بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی تجربی

جامع کنکور

دوست عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب‌های منتشرشده لطفا به سایت www.gaj.ir مراجعه نمایید.

ریاضی تجربی جامع کنکور

خرید آنلاین در gajmarket.com

ناشر: انتشارات بین‌المللی گاج

مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار

معاونت علمی: مهندس محمد جوکار

مدیر تالیف: مهندس علی منصف شکری

عنوان کتاب: ریاضی تجربی جامع کنکور

مؤلفان: مهندس علی منصف شکری، مهندس سجاد عظمتی

مدیرفنی: مرجان جلال

صفحه‌آرا: مرجان جلال، فرزانه رجبی

نظارت علمی: مهندس علی عبدی‌پور

طراح جلد: منصور سماواتی ،سعید شمس

گرافیست: مینا بابا احمدی فرد

چاپ و صحافی: گاج

مدیر چاپ: علی مزرعتی

شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه

نوبت چاپ: اول (۱۳۹۹)

قیمت: ۶۵۰۰۰ تومان

صندوق پستی: ۳۷۷ - ۱۳۱۴۵

تلفن: ۶۴۲۰ - ۰۲۱

فروشگاه مرکزی: تهران ،میدان انقلاب ،نبش بازارچه کتاب

شناسنامه

سرشناسه: منصف شکری، علی، ۱۳۵۴،

عنوان: ریاضی تجربی جامع کنکور

شناسه افزوده: عظمتی سجاد، ۱۳۷۴

مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین‌المللی گاج، ۱۳۹۹

مشخصات ظاهری: ۱۹۲ ص، مصور

فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های دور دنیا نیم ساعت گاج می‌باشد.

بها: ۶۵۰۰۰ تومان

نوبت چاپ: اول

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۰۳-۰۵۲۸-۶

شماره کتابشناسی ملی: ۷۴۲۱۱۵۶

کلیه حقوق این کتاب برای انتشارات گاج محفوظ است. هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق چاپ و نشر تمام یا بخشی از این اثر را به هر صورت اعم از فتوکپی، چاپ کتاب و جزوه ندارد و متخلفین به موجب ماده ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸/۱۰/۱۱ تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

CONTENTS

01 Set, Pattern & Sequence
مجموعه ۱۰
الگو و دنباله ۱۱

02 Rational Exponents & Algebraic Expressions
توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۱۴

03 Elementary Operations
قدر مطلق و جزء صحیح ۱۶
معادلات گویا و رادیکالی، نامعادله ۱۷

04 Quadratic
معادله درجه دوم ۲۰
نمودار تابع درجه دوم (سهمی) ۲۱

05 Functions & Their Graphs
مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع ۲۳
انتقال، توابع صعودی و نزولی ۲۵
اعمال جبری روی توابع؛ ترکیب توابع ۲۶
تابع یک به یک و تابع وارون ۲۹

06 Exponential Functions & Logarithms
توابع نمایی ۳۲
لگاریتم ۳۳

07 Trigonometric Functions
نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۳۶
تناوب و تانژانت، توابع مثلثاتی، معادلات مثلثاتی ۳۸

08 Limits & Continuity
همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبه حد ۴۱
رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ۴۲
پیوستگی ۴۳
حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت ۴۵

09 Differentiation
قواعد محاسبه مشتق، خط مماس ۴۷
مشتق‌پذیری، مشتق چپ و راست و آهنگ تغییر ۵۰

10 Applications Of Derivatives
کاربرد مشتق [اکسترمم‌های تابع و بهینه‌سازی] ۵۳

11 Count Without Counting
شمارش، بدون شمردن ۵۶

12 Probability
مبانی احتمال ۵۹
احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل، قانون احتمال کل ۶۱

13 Descriptive Statistics
جامعه و نمونه، معیارهای گرایش به مرکز ۶۴
معیارهای پراکندگی ۶۵

14 Basic Geometry
هندسه پایه ۶۷

15 Analytic Geometry
هندسه تحلیلی ۷۳
مقاطع مخروطی ۷۴

16 Final Assessment Test
آزمون‌های جامع (شبیه ساز) ۷۹

Answers ۱۰۶

PETER SCHOLZE
FIELDS:2018 1987

Home Insert Draw View Help

Set, Pattern & Sequence

صفحهٔ ۲ تا ۱۳
کتاب درسی

مجموعه

سکانس 1
ریاضی ۱۰ | فصل ۱

1.کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'=\mathbb{N}$
۲) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$
۳) $(\mathbb{Z}-\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{N}$
۴) $(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')\subseteq\mathbb{W}$

2.اگر $A=(-۳,۶]$, $B=(۰,۸]$, $C=(-\infty,۳]$, $D=(۲,+\infty)$ باشد، حاصل $(A\cup C)-(B\cap D)$ برابر با کدام بازه است؟

۱) $(-۳,۲]$
۲) $(-\infty,۲]$
۳) $(-\infty,۲)$
۴) $(۰,\infty)$

3.کدام مجموعه متناهی است؟

۱) اعداد صحیح کمتر از ۲۵
۲) مثلث‌هایی با مساحت ۶
۳) اعداد گویای موجود در بازهٔ $(۱,۳)$
۴) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid\frac{۱۰}{x}\in\mathbb{N}\}$

4.اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

۱) $A-B$
۲) $B-A$
۳) $A\cap B$
۴) $A-(A\cup B)$

5.کدام گزینه درست است؟

۱) اگر مجموعهٔ $A\cup B$ نامتناهی و مجموعهٔ B نیز نامتناهی باشد، مجموعهٔ A متناهی است.
۲) اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، مجموعهٔ $A\cap B$ هم نامتناهی است.
۳) اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعهٔ A' متناهی است.
۴) اگر مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی باشد، مجموعهٔ $B-A$ نامتناهی است.

6.اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۴,۵,۶,۷\}$ باشند، متمم مجموعهٔ $B'-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۸

7.اگر $A=(-۲,۳]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۱\}$ باشد، مجموعهٔ $A'\cup B'$ کدام است؟

۱) $(۱,۳]$
۲) $(-\infty,۱]\cup(۳,+\infty)$
۳) $\mathbb{R}-(۱,۳)$
۴) $(-\infty,۱)\cup(۳,+\infty)$

8.اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، ساده شدهٔ مجموعهٔ $(A-B)-(B\cap A')$ برابر کدام است؟

۱) B'
۲) $\varnothing$
۳) $A\cap B$
۴) $A-B$

9.اگر $n(A)=۴$, $n(B)=۷$, $n(A-B)=۳$ مجموعهٔ $A\cup B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰
۲) ۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

خرید آنلاین در gajmarket.com

10. اگر مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای ۵ و ۷ عضو باشند، در کدام حالت زیر تعداد اعضای مجموعهٔ $A \cup B$ حداکثر خواهد بود؟

۱) A زیرمجموعهٔ B باشد.
۲) B زیرمجموعهٔ A باشد.
۳) A و B جدا از هم باشند.
۴) بستگی به مجموعهٔ مرجع دارد.

11. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند و $n(U) = ۸۰ , n(A) = ۲۰ , n(B') = ۵۵ , n(A \cup B) = ۳۷$ تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ B قرار دارند کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۷

12. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (داخل - ۹۸)

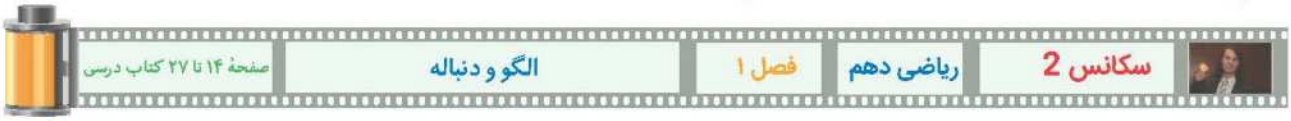
۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۱۸

13. در یک کلاس ۲۰ نفره، ۸ نفر عینکی و ۴ نفر چپ دست هستند و ۱۰ نفر نه چپ دست هستند و نه عینکی، تعداد دانش‌آموزانی که هم عینک زده‌اند و هم چپ دست هستند کدام است؟

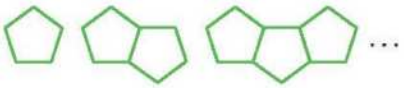
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۸
۴) ۶

14. اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعهٔ اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲۲
۲) ۲۳
۳) ۲۴
۴) ۲۶

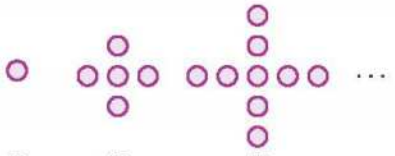


15. در الگوی مقابل، تعداد پاره‌خط‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟



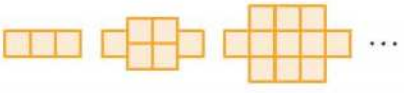
۱) ۵۳
۲) ۴۹
۳) ۴۵
۴) ۴۴

16. با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل چندم برابر ۲۹ است؟



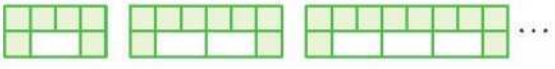
۱) هفتم
۲) هشتم
۳) نهم
۴) دهم

17. در الگوی مقابل تعداد مربع‌ها در شکل نهم کدام است؟



۱) ۷۸
۲) ۸۳
۳) ۸۴
۴) ۸۹

18. در الگوی مقابل اختلاف تعداد مربع‌های رنگی و مستطیل‌های سفید در شکل چهاردهم کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۲۶
۳) ۱۸
۴) ۱۴

NOTE

AKSHAY VENKATESH
FIELDS:2018 1964

Home Insert Draw View Help

Functions & Their Graphs

دهم: ص ۹۵ تا ۱۱۳
یازدهم: ۴۸ تا ۵۳

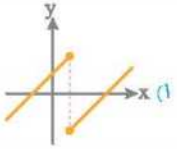
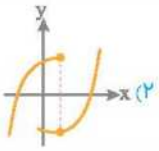
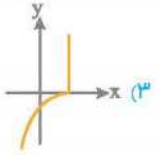
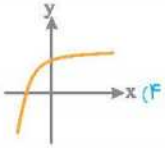
مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

سکانس 8
۱۰ + ۱۱ | فصل ۵

118. اگر رابطهٔ $f=\{(3,a+2b),(5,4),(7,2),(3,7),(5,2a-b)\}$ یک تابع باشد، a^2-b^2 کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

119. کدام نمودار، نمایش یک تابع $y=f(x)$ است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

120. اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & ;\ x\le 2\\ ax-2 & ;\ x\ge 2\end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

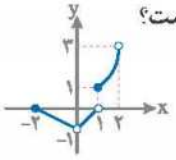
121. کدام رابطه نشان‌دهندهٔ یک تابع است؟

۱) $|x|+|y|=4$
۲) $y=\sqrt{x^2-1}$
۳) $y^2=5x-1$
۴) $y(x-2)=0$

122. اگر $f=\{(1,m+n),(20,n^2+n),(n^2-3n,4)\}$ یک تابع همانی باشد، m کدام است؟

۱) ۲
۲) -۳
۳) -۲
۴) ۶

123. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. اگر a و b به‌ترتیب تعداد اعضای صحیح دامنه و بُرد تابع f باشند، مقدار $a-b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

124. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+5}{x^2+ax+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{3\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۶
۴) -۶

125. اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ دامنهٔ تابع $f(3-x)$، کدام است؟ (داخل - ۹۲)

۱) $[0,2]$
۲) $[0,3]$
۳) $[1,2]$
۴) $[1,3]$

126. اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$ دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\le -1$
۲) $x\ge -1$
۳) $x\le 1$
۴) $x\ge 1$

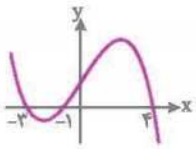
NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com

127. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ به کدام صورت است؟

۱) $[-2,5]$
۲) $(-2,5)-(0,3)$
۳) $[-2,0)\cup(3,5]$
۴) $\mathbb{R}-[0,3]$

128. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، است؟ (خارج - ۹۴)



۱) $[-1,1]\cup[0,6]$
۲) $[-3,1]\cup[0,2]$
۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$
۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

129. بُرد تابع $f(x)=x-|x-2|$ کدام است؟

۱) $(-\infty,2]$
۲) $[-1,+\infty)$
۳) $(-1,2)$
۴) $(2,+\infty)$

130. بُرد تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & ; x\geq 0\\ |x+1|-2 & ; x<0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $[-2,+\infty)$
۴) $[-1,+\infty)$

131. برد تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[0,1)$
۲) $[0,1]$
۳) $(0,1)$
۴) $(0,1]$

132. در بازهٔ (a,b) نمودار تابع $y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ بالاتراز نمودار تابع $y=2x+|x|$ است. طول نقطهٔ وسط این بازه کدام است؟ (داخل - ۹۷)

۱) -2
۲) $-1/5$
۳) -1
۴) $-0/5$

133. دو تابع f و g برروی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=2\log x$ و $g(x)=\log x^2$
۲) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x)=1$
۳) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ و $g(x)=x$
۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$

134. در کدام گزینه دو تابع f و g باهم مساوی هستند؟

۱) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=x+1$
۲) $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=x$
۳) $f(x)=\frac{x}{[x]}$ و $g(x)=\frac{[x]}{x}$
۴) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}\times\sqrt{1+x}$

