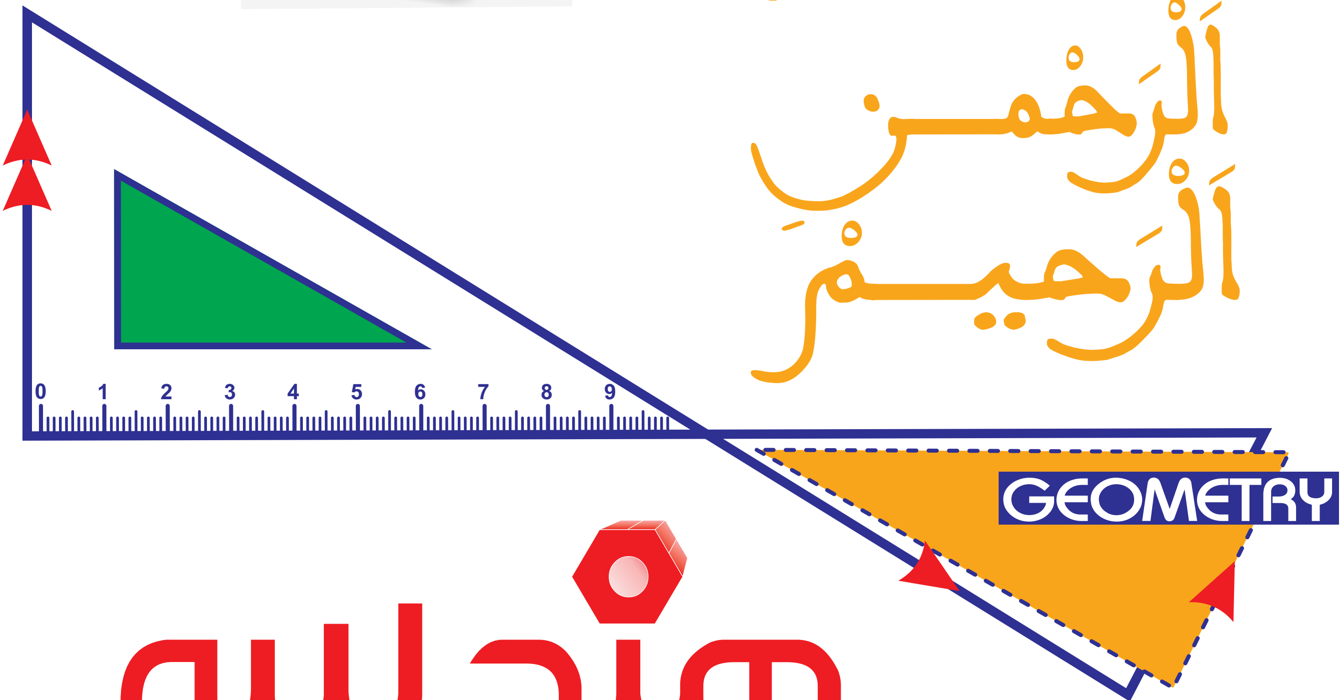
بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ



هندسه جامع کنکور

اگرچه در دانش کمی که داریم با یکدیگر متفاوتیم، اما در نادانی بی‌نهایتمان همه با هم برابریم!!

کارل پوپر

انتشارات بین‌المللی گاج

جامع هندسه کنکور

در دور دنیا در نیم ساعت

ناشر	انتشارات بین‌المللی گاج
مدیر مسئول	مهندس ابوالفضل جوکار
معاونت علمی	مهندس محمد جوکار
مدیر تالیف	مهندس علی منصف شکری
عنوان کتاب	هندسه جامع کنکور
مؤلفان	مهندس علی منصف شکری، مهندس محمدرضا حسینی‌فرد
مدیرفنی	مرجان جلال
صفحه آرا	مرجان جلال، فرزانه رجبی
نظارت علمی	مهندس کیوان دارابی
طراح جلد	منصور ساواتی،سعید شمس
گرافیست	مینا بابا احمدی فرد
چاپ و صحافی	گاج
مدیر چاپ	علی مزرعتی
شمارگان	۱۵۰۰ نسخه
نوبت چاپ	اول (۱۳۹۹)
قیمت	٦۰۰۰۰ تومان
صندوق پستی	۱۳۱٤٥ - ۳۷۷
☎	۰۲۱ - ٦٤۲۰
📍	فروشگاه مرکزی : تهران .میدان انقلاب .نبش بازارچه کتاب

شناسنامه

سرشناسه: منصف شکری، علی، ۱۳٥٤،
عنوان: هندسه جامع کنکور
شناسه افزوده: حسینی فرد، محمدرضا، ۱۳٦۲
مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین‌المللی گاج،۱۳۹۹
مشخصات ظاهری: ۱۷٦ ص، مصور
فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های دور دنیا نیم ساعت گاج می‌باشد.
بها: ٦۰۰۰۰ تومان
نوبت چاپ:اول
شابک: ۷-۰٥۳٤-۰۳-٦۲۲-۹۷۸
شماره کتابشناسی ملی: ۷٥۰۲٤۸۷

به نام خدا

دوست خوب نادیده‌ام، سلام

آیا می‌دانید برای تهیهٔ هر تن کاغذ ۱۷ اصله درخت سبز قطع می‌شود؟ آیا می‌دانید برای تولید یک عنوان کتاب ۲۰۰ صفحه‌ای در قطع رحلی و در شمارگان ۲۰۰۰ نسخه یک تن کاغذ مصرف می‌شود؟

لذا شایسته است پس از مطالعهٔ کتاب حاضر آن را در وب سایت www.mygaj.com قرار دهید تا از تولید مجدد آن جلوگیری و در مصرف کاغذ صرفه‌جویی شود.

باشد که شما دوست خوب نادیده‌ام با این حرکت به ظاهر کوچک، گامی بلند در حفظ منابع طبیعی کرهٔ زمین برداشته باشید.

ارادتمند شما

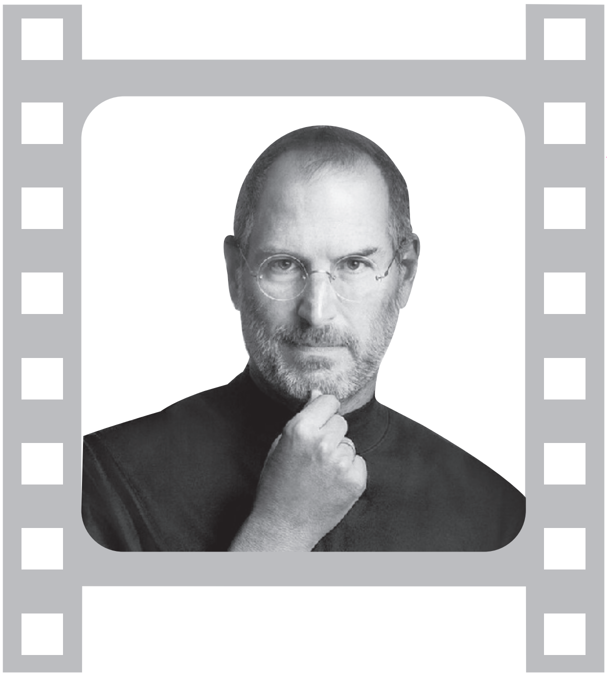
ابوالفضل جوکار

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %


حاضرم تمام دستاوردم ازتکنولوژی را از دست بدهم تا بتوانم یک بعد از ظهر با سقراط صحبت کنم !!!
استیو پاول جابز

Google

Steven Paul Jobs



من به کارهای بسیاری که انجام نداده‌ام هم افتخار می‌کنم، راز موفقیت اَپل هم همین است، ما وقت خود را در کارهای که نباید انجام دهیم، تلف نکردیم!!!

استیوجابز

معمولاً وقتی اسم کتاب جمع‌بندی به میان می‌آید، آدم ناخودآگاه به یاد کتاب‌های کوچک و جیبی با فونت ریز [و بعضاً ناخوانا] می‌افتد که بتواند در جیب جا شود، شاید روزگاری در دهه‌های پیشین این گونه بود اما واقعیت کنکور این روزها نشان می‌دهد که کنکور بزرگ‌تر از آن است که بتواند در جیب جا شود!!! تست‌های کنکور دیگر مانند دهه‌های پیشین آسان نیست! و با روش‌های نخ‌نما شدهٔ بعضی مؤسسات فریب‌کار حل نمی‌شود! صدالبته واقعیت بزرگ‌تر که شاید از چشم ناشران پنهان مانده آن است که تحقیقات در کشورهای مدرن و پیشرفتهٔ دنیا مانند نروژ، فنلاند و ... نشان داده است که روش سنتی «آموزش برای حل مسئله» دیگر روی نسل امروزی جواب نمی‌دهد و کارایی لازم را ندارد، نسل پسا استیو جابز که حوصلهٔ خواندن یک متن نیم‌صفحه‌ای را نیز ندارد! از این رو محققان عرصهٔ آموزش در دنیا چند سالی است این روش را با روش «یادگیری از طریق حل مسئله» جایگزین کرده‌اند. این روش از قضا همان روشی است که تمام دانش‌آموزان و دانشجویان سراسر دنیا در روزهای منتهی به امتحان و مخصوصاً شب امتحان از آن استفاده می‌کنند، یعنی چندین نمونه سوال [یا به قول قدیمی‌ها پلی کپی] حل می‌کنند تا مطالبی را که طی ترم به طور پراکنده خوانده‌اند، در ذهن خود تثبیت و جمع‌بندی کنند و بر آن تسلط یابند. ما در این مجموعه کتاب‌ها رفتار دانش‌آموزان را مبنا قرار دادیم و کارهای بسیاری را در این کتاب انجام دادیم، امّا در عین حال به کارهای بسیاری که انجام ندادیم و وقت خود را در آن تَلف نکردیم افتخار می‌کنیم، چون اطمینان داریم راز موفقیّت این کتاب همان کارهای انجام نشده است!!!

