «هیچ‌کدام از تاس‌ها» یا «تاس اول» یا «تاس دوم» معرفی کرد، در محاسبهٔ تعداد عضوهای فضای نمونهٔ جدید می‌توانیم از اصل ضرب استفاده کنیم.

در پرتاب دو تاس با هم هر دو تاس فرد آمده‌اند، احتمال آن‌که ...

$n(S_{new})=\underset{\text{فرد}}{۳}\times\underset{\text{فرد}}{۳}$

3 در بعضی از مسائل احتمال شرطی مربوط به پرتاب دو تاس، پیشامدی که می‌دانیم رخ داده است، تعداد حالات بسیار زیادی دارد و شمارش تعداد حالات آن به طور مستقیم وقت‌گیر است، در این حالت بهتر است از اصل متمم [اصل تفریق] استفاده کنیم و به جای آن، تعداد حالاتی را پیدا کنیم که مسأله آن را نمی‌خواهد، سپس آن تعداد را از ۳۶ حالت ممکن برای دو تاس کنار بگذاریم تا تعداد عضوهای فضای نمونهٔ جدید به دست آید.

در پرتاب دو تاس با هم اگر مجموع اعداد ظاهر شده ۵ نباشد، احتمال آن‌که ...

مجموع ۵ $=\{(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}\Rightarrow n(S_{new})=۳۶-۴=۳۲$

4 در بعضی تست‌های احتمال شرطی مربوط به پرتاب دو تاس ممکن است همزمان هم از اصل ضرب و هم از اصل تفریق استفاده کرد، حتی ممکن است فضای نمونهٔ جدید را با یک اصل و پیشامد خواسته شده را توسط اصلی دیگر پیدا کنیم.

اگر مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس ۶ نباشد، احتمال آن‌که هر دو عدد روشده اول باشند، چقدر است؟

در این مسئله برای یافتن تعداد عضوهای فضای نمونهٔ جدید بهتر است از اصل تفریق به صورت زیر استفاده کنیم:

پیشامد مجموع ۶ $=\{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}\Rightarrow n(S_{new})=۳۶-۵=۳۱$

حالا باید تعداد عضوهای پیشامد مطلوب در فضای نمونهٔ جدید را پیدا کنیم. اعداد اول روی یک تاس، اعداد ۲، ۳، ۵ هستند. پس تعداد زوج‌مرتب‌هایی که مختص اول و دوم آن‌ها اعدادی اول باشد برابر با $۳\times۳=۹$ است. اما باید دقت کنید که زوج مرتب $(۳,۳)$ در فضای نمونه‌ی جدید وجود ندارد. در نتیجه احتمال مطلوب برابر است با: $P=\frac{۸}{۳۱}$

احتمال شرطی در پرتاب سه تاس نیز چیزی شبیه دو تاس است و ممکن است از همهٔ ترفندها و تکنیک‌های گفته شده برای دو تاس در محاسبهٔ تعداد اعضای فضای نمونه یا پیشامد استفاده شود.

Test **در پرتاب دو تاس با هم اگر حداقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، احتمال آن‌که مجموع دو تاس زوج باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{۴}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

2

$$\begin{cases}S=\{(۲,\boxed{۱,۳,۴,۵,۶}),(۲,۲),(\boxed{۱,۳,۴,۵,۶},۲)\}\\ A=\{(۲,۴),(۲,۶),(۲,۲),(۶,۲),(۴,۲)\}\end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۱}$$


David Hilbert
1862-1943

Descriptive Statistics

Chapter 3


David Hilbert

آمار توصیفی — اصطلاحات اولیه

مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، آمار نامیده می‌شود. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است، به عبارت دیگر مراحل علم آمار به‌صورت زیر است:

جمع‌آوری اعداد و ارقام ← سازماندهی و نمایش ← تحلیل و تفسیر داده‌ها ← نتیجه‌گیری قضاوت پیش‌بینی

اصطلاحات مهم علم آمار:

1. واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فرد که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند، داده نام دارد.
2. هر ویژگی از اشیاء یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند، متغیّر نامیده می‌شود.
3. عددی که به آن ویژگیِ یک عضو از جامعه، نسبت داده می‌شود مقدار متغیّر یا به اصطلاح مشاهده می‌گویند.
4. به مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آن‌ها داده‌ها را گردآوری کنیم، جامعهٔ آماری گفته می‌شود و به تعداد اعضای یک جامعهٔ آماری، اندازهٔ جامعه می‌گوییم.
5. به هر زیرمجموعه از جامعهٔ آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، نمونه می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، اندازهٔ نمونه گفته می‌شود.