135. کدام یک از توابع زیر با تابع $y=\log\frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (خارج - ۹۷)

۱) $\log(x-2)-\log x$
۲) $\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$
۳) $\frac{1}{2}\log(\frac{x-2}{x})^2$
۴) $2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

ARTUR AVILA
FIELDS:2014 1979

Exponential Functions & Logorithms

سکانس 12
ریاضی ۱۱ | فصل ۶

توابع نمایی | صفحات ۹۶ تا ۱۰۴

206. اگر $f(x)=(\frac{۳}{a+۲})^x$ ضابطهٔ یک تابع نمایی باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(-۲,۱)\cup(۱,+\infty)$
۲) $(-۲,+\infty)$
۳) $[-۲,۲]$
۴) $\mathbb{R}-(-۲,۱)$

207. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=a.b^x ; b>۰$ داریم $f(۰)=\frac{۳}{۲}$ و $f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ (داخل - ۹۱)

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

208. اگر $۳^A=(\frac{۴\sqrt{۳۲}}{۲\sqrt{۸}})^۲$ باشد، مقدار A کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۱۲\sqrt{۲}$

209. از معادلهٔ $\frac{۸^x}{۳۲}=(۸\sqrt{۲})^{۳x}$ مقدار x کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۲}{۳}$

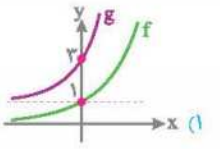
210. دو تابع $f(x)=۳^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟ (داخل - ۹۵)

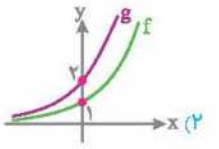
۱) -۳
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۳

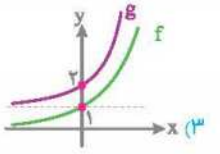
211. نمودار یک تابع به صورت $f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^۲-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(۳)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

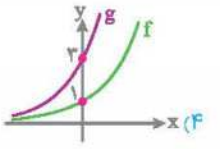
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

212. در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^x$ و $g(x)=۳^{x+۱}$ به درستی رسم شده است؟

۱)


۲)


۳)


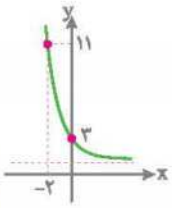
۴)


213. نمودار تابع $f(x)=۲^{-x+۱}-۱$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

خرید آنلاین در gajmarket.com

214. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=a+b^{-x}$ است. این نمودار خط $y=29$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) $-2/5$

۲) -3

۳) $-3/5$

۴) -4

215. کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $5^{1/6} > 5^{1/2}$

۲) $(\sqrt{5}-2)^3 > (\sqrt{5}-2)^2$

۳) $(\sqrt{3}+1)^3 < (\sqrt{3}+1)^2$

۴) $(0/2)^{-1/2} < (0/2)^{-1/6}$

216. مجموعه جواب نامعادلهٔ $(0/4)^{x^2-x} > (0/4)^{4x-6}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) بیشمار

217. اگر $(\frac{125}{8})^{x^2} = (0/4)^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

218. اگر $\log_2(6+\log_3 x) = 3$ باشد، مقدار $\log_2(x-1)$ کدام است؟

۱) ۱/۵

۲) ۲/۲۵

۳) ۳

۴) ۴

219. اگر لگاریتم عدد $\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(-\frac{1}{A})$ در مبنای ۴ کدام است؟

۱) -3

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

220. اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن‌گاه لگاریتم (a^3+7) در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $\frac{3}{2}$

221. اگر $a = \log_2 12$ باشد، عدد 4^{a-2} کدام است؟

۱) ۴/۵

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۸

222. اگر $A = 3^a$ باشد، آن‌گاه $\log_3 9A^2$ کدام است؟

۱) $3+a^2$

۲) $3+2a$

۳) $2+a^2$

۴) $2+2a$

223. اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log\sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

۱) $1-4k$

۲) $2-5k$

۳) $1-2k$

۴) $1-k$

خرید آنلاین در gajmarket.com

NOTE

TIMOTHY GOWERS
FIELDS:1998 1963

Home Insert Draw View Help

Trigonometric Functions

دهم: ۳۴ تا ۴۶، یازدهم: ۷۲ تا ۸۷
دوازدهم: ۲۲ تا ۴۳

نسبت‌های مثلثاتی ، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

سکانس 14
۱۰ + ۱۱ + ۱۲ | فصل ۷

242. اگر مجموع دو زاویه برابر $\frac{5\pi}{12}$ رادیان و تفاضل آن‌ها ۵ درجه باشد، زاویهٔ بزرگ‌تر چند درجه است؟

۱) 40°
۲) 30°
۳) 35°
۴) 45°

243. اگر یک زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ $\frac{6}{5}\text{rad}$ کمانی به طول ۱۲ سانتی‌متر را روی محیط دایره جدا کند، قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۰
۲) $\frac{10}{3}$
۳) $\frac{20}{3}$
۴) ۲۰

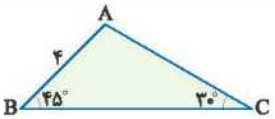
244. ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متری از دیواری ایستاده است که مجسمه‌ای روی آن قرار دارد. اگر ناظر پایین‌ترین و بالاترین قسمت مجسمه را با زاویه‌های 40° و 45° رؤیت کند، ارتفاع مجسمه چقدر است؟ $(\tan 40^\circ = 0/8)$

۱) ۶
۲) ۶/۴
۳) ۷
۴) ۷/۲

245. در متوازی الاضلاعی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (داخل - ۹۲)

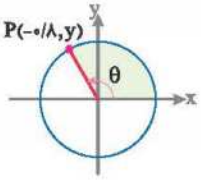
۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۲
۴) ۳۶

246. در مثلث مقابل، طول ضلع BC کدام است؟



۱) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
۲) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
۳) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$
۴) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

247. در دایرهٔ مثلثاتی مقابل مقدار $\tan\theta$ کدام است؟

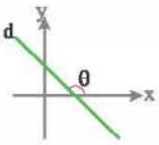


۱) $\frac{3}{4}$
۲) $-\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $-\frac{4}{3}$

248. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin 140^\circ > \cos 140^\circ$
۲) $\sin 55^\circ < \tan 55^\circ$
۳) $\cot 300^\circ > \tan 300^\circ$
۴) $\cot 15^\circ < \cos 15^\circ$

249. نمودار خط d به معادلهٔ $3x+2y=4$ به‌صورت مقابل است. حاصل $\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)$ کدام است؟



۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $-\frac{3}{2}$
۴) $\frac{3}{2}$

خرید آنلاین در gajmarket.com

250. اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}(\frac{1}{\sin x} - \sin x)$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $-\cos^2 x$
۲) $-\cos x$
۳) $\cos^2 x$
۴) $\cos x$

251. اگر $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{1+\tan^2 x}(2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\sin x$
۲) $\cos x$
۳) $-\sin x$
۴) $-\cos x$

252. حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4})\sin(\frac{-11\pi}{6})$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $-\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{2}$

253. اگر $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})$ (خارج - ۹۸)

۱) $-1/23$
۲) $-0/52$
۳) $0/27$
۴) $0/48$

254. حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ کدام است؟ (خارج - ۹۴)

۱) $-\frac{3}{4}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{5}{8}$

255. اگر $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{2-2\cos 2x}(\frac{1}{\sin x} - 2\sin x)$ کدام است؟

۱) $\cos 2x$
۲) $-\cos 2x$
۳) $2\cos 2x$
۴) $-2\cos 2x$

256. مقدار $\sin 67/5^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$
۲) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

257. ساده شدهٔ عبارت $\frac{\sqrt{1+\cos 20^\circ}}{\cos^4 5^\circ - \sin^4 5^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}\sin 10^\circ$
۲) $2\cos 20^\circ$
۳) $\sqrt{2}$
۴) 2

258. اگر $\sin 2x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{9}$
۲) $\frac{1}{9}$
۳) $-\frac{7}{9}$
۴) $-\frac{1}{9}$

خرید آنلاین در gajmarket.com
NOTE

MARTIN HAIRER
FIELDS:2014 1975

Home Insert Draw View Help

Limits & Continuiyt

همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبهٔ حد

یازدهم: ص ۱۲۰ تا ۱۳۶
دوازدهم: ص ۵۳ تا ۵۴

سکانس 16
۱۱ + ۱۲ | فصل ۸

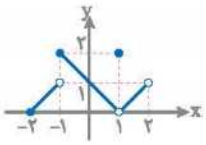
289. بازهٔ $(۲x-۱, x+۴)-\{y\}$ همسایگی محذوف عدد ۲ است. مجموعه مقادیر x کدام است؟

۱) $-۱<x<۲$
۲) $-۲<x<۲$
۳) $-\frac{۳}{۲}<x<۳$
۴) $-۲<x<\frac{۳}{۲}$

290. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲

291. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل کدام یک از حدهای زیر موجود است؟



۱) $\lim_{x\to -۲} f(x)$
۲) $\lim_{x\to -۱} f(x)$
۳) $\lim_{x\to ۱} f(x)$
۴) $\lim_{x\to ۲} f(x)$

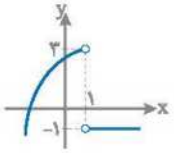
292. کدام تابع زیر در $x=۰$ حد ندارد؟

۱) $y=x|x|$
۲) $y=x+|x|$
۳) $y=x-|x|$
۴) $y=\frac{x}{|x|}$

293. تابع باضابطهٔ $f(x)=[۲x]$ در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) حد دارد.
۲) فقط حد راست دارد.
۳) فقط حد چپ دارد.
۴) حد چپ و راست نابرابر دارد.

294. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. کدام گزینه درست است؟



۱) $\lim_{x\to ۱^+} [x]f(x)=۱$
۲) $\lim_{x\to ۱^-} (x+۱)f(x)=۳$
۳) $\lim_{x\to ۱} (f(x)-۱)^۲=۴$
۴) $\lim_{x\to ۲^-} f(x-۱)=-۱$

295. اگر تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x^۲-۳x+۲ & ; x<۱ \\ x^۲-۱ & ; ۱\le x<۳ \\ ۲x-۵ & ; x\ge ۳ \end{cases}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $\lim_{x\to -۱} f(x)=۶$
۲) $\lim_{x\to ۱} f(x)=۰$
۳) $\lim_{x\to ۳} f(x)=۱$
۴) $\lim_{x\to ۴} f(x)=۳$

296. اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & ; x\ge ۱ \\ x^۲+۶ & ; x<۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-۲ & ; x\ge ۱ \\ ۲x & ; x<۱ \end{cases}$ کدام تابع زیر در $x=۱$ حد دارد؟

۱) $f+g$
۲) $\frac{f}{g}$
۳) $f-g$
۴) $f\times g$

فصل ۸ ● حد و پیوستگی

خرید آنلاین در gajmarket.com

NOTE

297. اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲}{f(x)-۳}=۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{f(x)+۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

298. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۴[x]-|x|}{|x|-[x]}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) -۲ ۴) -۴

299. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\frac{a|x|}{x}-۴[x]$ در $x=۰$ حد دارد؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) ۱ ۴) ۲

300. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}[\cos x]+\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\sin x}{|\sin x|}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲

۳) ۱ ۴) ۲

301. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲+[x]}{|x|} & ; x<-۱\\ ۳x+a & ; x>-۱\end{cases}$ در $x=-۱$ دارای حد باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۶

302. اگر حد تابع $f(x)=\begin{cases}(b+۱)[x]+|x| & ; x>-۱\\ ۳ & ; x=-۱\\ a[x]+۲bx-۱ & ; x<-۱\end{cases}$ در $x=-۱$ برابر ۵ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۷ ۲) -۳

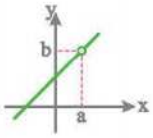
۳) ۲ ۴) -۵

303. حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{۲x^۲+۵x+۲}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) $-\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۴

304. نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ به‌صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

305. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸

۳) -۴ ۴) ۴

306. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{|x^۲-۵x+۶|}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

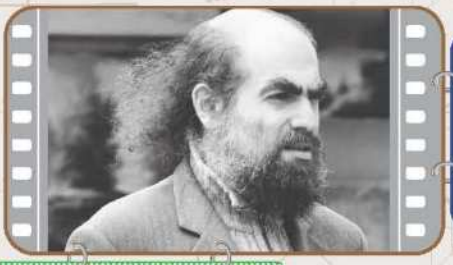
۳) ۱ ۴) -۱

307. حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{۳x-۵}-۲}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

خرید آنلاین در gajmarket.com



GRIGORI PERELMAN
FIELDS:2006 1966

Home Insert Draw View Help

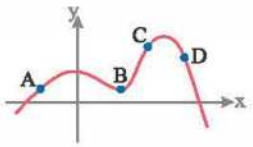
Differentiation

دوازدهم: ص ۶۶ تا ۷۶ و ۸۲ تا ۸۸

قواعد محاسبهٔ مشتق، خط مماس

سکانس 20
ریاضی ۱۲ | فصل ۹

342. با توجه به نمودار تابع f، کدام رابطه میان شیب نقاط مشخص شده برقرار است؟



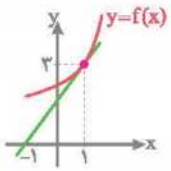
۱) $m_B < m_A < m_C < m_D$

۲) $m_A < m_B < m_D < m_C$

۳) $m_A < m_C < m_B < m_D$

۴) $m_D < m_B < m_A < m_C$

343. در شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟



۱) ۳

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۲

344. اگر $f'(4)=\frac{3}{2}$ باشد، حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳

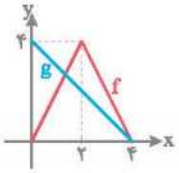
۲) ۴

۳) ۶

۴) ۱۲

345. با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $(3f+2g)'(1)$ کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

346. اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(-2,-3)$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y=x^2f(x)$ در $x=-2$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۴

347. اگر $f(x)=(3x^2-7)(2x-5)^3$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

۱) -۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۳۰

348. اگر $f(x)=(x+\sqrt{x^2-x})^3$ و $g(x)=(x-\sqrt{x^2-x})^3$ باشد، حاصل $f'(2)g(2)+g'(2)f(2)$ چقدر است؟

۱) -۱۲

۲) ۱۲

۳) -۸

۴) ۸

خرید آنلاین در gajmarket.com

NOTE

349. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

350. مشتق تابع $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ در $x=4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

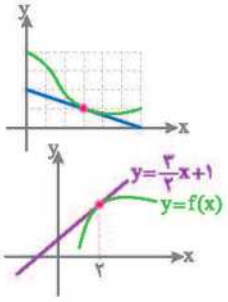
351. اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

352. اگر $f(x)=\frac{2x}{x+3}$، مقدار $f''(-4)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۲ ۳) ۸ ۴) -۸

353. نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y=\sqrt{f(x)}$ در $x=3$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

354. با توجه به شکل مقابل، مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{x^2+x}$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{36}$ ۲) $-\frac{11}{36}$ ۳) $-\frac{7}{36}$ ۴) $\frac{11}{36}$

355. اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

356. خط به معادلهٔ $y=3x-5$ در نقطهٔ $x=2$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

357. اگر $f(x)=\sqrt{4x-7}$ و $g(x)=2x^2+\frac{1}{x}$، مشتق تابع gof به ازای $x=2$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

358. اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

359. اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ حاصل $f'(g(x)).g'(x)$ کدام است؟ (داخل - ۹۳)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

CÉDRIC VILLANI
FIELDS:2010 1973

Home Insert Draw View Help

Applications of Derivatives

اکسترمم‌های تابع و بهینه‌سازی | دوازدهم: ص ۱۰۲ تا ۱۲۰

سکانس 22
ریاضی ۱۲ | فصل ۱۰

395. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-2,0)$ ۲) $(-\infty,-2)$

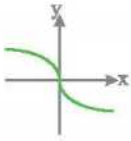
۳) $(0,2)$ ۴) $\mathbb{R}$

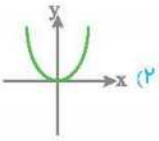
396. تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^3+2x^2+\frac{m}{3}x-1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

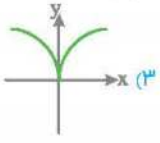
۱) $[-2,2]$ ۲) $(-\infty,-2]$

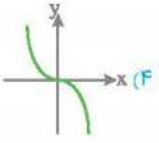
۳) $[-2,0]$ ۴) $[2,+\infty)$

397. نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟ (داخل - ۹۱)

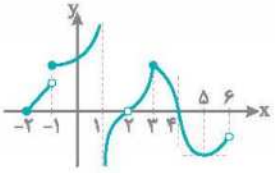
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

398. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است، مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع f کدام است؟



۱) $\{-1,1,4\}$ ۲) $\{-2,-1,2,3,4\}$

۳) $\{-1,3,4\}$ ۴) $\{-2,-1,3,4,5\}$

399. نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^2-2x|$ رئوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

400. مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-28)\times\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-2,2\}$ ۲) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$

۳) $\{-2,0,2\}$ ۴) $\{-7,0,1\}$

401. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ در بازهٔ $[-2,1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) بیشمار

402. تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|\sin x|$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

403. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $y=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟ (داخل - ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

فصل ۱۰ ● کاربرد مشتق

خرید آنلاین در gajmarket.com

NOTE

ALESSIO FIGALLI
FIELDS:2018 1984

Home Insert Draw View Help

Final Assessment Test

آزمون جامع شبیه‌ساز (۱) | زمان : ۴۷ دقیقه

سکانس 31
۱۰ + ۱۱ + ۱۲ | تمام فصول

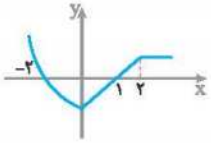
646. اگر $A=\frac{\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۴}}}}{\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{۷+A^{-۶}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

647. با توجه به الگوی مقابل، در شکلی که تعداد مربع‌های سفید برابر ۶۶ است، تعداد مربع‌های رنگی کدام است؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۷ ۴) ۷۸

648. شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{(x-۱)f(x)}{x+۳}<۰$ کدام است؟

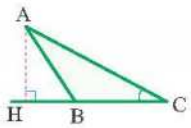


۱) $(-۳,۱)$ ۲) $(-\infty,۲)$
۳) $(-۳,-۲)$ ۴) $[۱,+\infty)$

649. مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y=۳x^۲+bx+c$ به صورت $A(-۱,-۴)$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۱ ۲) -۴
۳) ۶ ۴) ۲

650. در شکل روبه‌رو، فرض کنید $\sin C=\frac{۵}{۱۳}$ و $CH=۹$. اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟ (ریاضی داخل - ۹۹)



۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵
۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵

651. اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+۳$ بخش پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(۳x-۱)$ بر $۳x+۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲
۳) ۵ ۴) صفر

652. دو تابع $f(x)=\sqrt{x|x|}$ و $g(x)=\sqrt{|x|}\times\sqrt{|x|}$ با کدام دامنه با هم مساوی‌اند؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰,+\infty)$
۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۰]$

653. چند مورد از مطالب زیر، در رابطه با نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-۲x}{x+۱}$ درست است؟

الف) از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات می‌گذرد.

ب) محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

پ) ضابطهٔ وارون آن به‌صورت $f^{-۱}(x)=\frac{۱-x}{x+۲}$ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

654. اگر $f(x)=-x+[x]$ و $g(x)=۲^x$ آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۱)$
۳) $(۱,۲]$ ۴) $[۱,۲)$

آزمون‌های جامع شبیه‌ساز

خرید آنلاین در gajmarket.com

NOTE

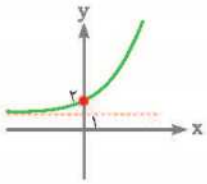
655. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|2x-4|-|x+1|+x$ را در بازهٔ اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y=x+1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) غیر متقاطع

656. با فرض $x\geq 2$; $f(x)=x^2-4x+9$ و $g(x)=\frac{3-x}{2}$، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-9)$، کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

657. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=a+2^{(x+b)}$ است. مقدار $f(3)$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۱

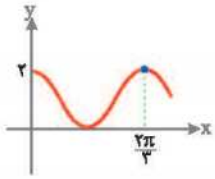
658. از رابطهٔ $\log(4x+1)=\log(2x-1)+\log(x+2)$ مقدار لگاریتم $(2x+5)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (داخل - ۹۷)

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

659. اگر $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)-\tan(\pi-\alpha)$

۱) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ۲) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

660. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+\cos^2 bx-\sin^2 bx$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{9})$ کدام است؟



۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

661. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x-\sin x)=1$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi+\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

662. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل - ۹۹)

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

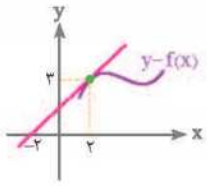
663. حاصل حد تابع $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{3}+\tan x}$ وقتی $x\to\frac{2\pi^+}{3}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد

664. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} & ; x\neq 0\\ \frac{1}{12} & ; x=0\end{cases}$ برروی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است. b کدام است؟ (خارج - ۹۷)

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

665. نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y=x^2f(x)$ در $x=2$ کدام است؟



۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۱۹

خرید آنلاین در galmarket.com

Set, Pattern & Sequence | S

1 **۳** بررسی گزینه‌ها:

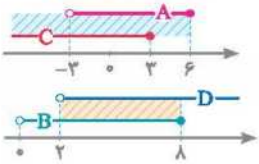
۱) هیچ عددی وجود ندارد که هم طبیعی باشد و هم گنگ، پس: $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$

۲) از آن جایی که $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ ، درنتیجه: $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

۳) چون $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$ ، پس $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}=\varnothing$ در نتیجه: $\varnothing\subseteq\mathbb{N}$

۴) می‌دانیم $\mathbb{Q}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$ ولی $\mathbb{Q}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{W}$ نیست، بلکه $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Q}$

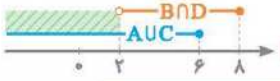
2 **۲** با استفاده از نمایش هندسی، مجموعه‌های $A\cup C$ و $B\cap D$ را روی محور مشخص می‌کنیم:



$A\cup C=(-\infty,6]$

$B\cap D=(2,8]$

حال مجموعهٔ $(A\cup C)-(B\cap D)$ را مشخص می‌کنیم:



$(A\cup C)-(B\cap D)=(-\infty,2]$

3 **۴** بررسی گزینه‌ها:

۱) این مجموعه به صورت $\{23,24,25,...\}$ است که نامتناهی است.

۲) با تغییر مقدار ارتفاع و قاعده، بی‌شمار مثلث با مساحت ۶ می‌توان ساخت.

۳) در بازهٔ $(1,3)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۴) مجموعهٔ اعداد طبیعی که عدد ۱۰ بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد، به‌صورت زیر است. پس این مجموعه، متناهی است. $A=\{1,2,5,10\}$

4 **۲** ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A=\{1,3,5,7,9,...\}$, $B=\{2,3,5,7,11,...\}$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $A-B=\{1,9,15,21,...\}$ ← نامتناهی و غیرتهی

۲) $B-A=\{2\}$ ← متناهی و غیرتهی

۳) $A\cap B=\{3,5,7,11,...\}$ ← نامتناهی و غیرتهی

۴) $A-(A\cup B)=\varnothing$ ← تهی

5 **۴** بررسی گزینه‌ها:

۱) دراین حالت مجموعهٔ A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A\cup B=\{0,1,2,...\}$, $B=\{1,2,3,...\}$ ← $\begin{cases}A_1=\{0,2,4,...\}\\A_2=\{0\}\end{cases}$

۲) در این حالت مجموعهٔ $A\cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1=\{0,1,2,...\}, B_1=\{1,2,3,...\}$ ← $A_1\cap B_1=\{1,2,3,...\}$

$A_2=\{0,1,2,...\}, B_2=\{...,-2,-1,0\}$ ← $A_2\cap B_2=\{0\}$

۳) اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1=\{1,3,5,...\}\Rightarrow A_1'=\{2,4,6,...\}$

$A_2=\{2,3,4,...\}\Rightarrow A_2'=\{1\}$

۴) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعهٔ $B-A$ نامتناهی است.

6 **۳** مجموعهٔ مرجع به‌صورت $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ است، پس:

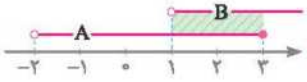
$B'=U-B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}-\{4,5,6,7\}=\{1,2,3,8,9\}$

بنابراین مجموعهٔ $B'-A$ برابر است با:

$B'-A=\{1,2,3,8,9\}-\{1,2,3,4,5\}=\{8,9\}$

پس متمم مجموعهٔ $B'-A$ به‌صورت $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ است که ۷ عضو دارد.

7 **۲** نمایش بازه‌ای مجموعهٔ B به‌صورت $B=(1,+\infty)$ است. چون می‌دانیم $A'\cup B'=(A\cap B)'$ ، پس ابتدا مجموعهٔ $A\cap B$ را مشخص می‌کنیم:

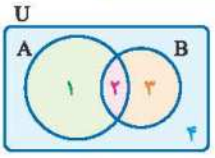


$A\cap B=(1,3]$

متمم مجموعهٔ $A\cap B$ به‌صورت $(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$ است، پس:

$A'\cup B'=(A\cap B)'=(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$

8 **۴** نمودار ون را برای دو مجموعهٔ A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$(A-B)-(B\cap A')=\underbrace{(\{1,2\}-\{2,3\})}_{\{1\}}-\underbrace{(\{2,3\}\cap\{3,4\})}_{\{3\}}=\{1\}$

با توجه به نمودار، ناحیهٔ $\{1\}$ مجموعهٔ $A-B$ را نشان می‌دهد.

9 **۱** برای به‌دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ A و B، به تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\Rightarrow 3=4-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=1$

بنابراین $n(A\cup B)$ برابر است با:

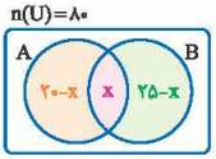
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=4+7-1=10$

10 **۳** می‌دانیم $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ است، بنابراین هنگامی $n(A\cup B)$ ماکسیمم می‌شود که $n(A\cap B)=0$ باشد، یعنی دو مجموعه جدا از هم باشند.