[مدیر واحد نوآوری و استراتژی تألیف]

Wikpedia . 1 min ago

Home Collections Recent More

«ما در رقابت با هیچ‌کس جز خودمان نیستیم،

هدف ما مغلوب نمودن آخرین کاری است که انجام داده‌ایم!!!»

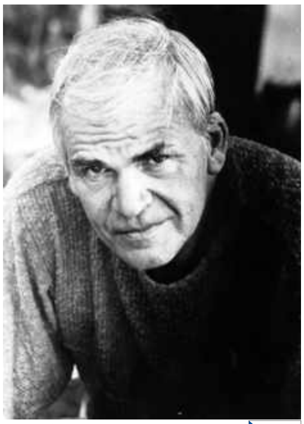
بیل گیتس

- اگر تفاوت بسیاری در بافت تست‌های انتخاب شده در این کتاب، نوع طبقه‌بندی آن‌ها و نحوهٔ نگارش پاسخنامهٔ تشریحی تست‌ها به چشم می‌خورد دلیل آن رقابت تنگاتنگ مؤلفان کتاب با خودشان در هر روز تألیف این کتاب است.
- اگر صفحه‌آرایی و طراحی داخلی متفاوتی در این کتاب احساس می‌شود، نتیجهٔ رقابت نفس‌گیر و طاقت‌فرسای مدیر فنی و صفحه‌آرایی ارشد این کتاب مرجان جلال و تیم تحت رهبری او با خودشان و شکست قطعی خودشان درکارهای قبلی است!
- اگر تفاوتی در طراحی و گرافیک این کتاب نسبت به سایر کتاب‌ها احساس می‌شود نتیجه رقابت شانه به شانهٔ گرافیست ارشد این مجموعه خانم مینا بابا احمدی فرد با خودش و تلاش برای شکست پی‌درپی خودش در طراحی است!
- و در نهایت اگر تمام این تفاوت‌ها را در این مجموعه کتاب‌ها حس می‌کنید نتیجهٔ رقابت و مبارزهٔ دائمی من و مدیران ارشدگاج با خودمان برای شکست دادن هر روزهٔ خودمان است!

مدیر تألیف : علی منصف شکری

Dr.Viktor Frankl

Neil.Gaiman



Milan.Kundera

دکتر ویکتور فرانکل در نامه‌ای خطاب به معلمان سراسر جهان برای تمام تاریخ این‌گونه می‌نویسد: من اتاق‌های گازی را دیدم که توسط بهترین مهندسین طراحی می‌شدند، من پزشکان ماهری را دیدم که کودکانی معصوم و بی‌گناه را به راحتی مسموم می‌کردند، من پرستارانی کاربلد را دیدم که انسان‌ها را با تزریق یک آمپول به قتل می‌رساندند و مجموع این دلایل مرا به آموزش مشکوک کرد. از شما تقاضا می‌کنم که تلاش کنید قبل از تربیت دانش‌آموزانتان به عنوان یک دکتر یا یک مهندس از آن‌ها یک انسان بسازید تا روزی تبدیل به جانوران روانی دانشمند نشوند !!!

به دانش آموزان خود بیاموزید بهترین ثروت آن‌ها انسانیت است.

من فهرستی از آن‌چه در مدرسه به ما یاد نمی‌دهند را تهیه کرده‌ام:

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه کسی را دوست بداریم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه در شهرت به درستی زندگی کنیم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه در گمنامی، از زندگی لذت ببریم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که چگونه از کسی که دوستش نداریم جدا شویم.

آن‌ها به ما یاد نمی‌دهند که به کسی که در حال مرگ است چه بگوئیم.

آن‌ها به ما هیچ چیزی را که ارزش یاد گرفتن داشته باشد، یاد نمی‌دهند.

هیچ وسیله‌ای برای تشخیص تصمیم درست وجود ندارد، زیرا هیچ مقایسه‌ای امکان‌پذیر نیست.

در زندگی با همه‌چیز برای نخستین بار برخورد می کنیم، مانند هنرپیشه‌ای که بدون تمرین وارد صحنه شود اما اگر اولین تمرین زندگی، خود زندگی باشد، پس برای زندگی چه ارزشی می‌توان قائل شد؟

این است که زندگی همیشه به یک طرح شباهت دارد اما حتی طرح هم کلمهٔ درستی نیست، زیرا طرح همیشه زمینه سازی برای آماده کردن یک تصویر است،

اما طرحی که زندگی ماست طرح هیچ چیز نیست! طرحی بدون تصویر است !!!

نظارت علمی و کارشناسی نهایی:

مهندس کیوان دارابی

همکاران تالیف

With Collaboration

محمد صحت‌کار .... M. Sehat kar

مهندس محسن اسمعیلی .... M . Esmaeili

مهندس امین خوانین‌زاده .... A.KHavanin zadeh

ویراستاران علمی

Editorial Board

مهندس مریم ساسانی .... M. Sasani

دکتر پیام طیوب .... Dr . P. tayoub

دکتر آرمان آشتاب .... Dr . A. Ashtab

مهندس ایمان وهابی .... E . Vahabi

کارشناسان علمی

Expert Scientific

مهندس بهرام جلالی .... B . Jalali

مهندس نوید اورازانی شجاعی .... N. O. Shojaee

مهندس حسین پیرزاد .... H. Pirzad

مهندس محمد حسین حشمت‌الواعظین .... M . Vaezin

مهندس حسین خزائی .... H. khazaee

مهندس محمد ارباب بهرامی .... M. Arbab bahrami

مهندس سوگند روشنی .... S. Roshani

مهندس محمد عسکری .... M. Askari

PETER SCHOLZE
FIELDS:2018 1987

Matrix$_{m\times n}$

ماتریس و کاربردها

1. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۴ & y \\ ۷ & ۸ & ۹ & x-۲ \end{bmatrix}$ اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم از درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، حاصل $\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۷ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

2. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ مفروض باشد، به‌طوری که برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$، برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲+j$، در این صورت ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۶ & ۷ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$

3. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۱ & a-۲ \\ b+۳ & b-۲ \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

4. به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $x=۱, y=-۷$ ۲) $x=۲, y=-۷$ ۳) $x=۲, y=-۵$ ۴) $x=۱, y=-۵$

5. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۵ \\ ۲ & z-۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & x+y \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

6. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$، $b_{ij}=i^۲+j^۲$ حاصل $۲A-B+I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$

7. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲x & -۱ \\ x+۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & ۱ \\ x & ۵ \end{bmatrix}$ و درایهٔ سطر دوم و ستون اول از ماتریس AB برابر ۷ باشد، درایهٔ سطر سوم و ستون اول از BA کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۱۳

8. اگر $A=[i-j]_{۲\times۳}$ و $B=[i+j]_{۴\times۲}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس BA کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۵- ۴) ۵

NOTE

9. اگر A, B, C, D چهار ماتریس مربعی و هم‌مرتبه و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن‌ها باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $ABC+ADC=A(B+D)C$
۲) $AC+C=(A+I)C$
۳) $BA+AC=A(B+C)$
۴) $BC-2B=B(C-2I)$

10. اگر A, B, C ماتریس‌های 2×2 و $BC=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ حاصل $(AB+2B)(CA+C)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}10 & 14\\14 & 10\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}5 & 7\\7 & 5\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}7 & 5\\5 & 7\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}14 & 10\\10 & 14\end{bmatrix}$

11. اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون و $AB+BA=[i+j]_{2\times2}$ و $A-B=[i^2-j]_{2\times2}$ باشد، حاصل A^2+B^2 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 1\\9 & 5\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}1 & -1\\9 & 5\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\8 & 4\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\9 & 5\end{bmatrix}$

12. اگر دو ماتریس $A=[i+mj]$ و $B=\begin{bmatrix}m+1 & 3\\3 & x\end{bmatrix}$ برابر باشند، $m+x$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۲

13. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 3\\5 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}7 & 6\\b & 3\end{bmatrix}$ در شرایط $AB=BA$ صدق کنند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

14. از رابطهٔ ماتریسی $[x \quad 2x \quad -1]\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\4 & 0 & -2\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$ عدد غیرصفر x، کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$
۲) $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{4}{9}$
۴) $\frac{3}{5}$

15. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A^{10} کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۲۸

16. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & \log_2 3\\\log_3 2 & 0\end{bmatrix}$ حاصل A^{98} کدام است؟

۱) A
۲) I
۳) $-A$
۴) $-I$

17. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}$ ماتریس A^7-A^4 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & -3\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\3 & -3\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -3\end{bmatrix}$

18. اگر $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ و $a_{ij}=\begin{cases}2 & ; i=j\\1 & ; i\neq j\end{cases}$ و داشته باشیم $A^{10}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ حاصل $a-b$ کدام است؟