می‌خواهیم وزن افراد یک کلاس ۲۰ نفره را بررسی کنیم. برای این منظور ۵ نفر از آن‌ها را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. در این حالت «وزن دانش‌آموزان» یک متغیر تصادفی است زیرا از یک عضو به عضو دیگر می‌تواند تغییر کند. عدد وزن هر دانش‌آموز مقدار متغیر نام دارد. همچنین ۲۰ دانش‌آموز جامعهٔ آماری و اندازهٔ جامعه ۲۰ و ۵ دانش‌آموز یک نمونه است و اندازهٔ نمونه ۵ است.

Test **می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک استخر ماهی شامل ۲۰۰۰ ماهی را به منظور فروش تخمین بزنیم، نخست از قسمت کم عمق و در مرحلهٔ بعد از قسمت عمیق ۵ ماهی صید می‌کنیم و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم، چه تعداد از عبارات زیر درست است؟**

الف) وزن ماهی‌های استخر یک متغیّر تصادفی است.

ب) جامعهٔ آماری عبارت است از ۱۰ ماهی انتخاب شده

ج) اندازهٔ جامعه برابر ۲۰۰۰ است.

د) اندازهٔ نمونه برابر ۵ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

2 موارد الف و ج درست است و امّا علت نادرستی سایر عبارات:

ب) جامعهٔ آماری عبارت است از کل ماهی‌های استخر

د) اندازهٔ نمونه برابر ۱۰ است چون ۵ ماهی از قسمت کم‌عمق و ماهی‌های دیگر نیز از قسمت عمیق [و در مجموع ۱۰ ماهی] انتخاب شده است.

متغیّرها را به دو دستهٔ کمّی و کیفی و هرکدام از آن‌ها را نیز به دو زیرگروه به صورت نمودار زیر می‌توان تقسیم کرد [برای حل تست‌های مربوط به انواع متغیّر، اول به این فکر می‌کنیم که آیا قابل اندازه‌گیری است یا نه؟ تا نوع کیفی یا کمّی معلوم شود. سپس به سراغ زیرگروه‌های آن دسته می‌رویم.]

- انواع متغیر
  - کیفی: غیرقابل اندازه‌گیری هستند.
    - ترتیبی: دارای نوعی ترتیب طبیعی است.
    - اسمی: دارای هیچ ترتیب طبیعی نیست.
  - کمّی: قابل اندازه‌گیری هستند.
    - پیوسته: اگر دو مقدار a و b را بپذیرد هر عددی بین a و b را می‌پذیرد.
    - گسسته: اگر دو مقدار a و b را بپذیرد بعضی از اعداد بین a و b را نمی‌پذیرد.

- وزن، قد، قطر تنهٔ درختان، حجم آب، دما، میزان آلودگی هوا، فشار هوا، زمان، سن و ... نمونه‌هایی از متغیّر کمّی پیوسته هستند.
- تعداد طبقات ساختمان، درصد یک درس در کنکور، تعداد مسافران و ... نمونه‌هایی از متغیّر کمّی گسسته هستند.
- گروه خونی، رنگ چشم، ملیّت، جنسیت، نوع آلودگی هوا، نژاد و ... نمونه‌هایی از متغیّر کیفی اسمی هستند.
- مقام‌های یک ورزشکار، میزان لذت از آشپزی، مراحل رشد، مراحل تحصیل، درجهٔ افسران و ... نمونه‌هایی از متغیّر کیفی ترتیبی هستند.

در صورتی که اعداد نسبت داده شده به متغیر قابل معدل‌گیری باشند، می‌توان گفت آن متغیر کمّی است. اما اگر نتوان از اعداد مُعدل گرفت آن متغیر کیفی است. مانند مقام‌های ورزشکاران، رتبهٔ دانش‌آموزان و ... در ضمن متغیّرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است کیفی هستند. مانند انواع گل‌های باغ، انواع حساب‌های بانکی، انواع مدارس و ...

اگر کلمهٔ «میزان» در کنار کلماتی نظیر رضایت، سختی، لذت، علاقه‌مندی و ... بیاید، یک مفهوم کیفی دارد که می‌تواند کم، متوسط، زیاد یا خیلی زیاد و ... باشد، یعنی کیفی ترتیبی است.