11 **۴** ابتدا تعداد عضوهای مجموعهٔ B را به دست می‌آوریم:

$n(B)=n(U)-n(B')\Rightarrow n(B)=80-55=25$

از طرفی $n(A\cup B)=37$ است، حال اگر فرض کنیم $n(A\cap B)=x$ خواهیم داشت:



$(20-x)+x+(25-x)=37\Rightarrow x=8$

بنابراین تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ B هستند، برابر است با:

$25-x=25-8=17$

خرید آنلاین در gajmarket.com

اگر جملات t_m, t_n, t_k از یک دنبالهٔ حسابی $(m>n>k)$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $q=\frac{m-n}{n-k}$ به‌دست می‌آید. پس در این سؤال قدر نسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$q=\frac{۲۴-۹}{۹-۴}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

40 در دنبالهٔ هندسی $t_۲=t_۱q$ ، $t_۵=t_۱q^۴$ ، $t_۸=t_۱q^۷$ است. پس با توجه به گفته‌های سؤال چون جمله‌های $t_۲$ ، $۲t_۵$ ، $t_۸$ تشکیل دنبالهٔ حسابی داده‌اند، می‌توانیم شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی را بنویسیم:

$$۲t_۵=\frac{t_۲+t_۸}{۲}\Rightarrow ۴t_۱q^۴=t_۱q+t_۱q^۷\xrightarrow{\div t_۱q}۴q^۳=۱+q^۶$$

حال با فرض $q^۳=A$ به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$۴A=۱+A^۲\Rightarrow A^۲-۴A+۱=۰\Rightarrow A=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}=q^۳$$

با فرض $q^۳=۲+\sqrt{۳}$ نسبت بزرگ‌ترین جمله یعنی $t_۸$ به کوچک‌ترین جمله یعنی $t_۲$ برابر است با:

$$\frac{t_۸}{t_۲}=\frac{t_۱q^۷}{t_۱q}=q^۶=(q^۳)^۲=(۲+\sqrt{۳})^۲=۷+۴\sqrt{۳}$$

توجه کنید با فرض $q^۳=۲-\sqrt{۳}$ چون مقدار قدرنسبت کوچک‌تر از یک می‌شود، ترتیب جملات عوض می‌شود و باز هم به همین جواب می‌رسیم.

Rational Exponents & Algebraic Expressions

41 همهٔ اعداد را ساده و به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$(۰/۲۵)^۴\times(\frac{۳}{۴})^{-۳}\times۶^۴=(\frac{۱}{۴})^۴\times(\frac{۳^{-۳}}{۴^{-۳}})\times(۲^۴\times۳^۴)$$

$$=\frac{۱}{۲^۸}\times\frac{۳^{-۳}}{۲^{-۶}}\times۲^۴\times۳^۴=\frac{۳\times۲^۴}{۲^۲}=۳\times۲^۲=۱۲$$

42 اعداد زیر رادیکال‌ها را باز می‌کنیم:

$$A=\frac{۲}{۳}\sqrt{\underbrace{۱۸}_{۲\times۹}}+۲\sqrt{\underbrace{۲۷}_{۳\times۹}}-\sqrt{\underbrace{۱۰۸}_{۳\times۳۶}}+۰/۳\sqrt{\underbrace{۲۰۰}_{۲\times۱۰۰}}$$

حال اعداد مربع کامل را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:

$$A=\frac{۲}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\sqrt{۲}+\cancel{۶\sqrt{۳}}-\cancel{۶\sqrt{۳}}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$A^۲=(۵\sqrt{۲})^۲=۲۵\times۲=۵۰$$

43 می‌دانیم: $۳\times\sqrt[۱۲]{۳^۵}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۳^۴}\times۶}=\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۶}}$ حال همهٔ اعداد زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt[۶]{۱۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۵۴}}\times\sqrt[۱۲]{۳^۵\times۳}=\sqrt[۶]{۳\times۲^۲}\times\sqrt[۴]{۲\times۳^۳}\times\sqrt[۱۲]{۳^۶\times۲^۴}$$

چون فرجهٔ رادیکال‌ها متفاوت است، همهٔ فرجه‌ها را به ک.م.م اعداد ۶، ۴، ۱۲ یعنی عدد ۱۲ تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[۱۲]{۳^۲\times۲^۴}\times\sqrt[۱۲]{۲^۳\times۳^۹}\times\sqrt[۱۲]{۳^۶\times۲^۶}=\sqrt[۱۲]{۱۲^۱۲}=۱۲$$

44 همهٔ اعداد زیر رادیکال را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\times(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^۲\sqrt[۳]{۲^۴}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^۲\times۲^{\frac{۴}{۳}}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$=\sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۱۰}{۱۵}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^۲=۴$$

$$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=۸^{-\frac{۱}{۳}}=(۲^۳)^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

45 با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$(x+۳y^۲)^۲-(x-۳y^۲)^۲=(x^۲+۶xy^۲+۹y^۴)-(x^۲-۶xy^۲+۹y^۴)$$

$$=۱۲xy^۲=۱۲\times\frac{۴}{۳}=۱۶$$

اتحاد مربع مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به‌صورت زیر است:

1. $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$
2. $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

46 طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۲x+\frac{۵}{x}=۹\xrightarrow{\text{توان }۲}(۲x+\frac{۵}{x})^۲=۸۱\Rightarrow ۴x^۲+\frac{۲۵}{x^۲}+۲(۲x)(\frac{۵}{x})=۸۱$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+\frac{۲۵}{x^۲}+۲۰=۸۱\Rightarrow ۴x^۲+\frac{۲۵}{x^۲}=۶۱$$

47 با استفاده از اتحادهای مربع و مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$A=(x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸)(\frac{x}{x^۲-۴x+۴}-\frac{۱}{x-۲})$$

$$=(x-۲)^۳(\frac{x}{(x-۲)^۳}-\frac{۱}{x-۲})=x(x-۲)-(x-۲)^۲$$

$$=(x-۲)(x-(x-۲))=(x-۲)\times۲\Rightarrow\frac{x-۲}{A}=\frac{x-۲}{۲(x-۲)}=\frac{۱}{۲}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به‌صورت زیر است:

1. $(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$
2. $(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$

48 در جمله‌های $x^۴$ و $۸x$ از x و در جمله‌های $-۳x^۳$ و -۲۴ از ۳- فاکتور می‌گیریم:

$$x^۴-۳x^۳+۸x-۲۴=x(x^۳+۸)-۳(x^۳+۸)$$

$$=(x-۳)(x^۳+۸)=(x-۳)(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$$

اتحادهای زیر به اتحاد چاق و لاغر معروف هستند:

1. $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$
2. $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

49 در هریک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(x+\frac{۲}{x-۳})(۱-\frac{۱}{x-۲})=(\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۳})(\frac{x-۳}{x-۲})=\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۲}=x-۱$$

73 | ۲ | چون $x=۳$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{x-۲}{ax-۵}=\frac{a+۲}{x-۱}-۱ \xrightarrow{x=۳} \frac{۱}{۳a-۵}=\frac{a+۲}{۲}-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳a-۵}=\frac{a}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳a^۲-۵a=۲ \Rightarrow ۳a^۲-۵a-۲=۰$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $۳a^۲-۵a-۲=۰$، عدد ۳ را در ۲- ضرب می‌کنیم:

$$۳a^۲-۵a-۲=۰ \Rightarrow a^۲-۵a-۶=۰ \Rightarrow (۳a+۱)(a-\frac{۶}{۳})=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}, ۲$$

74 | ۲ | با فرض $t=\frac{۳x}{x-۱}$ معادله به صورت $۲t+\frac{۱}{t}=۳$ در می‌آید:

$$۲t+\frac{۱}{t}=۳ \Rightarrow ۲t^۲-۳t+۱=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} t=۱, t=\frac{۱}{۲}$$

[1] $\frac{۳x}{x-۱}=۱ \Rightarrow ۳x=x-۱ \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲}$

ریشهٔ بزرگ‌تر $=-\frac{۱}{۵}$

[2] $\frac{۳x}{x-۱}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۶x=x-۱ \Rightarrow ۵x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۵}$

75 | ۴ | اگر بهروز کل کار را در x ساعت انجام دهد، پس در هر ساعت $\frac{۱}{x}$ کار را انجام می‌دهد. حال چون بهروز کار را ۹ ساعت زودتر از فرهاد انجام می‌دهد، پس فرهاد کل کار را در $x+۹$ ساعت انجام می‌دهد، پس در هر ساعت $\frac{۱}{x+۹}$ کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در ۲۰ ساعت انجام می‌شود، پس:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۹+x}=\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{(x+۹)+x}{x(x+۹)}=\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲x+۹}{x^۲+۹x}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow x^۲+۹x=۴۰x+۱۸۰ \Rightarrow x^۲-۳۱x-۱۸۰=۰ \Rightarrow x=۳۶, x=-۵$$

76 | ۳ | اگر سرعت آب برابر v باشد، هنگامی که قایق در جهت آب حرکت می‌کند سرعت آن برابر $۱۰۰+v$ و هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، سرعتش برابر $۱۰۰-v$ می‌شود. حال از آن‌جایی که اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است، پس:

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}=۵ \xrightarrow{\div ۵} \frac{۲۴۰}{۱۰۰-v}-\frac{۲۴۰}{۱۰۰+v}=۱ \xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{جایگذاری}} v=۲۰$$

> سرعت متوسط برابر است با جابه‌جایی تقسیم بر زمان سپری شده است
> یعنی: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. بنابراین خواهیم داشت: $\Delta t=\frac{\Delta x}{v_{av}}$

77 | ۳ | وزن خالص مادهٔ حل شده در هر حالت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{وزن مادهٔ حل شده}}{۱۱}=\frac{۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow \text{وزن مادهٔ حل شده}=۴/۴$$

$$\frac{\text{وزن مادهٔ حل شده}}{۴}=\frac{۷۰}{۱۰۰} \Rightarrow \text{وزن مادهٔ حل شده}=۲/۸$$

حال با مخلوط کردن رنگ‌ها، $۱۵+۴=۱۱$ کیلوگرم رنگ ایجاد می‌شود.

می‌خواهیم غلظت محلول را به ۵۰ درصد برسانیم. اگر فرض کنیم x کیلوگرم از محلول تبخیر می‌شود؛ پس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{وزن مادهٔ حل شده}}{\text{وزن کل}}=\frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۴/۴+۲/۸}{۱۵-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۵-x=۱۴/۴ \Rightarrow x=۰/۶$$

78 | ۱ | اگر طول زمین x و عرض آن y باشد، با توجه به این‌که محیط زمین برابر ۲۰ است؛ پس:

$$۲x+۲y=۲۰ \Rightarrow x+y=۱۰ \Rightarrow y=۱۰-x$$

می‌دانیم به عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ عدد طلایی می‌گویند. بنابراین:

$$\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۱۰-x}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow ۲x=۱۰-(۱+\sqrt{۵})x+۱۰\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow (۳+\sqrt{۵})x=۱۰(۱+\sqrt{۵}) \Rightarrow x=\frac{۱۰(۱+\sqrt{۵})}{۳+\sqrt{۵}}=\frac{۱۰(۱+\sqrt{۵})}{۳+\sqrt{۵}} \times \frac{۳-\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{۱۰(۳-\sqrt{۵}+۳\sqrt{۵}-۵)}{۹-۵}=\frac{۱۰(۲\sqrt{۵}-۲)}{۴}=۵(\sqrt{۵}-۱)=۵\sqrt{۵}-۵$$

79 | ۱ | طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲} \Rightarrow (۲x+۱)^۲=۱۱x-۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۱۱x-۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{۴x^۲-۷x+۳}_{\text{مجموع ضرایب}=۰}=۰ \Rightarrow x_۱=۱, x_۲=\frac{۳}{۴} \Rightarrow |x_۱-x_۲|=|۱-\frac{۳}{۴}|=\frac{۱}{۴}$$

80 | ۴ | رادیکال را تنها کرده و سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a \Rightarrow ۲a^۲+۴a=۹a^۲-۱۲a+۴ \Rightarrow ۷a^۲-۱۶a+۴=۰$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $۷a^۲-۱۶a+۴=۰$، عدد ۷ را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$۷a^۲-۱۶a+۴=۰ \Rightarrow a^۲-۱۶a+۲۸=۰ \Rightarrow (a-\frac{۱۴}{۷})(۷a-۲)=۰$$

ریشه‌های معادله $a=\frac{۲}{۷}, a=\frac{۱۴}{۷}$ به‌دست می‌آید، اما چون $a=۲$ طرف سمت راست معادلهٔ اولیه را منفی می‌کند، قابل قبول نیست و فقط $a=\frac{۲}{۷}$ قابل قبول است، بنابراین:

$$\frac{a+۱}{a}=۱+\frac{۱}{a}=۱+\frac{۱}{\frac{۲}{۷}}=۱+\frac{۷}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

99 | ۱ | در معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S=-\frac{-(m+۳)}{m}=\frac{m+۳}{m},\ P=\frac{۵}{m}$$

اگر ریشه‌های معادله α و β باشند، با توجه به صورت تست داریم:

$$\alpha^۲+\beta^۲=۶\Rightarrow S^۲-۲P=۶$$

حال به جای S و P در رابطهٔ $S^۲-۲P=۶$ جایگذاری می‌کنیم:

$$S^۲-۲P=۶\Rightarrow\frac{(m+۳)^۲}{m^۲}-۲(\frac{۵}{m})=۶\Rightarrow\frac{m^۲+۶m+۹-۱۰m}{m^۲}=۶$$

$$\Rightarrow m^۲-۴m+۹=۶m^۲\xrightarrow[\text{برابر صفر}]{\text{مجموع ضرایب}}۵m^۲+۴m-۹=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\m=\frac{-۹}{۵}\end{cases}$$