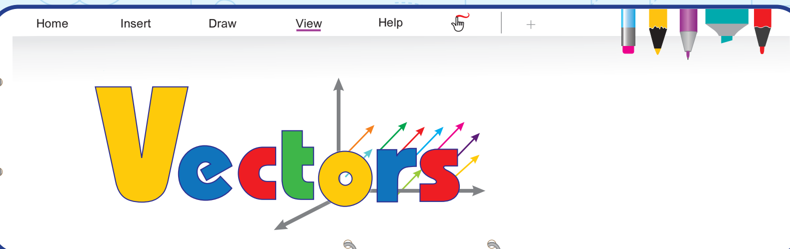
۱) -2
۲) -1
۳) ۲
۴) ۱

19. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^4+B^4 کدام است؟

۱) ۶۴
۲) ۶۵
۳) ۶۶
۴) ۶۷

NOTE

STANISLAV SMIRNOV
FIELDS:2010 1970

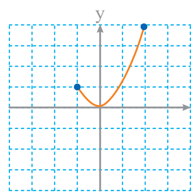
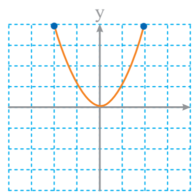
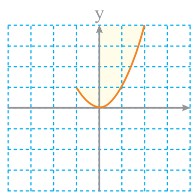
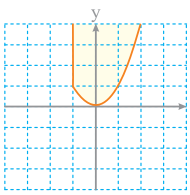


بردارها

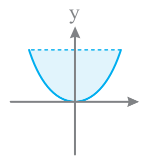
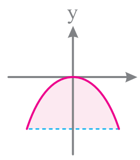
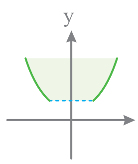
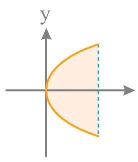
166. نمودار رابطهٔ $\{(x,y) : x=۱ \,,\, -۱\le y\le ۳\}$ به کدام صورت است؟

۱) مستطیلی به ابعاد ۲×۴
۲) یک پاره‌خط افقی به طول ۲
۳) دو خط موازی به فاصلهٔ ۲
۴) یک پاره‌خط قائم به طول ۴

167. نمودار رابطهٔ $y=x^۲$ و $-۱\le x\le ۲$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

168. نمودار رابطهٔ $x^۲\le y<۲$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

169. اگر نقطهٔ $A(m-۱, m, ۲)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار گرفته باشد، حدود m به کدام صورت باید باشد؟

۱) $m<۰$
۲) $m>۱$
۳) $۰<m<۱$
۴) $۱<m<۲$

170. اگر $A(۱,۲,۳)$ و $B(۴,-۲,۴)$ باشد، اندازهٔ تصویر پاره‌خط AB روی صفحهٔ xy کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۵

171. کدام خط با هر دو صفحهٔ xz و yz موازی است؟

۱) $\begin{cases}x=۲\\y=۱\end{cases}$
۲) $\begin{cases}x=۳\\z=۴\end{cases}$
۳) $\begin{cases}y=۱\\z=۵\end{cases}$
۴) $z=۲$

172. معادلهٔ صفحهٔ شامل خط $D:\begin{cases}x=۱\\z=۲\end{cases}$ و نقطهٔ $A(۳,۴,۲)$ کدام است؟

۱) $x=۱$
۲) $z=۲$
۳) $x=۳$
۴) $y=۴$

173. خط $D:\begin{cases}x+y=۳\\x-y=۱\end{cases}$ بر کدام صفحه عمود است؟

۱) $x=۱$
۲) $y=-۱$
۳) $z=۳$
۴) $x=۲$

174. صفحهٔ گذرا از $A(۱,۲,۳)$ و عمود بر هر دو صفحهٔ $P_۱: x=۴$ و $P_۲: y=۵$ کدام است؟

۱) $y=۲$
۲) $x=۱$
۳) $z=۳$
۴) $z=۵$

NOTE

175. سه وجه یک مکعب مستطیل بر صفحات مختصات واقع است و خط به معادلهٔ $D:\begin{cases}x=۳\\y=۲\end{cases}$ شامل یکی از یال‌های آن است، اگر نقطه‌ای به ارتفاع ۲ واقع بر این خط یکی از رأس‌های مکعب مستطیل باشد، حجم آن کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

176. در یک مکعب‌مستطیل یکی از رأس‌ها مبدأ مختصات و معادلهٔ دو وجه آن $y=۵$ و $z=۴$ و معادلهٔ یکی از یال‌های آن $\begin{cases}x=۲\\z=۴\end{cases}$ است، حجم این مکعب‌مستطیل کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

177. اگر نقطهٔ $B(۰,۴,۱)$ انتهای بردار $\overrightarrow{AB}=(۱,۲,-۱)$ باشد، فاصلهٔ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور oz از قرینهٔ آن نسبت به صفحهٔ xz کدام است؟

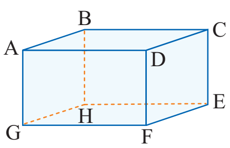
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۲

178. نقاط $A(۵,-۴,۱)$, $B(-۱,۲,۴)$, $O(۰,۰,۰)$ مفروض هستند و $\overrightarrow{AM}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}$ ، مقدار $|\overrightarrow{OM}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$

179. اگر دو بردار $a=(۲,۱,m)$ و $b=(-۱,۲k,۱)$ موازی باشند، آن‌گاه مقدار $m\times k$ کدام است؟

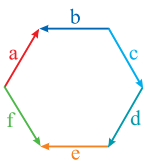
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$



180. در مکعب مستطیل شکل روبه‌رو، حاصل $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DG}$ کدام است؟

۱) $\overrightarrow{BH}$ ۲) $\overrightarrow{AH}$

۳) $\overrightarrow{BG}$ ۴) $\overrightarrow{GE}$



181. در شش ضلعی منتظم شکل مقابل، حاصل جمع همهٔ بردارهای مشخص شده کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $۲d$

۳) $۲c$ ۴) $-۲b$

182. اگر $a=(۱,۲,۲)$, $b=(۳,-۱,-۱)$ دو بردار باشند، اندازه‌ی قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار a و b کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲۲}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

183. نقاط $A(۱,۱,۲)$, $B(۳,۱,۰)$, $C(-۱,۴,۷)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث باشد، حاصل $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ کدام است؟

۱) $i+۲j+۵k$ ۲) $۳i-j-۲k$ ۳) $i+j$ ۴) $\bar{O}$

184. اگر بردارهای $a=(۱,۲,-۲)$ و $b=(۲,۳,-۱)$ به‌ترتیب معرف نیروی محرکهٔ هواپیما و نیروی باد باشند، بردار مسیر فرود خرچنگی هواپیما کدام است؟

۱) $(۳,۵,-۱)$ ۲) $(۱,۱,۱)$ ۳) $(۴,۲,۰)$ ۴) $(۳,۵,-۳)$

185. اگر a و b دو بردار باشند که $a=(m,۲,-۱)$ و $|b|=\sqrt{۴۱}$ و دو بردار $a+b$ و $a-b$ بر هم عمود باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

186. اگر بردار $a+b$ نیمساز زاویهٔ دو بردار $a=(۷,۴,۱)$ و $b=(۵,۵,m)$ باشد، m کدام است؟

۱) ±۴ ۲) ±۳ ۳) ±۲ ۴) ±۱

187. بردار نیمساز دو بردار $a=(۲,۱,-۲)$ و $b=(-۶,۳,۲)$ کدام است؟ (داخل - ۹۲)

۱) $(-۱,۳,۲)$ ۲) $(۱,۴,۲)$ ۳) $(۱,۴,-۲)$ ۴) $(-۱,۴,-۲)$

NOTE

252. اگر محیط یک مثلث برابر با ۷۲ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث برابر نباشند آنگاه اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۶

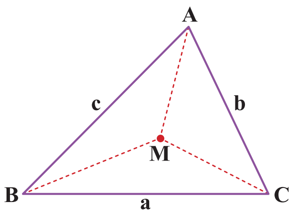
۳) ۳۰ ۴) ۲۴

253. محیط مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۲۴ است. کدام عدد می‌تواند اندازهٔ ساق این مثلث باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۱۳

254. اگر در شکل مقابل $MA+MB+MC=12$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c$ کدام عدد ممکن است باشد؟



۱) ۱۶

۲) ۲۴

۳) ۸

۴) ۱۲

255. پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ M قطع کند. سپس به مرکز M و شعاع ۴ کمانی می‌زنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD چگونه است؟

۱) لوزی با محیط ۲۰ ۲) مربع به مساحت ۱۲

۳) متوازی الاضلاع به محیط ۲۴ ۴) مستطیل به قطرهای ۶ و ۸

256. پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است؛ عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع ۵ کمانی می‌زنیم تا عمود منصف را در C و D قطع کند. چهار ضلعی ACBD کدام است؟

۱) مستطیل به قطر ۸ و ضلع ۵ ۲) لوزی به محیط ۲۰

۳) لوزی با محیط ۱۰ ۴) مستطیل به مساحت ۴۸

257. پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است؛ از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB دایره‌ای به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. یکی از قطرهای دایره آن را در C و D قطع می‌کند. چهار ضلعی ACBD:

۱) متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۵ و ۱۰ ۲) مستطیل به ضلع ۱۰