اگر کلمهٔ «میزان» در کنار کلماتی نظیر بارش، مالیات، درآمد فروش و ... بیاید دقیقاً مفهوم عددی دارد و یک متغیر کمّی پیوسته است.

اگر کلمهٔ «میزان» در کنار آلودگی هوا بیاید، در دنیای امروز مفهوم کمّی دارد. چون امروزه ما می‌توانیم میزان آلودگی را اندازه بگیریم. اما شاید در گذشته که وسایل اندازه‌گیری وجود نداشت، می‌گفتیم میزان آلودگی بالاست یا پایین است، اما امروزه برحسب عدد بیان می‌شود.

میزان چه چیزهایی کمّی و میزان چه چیزهایی کیفی است؟

کیفی ترتیبی	کمّی پیوسته
میزان رضایت، سختی، لذت، علاقه‌مندی و ...	میزان بارش، مالیات، درآمد فروش، آلودگی هوا و ...

Test نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه فرق دارد؟

۱) زمان مکالمات تلفنی
۲) خسارت مالی تصادف
۳) رنگ شلوار کارمندان اداره
۴) مقاومت ترانزیستور

3 گزینه‌های ۱، ۲، ۴ متغیرهای کمّی پیوسته هستند، ولی گزینهٔ ۳ متغیر کیفی اسمی است.

اگر برای بررسی یک متغیر خاص از یک جامعهٔ آماری، داده‌هایی گردآوری شده باشد، آنگاه تعداد کل داده‌ها را با n نمایش می‌دهیم. در این صورت سه نوع فراوانی برای داده‌ها تعریف می‌شود:

1. به تعداد دفعاتی که هر داده تکرار (مشاهده) می‌شود، فراوانی آن داده می‌گوییم و آن را با f نشان می‌دهیم.

در یک کلاس ۲۰ نفره، رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی، ۵ نفر قهوه‌ای، ۳ نفر سبز و ۲ نفر آبی باشد، در این صورت فراوانی رنگ چشم مشکی $f_1=10$ است.

2. با تقسیم فراوانی هر داده یعنی f به تعداد کل داده‌ها یعنی n، فراوانی نسبی به دست می‌آید. فراوانی نسبی را معمولاً با F نشان می‌دهند که همواره عددی در بازهٔ $[0,1]$ است.

$$F=\frac{f}{n}$$

در یک کلاس با ۲۰ دانش‌آموز اگر رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی باشد، فراوانی نسبی کسانی که چشم مشکی دارند برابر $F=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ است.

3. اگر فراوانی نسبی داده‌ها را در ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد داده‌ها به‌دست می‌آید. درصد داده‌ها را معمولاً با P نشان می‌دهند و همواره داریم:

$$P=F\times 100=\frac{f}{n}\times 100$$

رابطهٔ انواع فراوانی		
رابطهٔ درصد داده‌ها با هم	رابطهٔ فراوانی‌های نسبی با هم	رابطهٔ فراوانی‌ها با هم
$\sum P_i=P_1+P_2+\cdots+P_k=100$	$\sum F_i=F_1+F_2+\cdots+F_k=1$	$\sum f_i=f_1+f_2+\cdots+f_k=n$

$$P \xrightarrow{\div 100} F \xrightarrow{\times n} f$$

$$f \xrightarrow{\div n} F \xrightarrow{\times 100} P$$

Test اگر فراوانی داده‌ای ۳۶ و درصد فراوانی این داده ۳۰ باشد، تعداد کل داده‌ها کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

3 می‌دانیم درصد فراوانی از رابطهٔ $P_i=\frac{f_i}{n}\times 100$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$30=\frac{36}{n}\times 100 \Rightarrow n=\frac{36\times 100}{30}=120$$

برای همهٔ انواع متغیّرها [کمّی و کیفی] می‌توان جدول فراوانی به شکل‌های زیر رسم کرد:

جدول فراوانی

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k
f_i	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_k

$\sum f_i=n$

جدول فراوانی نسبی

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k
F_i	F_1	F_2	F_3	$\cdots$	F_k

$\sum F_i=1$

جدول درصد داده‌ها

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k
P_i	P_1	P_2	P_3	$\cdots$	P_k

$\sum P_i=100$

نمونه‌گیری احتمالی، نوعی نمونه‌گیری است که در آن همهٔ واحدهای آماری شانس **معلوم** و **برابر** برای انتخاب شدن در نمونه دارند و از روش تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده می‌شود.