حال به ازای هر کدام از mهای به‌دست آمده شرط حقیقی بودن ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$m=۱: x^۲-۴x+۵=۰\Rightarrow\Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(۵)=۱۶-۲۰=-۴<۰$$

$$m=\frac{-۹}{۵}:\frac{-۹}{۵}x^۲-\frac{۶}{۵}x+۵=۰\Rightarrow\Delta=(\frac{-۶}{۵})^۲-۴(\frac{-۹}{۵})(۵)=\frac{۳۶}{۲۵}+۳۶>۰$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $m=-\frac{۹}{۵}$ است. [البته در این حالت نیازی به چک کردن Δ نبود، چون a و c مختلف‌العلامه بودند معادله قطعاً دو ریشه داشت]

100 | ۲ | اگر ریشه‌های معادله را α,β فرض کنیم طبق فرض مسئله رابطهٔ $\alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$ بین ریشه‌های معادله برقرار است. از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر است با $\alpha+\beta=-\frac{-۸}{۱}=۸$ بنابراین:

$$\frac{\beta}{۲}+۵+\beta=۸\Rightarrow\frac{۳\beta}{۲}=۳\Rightarrow\beta=۲$$

چون $\beta=۲$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$۲^۲-۸\times۲+m=۰\Rightarrow m=۱۲$$

101 | ۳ | به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۴x-۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۴}{۳}=\frac{۴}{۳},\ P=\alpha\beta=-\frac{۱}{۳}$$

۲ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$ برابر $\alpha+۱,\beta+۱$ است. حاصل‌ضرب این ریشه‌ها برابر است با:

$$P_{new}=\frac{b}{۳}\Rightarrow(\alpha+۱)(\beta+۱)=\frac{b}{۳}\Rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=\frac{b}{۳}$$

$$\Rightarrow-\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}+۱=\frac{b}{۳}\Rightarrow\frac{b}{۳}=۲\Rightarrow b=۶$$

102 | ۴ | به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲},\ P=\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}$$

۲ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ برابر $\frac{۱}{\alpha}-۱,\frac{۱}{\beta}-۱$ است. بنابراین مجموع و حاصل ضرب این ریشه‌ها می‌یابیم:

$$S_{new}=(\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}-۲=-۳-۲=-۵$$

$$P_{new}=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})+۱=\underbrace{\frac{۱}{\alpha\beta}}_{-۲}-\underbrace{(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})}_{-۳}+۱=۲$$

۳ معادلهٔ جدید را با کمک رابطهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ می‌نویسیم:

معادلهٔ جدید: $x^۲-(-۵)x+۲=۰\Rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$

طراح ممکن است همین تست را به صورت «اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$ باشند، مجموعه جواب کدام معادله به صورت $\{\frac{۱}{\beta}-۱,\frac{۱}{\alpha}-۱\}$ است؟» از ما بپرسد.

103 | ۱ | برای این که معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+(m-۲)x+m+۱=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد، باید $\Delta>۰, S>۰, P>۰$ باشد:

۱ $\Delta=b^۲-۴ac>۰\Rightarrow(m-۲)^۲-۴(۱)(m+۱)>۰$

$$\Rightarrow m^۲-۴m+۴-۴m-۴>۰\Rightarrow\underbrace{m^۲-۸m}_{m(m-۸)}>۰\Rightarrow m<۰\text{ یا }m>۸$$

۲ $S=-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{m-۲}{۱}>۰\Rightarrow m<۲$

۳ $P=\frac{c}{a}>۰\Rightarrow\frac{m+۱}{۱}>۰\Rightarrow m>-۱$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده از ۱، ۲، ۳ مقادیر قابل قبول برای m به‌صورت $-۱<m<۰$ است.

104 | ۲ | با فرض $x^۲+۴x+۳=t$ داریم:

$$t=\sqrt{t+۲}\Rightarrow t^۲=t+۲\Rightarrow t^۲-t-۲=۰\xrightarrow{a+c=b}t=۲,t=-۱$$

چون t برابر با یک عبارت رادیکالی است پس باید نامنفی باشد بنابراین به‌ازای $t=۲$ خواهیم داشت:

$$x^۲+۴x+۳=۲\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\Rightarrow\text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱}=۱$$

105 | ۲ | فرض می‌کنیم $x^۲+x=t$ باشد، در این صورت:

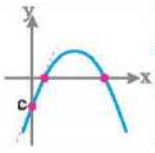
$$(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰\Rightarrow\underbrace{t^۲-۱۸t+۷۲}_{(t-۶)(t-۱۲)}=۰\Rightarrow t=۶,t=۱۲$$

۱ $x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\Rightarrow(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲,-۳$

۲ $x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۴)=۰\Rightarrow x=۳,-۴$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با: $(-۳)+۲+۳+(-۴)=-۲$

106 | ۲ | با توجه به نمودار داده شده، علامت a,b,c,Δ به‌صورت زیر است:



۱ دهانهٔ سهمی رو به پایین باز شده است، پس: $a<۰$

۲ محل برخورد با محور yها منفی است، پس: $c<۰$

۳ شیب نمودار در نقطهٔ $(۰,c)$ مثبت است، پس: $b>۰$

۴ سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده، پس: $\Delta>۰$

107 | ۴ | می‌دانیم طول رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ از رابطهٔ $x_s=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید. از آن جایی که طول رأس سهمی برابر ۱ است، پس:

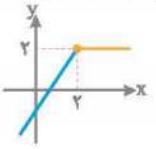
$$x_s=\frac{-a}{۲(-۲)}=۱\Rightarrow\frac{a}{۴}=۱\Rightarrow a=۴$$

از طرفی منحنی محور xها را در نقطه‌ای با طول ۱- قطع می‌کند، پس:

$$۰=-۲(-۱)^۲+۴(-۱)+b\Rightarrow۰=-۶+b\Rightarrow b=۶$$

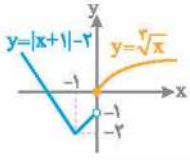
129 | ۱ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x-|x-۲|=\begin{cases}۲ & ;\ x\geq ۲\\ ۲x-۲ & ;\ x<۲\end{cases}$$



بنابراین بُرد تابع برابر بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.

130 | ۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x} & ;\ x\geq ۰\\ |x+۱|-۲ & ;\ x<۰\end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



$R_f=[-۲,+\infty)$

131 | ۱ چون $x^۲$ عبارتی نامنفی است، پس $\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ مثبت بوده و چون مخرج از صورت یک واحد بیشتر است، پس حاصل $\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود، بنابراین برد تابع بازهٔ $[۰,۱)$ است.

132 | ۳ برای این که مشخص کنیم در کدام بازه، نمودار تابع $y=-x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}$ بالاتر از نمودار تابع $y=۲x+|x|$ قرارگرفته است، باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $-x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+|x|$ را به‌دست آوریم. بنابراین:

۱ $x\geq ۰:\ -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+x\Rightarrow -x^۲-\frac{۷}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۰$

$$\underbrace{x^۲+\frac{۷}{۲}x-\frac{۹}{۲}}_{(x-۱)(x+\frac{۹}{۲})}<۰\Rightarrow -\frac{۹}{۲}<x<۱\xrightarrow{x\geq ۰}۰\leq x<۱$$

۲ $x<۰:\ -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x-x\Rightarrow -x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۰$

$$\underbrace{x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۹}{۲}}_{(x+۳)(x-\frac{۳}{۲})}<۰\Rightarrow -۳<x<\frac{۳}{۲}\xrightarrow{x<۰}-۳\leq x<۰$$

از اجتماع بازه‌های به‌دست آمده از ۱, ۲ مجموعه جواب نامعادله برابر بازهٔ $(-۳,۱)$ می‌شود که طول وسط آن برابر $\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ است.

133 | ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ $D_f=(۰,+\infty)\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ ⟹ $f\neq g$

۲ $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}$ ⟹ $f\neq g$

۳ $D_f=[۰,+\infty)\ ,\ D_g=\mathbb{R}$ ⟹ $f\neq g$

۴ $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ ⟹ $f=g$

134 | ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ $D_f=\mathbb{R}-\{۱\},D_g=\mathbb{R}$ ⟹ $f\neq g$

۲ دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ است ولی ضابطهٔ تابع f بعد از ساده شدن به‌صورت $f(x)=|x|$ می‌باشد، پس $f\neq g$ است.

۳ $D_f=\mathbb{R}-[۰,۱),D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ ⟹ $f\neq g$

۴ دامنهٔ هر دو تابع $[-۱,۱]$ و ضابطه‌هایشان هم یکسان است، پس $f=g$ می‌باشد.

135 | ۴ دامنهٔ تابع $f=\log(\frac{x-۲}{x})$ را به دست می‌آوریم:

$\frac{x-۲}{x}>۰$ ⟹

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
f		+	ت ن	−	۰	+	

⟹ $(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

حال دامنهٔ هریک از گزینه‌ها را مشخص می‌کنیم:

۱ $y=\log(x-۲)-\log x$ ⟹ $\begin{cases}x-۲>۰\\ x>۰\end{cases}$ ⟹ $x>۲$

۲ $y=\log\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)}$ ⟹ $D_y=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)-\{-۲\}$

۳ $y=\frac{۱}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})^۲$ ⟹ $D_y=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

۴ $y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}}$ ⟹ $D_y=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

$x=-۲$ در تابع f صدق می‌کند، اما در ۱, ۲ صدق نمی‌کند. از طرفی $x=۱$ در ۳ صدق می‌کند اما در f صدق نمی‌کند.

136 | ۳ ابتدا x را به $-x$ (قرینه نسبت به محور yها) و سپس در معادله به‌دست آمده x را به $x-۲$ (دو واحد به سمت xهای مثبت) تبدیل می‌کنیم:

$f(x)=\sqrt{x}$ ⟹ $f(x)=\sqrt{-x}$ ⟹ $f(x)=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{۲-x}$

برای پیدا کردن طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم خواهیم داشت:

$$x=\sqrt{۲-x}\xrightarrow[(۰\leq x\leq ۲)]{\text{توان }۲}x^۲=۲-x\Rightarrow \underbrace{x^۲+x-۲}_{\text{۰ = مجموع ضرایب}}=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۱\ \checkmark\\ x_۲=-۲\ \times\end{cases}$$

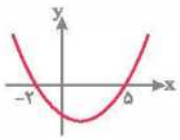
137 | ۱ ابتدا ضابطهٔ هر دو نمودار را ساده می‌کنیم:

$y=(x^۲+۶x+۴+۵)-۵=(x+۳)^۲-۵$

$y=(x^۲-۴x+۳+۱)-۱=(x-۲)^۲-۱$

داخل پرانتز از $x+۳$ به $x-۲$ رسیده است یعنی x به $x-۵$ تبدیل شده پس نمودار ۵ واحد به سمت راست منتقل شده و چون بیرون پرانتز ۵ − به ۱ − رسیده یعنی به اندازهٔ ۴ واحد اضافه شده، پس نمودار ۴ واحد به سمت بالا منتقل شده است.

138 | ۳ نمودار تابع $y=x^۲-۳x-۱۰$ محور xها را در دو نقطه با طول‌های ۲ − و ۵ قطع می‌کند، حال اگر این سهمی را ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، طول نقاط تلاقی‌اش با محور xها منفی نیست.



139 | ۱ برای این‌که منحنی ۲ واحد به طرف xهای منفی منتقل شود کافی است x را به $x+۲$ تبدیل کنیم:

$y=x^۲-x-۳\Rightarrow y=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳$

حال برای این‌که تابع ۹ واحد به طرف yهای منفی منتقل شود کافی است ۹ واحد از y کم کنیم: $y=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳-۹$

حال طرف دوم را ساده می‌کنیم:

$y=(x^۲+۴x+۴)-(x+۲)-۱۲\Rightarrow y=x^۲+۳x-۱۰$

در بازه‌ای که نمودار زیر محور xها قرار دارد، y منفی است، پس:

$x^۲+۳x-۱۰<۰\Rightarrow (x+۵)(x-۲)<۰\Rightarrow -۵<x<۲$

۳ 233 ابتدا معادلهٔ $۴^x + ۲^x = ۷۲$ را حل می‌کنیم:

$$(۲^x)^۲ + ۲^x - ۷۲ = ۰ \xrightarrow{۲^x = t} \underbrace{t^۲ + t - ۷۲}_{(t-۸)(t+۹)} = ۰ \Rightarrow t = ۸,\ t = -۹$$

از $۲^x = ۸$ نتیجه می‌گیریم $x = ۳$ است. بنابراین با جایگذاری $x = ۳$ در معادلهٔ دوم داریم:

$$\log(x+۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲ \Rightarrow \log(۳+۱) + \log(۲y+۹) = ۲$$

$$\log ۴(۲y+۹) = ۲ \Rightarrow ۴(۲y+۹) = ۱۰^۲ = ۱۰۰$$

$$۲y + ۹ = ۲۵ \Rightarrow y = ۸$$

۳ 234

$$۱\ \ ۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times ۲^{۲x+۲y} = ۱$$

$$\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷} = ۲^۰ \Rightarrow ۳x + ۲y - ۷ = ۰$$

$$۲\ \ \log y = ۲\log ۳ + \log x \Rightarrow \log y = \log ۳^۲ + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log ۹x \Rightarrow y = ۹x$$

با جایگذاری ۲ در ۱ داریم:

$$۳x + ۲ \times ۹x - ۷ = ۰ \Rightarrow ۲۱x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow y = ۹x = ۳$$

۲ 235 با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع $y = \log_۲ U(x)$ برابر $(-۱, +\infty)$ است. پس $U(x)$ باید در این بازه مثبت باشد. (حذف ۳ و ۴) از طرفی تابع نزولی است. پس $U(x)$ نمی‌تواند برابر $x+۱$ باشد؛ بنابراین گزینهٔ ۱ نیز نادرست است.