۳) مستطیل به قطر ۱۰ ۴) مربع به ضلع ۵

258. در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و به شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع کدام است؟ (داخل ـ ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

259. در یک متوازی‌الاضلاع، یک ضلع ۷ و یک قطر ۱۹ است. برای این‌که در رسم متوازی‌الاضلاع با خط‌کش و پرگار جواب منحصر به فردی حاصل شود، اندازهٔ ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۲۷ ۴) ۲۳

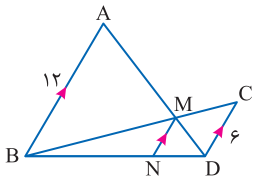
260. اندازهٔ دو ساق یک ذوزنقه ۴ و ۱۰ و قاعدهٔ کوچک آن ۷ است. قاعدهٔ بزرگ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۲

۳) ۱۹ ۴) ۱۰

NOTE

312. در شکل زیر اندازهٔ MN کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۶

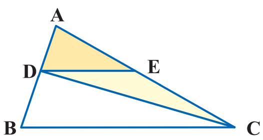
313. در ذوزنقهٔ ABCD به قاعده‌های ۳ و ۶ از محل تلاقی قطرها پاره‌خطی موازی قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌ها را در M و N قطع کند. اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۴/۵
۳) ۵   ۴) ۵/۵

314. درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع یک، بزرگ‌ترین مربع ممکن را قرار می‌دهیم. اندازهٔ ضلع این مربع کدام است؟

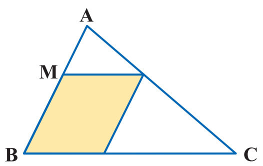
۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $۲\sqrt{۳}-۱$
۳) $۲\sqrt{۳}-۲$ ۴) $۲\sqrt{۳}-۳$

315. در شکل زیر اگر $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$ باشد و $DE\|BC$ آنگاه مساحت ADE چند درصد مساحت DEC است؟ (داخل – ۸۹)



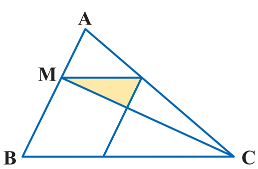
۱) ۷۰
۲) ۷۵
۳) ۷۸
۴) ۸۴

316. اگر در شکل مقابل $\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۱۰}$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع رنگ‌شده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ (خارج – ۸۹)



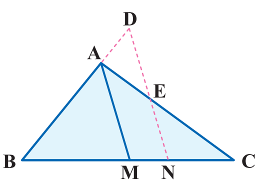
۱) ۰/۲۱
۲) ۰/۴۲
۳) ۰/۵۶
۴) ۰/۶۳

317. مطابق شکل، $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ است. مساحت مثلث سایه زده‌شده، چند درصد از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟ (خارج – ۹۰)



۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۳۰

318. در مثلث ABC $(AB=\frac{۲}{۳}AC)$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟ (داخل – ۹۴)



۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$

سکانس ۱۴ | دهم | درس دوم | قضیهٔ تالس | صفحهٔ ۳۴ تا ۳۷ کتاب درسی

319. در دو مثلث متشابه ....

۱) اضلاع نظیر در دو مثلث برابرند   ۲) زوایای نظیر در دو مثلث برابرند
۳) ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث برابرند   ۴) نیمسازهای نظیر در دو مثلث برابرند

NOTE

Cédric Villani
Fields:2010 1973

Final Assessment Test

آزمون‌های جامع

601. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$, $a_{ij}=\begin{cases}1 & ; i>j\\ i+j & ; i=j\\ 3 & ; i<j\end{cases}$ را به‌صورت $A=\left[\begin{array}{cc:c}2 & 3 & 3\\ \hline \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{B}} & 3\\ & & 6\end{array}\right]$ نشان دهیم، در ماتریس B مجموع درایه‌های قطر فرعی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

602. اگر مجموع ماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix}x+2 & 0\\ y+1 & 5\end{bmatrix}$ و ماتریس $B=\begin{bmatrix}3 & a-1\\ b & 4\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) ۲ ۴) صفر

603. اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\end{bmatrix}$ و ماتریس C به‌صورت $C=\begin{bmatrix}B\\ A\end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه‌های سطر اول ماتریس C^2 کدام است؟

۱) ۲۷۰ ۲) ۸۱

۳) ۲۷ ۴) ۲۴۳

604. اگر $B+C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A^{-1}BA+A^{-1}CA$ کدام است؟

۱) ۴۶ ۲) ۳۵

۳) ۲۵ ۴) ۴۱

605. اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 2\\ b & 3\end{bmatrix}$ داشته باشیم $A^{-1}=A$ حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۷- ۲) ۷

۳) ۲۸- ۴) ۲۸

606. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ a & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به ازای چند مقدار a ماتریس AB وارون‌پذیر است؟

۱) یک مقدار ۲) دو مقدار

۳) هیچ مقدار ۴) بیشمار مقدار

607. اگر $A=\begin{bmatrix}a-1 & 3\\ 1 & a+1\end{bmatrix}$ بوده و از تساوی $AC=AB$ بتوان به تساوی $B=C$ رسید، مقدار a کدام است؟

۱) $a=\pm 2$ ۲) $a=\pm 1$

۳) $a\neq\pm 2$ ۴) $a\neq\pm 1$

NOTE

608. اگر $\begin{bmatrix} 1+\tan^{۲} x & ۰ \\ ۰ & 1+\tan^{۲} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & \tan x \\ -\tan x & ۱ \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} ۱ & -\tan x \\ \tan x & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، سطر اول A کدام است؟

۱) $[۰ \quad ۱]$
۲) $[۱ \quad ۰]$
۳) $[۱ \quad \tan^{۲} x]$
۴) $[\tan^{۲} x \quad ۱]$

609. اگر $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی و $(A-۲I)^{-۱} = mA + nI$ باشد، n کدام است؟

۱) -۱۷
۲) ۱۷
۳) ۱۰
۴) -۱۰

610. اگر دستگاه $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & a+۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ دارای جواب غیرصفر باشد، دستگاه $\begin{bmatrix} ۴ & a-۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ....

۱) یک جواب منحصربه‌فرد دارد.
۲) بیشمار جواب دارد.
۳) جواب ندارد.
۴) نامشخص

611. اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} \log(۱+\sqrt{۵}) & \log(۶-۲\sqrt{۵}) \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟ (داخل - ۹۰)

۱) $۲+۴k$
۲) $۴k$
۳) $۱+k$
۴) $۲k$

612. در دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۳ \\ ۳x+۲y=۵ \end{cases}$ اگر A ماتریس ضرایب مجهولات بوده و $B = \left[\begin{array}{c:c} A & A^{-۱} \\ \hdashline A^{-۱} & A \end{array}\right]$ باشد، دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون چهارم ماتریس B کدام است؟

۱) صفر
۲) -۴۸
۳) ۴۸
۴) -۴۲

613. اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ ۳ و داشته باشیم $|A+I| = ۶۴$ حاصل $|A-I|$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) ۱
۴) ۹

614. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A^{۹۴} + A^{۹۳}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۴
۴) -۴

615. اگر $|A| = ۲$ و $A^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A + A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۳
۳) ۲
۴) $\frac{۱}{۳}$

616. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x^{۲}-۱ & x+۱ \\ ۲ & ۱-x^{۲} \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری غیراسکالر باشد، x کدام است؟

۱) ± ۱
۲) ۱
۳) -۱
۴) صفر

NOTE

617. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $a_{ij}=\begin{cases}۰ \;;\; i<j\\ ۱ \;;\; i=j\\ ۲ \;;\; i>j\end{cases}$ باشد، سطر دوم ماتریس $\left[\begin{array}{c|cc}۲ & & A\\ ۰ & & \\ \hline ۳ & ۱ & -۱\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}۱ & ۰ & ۱\\ \hline & A & ۳\\ & & -۱\end{array}\right]$ کدام است؟

۱) $[۵ \quad ۲ \quad -۱]$
۲) $[۱۱ \quad ۴ \quad -۳]$
۳) $[۵ \quad ۳ \quad -۱]$
۴) $[۱۰ \quad ۵ \quad -۲]$

618. اگر A, B دو ماتریس مربعی ۲×۲ باشند که $AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ حاصل $A\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۷\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۳ & -۶\end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

619. اگر $A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۴ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۶ & ۱\end{bmatrix}$ حاصل $A^{۱۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱۱ & ۱\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱۱ & ۱\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۲ & ۱\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲۲ & ۱\end{bmatrix}$

620. اگر $A^۲=A$ باشد و $B=I-(I-A)^{۱۰}$ باشد، $B^{۱۰}$ کدام است؟

۱) A
۲) $\bar{O}$
۳) I
۴) $B-I$

621. اگر A یک ماتریس قطری باشد و $(A+I)^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) -۶

622. اگر $A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$ و $B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و ماتریس $A+B$ وارون‌پذیر نباشند، برای x چند جواب در بازهٔ $[۰ \,,\, ۲\pi]$ وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) هیچ

623. اگر $A^۳=۲I$ و I ماتریس همانی و ماتریس $A(A-I)^{-۱}$ را بتوان به‌صورت $A^۲+\alpha A+\beta I$ نوشت، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) ۳

624. اگر A و B ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند و $A+B=I$ باشد، حاصل $A^{-۱}(A^{-۱}+B^{-۱})^{-۱}B^{-۱}$ کدام است؟