Test **نمونه‌گیری .... ، یک نوع نمونه‌گیری غیر احتمالی است و نمونه‌گیری .... ، یک نوع نمونه‌گیری احتمالی است.**

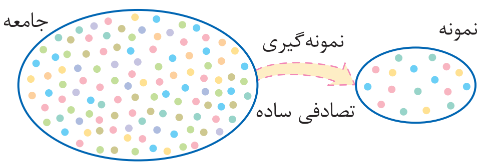
۱) خوشه‌ای ـ طبقه‌ای
۲) سهمیه‌ای ـ سیستماتیک
۳) طبقه‌ای ـ در دسترس
۴) گلوله برفی ـ قضاوتی

2 نمونه‌گیری سهمیه‌ای یک نوع نمونه‌گیری غیر احتمالی است و نمونه‌گیری سیستماتیک یک نوع نمونه‌گیری احتمالی است.

آمار استنباطی — نمونه‌گیری تصادفی ساده — Inferential Statistics

نمونه‌گیری تصادفی ساده نوعی روش نمونه‌گیری است که در آن همهٔ واحدهای آماری شانسی **برابر** برای انتخاب شدن در نمونه دارند و روش کار به این صورت است که همهٔ افراد جامعه را فهرست می‌کنیم و سپس طی یک فرایند تصادفی چند نفر از اعضای فهرست را انتخاب می‌کنیم.

1 در نمونه‌گیری تصادفی ساده باید همهٔ واحدهای آماری فهرست شده باشند در ضمن روش نمونه‌گیری تصادفی ساده در مواردی که اندازهٔ جامعه بزرگ باشد و دسترسی به فهرست اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر باشد، روش مناسبی نیست.



2 اگر یک جامعهٔ آماری از طبقات متمایز تشکیل شده باشد، امکان دارد در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده از بعضی طبقات، واحد آماری وجود نداشته باشد. لذا در این حالت نمونه‌گیری تصادفی ساده روش خیلی مناسبی نیست.

احتمال انتخاب هر کدام از واحدهای آماری در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده برابر است با:

$$P=\frac{n}{N}=\frac{\text{تعداد اعضای نمونه}}{\text{تعداد اعضای جامعه}}$$

Test **در مواردی که اندازهٔ جامعه بزرگ باشد [تعداد واحدهای آماری زیاد باشد]، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، .... و اگر دسترسی به فهرست اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر باشد، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، ....**

۱) روش مناسبی نیست ـ روش مناسبی است.
۲) روش مناسبی است ـ روش مناسبی نیست
۳) روش مناسبی است ـ روش مناسبی است.
۴) روش مناسبی نیست ـ روش مناسبی نیست.

4 در مواردی که اندازهٔ جامعه بزرگ باشد [تعداد واحدهای آماری زیاد باشد]، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، روش مناسبی نیست و همچنین اگر دسترسی به فهرست اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر باشد، روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، روش مناسبی نیست.

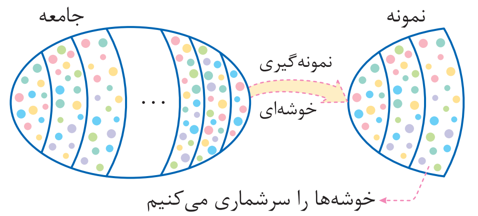
آمار استنباطی — نمونه‌گیری خوشه‌ای — Inferential Statistics

اگر جامعهٔ آماری قابل فهرست کردن نباشد، جامعه را به دسته‌ها یا زیرمجموعه‌هایی تقسیم‌بندی می‌کنیم [تعداد اعضای زیرمجموعه‌ها لزوماً برابر نیست.] و هر زیرمجموعه را یک **خوشه** می‌نامیم. حال چند خوشه را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم و در هر یک **سرشماری** انجام می‌دهیم [یعنی همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب‌شده را به‌عنوان نمونه در نظر می‌گیریم]. این روش نمونه‌گیری را **نمونه‌گیری خوشه‌ای** می‌نامند.

برای محاسبهٔ میانگین نمرات حسابان دانش‌آموزان شهر تهران، می‌توان چند مدرسه را انتخاب کرد و دانش‌آموزان هر مدرسه را سرشماری کرد [یعنی نمرهٔ حسابان همهٔ دانش‌آموزان درون مدرسه را بررسی کرد]. در این حالت هر مدرسه یک خوشه محسوب می‌شود.

1 در نمونه‌گیری خوشه‌ای، واحدهای آماری درون هر خوشه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند.