۳ 236 دو نقطهٔ $(-۱, ۰)$ و $(۱, ۳)$ روی نمودار تابع قرار دارند، پس:

$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow ۰ = \log_b(-۱+a) \Rightarrow -۱+a = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$f(۳) = ۱ \Rightarrow ۱ = \log_b(۳+a) \Rightarrow b = ۳+۲ = ۵$$

بنابراین $a \times b = ۱۰$ است.

۲ 237 دامنهٔ تابع به صورت $(\frac{۱}{۲}, +\infty)$ است، پس $\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ عبارت جلوی لگاریتم است:

$$۲(\frac{۱}{۲}) + a = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

از طرفی نقطهٔ $(۲, ۰)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس:

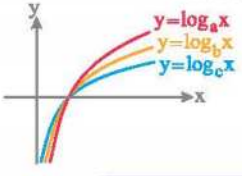
$$۰ = -۱ + \log_b(۲\times۲ + a) \Rightarrow ۱ = \log_b(۴+a) \Rightarrow b = ۴+a = ۴-۱ = ۳$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $y = -۱ + \log_۳(۲x-۱)$ است و طول نقطهٔ برخورد آن با خط $y = ۱$ برابر است با:

$$۱ = -۱ + \log_۳(۲x-۱) \Rightarrow ۲ = \log_۳(۲x-۱) \Rightarrow ۲x-۱ = ۳^۲ = ۹$$

$$۲x = ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$

۲ 238 با توجه به شکل رابطهٔ $c > b > a$ درست است.



۱ 239 چون مبنای لگاریتم‌ها عددی بزرگ‌تر از یک است، پس:

$$\log_۵(x-۱) \le \log_۵(۲x-۴) \Rightarrow x-۱ \le ۲x-۴ \Rightarrow ۴-۱ \le ۲x-x \Rightarrow ۳ \le x$$

۳ 240 وقتی ۲۰ درصد از ماده در یک ثانیه کاهش می‌یابد، یعنی در یک ثانیه ۸۰ درصد آن باقی می‌ماند. پس اگر مقدار اولیه $P_۰$ باشد، داریم:

ثانیه	مقدار باقی‌مانده
۱ ثانیه	$۰/۸P_۰$
۲ ثانیه	$۰/۸(۰/۸P_۰) = (۰/۸)^۲P_۰$
۳ ثانیه	$۰/۸(۰/۸P_۰)^۲ = (۰/۸)^۳P_۰$
⋮	⋮
t ثانیه	$p_۰(۰/۸)^t$

پس مقدار باقی‌مانده از این ماده در ثانیهٔ t اُم از رابطهٔ $t_۰ = P_۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید. حال فرض کنیم پس از t ثانیه به $\frac{۱}{۴}$ مقدار خودش می‌رسد، داریم:

$$P(t) = \frac{۱}{۴}P_۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}P_۰ = P_۰(۰/۸)^t \Rightarrow \frac{۱}{۴} = (۰/۸)^t \Rightarrow t = \log_{۰/۸}\frac{۱}{۴}$$

$$= \frac{\log\frac{۱}{۴}}{\log ۰/۸} \Rightarrow t = \frac{-۲\log ۲}{\log ۸ - \log ۱۰} = \frac{-۲(۰/۳)}{۳(۰/۳)-۱} = \frac{-۰/۶}{-۰/۱} = ۶$$

۲ 241 اگر انرژی آزاد شده را E فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow \log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۹/۵)$$

$$= ۱۱/۸ + ۱۴/۲۵ \Rightarrow \log E = ۲۶/۰۵ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۶/۰۵}$$

اگر قدرت زلزله‌ای برحسب ریشتر برابر M، باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله، برابر E، برحسب (Erg) است که از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

Trigonometric Functions

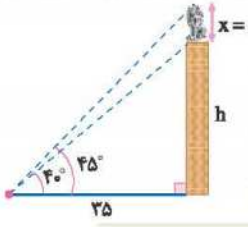
۱ 242 زاویهٔ بزرگ‌تر را x و زاویهٔ کوچک‌تر را y در نظر می‌گیریم. از آن‌جایی که $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان معادل $\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۱۲} = ۷۵^\circ$ است، پس:

$$\begin{cases} x + y = ۷۵^\circ \\ x - y = ۵^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲x = ۸۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

۴ 243 با توجه به رابطهٔ طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ داریم:

$$l = r.\theta \Rightarrow ۱۲ = r \times \frac{۶}{۵} \Rightarrow r = \frac{۵\times۱۲}{۶} = ۱۰cm \Rightarrow \text{قطر} = ۲r = ۲۰cm$$

۳ 244 با توجه به شکل زیر، برای پیداکردن ارتفاع مجسمه باید تانژانت زاویه‌های ۴۰° و ۴۵° را بنویسیم:



$$\tan ۴۰^\circ = \frac{h}{۳۵} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰} = \frac{h}{۳۵} \Rightarrow h = ۲۸$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{x+h}{۳۵} \Rightarrow ۱ = \frac{x+۲۸}{۳۵}$$

$$x + ۲۸ = ۳۵ \Rightarrow x = ۳۵ - ۲۸ = ۷$$

۲ 245 می‌دانیم اگر طول دو قطر متوازی‌الاضلاعی a و b و زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ به‌دست می‌آید. پس:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۸ \times \sin ۱۳۵^\circ = ۴۸\sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = ۴۸\sin ۴۵^\circ$$

$$= ۴۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۴\sqrt{۲}$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1 = 2\times\frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

۲ | 264 با توجه به قوانین انتقال داریم:

بنابراین طبق نمودار انتقال یافته، تابع $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ در بازهٔ $[0,\pi]$ فقط در $x=\frac{\pi}{4}$ با محور xها برخورد دارد.

---

۴ | 265 دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی $y=\sin(ax)$ و $y=\cos(ax)$ از رابطهٔ $T=\frac{2\pi}{|a|}$ به‌دست می‌آید. حال دورهٔ تناوب هر یک از توابع را به‌دست می‌آوریم:

۱) $T=\frac{2\pi}{|\pi|}=2$ ۲) $T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|}=4$ ۳) $T=\frac{2\pi}{|2\pi|}=1$ ۴) $T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|}=6$

---

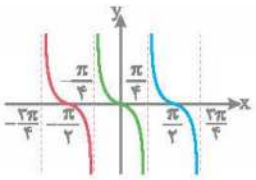
۳ | 266 با استفاده از فرمول طلایی ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$f(x)=1-\cos^2 3x=\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x$

$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|6|}=\frac{\pi}{3}$

---

۱ | 267 در شکل مقابل، نمودار تابع $y=\frac{-1}{3}\tan 2x$ در بازهٔ $(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ رسم شده است. با توجه به گزینه‌ها، تابع در بازهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ اکیداً نزولی و دورهٔ تناوب آن برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

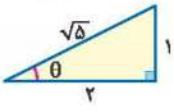


---

۲ | 268 با توجه به شکل، امتداد زاویهٔ θ محور تانژانت را در ۰/۵− قطع کرده است، پس $\tan\theta=-\frac{1}{2}$ است. از طرفی:

$\cos(\frac{3\pi}{2}-2\theta)=-\sin 2\theta=-2\sin\theta\cos\theta$ (ربع سوم)

حال برای به دست آوردن $\sin\theta$ و $\cos\theta$ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ θ درنظر می‌گیریم. با توجه به این انتهای کمان θ در ربع دوم است داریم:



$\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$-2\sin\theta\cos\theta=-2(\frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{4}{5}$

---

۳ | 269 با توجه به شکل صورت تست نکات زیر استخراج می‌شود:

۱) بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است که با قرار دادن ۱ به جای $\sin(b\pi x)$ به دست می‌آید، بنابراین $|a|=2$ است.

۲) دورهٔ تناوب تابع برابر ۶ است:

$T=\frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow 6=\frac{2}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{3}$

۳) چون نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، باید a و b هر دو مثبت یا هردو منفی باشند. با توجه به گزینه‌ها a و b را مثبت درنظر می‌گیریم، پس:

$a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

---

۲ | 270 می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$ است، بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $y=a+b\sin x$ است. حال چون نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، پس $b>0$ است:

۱) $y_{max}=a+b(1)=3$

از طرفی مقدار تابع در $x=-\frac{5\pi}{6}$ برابر صفر است، پس:

۲) $0=a+b\sin(-\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow a-\frac{b}{2}=0\Rightarrow a=\frac{b}{2}$

از ۱ و ۲ مقادیر $a=1$ و $b=2$ به‌دست می‌آیند، بنابراین مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{6}$ برابر است با:

$a+b\sin(\frac{\pi}{6})=1+2(\frac{1}{2})=2$

---

۲ | 271 مقدار تابع در $x=0$ برابر ۳ است، پس نقطهٔ $(0,3)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$3=a+\underbrace{\sin 0}_{\text{صفر}} \Rightarrow a=3$

از طرفی با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر $T=5-1=4$ است، بنابراین:

$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}\Rightarrow 4=\frac{2}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$

چون شکل نمودار در مبدأ ابتدا نزولی است، پس $b=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

در نتیجه ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$y=3-\sin(\frac{\pi}{2}x)\xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y=3-\sin(\frac{\pi}{2}\times\frac{25}{3})=3-\sin(\frac{25\pi}{6})$

$=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=3-\sin\frac{\pi}{6}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$

---

۳ | 272 با توجه به نمودار بیشترین مقدار تابع f برابر $\sqrt{3}$ است که با قراردادن ۱ به جای $\sin(x+\frac{\pi}{3})$ به‌دست می‌آید:

۱) $\max(y)=\sqrt{3}\Rightarrow a+b(1)=\sqrt{3}$

از طرفی نمودار از نقطهٔ $(\pi,-\frac{3}{2})$ می‌گذرد، پس:

$a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{2}\Rightarrow a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}\xrightarrow{1} a=0, b=\sqrt{3}$

تقسیم‌بندی محور xها در شکل صورت سؤال اشتباه است؛ که البته تأثیری در حل مسأله ندارد.

---

۳ | 273 ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$y=1+a\sin bx\cos bx=1+a\frac{1}{2}\sin 2bx=1+\frac{a}{2}\sin 2bx$

باتوجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، پس:

$1+|\frac{a}{2}|=\frac{3}{2}\Rightarrow|\frac{a}{2}|=\frac{1}{2}\Rightarrow|a|=1\Rightarrow a=\pm 1$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\pi$ است، پس:

$T=\frac{2\pi}{|2b|}\Rightarrow\pi=\frac{\pi}{|b|}\Rightarrow|b|=1\Rightarrow b=\pm 1$

از آن‌جایی که نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، پس a و b هر دو مثبت یا هردو منفی هستند. با توجه به گزینه‌ها a و b را مثبت درنظر می‌گیریم، پس:

$a+b=1+1=2$

۳ | 296 با توجه به ضابطهٔ توابع f و g، داریم:

۱) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1+x-2)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+6+2x)=9\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+6}{2x}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1-(x-2))=5\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+6-(2x))=5\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}((3x+1).(x-2))=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}((x^2+6).(2x))=14\end{cases}$

---

۳ | 297 با توجه به تساوی داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{f(x)-3}=1\Rightarrow\frac{2}{\lim\limits_{x\to 3}f(x)-3}=1\Rightarrow\lim_{x\to 3}f(x)-3=2$$

$$\lim_{x\to 3}f(x)=5\Rightarrow\lim_{x\to 3}\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{\lim_{x\to 3}f(x)+4}=\sqrt{5+4}=3$$

---

۴ | 298 وقتی $x\to 0^-$ داریم:

$$x\to 0^-\Rightarrow x<0\qquad [x]=-1,|x|=-x$$

حال حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4[x]-|x|}{|x|-[x]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4(-1)-(-x)}{(-x)-(-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-4+x}{-x+1}=\frac{-4}{1}=-4$$

---

۴ | 299 برای این که تابع در $x=0$ دارای حد باشد، باید حد راست و حد چپ آن در این نقطه برابر باشند:

۱) $x\to 0^+\Rightarrow x>0\Rightarrow|x|=x,[x]=0$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a(x)}{x}-4(0)\right)=a$$

۲) $x\to 0^-\Rightarrow x<0\Rightarrow|x|=-x,[x]=-1$

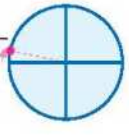
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{a(-x)}{x}-4(-1)\right)=-a+4$$

بنابراین از ۱ و ۲ داریم: $a=-a+4\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$

---

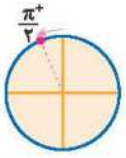
۱ | 300 با کمک دایرهٔ مثلثاتی، حاصل هریک از حدها را به دست می‌آوریم:

$x\to\pi^-$:



$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{|\sin x|}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{\sin x}=1$$

$x\to\frac{\pi^+}{2}$:



$$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}}[\cos x]=-1$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر $0+(-1)=-1$ است.