۱) I
۲) $-I$
۳) $A^{-۱}B^{-۱}$
۴) AB

625. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases}۲x+y=۳\\ ۳x+۲y=۱\end{cases}$ را به‌صورت $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۱\end{bmatrix}$ نشان دهیم، معکوس ماتریس ضرایب مجهولات در کدام تساوی صدق می‌کند؟

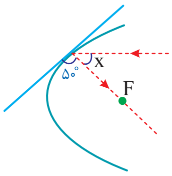
۱) $A^{-۱}=-A-۴I$
۲) $A^{-۱}=A+۴I$
۳) $A^{-۱}=۴I-A$
۴) $A^{-۱}=A-۴I$

626. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $a_{ij}=\sin\left(\frac{۱۸۰^\circ}{i+j}\right)$ باشد، دترمینان ماتریس $A-I$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۷}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۴}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

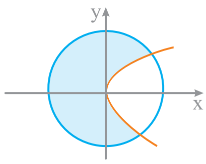
NOTE

660. یک شعاع نورانی مطابق شکل به موازات محور سهمی بر سهمی تابیده، زاویهٔ x کدام است؟



۱) ۶۰°
۲) ۸۰°
۳) ۵۰°
۴) ۷۰°

661. کدام رابطه می‌تواند مربوط به نمودار مقابل باشد؟



۱) $x \le y^۲ \le ۳-x^۲$
۲) $-x \le y^۲ \le ۳-x^۲$
۳) $۳-x^۲ \le y^۲ \le x$
۴) $۳-x^۲ \le y^۲ \le -x$

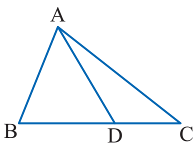
662. معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(۱,۲,۳)$ و $B(۱,-۱,۳)$ کدام است؟

۱) $x=۱$
۲) $z=۳$
۳) $\begin{cases} x=۱ \\ z=۳ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} y=-۱ \\ y=۲ \end{cases}$

663. معادلهٔ دو وجه مقابل یک مکعب مستطیل به‌صورت $P_۱:\begin{cases} z=۳ \\ ۰\le x\le ۴ \\ ۰\le y\le ۲ \end{cases}$ و $P_۲:\begin{cases} z=-۲ \\ ۰\le x\le ۴ \\ ۰\le y\le ۲ \end{cases}$ است، حجم این مکعب مستطیل کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۴۰
۳) ۳۶
۴) ۲۰

664. در مثلث ABC مطابق شکل $\overrightarrow{BD}=۲\overrightarrow{DC}$ است، اگر $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ باشد، $m+n$ کدام است؟

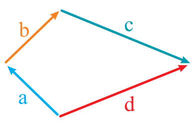


۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) ۱-

665. اگر عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار را به عنوان دو بردار در نظر بگیریم، در کدام ساعت، حاصل‌ضرب داخلی دو عقربه بزرگتر است؟

۱) ۵ عصر
۲) یازده و نیم صبح
۳) ۹ شب
۴) ۲ عصر

666. در شکل مقابل، اندازهٔ بردارهای a,b,c,d به ترتیب ۱،۱،۲،۲ می‌باشد. حاصل $a.b+c.d$ برابر کدام است؟



۱) ۶
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

667. اگر a,b,c سه بردار واحد باشند به طوری که $a+b+c=\overline{o}$ حاصل $a.(۲b-c)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

668. اگر $a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=۱۲$ باشد، حداکثر عبارت $\left(\frac{a_۱+a_۲+a_۳}{۳}\right)^۲$ کدام است؟

۱) ۴
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) ۱
۴) ۱۶

669. اگر نقاط $A(۱,۱,۱)$, $B(۲,۱,۲)$, $C(۳,۲,۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند و AH ارتفاع مثلث باشد، طول پاره‌خط BH کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

670. اگر $u=(a,۱,-۲)$, $v=(۲,b,-۲)$, $u\times v=(c,۲,۱۰)$ باشد، بردار $u\times(u\times v)$ با کدام بردار موازی است؟

۱) $i+۳j$
۲) $i-۳j$
۳) $۳i-j$
۴) $۳i+j$

NOTE

671. زاویهٔ بین دو بردار a و b بزرگتر از 90° است. اگر $|a|=4\,,\,|b|=5\,,\,|a\times(a-b)|=16$ باشد، اندازهٔ تفاضل دو بردار a و b کدام است؟

۱) ۹ ۲) $\sqrt{71}$ ۳) $\sqrt{65}$ ۴) ۳

672. اگر a و b دو بردار، $a=(4\,,2\,,4)$ ، $|b|=10$ و کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها $\frac{3}{5}$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار a و $a-b$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۵۶

673. دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴ واحد با یک‌دیگر زاویهٔ 30° می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a-2b$ و $3a+2b$ تولید می‌شود، کدام است؟ (داخل - ۸۴)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

674. دو بردار با تصاویر $a=(1,-1,1)$ و $b=(1,-2,2)$ مفروض‌اند. حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $a-b\,,a+b\,,a\times b$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶

675. ساده شدهٔ عبارت $(a\times i).[(b\times i)\times(c\times i)]$ کدام است؟

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $b.(a\times c)$ ۳) $a\times(b\times c)$ ۴) صفر

676. خط $D:\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ با کدام صفحه موازی است؟

۱) $x=2$ ۲) $\begin{cases}y=2\\z=3\end{cases}$ ۳) $z=4$ ۴) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

677. معادلهٔ صفحهٔ شامل خط $D:\begin{cases}x=1\\z=2\end{cases}$ و نقطهٔ $A(3,4,2)$ کدام است؟

۱) $x=1$ ۲) $z=2$ ۳) $x=3$ ۴) $y=4$

678. سه وجه یک مکعب مستطیل برصفحات مختصات واقع است و خط به معادلهٔ $D:\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ شامل یکی از یال‌های آن است، اگر نقطه‌ای به ارتفاع ۲ واقع براین خط یکی از رأس‌های مکعب مستطیل باشد، حجم آن کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

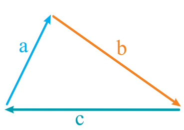
679. در یک فرودگاه باد نیرویی به صورت $w=3i+2j$ به هواپیما وارد می‌کند، اگر مسیر خط فرود به صورت $\ell=-i+4j$ باشد، خلبان نیروی محرکهٔ هواپیما را باید در راستای کدام بردار تنظیم کند تا یک فرود ایمن انجام دهد؟

۱) $2i-6j$ ۲) $4i-2j$ ۳) $2i+6j$ ۴) $-4i+2j$

680. در مستطیل ABCD مطابق شکل اندازهٔ اضلاع برابر ۳ و ۴ است. حاصل $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ کدام است؟

۱) ۷ - ۲) ۹ - ۳) ۹ ۴) ۷

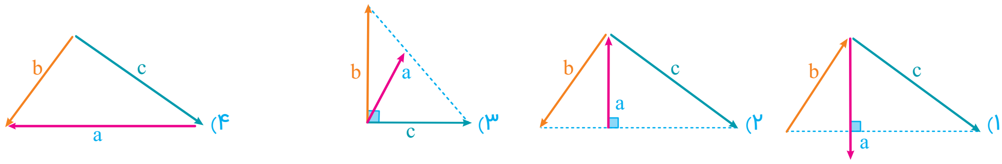
681. اگر $a\,,b\,,c$ سه بردار با طول‌های ۴ , ۳ , ۵ مطابق شکل باشند، حاصل $a.b+a.c-b.c$ کدام است؟



۱) -23 ۲) -7 ۳) ۷ ۴) ۲۳

NOTE

682. سه بردار a , b , c نامساوی و غیرصفر هستند. در کدام‌یک از شکل‌های زیر $a.b=a.c$ می‌باشد؟



683. اگر a' تصویر بردار a در امتداد بردار b باشد، حاصل $a.a'$ کدام **نمی‌تواند** باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲- ۴) ۳

684. اگر a' تصویر بردار $a=-j+k$ در امتداد بردار $b=i+j$ باشد، زاویهٔ بین بردارهای a و a' کدام است؟

۱) 60° ۲) 120° ۳) صفر ۴) 180°

685. اگر $a=(m,1,-2)$ و $b-c=(2,-m,1)$ و داشته باشیم $a.b=a.c$ حاصل $b\times a+a\times c$ کدام است؟

۱) $(3,6,6)$ ۲) $(3,-2,6)$

۳) $(-3,-6,-6)$ ۴) $(3,6,2)$

686. در کدام حالت حاصل‌ضرب برداری بردار غیرصفر a در مجموع دو بردار غیرصفر X و Y الزاماً صفر **نمی‌باشد**؟

۱) بردار X قرینهٔ بردار Y ۲) بردار a موازی صفحهٔ شامل X و Y

۳) سه بردار دو به دو موازی هم ۴) بردار a موازی بردار $X+Y$

687. اگر $b+c=(n,-1,2)$, $a+d=(6,m,4)$ باشد، رابطه‌های $a\times b=c\times d$ و همچنین $a\times c=b\times d$ بین چهار بردار a,b,c,d برقرار باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

688. اگر نقاط $A(1,2,1)$, $B(3,1,3)$, $C(-1,0,2)$, $D(3,-2,6)$ رئوس ذوزنقهٔ $ABCD$ باشند، مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۴/۵ ۳) ۱۸ ۴) ۶

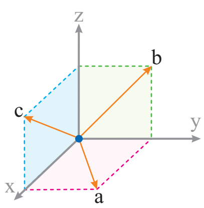
689. بردارهای $a=i+j$, $b=j+k$, $c=i+k$ قطرهای وجوه یک متوازی‌السطوح قائم با قاعده مربع هستند، حجم این متوازی‌السطوح کدام است؟

۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) ۲



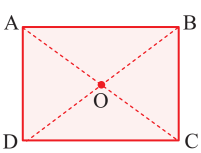
690. در کدام حالت ضرب مختلط سه بردار a , X , Y الزاماً صفر **نیست**؟

۱) بردار a برابر با مجموع دو بردار X و Y باشد. ۲) بردار a موازی تفاضل X و Y باشد.