دانش‌آموزان درون مدرسه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند که باعث کاهش هزینه در نمونه‌گیری خواهد شد.



2 دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای از دقت در نمونه‌گیری تصادفی ساده، کمتر است.

3 هر چقدر ویژگی‌های مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشند، می‌توان گفت خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردارند و دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر خواهد شد.

در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر است و چون در همهٔ خوشه‌های انتخاب‌شده سرشماری انجام می‌شود، احتمال انتخاب هر یک از واحدهای آماری نیز با هم برابر بوده و برابر است با:

$$P=\frac{n}{N}=\frac{\text{تعداد خوشه‌های انتخاب شده}}{\text{تعداد کل خوشه‌ها}}$$

Test **در یک منطقهٔ شهری ۲۰ مدرسه وجود دارد که هرکدام بین ۱۰۰ تا ۳۵۰ دانش‌آموز دارند، اگر ۳ مدرسه را طبق نمونه‌گیری خوشه‌ای انتخاب کنیم، احتمال انتخاب هرکدام از دانش‌آموزان حاضر در این نمونه کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$　۲) $\frac{۱}{۲۰}$　۳) $\frac{۳}{۲۰}$　۴) $\frac{۲۰}{۳۵۰}$

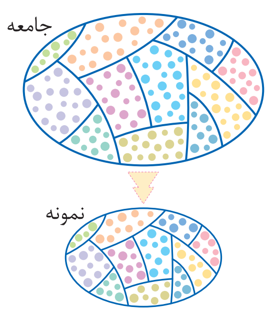
3 چون نوع نمونه‌گیری خوشه‌ای است احتمال انتخاب هر واحد آماری برابر است با:

$$P=\frac{n}{N}=\frac{۳}{۲۰}$$

آمار استنباطی — نمونه‌گیری طبقه‌ای — Inferential Statistics

در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعهٔ آماری را به تعدادی گروه طبقه‌بندی می‌کنند. واحدهای آماری در هر طبقه نسبت به موضوع مورد بررسی باید پراکندگی کمی داشته باشند، ولی اختلاف بین طبقات باید زیاد باشد [مثلاً اگر موضوع مورد بررسی سن ازدواج است، بهتر است مردان را یک طبقه و زنان را یک طبقه دیگر در نظر گرفت]. سپس از هرطبقه متناسب با جمعیت آن، نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام می‌دهیم، در این صورت نمونه‌ای خواهیم داشت که مطمئن هستیم زیرگروه‌ها با همان نسبتی که در جامعه وجود دارند به عنوان نمایندهٔ جامعهٔ آماری در نمونه حضور دارند. این روش با افزایش هزینه همراه است ولی دقت بیشتری دارد.

1 از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای زمانی استفاده می‌کنیم که جامعهٔ آماری دارای ساخت ناهمگن و غیرهمگن باشد. یعنی جامعه از زیرگروه‌هایی تشکیل شده که از نظر مشخصه و درصد تشکیل دهندهٔ جامعه، متفاوت‌اند.



2 در نمونه‌گیری طبقه‌ای، واحدهای آماری درون طبقات باید شبیه هم و همگن باشند. در ضمن هر طبقه با طبقهٔ دیگر می‌بایست از نظر مشخصه‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد، متفاوت باشد.

سن ازدواج در مردان و زنان یا قد افراد جامعه در مردان و زنان متفاوت است که باعث ناهمگن شدن ساخت جامعه می‌شود و باید هرکدام از این زیرگروه‌ها را یک طبقه فرض کرد.

اگر بحث دربارهٔ درصد اشتغال در افراد جامعه است بهتر است مردان و زنان هرکدام در یک طبقهٔ جداگانه قرار گیرند، چون میزان درصد اشتغال زنان شبیه هم و مردان هم شبیه هم است ولی زنان با مردان متفاوت است.