---

۱ | 301 چون تابع f در $x=-1$ حد دارد، پس حد چپ و حد راست آن در $x=-1$ باهم برابر هستند:

۱) $x\to(-1)^-\Rightarrow x<-1\Rightarrow[x]=-2,|x|=-x$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+[x]}{|x|}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-2}{-x}=\frac{1-2}{1}=-1$$

۲) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(2x+a)=-2+a$

بنابراین خواهیم داشت: $-2+a=-1\Rightarrow a=2$

---

۳ | 302 چون حد تابع f در $x=-1$ برابر ۵ است، پس حد راست و حد چپ تابع نیز برابر ۵ هستند:

۱) $x\to(-1)^+\Rightarrow x>-1\Rightarrow[x]=-1,|x|=-x$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}((b+1)[x]+|x|)=\lim_{x\to(-1)^+}(-(b+1)-x)$$

$$=-(b+1)-(-1)=-b-1+1=-b\Rightarrow -b=5\Rightarrow b=-5$$

۲) $x\to(-1)^-\Rightarrow x<-1\Rightarrow[x]=-2$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(a[x]+2bx-1)=\lim_{x\to(-1)^-}(-2a+2(-5)x-1)$$

$$=-2a-10(-1)-1=-2a+9=5\Rightarrow -2a=-4\Rightarrow a=2$$

---

۳ | 303 با جای‌گذاری $x=-2$ در کسر داده شده به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. پس:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+5x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(2x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x+1}$$

$$=\frac{-2-2}{2(-2)+1}=\frac{4}{3}$$

می‌توانستیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+5x+2}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to -2}\frac{2x}{4x+5}=\frac{2(-2)}{4(-2)+5}=\frac{4}{3}$$

---

۳ | 304 طول نقطهٔ تو خالی در نمودار تابع f، ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است. چون $x=2$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است، پس $a=2$ است. از طرفی با توجه به نمودار:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4\Rightarrow b=4\Rightarrow a+b=2+4=6$$

---

۲ | 305 وقتی $x\to 2^+$، مقدار $[x]$ برابر ۲ است، پس:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}2(x+2)=2\times(4)=8$$

---

۱ | 306 عبارت داخل قدرمطلق را تجزیه می‌کنیم تا بتوانیم آن را تعیین علامت کنیم و قدرمطلق را برداریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|(x-2)(x-3)|}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{|x-2|}^{+}\overbrace{|x-3|}^{-}}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-3)}{x}=\frac{-(2-3)}{2}=\frac{1}{2}$$

۲ 340 نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس:

$$f(۲)=۱\Rightarrow\frac{۲a+۱+\sqrt{۴\times(۲)^۲+۹}}{۳(۲)-۲}=۱\Rightarrow\frac{۲a+۱+۵}{۴}=۱$$

$$۲a+۶=۴\Rightarrow a=-۱$$

حال حاصل $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\sqrt{۴x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+|۲x|}{۳x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۲x}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

۱ 341 حاصل حد تابع در $-\infty$ برابر ۱- است، پس درجهٔ پرتوان صورت و مخرج کسر با هم برابر است، بنابراین $n=۱$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۳x-|۲x|}\overset{|۲x|=-۲x}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۳x+۲x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۵x}=\frac{a}{۵}=-۱\Rightarrow a=-۵\Rightarrow f(x)=\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$$

حال برای محاسبهٔ $\lim_{x\to۳} f(x)$، با جایگذاری $x=۳$ به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

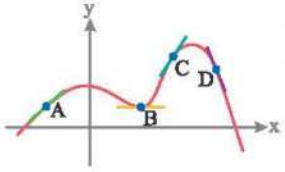
$$\lim_{x\to۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\times\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{\overbrace{(-۵x+۱۵)}^{-۵(x-۳)}(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{\underbrace{۹x^۲-(۴x^۲+۱۵x)}_{۵x(x-۳)}}=\lim_{x\to۳}\frac{-(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{x}$$

$$=\frac{-(۹+\sqrt{۳۶+۴۵})}{۳}=\frac{-(۹+۹)}{۳}=-۶$$

Differentiation D

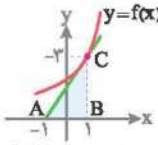
۴ 342 خط مماس بر نمودار را در نقاط نام‌گذاری شده رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار شیب خط مماس در نقطهٔ D منفی و در نقطهٔ B صفر است.



از طرفی شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ C بیشتر از نقطهٔ A است؛ بنابراین:

$$m_D<m_B<m_A<m_C$$

۳ 343 حد داده‌شده، برابر مشتق تابع f در $x=۱$ یعنی $f'(۱)$ است. از طرفی $f'(۱)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی f در $x=۱$ است؛ بنابراین:



$$f'(۱)=\text{شیب خط مماس}=\frac{BC}{AB}=\frac{۳}{۲}$$

۳ 344 در صورت کسر $f(۴)$ را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم حد داده‌شده را به تعریف مشتق تبدیل کنیم:

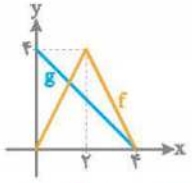
$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)+f(۴)-f(۴-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)}{h}+\lim_{h\to۰}\frac{f(۴)-f(۴-h)}{h}$$

$$=۳\lim_{۳h\to۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)}{۳h}+\lim_{-h\to۰}\frac{f(۴-h)-f(۴)}{-h}$$

$$=۳f'(۴)+f'(۴)=۴f'(۴)=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

۴ 345 مطابق شکل شیب خط مماس بر نمودار تابع f و g را در نقطهٔ $x=۱$ به ترتیب برابر $\frac{۴}{۲}=۲$ و $-\frac{۴}{۴}=-۱$ است، پس $f'(۱)=۲$ و $g'(۱)=-۱$ بوده و در نتیجه:



$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۲)+۲(-۱)=۴$$

۴ 346 نقطهٔ $A(-۲,-۳)$ روی منحنی است. پس $f(-۲)=-۳$ است. از طرفی دیگر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول ۲- برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین: $f'(-۲)=\frac{۱}{۲}$ حال اگر $y=x^۲f(x)$ باشد خواهیم داشت:

$$y'=۲x\times f(x)+f'(x)\times x^۲\Rightarrow y'(-۲)=-۴\times f(-۲)+f'(-۲)\times۴$$

$$y'(-۲)=-۴(-۳)+\frac{۱}{۲}(۴)=۱۲+۲=۱۴$$

۲ 347 مشتق تابع $f(x)=(۳x^۲-۷)(۲x-۵)^۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(۶x)(۲x-۵)^۳+۳\times۲\times(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۷)$$

$$\xrightarrow{x=۲} f'(۲)=(۱۲)(-۱)^۳+۶(-۱)^۲(۵)=-۱۲+۳۰=۱۸$$

۲ 348 حاصل عبارت خواسته شده برابر مشتق $(f.g)(x)$ در $x=۲$ است، پس:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(x+\sqrt{x^۲-x})^۳(x-\sqrt{x^۲-x})^۳$$

$$=\left((x+\sqrt{x^۲-x})(x-\sqrt{x^۲-x})\right)^۳=(x^۲-(x^۲-x))^۳=x^۳$$

$$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=۳x^۲\Rightarrow f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)=۱۲$$

۳ 349 حد خواسته شده همان مشتق تابع f در $x=\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-۱)\sqrt{x}-(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}$$

به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ حاصل $\sqrt{x}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین:

$$f'(\tfrac{۱}{۴})=\frac{(-۱)\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱}(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۳ 350 اگر ضابطهٔ f قبل از مشتق‌گیری ساده شود، بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم. در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتور گرفته و ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم، سپس $f'(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+۱\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۰$$

$$f'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}$$

۱ 351 اگر $f(a)=۰$ باشد و $y=f(x)\times g(x)$ باشد آنگاه:

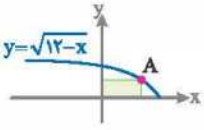
$$y'(a)=f'(a)\times g(a)$$

از آن‌جایی‌که عبارت $(x^۲-x-۲)$ به ازای $x=-۱$ صفر می‌شود، می‌توانیم فقط از عامل صفر شونده یعنی $(x^۲-x-۲)$ مشتق بگیریم و $x=-۱$ را در بقیهٔ عامل‌ها جای‌گذاری کنیم:

$$f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}\xrightarrow{\text{در } x=-۱} f'(x)=(۲x-۱)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$$

$$f'(-۱)=(-۲-۱)\sqrt[۳]{(-۱)^۲-۷(-۱)}=-۳\times\sqrt[۳]{۸}=-۳\times۲=-۶$$

۳ 420 مطابق شکل، نقطهٔ $A(x,\sqrt{12-x})$ یک رأس مستطیل است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با: $S(x)=x\sqrt{12-x}$

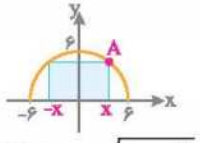


حال برای به دست آوردن بیشترین مساحت مستطیل، باید مشتق $S(x)$ را برابر صفر قرار دهیم، اما قبل از آن بهتر است تابع مساحت را کمی ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم، بنابراین x را به زیر رادیکال منتقل می‌کنیم:

$$S(x)=\sqrt{12x^2-x^3} \Rightarrow S'(x)=\frac{24x-3x^2}{2\sqrt{12x^2-x^3}}=0 \Rightarrow 24x-3x^2=0$$

$$x=8 \Rightarrow S_{max}=8\sqrt{12-8}=8\times 2=16$$

۴ 421 معادلهٔ نیم‌دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۶ به صورت $y=\sqrt{36-x^2}$ است. مطابق شکل نقطهٔ $A(x,\sqrt{36-x^2})$ یک رأس مستطیل است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



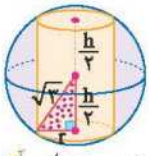
$S(x)=2x\sqrt{36-x^2}$

حال برای به دست آوردن بیشترین مساحت مستطیل، باید مشتق $S(x)$ را برابر صفر قرار دهیم، اما قبل از آن بهتر است تابع مساحت را کمی ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم، بنابراین x را به زیر رادیکال منتقل می‌کنیم:

$$S(x)=2\sqrt{36x^2-x^4} \Rightarrow S'(x)=\frac{72x-4x^3}{\sqrt{36x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 72x-4x^3=0$$

$$x^2=18 \Rightarrow x=\sqrt{18} \Rightarrow S_{max}=2\sqrt{18}\sqrt{36-18}=2\times 18=36$$

۱ 422 اگر ارتفاع استوانه برابر h و شعاع قاعدهٔ آن r باشد، طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث مشخص شده داریم:



$$(\frac{h}{2})^2+r^2=(\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{h^2}{4}+r^2=3 \quad [1]$$

از طرفی حجم استوانه برابر با $V=\pi r^2 h$ است. در فرمول حجم، به‌جای r^2 از رابطهٔ [1] عبارت $3-\frac{h^2}{4}$ را قرار می‌دهیم و سپس از تابع به‌دست آمده نسبت به h مشتق می‌گیریم:

$$V(h)=\pi(3-\frac{h^2}{4})h=3\pi h-\pi\frac{h^3}{4} \Rightarrow V'(h)=3\pi-\frac{3\pi h^2}{4}=0$$

$$3\pi-\frac{3\pi h^2}{4}=0 \Rightarrow h^2=4 \Rightarrow h=2$$

۲ 423 نقطه‌ای از ساحل که علی پیاده می‌شود را، D می‌نامیم. اگر x مسافت طی شده با سرعت v و در مدت زمان t باشد، طبق رابطهٔ $x=vt$ یا همان $t=\frac{x}{v}$ داریم:

زمان پارو زدن مسیر P تا D: $t_1=\frac{PD}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}$

زمان پیاده روی مسیر D تا B: $t_2=\frac{BD}{4}=\frac{8-x}{4}=2-\frac{1}{4}x$

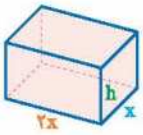
زمان کل رسیدن از P به B برابر با t_1+t_2 یعنی $t=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}+2-\frac{1}{4}x$ است.