۳) بردار a عمود بر X و Y باشد. ۴) مجموع سه بردار صفر باشد.

سکانس ۳۵ | دهم+ یازدهم | همهٔ فصول | آزمون جامع (۷) | همهٔ صفحات کتاب درسی

691. مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB=8$ و $AD=6$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصلهٔ آن‌ها از AB و CD برابر ۴ واحد باشد؟

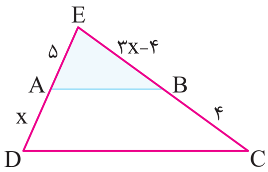


۱) هیچ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) بیشمار

NOTE

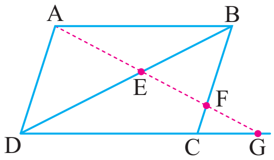
823. در شکل زیر مساحت ذوزنقهٔ ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

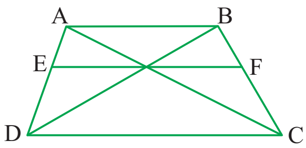
824. در شکل زیر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



۱) $EA^۲$ ۲) $ED^۲$

۳) $EB \times ED$ ۴) $FB \times FC$

825. در شکل زیر، $AB || EF || DC$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟



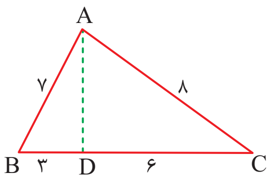
۱) $\frac{۴۵}{۷}$

۲) $\frac{۴۵}{۶}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

۴) ۷

826. در شکل زیر، اندازهٔ پاره‌خط AD کدام است؟



۱) $\sqrt{۳۷}$

۲) ۶

۳) $۲\sqrt{۷}$

۴) $۲\sqrt{۱۰}$

827. دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ واحد که مرکزهای آن‌ها با یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند، متقاطعند. مساحت مکان هندسی نقاط مشترک این دو کره کدام است؟

۱) $۳/۲۴\pi$ ۲) $۴/۴۱\pi$

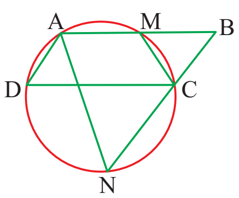
۳) $۴/۸\pi$ ۴) $۵/۷۶\pi$

828. یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های $\frac{۹}{۲}$ و ۸ بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله دورترین نقاط دایره تا یک رأس قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۳+۴\sqrt{۲}$

۳) ۸ ۴) ۷/۵

829. در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین کدام است؟



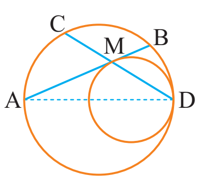
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

830. در شکل زیر، دو دایره در نقطه D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر، بر دایرهٔ داخل در نقطهٔ M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

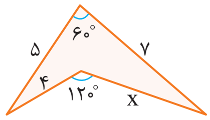
831. چهار نقطه $A(۱,۳), B(۱۵,۹), M(a,۰), N(a+۵,۰)$ در صفحه مختصات مفروض‌اند، کمترین اندازه خط شکسته AMNA کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹

۳) ۲۰ ۴) ۲۱

NOTE

832. در شکل زیر، مقدار $(x+۲)$، کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۷}$
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۵}$

833. طول یک مستطیل ۲ واحد کمتر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲
۲) ۵۶
۳) ۶۰
۴) ۶۴

834. دایره‌ای به مرکز $(۱,۳)$ بر روی خط راست $۵x+۱۲y=۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) ۸

835. از میان دایره‌های گذرا از نقطهٔ $A(۳,۲)$ و مماس بر خطوط $۳x-۴y=۰$ و $y=۰$، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۱۳}{۹}$

836. یک بیضی به قطرهای $AA'=۱۴$ و $BB'=۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطهٔ A، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطهٔ F، دایره به قطر AA' را در نقطهٔ M، قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط AM، کدام است؟

۱) ۷
۲) $۲\sqrt{۷}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

837. در سهمی به معادلهٔ $y^۲+ay+bx-۹=۰$، معادلهٔ خط هادی، $x=\frac{۱۳}{۴}$ و محور تقارن آن $y=۱$ است. مقدارهای b، کدام‌اند؟

۱) ۵,۸
۲) ۵,۷
۳) ۴,۸
۴) ۳,۷

838. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$، کدام است؟

۱) $[۰ \quad ۱ \quad ۰]$
۲) $[۱ \quad ۰ \quad ۰]$
۳) $[۰ \quad ۰ \quad ۱]$
۴) $[۱ \quad ۰ \quad ۱]$

839. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و ماتریس X، جواب معادلهٔ $AX=A^{-۱}$ باشد. ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۳۲ & ۱۴ \\ ۴۸ & -۲۵ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۳۲ & -۱۴ \\ -۵۶ & ۲۵ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۱۶ & -۷ \\ -۲۸ & ۲۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱۶ & -۷ \\ -۲۵ & ۱۴ \end{bmatrix}$

840. جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & x+۵ \\ x-۱ & ۶ & -۱ \end{vmatrix}=۰$، کدام است؟

۱) ۴,−۹
۲) ۳,−۸
۳) −۴,۹
۴) −۳,۸

Matrix$_{m\times n}$

1 | ۴ درایهٔ سطر اول و ستون سوم همان x و درایهٔ سطر سوم و ستون دوم عدد ۸ است، بنابراین $x=8+5=13$ حال منظور از $\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$ مجموع درایه‌های سطر سوم است:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{3j}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=7+8+9+11=35$$

2 | ۲ می‌دانیم درایهٔ a_{ij} وقتی $i>j$ باشد زیر قطر اصلی و اگر $i<j$ باشد بالای قطر اصلی و به ازای $i=j$ روی قطر اصلی است:

$$A=\begin{bmatrix}1^2+1 & 5\\ 7 & 2^2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 6\end{bmatrix}$$

3 | ۱ برای این‌که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases}a-2=0\Rightarrow a=2\\ b+3=0\Rightarrow b=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

4 | ۲ می‌دانیم در ماتریس قطری، درایه‌های بیرون قطر اصلی باید صفر باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix}x & -1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ y & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & -2x+4\\ 7+y & \bullet\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x+4=0\Rightarrow x=2\\ 7+y=0\Rightarrow y=-7\end{cases}$$

5 | ۳ باید درایه‌های دو ماتریس نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases}\begin{cases}x-y=1\\ x+y=5\end{cases}\Rightarrow x=3,y=2\\ z-2=3\Rightarrow z=5\end{cases}\Rightarrow x+y+z=10$$

6 | ۱ ابتدا ماتریس B را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$B=\begin{bmatrix}1^2+1^2 & 1^2+2^2\\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$2A-B+I=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 8 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

7 | ۱ اگر فرض کنیم $AB=C$, $BA=D$ باشد آنگاه:

(۱) $C_{21}=[\text{سطر دوم } A]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{اول}\\ B\end{bmatrix}=[x+1\quad 0\quad 1]\begin{bmatrix}3\\ 4\\ x\end{bmatrix}=7$

$$\Rightarrow 3x+3+0+x=7\Rightarrow x=1$$

(۲) $d_{31}=[\text{سطر سوم } B]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{اول}\\ A\end{bmatrix}=[1\quad 5]\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=1+10=11$

8 | ۱ کافیست سطر اول ماتریس B را در ماتریس A ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -7\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

⇒ جمع درایه‌های سطر اول $=-6$

9 | ۳ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) ابتدا ماتریس A را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$ABC+ADC=A(BC+DC)$$

حال ماتریس C را از سمت راست از ماتریس‌های درون پرانتز فاکتور می‌گیریم:

$$A(BC+DC)=A(B+D)C$$

(۲) می‌توان به‌جای ماتریس C ماتریس $I\times C$ قرار داد (چون I عضو بی‌اثر ضرب است) و از ماتریس C از سمت راست فاکتور گرفت:

$$A\times C+C=A\times C+I\times C=(A+I)\times C$$

(۳) اگر دقت کنید متوجه می‌شوید در ماتریس BA ماتریس A در سمت راست و در ماتریس AC ماتریس A در سمت چپ واقع شده است، بنابراین نمی‌توان از ماتریس A فاکتور گرفت.