در نمونه‌گیری طبقه‌ای، اگر بخواهیم یک نمونهٔ n تایی از یک جامعهٔ N نفری انتخاب کنیم و تعداد افراد در طبقه‌ها $f_1, f_2, \dots, f_k$ باشد و ما n_1 تا از طبقهٔ اول، n_2 تا از طبقهٔ دوم، ... و n_k تا از طبقهٔ ... اُم انتخاب کنیم، آنگاه داریم: $(n = \Sigma n_i \; , \; N = \Sigma f_i)$

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \dots = \frac{n_k}{f_k} = \frac{n}{N}$$

$$\text{سهم طبقهٔ i اُم} = n_i = \frac{f_i}{\Sigma f_i} \times n$$

از آنجاکه در نمونه‌گیری طبقه‌ای از هر طبقه متناسب با جمعیت آن واحد آماری انتخاب می‌شود به راحتی می‌توان ثابت کرد احتمال انتخاب همهٔ واحدهای آماری، با هم برابر است و همانند نمونه‌گیری تصادفی ساده این احتمال برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{اندازهٔ نمونه}}{\text{اندازهٔ جامعه}}$$

Test **در یک شرکت ۵۰ نفر کارگر، ۴۰ نفر کارمند و ۱۰ نفر مدیر وجود دارد. می‌خواهیم یک نمونهٔ ۲۰ نفره بر اساس نمونه‌گیری طبقه‌ای برای محاسبهٔ میانگین حقوق دریافتی انتخاب کنیم. احتمال انتخاب هرکدام از مدیران در نمونه چقدر است؟**

۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) نامشخص

3 براساس نمونه‌گیری طبقه‌ای سهم مدیران در نمونهٔ انتخابی برابر است با:

$$n_i = \frac{n}{N} \times f_i = \frac{20}{100} \times 10 = 2$$

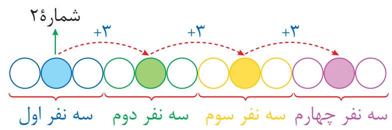
یعنی از ۱۰ نفر مدیر شرکت ۲ نفر باید انتخاب شوند، بنابراین احتمال انتخاب هرکدام از مدیران برابر است با:

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

آمار استنباطی — نمونه‌گیری سامان‌مند — Inferential Statistics

نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای که در آن اندازهٔ طبقات با هم برابر است را نمونه‌گیری سیستماتیک (سامان‌مند) می‌نامند. از نمونه‌گیری سیستماتیک وقتی استفاده می‌کنیم که تمام اعضای جامعهٔ آماری به‌طور تصادفی فهرست شده باشند. مانند افرادی که به یک برنامهٔ تلویزیونی پیامک فرستادند یا افرادی که به طور تصادفی در سالن سینما نشسته‌اند یک نوع فهرست شدن شماره‌دار به طور تصادفی برای آن‌ها انجام شده است یا افراد منتظر در باجهٔ بانک و .... در این روش نمونه‌گیری، فقط از طبقهٔ اول یک واحد آماری به تصادف انتخاب می‌کنیم، سپس با همان رویه این کار را در طبقات دیگر انجام می‌دهیم.

مراحل انجام روش نمونه‌گیری سیستماتیک [سامان‌مند] به صورت زیر است:

مراحل روش نمونه‌گیری سیستماتیک	می‌خواهیم از بین ۱۲ نفر یک نمونه‌گیری سیستماتیک انجام دهیم و یک نمونهٔ ۴ نفره انتخاب کنیم، روش کار به‌صورت زیر است:
1 ابتدا فاصلهٔ نمونه‌گیری را به‌دست می‌آوریم که تعداد افراد هر طبقه را مشخص می‌کند. $d = \left[\frac{N}{n}\right] = \left[\frac{\text{اندازهٔ جامعه}}{\text{اندازهٔ نمونه}}\right]$	$d = \left[\frac{12}{4}\right] = 3$ فاصله نمونه‌گیری
2 عددی صحیح مانند a_1 به تصادف در بازهٔ $[1, d]$ انتخاب می‌کنیم (اولین عضو نمونه‌گیری)	یک نفر به‌طور تصادفی از ۳ نفر اول انتخاب می‌کنیم، مثلاً نفر شمارهٔ ۲
3 شمارهٔ نفر i اُم طبق جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به صورت زیر به‌دست می‌آید: $a_i = a_1 + (i-1)d$ یعنی شمارهٔ نفرات انتخاب شده در نمونه‌گیری سیستماتیک به‌صورت زیر است: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$	نمودار شماتیک و شمارهٔ نفرات انتخاب شده به‌صورت زیر است: 

در نمونه‌گیری سیستماتیک هم همانند نمونه‌گیری تصادفی ساده احتمال انتخاب واحدهای آماری با هم برابر است و برابر است با:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\text{اندازهٔ نمونه}}{\text{اندازهٔ جامعه}}$$

Test کدام‌یک از متغیرهای زیر کیفی محسوب نمی‌شود؟

۱) نوع آلاینده‌های هوا ۲) مقام‌های یک ورزشکار

۳) سن افراد حاضر در ورزشگاه ۴) نژاد سگ‌های پلیس

3 سن افراد حاضر در ورزشگاه یک متغیر کمّی است، چون مقادیر عددی می‌گیرد که قابل مُعدل‌گیری هم هست.