برای این که ببینیم مینیمم مطلق این تابع به‌ازای چه مقدار x به‌دست می‌آید، معادلهٔ $t'=0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{2\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{4} \Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+9}$$

$$4x^2=x^2+9 \Rightarrow x=\sqrt{3}$$

۲ 424 تابع هزینه را به صورت زیر می‌نویسیم:



$$C(x)=\underbrace{150(x)(2x)}_{300x^2}+160\underbrace{(2xh+2(2x)h)}_{6xh}=\underbrace{300x^2+960xh}_{[1]}$$

حال از آن‌جایی که حجم مخزن برابر $10m^3$ است، داریم:

$$V=10 \Rightarrow x(2x)h=10 \Rightarrow h=\frac{5}{x^2} \quad [2]$$

با جای‌گذاری [2] در [1] تابع هزینه را برحسب x می‌نویسیم:

$$C(x)=300x^2+960x(\frac{5}{x^2})=300x^2+\frac{4800}{x}$$

حال برای به دست آوردن مینیمم تابع، مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(x)=0 \Rightarrow 600x-\frac{4800}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{600x^3-4800}{x^2}=0$$

$$600x^3-4800=0 \Rightarrow x^3=\frac{4800}{600}=8 \Rightarrow x=2(m)$$

Count without Counting

۱ 425 منظور از اتومبیل غیر برقی، بنزینی یا گازوئیلی است. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد انواع اتومبیل برابر است با:

حجم موتور، رنگ، مدل

$4\times 8\times 3\times 1\times 2=192$

غیر برقی ← اتومات

۲ 426 مسیرهایی که از A به B می‌توان رفت به صورت $(A\to C, C\to B)$ یا به‌صورت $(A\to D, D\to B)$ است. بنابراین تعداد راه‌های ممکن طبق اصل ضرب و اصل جمع برابر است با: $3\times 1+2\times 4=11$

۱ 427 رقم ۷ را کنار می‌گذاریم یعنی ارقام $\{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}$ را در اختیار داریم و چون صحبتی از غیر مجاز بودن تکرار به میان نیامده بنابراین تکرار ارقام مجاز است:

$8\times 9\times 5=360$

همه به جز صفر ← $\{0,2,4,6,8\}$

۳ 428 ارقامی که در اختیار داریم $\{1,3,5,7,9\}$ و رقم سمت چپ «۱» نمی‌تواند باشد: $4\times 4\times 3\times 2=96$

۱ 429 تعداد کل کدهای سه رقمی را به‌دست می‌آوریم و تعداد کدهایی که هر سه رقم آن‌ها زوج است را کنار می‌گذاریم: $6\times 6\times 6-4\times 4\times 4=152$

۴ 430 ارقام فرد عبارتند از $\{1,3,5,7,9\}$ بنابراین تعداد پلاک‌ها برابر است با:

$5\times 4\times 3\times 4\times 2\times 1=480$

۱ 431 برای طبقهٔ اول هر یک از سه رنگ را می‌توان استفاده کرد ولی برای سایر طبقه‌ها تنها ۲ انتخاب وجود دارد چون با طبقهٔ قبل خود نباید همرنگ باشند:

$3\times 2\times 2\times 2\times 2=48$

خرید آنلاین در gajmarket.com

نیمسازهای داخلی از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین این نقطه از همهٔ ساحل‌ها به یک اندازه دور است. دقت کنید اگر نقطه‌ای دیگر را درنظر بگیریم، ممکن است این نقطه از یک ساحل دورتر باشد اما در همان وضعیت به یک ساحل دیگر نزدیک‌تر خواهد بود.

۲ 538 روش استفاده شده توسط گلدباخ «استدلال استقرایی» بود، چون با مجموعهٔ محدودی از مشاهدات به یک نتیجه‌گیری کلی رسیده بود. [امروزه معلوم شده این حدس درست است اما هنوز کسی نتوانسته اثبات دقیقی برای آن ارائه دهد].

۲ 539 در این روش اثبات، از استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم زیرا از اصول و قضیه‌هایی استفاده شده است که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم [مانند اتحاد مربع دوجمله‌ای، زوج بودن یکی از دو عدد متوالی و...].

۳ 540 می‌دانیم زوج نبودن به معنای فرد بودن است، بنابراین:

$$n^۲ = \text{فرد} \Rightarrow n = \text{فرد} \xrightarrow{\text{عکس}} n = \text{فرد} \Rightarrow n^۲ = \text{فرد}$$

یعنی اگر n زوج نباشد، آن‌گاه $n^۲$ نیز زوج نیست.

۲ 541 چون در این روش اثبات، حکم را نادرست فرض کرده‌ایم و به یک تناقض رسیده‌ایم در واقع از روش برهان خلف برای اثبات یک حکم کلی استفاده کرده‌ایم.

۱ 542 چون نسبتی داده شده و نسبتی خواسته شده، می‌توانیم از عددگذاری استفاده کنیم. ولی مشکل این‌جاست که تناسب داده‌شده دارای یک سمت مجهول و یک سمت معلوم نیست، بنابراین ابتدا آن را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+۵} = \frac{y}{y+۳} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x}{(x+۵)-x} = \frac{y}{(y+۳)-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۵} = \frac{y}{۳} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۵}{۳}$$

حال می‌توانیم فرض کنیم $x=۵$ و $y=۳$ است، در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{۳x-y}{x+۲y} = \frac{(۳\times۵)-۳}{۵+(۲\times۳)} = \frac{۱۲}{۱۱} = \frac{۱۱+۱}{۱۱} = ۱+\frac{۱}{۱۱} = ۱\frac{۱}{۱۱}$$

۴ 543 هر چند یک نسبت داده شده، ولی چون نسبتی خواسته نشده، نباید از عددگذاری استفاده کرد، بنابراین از روش ضریب k استفاده می‌کنیم. یعنی:

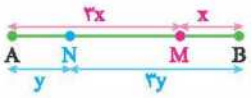
$$\frac{x}{۳} = y = z+۱ = k \Rightarrow \begin{cases} x = ۳k \\ y = k \\ z = k-۱ \end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم تا مقدار k و در نتیجه مقدار z به‌دست آید:

$$۳k+۳(k)+(k-۱) = ۲۰ \Rightarrow ۷k = ۲۱ \Rightarrow k = ۳ \Rightarrow z = ۳-۱ = ۲$$

۲ 544 پاره‌خط‌ها را برحسب دو پارامتر مختلف نشان می‌دهیم و به روی شکل منتقل می‌کنیم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{BN}{AN} = ۳ \Rightarrow \begin{cases} MA = ۳x \\ MB = x \end{cases}, \begin{cases} BN = ۳y \\ AN = y \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x+x = ۱۲ \Rightarrow x = ۳ \\ ۳y+y = ۱۲ \Rightarrow y = ۳ \end{cases}$$

حال با به دست آمدن مقادیر x و y طول پاره‌خط MN به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$MN = AB - x - y = ۱۲ - ۳ - ۳ = ۶$$

۴ 545 می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها با نسبت اضلاع رابطه عکس دارد. بنابراین کافیست به‌جای $\frac{h_a}{h_b}$ نسبت $\frac{b}{a}$ و به‌جای $\frac{h_b}{h_c}$ نسبت $\frac{c}{b}$ را قرار دهیم:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = \frac{۳}{۶} + \frac{۵}{۳} = \frac{۳}{۶} + \frac{۱۰}{۶} = \frac{۱۳}{۶}$$

۲ 546 اگر در یک تست اندازهٔ پاره‌خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء‌به‌جزء استفاده کنیم:

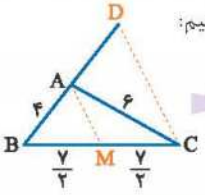
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{x+۱} = \frac{x+۳}{۳x-۱} \Rightarrow ۳x^۲ - x = x^۲ + ۴x + ۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۵x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(۲x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -\frac{۱}{۲} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۴ 547 چون MN جزء داده‌های مسئله است، باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۳}{۳+۵} = \frac{۶}{BC} \Rightarrow ۳BC = ۴۸ \Rightarrow BC = ۱۶$$

۲ 548 چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می‌رویم و چون BD را می‌خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

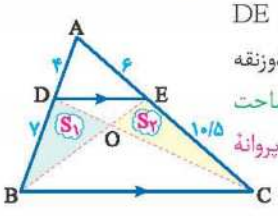


$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{BD} = \frac{\frac{۷}{۲}}{۷} \Rightarrow BD = ۸$$

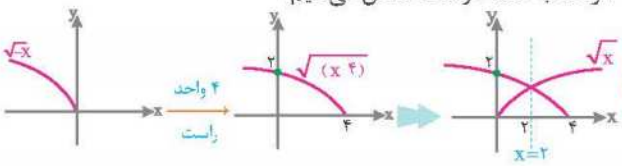
۲ 549 همان‌طور که در شکل دیده می‌شود طول هر ۴ قطعه روی اضلاع مثلث مشخص است، و معلوم بودن هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث خبر از عکس تالس می‌دهد [خبر آمد، خبری در راه است!] بنابراین کنترل می‌کنیم ببینیم واقعاً خبری هست یا نه؟!

$$\frac{۴}{۷} \overset{?}{=} \frac{۶}{۱۰/۵} \Rightarrow \underbrace{۴\times۱۰/۵}_{۴۲} = \underbrace{۶\times۷}_{۴۲} \Rightarrow BC \parallel DE$$

پس در چهارضلعی DECB قاعده‌های DE و BC موازی‌اند، یعنی این چهارضلعی ذوزنقه است. بنابراین مثلث‌های رنگ‌شده، هم‌مساحت هستند. [در هر ذوزنقه مساحت بال‌های پروانهٔ متکی به ساقین با هم برابر است.]



۳ 740 ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه کرده و سپس آن‌را ۴ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودار $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt{-x+4}$ نسبت به خط $x=2$ تقارن دارند.

---

۲ 741 اگر زمانی که ماشین B به تنهایی برای تکمیل کار نیاز دارد برابر با x باشد آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که ماشین B در هر ساعت، $\frac{1}{x}$ کار انجام می‌دهد و بنابراین براساس شرط مسئله ماشین A در هر ساعت، $\frac{2}{x}$ کار را انجام می‌دهند. از آن‌جایی که هر دو باهم در ۴ ساعت کار را انجام می‌دهند، حاصل‌جمع کار انجام شده توسط دو ماشین در یک ساعت برابر با $\frac{1}{4}$ کل کار است. یعنی:

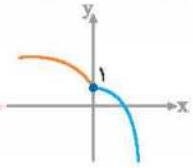
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=12$$

بنابراین ماشین B کل کار را در ۱۲ ساعت و در نتیجه ماشین A کل کار را به تنهایی در ۶ ساعت انجام می‌دهد.

---

۲ 742 ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1; & x\geq 0\\ \sqrt{-x}+1; & x<0\end{cases}$$



حال ضابطهٔ وارون آن را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-x^2+1\Rightarrow x^2=1-y\Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y}\xrightarrow{x\geq 0}y^{-1}=\sqrt{1-x}$$

$$y=\sqrt{-x}+1\Rightarrow\sqrt{-x}=y-1\Rightarrow -x=(y-1)^2\Rightarrow y^{-1}=-(1-x)^2$$

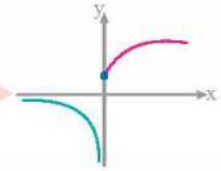
با توجه به این‌که در تابع f برد ضابطهٔ $y=\sqrt{-x}+1$ برابر $y>1$ و برد ضابطه $y=-x^2+1$ برابر $y\leq 1$ است، پس:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}; & x\leq 1\\ -(1-x)^2; & x>1\end{cases}$$

---

۳ 743 نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1; & x\geq 0\\ \frac{1}{x}; & x<0\end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f یک‌به‌یک است؛ اما از آن‌جایی که ابتدا نزولی و سپس صعودی بوده، پس غیریکنوا است.

---

۳ 744 ابتدا دامنهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\Rightarrow\underbrace{-x^2+6x-8}_{-(x-2)(x-4)}>0\Rightarrow 2<x<4\Rightarrow D_g=(2,4)$$

از طرفی با توجه به نمودار $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ با دامنهٔ $-2\leq x\leq 4$ است. پس:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{-2\leq x\leq 4\,|\,2<\frac{1}{2}x+1<4\}$$

$$=\{-2\leq x\leq 4\,|\,2<x<6\}=(2,4]$$

---

۳ 745 نمودارها در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ متقاطع‌اند. پس این دو نقطه در معادلهٔ $3^{Ax+B}=x^2$ صدق می‌کند:

$$\text{(1)}\ x=1:3^{A+B}=1\Rightarrow A+B=0$$

$$\text{(2)}\ x=3:3^{3A+B}=3^2\Rightarrow 3A+B=2$$

$$\Rightarrow A=1, B=-1$$

بنابراین $f(x)=3^{x-1}$ بوده و برای مشخص کردن محل برخورد آن با محور y به جای x صفر قرار می‌دهیم:

$$f(0)=3^{0-1}=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

---

۳ 746 به جای $(\sqrt{6}+2)^2$ می‌نویسیم $10+4\sqrt{6}$ و داریم:

$$\log(\sqrt{6}-2)+\frac{1}{2}\log(\sqrt{6}+2)^2=\log(\sqrt{6}-2)+\frac{\not{2}}{\not{2}}\log(\sqrt{6}+2)$$

$$=\log(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=\log(6-4)=\log 2=k$$

---

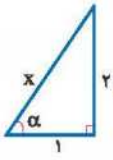
۲ 747 در صورت کسر از رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و در مخرج کسر از رابطهٔ $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=2\Rightarrow\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=2$$

$$\Rightarrow\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow\sin 2x=\frac{2\times 2}{1+2^2}=\frac{4}{5}$$

---

۲ 748 چون انتهای کمان α در ربع دوم است، پس $\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی است:



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}x=\sqrt{5}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \cot\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

حال هر یک از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)=\sin(2\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{9\pi}{2}-\alpha)=\cos(4\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{5\pi}{2})=-\tan(\frac{5\pi}{2}-\alpha)=-\tan(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha$$

ریاضی‌نامه MATHEMATICS
آزمون‌های جامع شبیه‌ساز
خرید آنلاین در gajmarket.com