دقت کنید نمی‌توان ماتریس BA را به‌صورت AB نوشت، چون همان طور که گفتیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

(۴) اگر به‌جای ماتریس 2B ماتریس 2BI را قرار دهیم، آن‌گاه داریم:

$$BC-2B=BC-2BI=BC-B(2I)=B\times(C-2I)$$

10 | ۴ در پرانتز اول از ماتریس B را از سمت راست و در پرانتز دوم از C از سمت چپ فاکتور می‌گیریم و با توجه به این که $BC=2I$ است ، خواهیم داشت:

$$(AB+2B)(CA+C)=(A+2I)BC(A+I)$$

$$=(A+2I)(2I)(A+I)=2(A+2I)(A+I)$$

$$=2\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}7 & 5\\ 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 10\\ 10 & 14\end{bmatrix}$$

11 | ۴ می‌دانیم $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$ حال در طرف دوم تساوی پرانتزها را طبق قانون پخشی در هم ضرب می‌کنیم:

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2\Rightarrow A^2+B^2=(A-B)^2+AB+BA$$

(۱) $AB+BA=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

(۲) $A-B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow(A-B)^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 6 & 1\end{bmatrix}$

حال کافیست (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم:

$$A^2+B^2=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 9 & 5\end{bmatrix}$$

12 | ۳ ابتدا ماتریس A را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}1+m & 1+2m\\ 2+m & 2+2m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+1 & 3\\ 3 & x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1+2m=3\Rightarrow m=1\\ \qquad\Rightarrow m+x=5\\ 2+2m=x\Rightarrow x=4\end{cases}$$

13 | ۳ برای این‌که ضرب این دو ماتریس تعویض‌پذیر باشد، باید نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی آن‌ها برابر با نسبت اعداد قطر فرعی باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\underbrace{\frac{a-۲}{۷-۳}=\overbrace{\frac{۳}{۶}}_{}}_{۱}\overbrace{=\frac{۵}{b}}^{۲}\Rightarrow\begin{cases}۱)\ ۲a-۴=۴\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴\\ ۲)\ ۳\times b=۳۰\Rightarrow b=۱۰\end{cases}\Rightarrow a+b=۱۴$$

در ساختن این نسبت‌ها گاهی ممکن است مخرج یکی از کسرها صفر شود، در این صورت برای این‌که تناسب برقرار گردد باید صورت نیز صفر شود و آن کسر به صورت $\frac{۰}{۰}$ درآید.

14 | ۱

$$[x\ \ ۲x\ \ -۱]\begin{bmatrix}۳&-۱&۱\\۴&۰&-۲\\۱&۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۲x\\-۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow[۱۱x-۱\ \ -x-۲\ \ -۳x]\begin{bmatrix}x\\۲x\\-۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow x(۱۱x-۱)+(-x-۲)(۲x)-۱(۳x)=۰\Rightarrow ۹x^۲-۲x=۰\Rightarrow x=۰,\ \frac{۲}{۹}$$

15 | ۳ ابتدا باید ماتریس $A^۲$ را تشکیل دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۴\\۰&۱\end{bmatrix}$$

چون تشخیص نظم موجود کمی مشکل است پس $A^۳$ را هم می‌سازیم:

$$A^۳=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۴\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶\\۰&۱\end{bmatrix}$$

حال با توجه به نظم موجود درمی‌یابیم که:

$$A^n=\begin{bmatrix}۱&۲n\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۱&۲۰\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۲۲$$

16 | ۲

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&\log_۲^۳\\\log_۳^۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&\log_۲^۳\\\log_۳^۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

حال طرفین تساوی را به توان ۴۹ می‌رسانیم: $A^{۹۸}=I^{۴۹}=I$

17 | ۲ ابتدا ماتریس $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow A \text{ متناوب}$$

$$\Rightarrow A^۷-A^۴=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۳&-۳\end{bmatrix}$$

اگر $A^۲=I$ باشد، آنگاه: ۱) $A^{۲k}=I$ ۲) $A^{۲k+۱}=A$

18 | ۴ ابتدا ماتریس A را تشکیل داده و سپس توان دوم آن را می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۴\\۴&۵\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید به الگوی خاصی دست پیدا نکردیم، بنابراین مجبوریم $A^۳$ را نیز تشکیل دهیم:

$$A^۳=\begin{bmatrix}۵&۴\\۴&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴&۱۳\\۱۳&۱۴\end{bmatrix}$$

ظاهراً باز هم به الگوی خاصی دست پیدا نکردیم اما خواستهٔ مسئله $a-b$ است که در تمام توان‌های A حاصل آن برابر ۱ است.

19 | ۳ ماتریس B ماتریس قطری است و کافی است فقط درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم یعنی:

$$B^۴=\begin{bmatrix}(-۲)^۴&۰&۰\\۰&۱^۴&۰\\۰&۰&(-۱)^۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۶&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

و اما در ماتریس A ابتدا $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۰&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۰&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\۰&۰&۰\\۲&۲&۲\end{bmatrix}=۲A$$

حال با توجه به رابطهٔ بین A و $A^۲$ می‌توانیم $A^۴$ را نیز برحسب A پیداکنیم:

$$A^۴=(۲A)^۲=۴A^۲=۴(۲A)=۸A=\begin{bmatrix}۸&۸&۸\\۰&۰&۰\\۸&۸&۸\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $A^۴+B^۴$ به‌صورت زیر است:

$$A^۴+B^۴=\begin{bmatrix}۲۴&۸&۸\\۰&۱&۰\\۸&۸&۹\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۶۶$$

20 | ۳ ابتدا ماتریس $A^۲$ و در صورت لزوم $A^۳$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&۲&۳\\۰&۰&۲\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۲&۳\\۰&۰&۲\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۰&۲&۳\\۰&۰&۲\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

بنابراین $A^۴=A^۵=\dots=A^{۱۰}=\bar{O}$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$A+A^۲+\dots+A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۰&۲&۳\\۰&۰&۲\\۰&۰&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۰&۴\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۲&۷\\۰&۰&۲\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر با ۱۱=۷+۲+۲ خواهد بود.

21 | ۱ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم. می‌دانیم برای ماتریس A و I تمام اتحادها برقرار است [چون ضرب آن‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی است]:

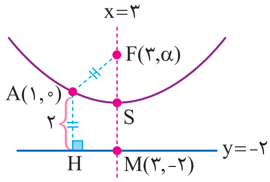
$$\underbrace{(A-I)(A+I)}_{\text{مزدوج}}(A^۴+A^۲+I)=\underbrace{(A^۲-I^۲)(A^۴+A^۲+I)}_{\text{چاق و لاغر}}=A^۶-I$$

حال باید ماتریس $A^۶$ را پیدا کنیم؛ بنابراین ابتدا $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&۲\\۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۲\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲ \text{ قطری است}$$

$$A^۶=(A^۲)^۳=\begin{bmatrix}۴^۳&۰\\۰&۴^۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^۶-I=\begin{bmatrix}۶۴&۰\\۰&۶۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶۳&۰\\۰&۶۳\end{bmatrix}$$

161 ۱ چون سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۵ قطع کرده است، بنابراین نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۵,۰)$ روی سهمی قرار دارند و محور تقارن سهمی برابر $x=\frac{۵+۱}{۲}=۳$ است. حال کانون را به‌صورت پارامتری روی این خط در نظر می‌گیریم یعنی $F(۳,\alpha)$ و سپس به سراغ تعریف سهمی می‌رویم:



$$AF=AH\Rightarrow\sqrt{(۱-۳)^۲+(۰-\alpha)^۲}=۲\Rightarrow ۴+\alpha^۲=۴\Rightarrow \alpha=۰$$

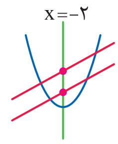
بنابراین مختصات کانون $F(۳,۰)$ است. حال رأس وسط نقاط F و M قرار دارد، بنابراین:

$$S=\frac{F+M}{۲}=\frac{(۳,۰)+(۳,-۲)}{۲}=(۳,-۱)\Rightarrow \text{عرض رأس}=-۱$$

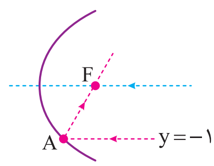
162 ۱ می‌دانیم فاصلهٔ کانونی دیش‌ها از رابطهٔ $p=\frac{D^۲}{۱۶h}$ به‌دست می‌آید که D قطر دهانهٔ دیش و h عمق دیش است، بنابراین:

$$p=\frac{۸^۲}{۱۶\times ۲}=\frac{۶۴}{۳۲}=۲$$

163 ۳ دو خط داده شده موازی‌اند و یک سهمی قائم را قطع کرده‌اند، پس با توجه به طول نقطهٔ $M(-۲,۱)$، مکان هندسی وسط وترها خط $x=-۲$ است و بنابراین طول نقطهٔ وسطِ دو نقطهٔ برخورد خط جدید با سهمی باید (-۲) باشد که تنها گزینهٔ موجود با این شرایط، گزینهٔ ۳ است.