آمار استنباطی — پارامتر و آماره — Inferential Statistics

مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کنندهٔ جنبهٔ خاصی از جامعه باشد، پارامتر جامعه نامیده می‌شود. پارامتر جامعه تنها در صورتی قابل محاسبه است که داده‌های کل جامعه را در اختیار داشته باشیم. اما معمولاً این‌طور نیست و ما داده‌های کل جامعه را در اختیار نداریم. بنابراین علیرغم این‌که پارامتر جامعه دارای مقداری ثابت است ولی این مقدار ثابت، برای ما مجهول است و ما قصد برآورد و تخمین آن را داریم.

مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کنندهٔ جنبهٔ خاصی از نمونه است و از داده‌های نمونه به‌دست می‌آید آمارهٔ نمونه یا آماره نامیده می‌شود. آمارهٔ نمونه از یک نمونه به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کند در حالی‌که پارامترهای جامعه همیشه ثابت هستند. بنابراین از آمارهٔ نمونه برای تخمین پارامتر جامعه استفاده می‌شود.

اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های در حال برداشت است:

- در این بررسی، هندوانه‌ها واحدهای آماری هستند.
- اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را بررسی کنند، وزن یک متغیّر است.
- اگر وزن تک‌تک هندوانه‌ها را بررسی کنیم، سرشماری انجام داده‌ایم.
- متوسط وزن همهٔ هندوانه‌ها پارامتر جامعه است.
- اگر ۵۰ هندوانه را انتخاب کنیم و میانگین وزن آن‌ها را به‌دست آوریم، عدد به‌دست آمده را آمارهٔ نمونه می‌نامند.
- اگر پژوهشگران بخواهند مزهٔ هندوانه‌ها را به «متوسط - خوب - عالی» دسته‌بندی کنند، متغیر مورد بررسی مزه است که یک متغیّر کیفی است.
- اگر یک نمونهٔ ۵۰تایی از هندوانه‌ها انتخاب کنیم، نسبت تعداد هندوانه‌های دارای مزهٔ عالی به کل هندوانه‌ها یک مشخصهٔ عددی است که به آن آمارهٔ نمونه گفته می‌شود.

به مطالعهٔ نحوهٔ گردآوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر داده‌ها جهت اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.

فرایند نتیجه‌گیری دربارهٔ پارامترهای جامعه براساس نمونه، آمار استنباطی نامیده می‌شود.

Test شرکت گاج مارکت در حال ارزیابی وزن کتاب‌های ارسالی است، در این بررسی هرکدام از کتاب‌ها یک ...... 1 ...... هستند. در این حالت وزن یک ...... 2 ...... است. اگر وزن تک تک کتاب‌ها را بررسی کند ...... 3 ...... انجام داده است. متوسط وزن همهٔ کتاب‌ها ...... 4 ...... است. اگر ۱۰۰ کتاب را انتخاب کند و میانگین وزن آن‌ها را به دست آورد، عدد به دست آمده را ...... 5 ...... می‌نامند.

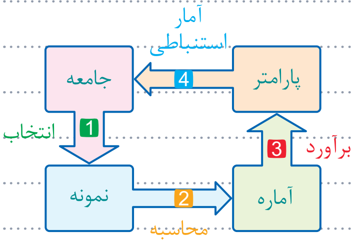
	۱)	۲)	۳)	۴)
1	آماره	نمونه	واحد آماری	متغیّر
2	داده	آماره	متغیّر	پارامتر
3	نمونه‌گیری	تخمین	برآورد	سرشماری
4	آمارهٔ نمونه	پارامتر جامعه	داده‌های جامعه	برآورد
5	آمارهٔ نمونه	پارامتر جامعه	برآورد	تخمین

با توجه به متن داده شده پاسخ‌های درست به صورت زیر است:

1 گزینهٔ ۳ — 2 گزینهٔ ۳ — 3 گزینهٔ ۴ — 4 گزینهٔ ۲ — 5 گزینهٔ ۱

آمار استنباطی — چرخهٔ آمار استنباطی — Inferential Statistics

در یک جامعهٔ آماری، پارامتر جامعه در صورتی قابل محاسبه است که ما داده‌های کل جامعه را در اختیار داشته باشیم ولی به دلیل محدودیت‌هایی مانند زمان، هزینه و ... دستیابی به کل داده‌های جامعه امکان‌پذیر نیست. از این‌رو با یکی از روش‌های نمونه‌گیری، یک نمونه از جامعه را انتخاب می‌کنیم [مرحلهٔ 1] و مشخصهٔ مورد نظر را روی نمونه محاسبه می‌کنیم که به آن آماره می‌گوییم [مرحلهٔ 2]. سپس از روی مقدار آماره یک برآورد برای مقدار آن پارامتر در جامعه انجام می‌دهیم [مرحلهٔ 3] و با آمار استنباطی مقدار عددی آماره را به جامعه تعمیم می‌دهیم [مرحلهٔ 4]. این فرایند به خوبی در نمودار روبه‌رو نمایان است:



Test فرض کنید می‌خواهیم میانگین وزن ماهی‌های درون یک استخر بزرگ را برآورد کنیم، به‌دلیل محدودیت‌هایی مانند ...... 1 ...... دستیابی به داده‌های کل جامعه امکان‌پذیر نیست. با یکی از روش‌های نمونه‌گیری، ۲۰ ماهی انتخاب کرده و میانگین وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. عدد به‌دست آمده ۱۲۵۰ گرم است. این عدد را ...... 2 ...... می‌نامیم. از روی مقدار آن، یک برآورد برای میانگین وزن ماهی‌های استخرکه آن را ...... 3 ...... می‌نامیم، انجام می‌دهیم. با استفاده از ...... 4 ......، مقدار عددی ...... 5 ...... را به جامعه تعمیم می‌دهیم.

1 ۱) دادگان نامشخص ۲) اُریبی جامعه ۳) زمان و هزینه ۴) سختی نمونه‌گیری

2 ۱) مقدار آماره ۲) پارامتر جامعه ۳) برآورد ۴) مقدار تخمین

3 ۱) مقدار آماره ۲) پارامتر جامعه ۳) برآورد ۴) مقدار تخمین

4 ۱) آمار توصیفی ۲) آمار استنباطی ۳) آمار استدلالی ۴) آمار و احتمال

5 ۱) پارامتر ۲) آماره ۳) متغیّر ۴) داده

با توجه به متن داده شده پاسخ‌های درست به صورت زیر است:

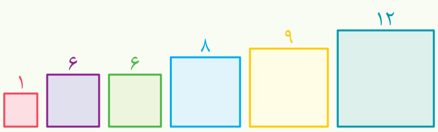
1 گزینهٔ ۳ 2 گزینهٔ ۲ 3 گزینهٔ ۲ 4 گزینهٔ ۲ 5 گزینهٔ ۲

آمار استنباطی — برآورد نقطه‌ای — Inferential Statistics

همان‌طور که گفتیم پارامترهای جامعه [مثلاً میانگین درآمد افراد یک جامعه] ثابت ولی مجهول هستند. یعنی در جوامع بزرگ محاسبهٔ دقیق آن‌ها به‌راحتی امکان‌پذیر نیست. بنابراین نمونه‌گیری انجام می‌دهیم و این پارامترها را به جای جامعه روی نمونه به‌دست می‌آوریم. عددی که به این طریق حاصل می‌شود آماره یا مقدار آماره نامیده می‌شود. حال چون به وسیلهٔ این عدد می‌توان پارامتر جامعه را تخمین زد، از این به بعد مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

اگر به جای محاسبهٔ میانگین در یک جامعه، میانگین را روی نمونه به‌دست آوریم، عدد حاصل‌شده را برآورد نقطه‌ای میانگین جامعه می‌نامند [به جای میانگین می‌توان از شاخص‌های دیگر آمار نظیر میانه، واریانس و ... نیز استفاده کرد و آن‌ها را برآورد کرد].

Test در یک کتاب هندسه تعداد زیادی مربع رسم شده است. اگر طول ضلع یک نمونهٔ ۶ تایی از آن‌ها مطابق شکل باشد، آنگاه برآورد نقطه‌ای میانگین طول اضلاع مربع‌های رسم شده کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

3 منظور از برآورد نقطه‌ای میانگین طول ضلع مربع‌های رسم شده پیدا کردن میانگین طول ضلع همین ۶ مربع است، بنابراین برآورد نقطه‌ای میانگین طول اضلاع برابر است:

$$\bar{a}=\frac{۱+۶+۶+۸+۹+۱۲}{۶}=۷$$