164 ۴ می‌دانیم اگر یک شعاع نورانی به موازات محور سهمی بر آن بتابد شعاع بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد. بنابراین ابتدا خط $y=-۱$ را با سهمی قطع می‌دهیم تا نقطهٔ A به‌دست آید:



$$y=-۱\Rightarrow ۱+۶-۴x+۹=۰\Rightarrow x=۴\Rightarrow A(۴,-۱)$$

حال باید کانون سهمی را پیدا کنیم، بنابراین معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$y^۲-۶y-۴x+۹=۰\Rightarrow (y-۳)^۲=۴x-۹+۹\Rightarrow (y-۳)^۲=۴(x-۰)$$

$$\begin{cases}S(۰,۳)\\ p=۱\end{cases}\Rightarrow F(۰+۱,۳)\Rightarrow F(۱,۳)$$

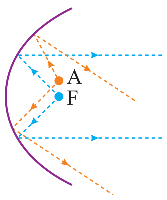
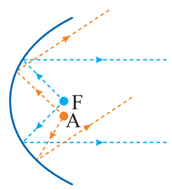
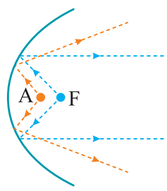
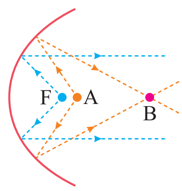
و در آخر معادلهٔ خط گذرا از A و F را می‌نویسیم:

$$m_{AF}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۳-(-۱)}{۱-(۴)}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y-۳=-\frac{۴}{۳}(x-۱)\Rightarrow ۳y-۹=-۴x+۴\Rightarrow ۴x+۳y=۱۳$$

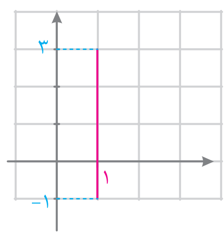
165 ۱ ابتدا مختصات کانون سهمی را پیدا می‌کنیم، سپس موقعیت نقطهٔ A را نسبت به مختصات کانون به‌دست می‌آوریم. سهمی داده شده یک سهمی افقی به رأس $S(۰,۰)$ و فاصلهٔ کانونی $p=۱$ است. بنابراین مختصات کانونی

سهمی $F(۱,۰)$ است و نقطهٔ $A(۱,۱)$ بالاتر از کانون سهمی قرار دارد، پس پرتوهای بازتابش باید نور پایین یعنی موازی و رو به پایین باشد.

لامپ بالای کانون قرار دارد، پرتوهای بازتابش موازی و رو به پایین خواهد بود.	لامپ پایین کانون قرار دارد، پرتوهای بازتابش موازی و رو به بالا خواهد بود.
نور پایین 	نور بالا 
لامپ به سهمی نزدیک‌تر است، شعاع‌های بازتابش واگرا هستند.	لامپ از سهمی دور شده است، شعاع‌های بازتابش همگرا در نقطهٔ B هستند.
	

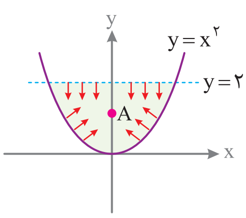
Vectors V

166 ۴ نمودار رابطهٔ $x=۱$ و $-۱\le y\le ۳$ مطابق شکل یک پاره‌خط قائم به طول ۴ است.



167 ۱ باید نمودار سهمی $y=x^۲$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ در نظر بگیریم که گزینهٔ ۱ شکل درست این نمودار را نشان می‌دهد.

168 ۱ برای مشخص کردن نمودار $y\ge x^۲$ و $y<۲$، ابتدا نمودارهای $y=x^۲$ و $y=۲$ را رسم می‌کنیم و با نقطه‌یابی منطقهٔ جواب را پیدا می‌کنیم. چون نقطهٔ $A(۰,۱)$ در هر دو نامعادله صدق می‌کند، منطقهٔ رنگ‌شده جواب است.



169 ۳ در ناحیهٔ دوم دستگاه $x<۰$, $y>۰$, $z>۰$ است، بنابراین:

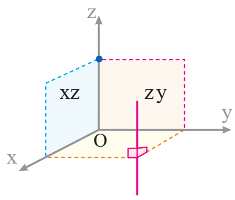
$$\begin{cases}m-۱<۰\\ m>۰\end{cases}\xrightarrow{\cap} ۰<m<۱$$

در واقع در ناحیه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ دستگاه سه بعدی علامت x و y همان علامت x و y در فضای دو بعدی است و $z>۰$ است و ناحیه‌های ۵، ۶، ۷، ۸ همان علامت‌ها برای x و y حفظ می‌شود و $z<۰$ است.

۴ 170 نقاط A و B را روی صفحهٔ xy تصویر می‌کنیم (کافی است به‌جای z، صفر قرار دهیم):

$$\begin{cases}A'(1,2,0)\\ B'(4,-2,0)\end{cases} \Rightarrow |A'B'|=\sqrt{(1-4)^2+(2-(-2))^2+0^2}=\sqrt{9+16}=5$$

۱ 171 فصل مشترک دو صفحهٔ xz و yz محور oz است، از طرف دیگر خطی که با دو صفحهٔ متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است، بنابراین خط خواسته شده باید موازی oz باشد، در نتیجه معادلهٔ آن به صورت $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$ است.

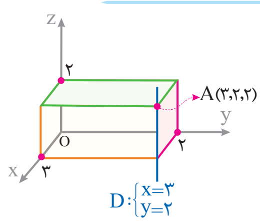


۲ 172 ویژگی مشترک خط و نقطهٔ داده شده $z=2$ است. بنابراین این صفحه شامل نقطهٔ A و خط D است.

۳ 173 سادهٔ این خط به صورت $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$ است که عمود بر صفحهٔ xy است، بنابراین بر تمام صفحات موازی آن از جمله $z=3$ نیز عمود است.

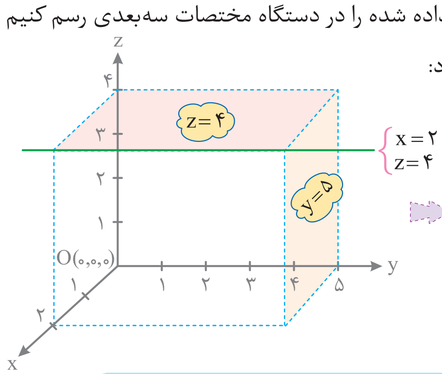
۳ 174 این دو صفحه موازی صفحه‌های yz , xz هستند، بنابراین صفحه‌ای که بر هر دوی آن‌ها عمود باشد، موازی صفحهٔ xy (عمود بر oz) است. در نتیجه معادلهٔ آن به صورت $z=k$ است. حال چون باید از نقطهٔ $A(1,2,3)$ نیز عبور کند معادلهٔ آن به صورت $z=3$ است.

۱ 175 با توجه به اطلاعات مسئله شکل آن به صورت مقابل است و حجم آن برابر است با:



$$V=2\times 3\times 2=12$$

۲ 176 اگر معادلات داده شده را در دستگاه مختصات سه‌بعدی رسم کنیم به‌صورت زیر خواهد بود:



$$V=2\times 5\times 4=40$$

۴ 177 می‌دانیم مختصات هر بردار مانند $\overrightarrow{AB}$ از تفاضل مختصات انتها و ابتدای آن به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\overrightarrow{AB}=B-A\Rightarrow (1,2,-1)=(0,4,1)-A$$

$$\Rightarrow A=(0,4,1)-(1,2,-1)=(-1,2,2)$$

حال قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور oz را A' و قرینهٔ آن نسبت به صفحهٔ xz را A'' می‌نامیم و داریم:

$$\begin{matrix}A'(+1,-2,2)\\ A''(-1,-2,2)\end{matrix} \Rightarrow |A'A''|=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=2$$

۱ 178 بهتر است بردارها را باز کنیم:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow M-A=\frac{2}{3}(B-A)\Rightarrow 3M-3A=2B-2A$$

$$\Rightarrow 3M=2B+A\Rightarrow M=\frac{2B+A}{3}=\frac{(-2,4,8)+(5,-4,1)}{3}$$

$$\Rightarrow M=\frac{(3,0,9)}{3}=(1,0,3)\Rightarrow |OM|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$$

۱ 179 برای این‌که دو بردار موازی باشند، باید نسبت مؤلفه‌های آن‌ها با هم برابر شود، اما برای این‌که اشتباه محاسباتی برایتان پیش نیاید، نسبت‌ها را به‌صورت زیر تشکیل دهید:

$$\frac{2}{\boxed{\text{Loading}}}=\frac{1}{\boxed{\text{please}}}=\frac{m}{\boxed{\text{wait}}}$$

یعنی ابتدا یک بردار را در صورت‌های مناسب قرار دهید و سپس بردار دوم را قرار دهید:

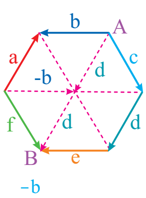
$$\Rightarrow \frac{2}{-1}=\frac{1}{2k}=\frac{m}{1}\Rightarrow m\times k=(-2)(-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$$

۲ 180 همهٔ بردارهای داده شده را باز می‌کنیم:

$$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DC}=C-D+F-B-(G-B)+(G-D)$$

$$=C-D+F-D=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AH}$$

۲ 181 همان‌طور که در شکل دیده می‌شود $c+d+e=\overrightarrow{AB}$ می‌باشد و در ضمن $a+f=-b$ می‌باشد، بنابراین:



$$\underbrace{a+f}_{-b}+b+c+d+e=-\cancel{b}+\cancel{b}+c+d+e=\overrightarrow{AB}=2d=-2a$$

۳ 182 قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده بر a و b بردارهای $a+b$ و $a-b$ هستند:

$$a+b=(4,1,1)\Rightarrow |a+b|=\sqrt{16+1+1}=3\sqrt{2}$$

$$a-b=(-2,3,3)\Rightarrow |a-b|=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}$$

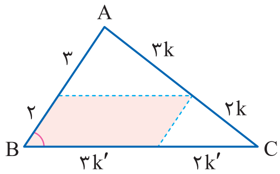
۴ 183 رابطهٔ داده شده را باز می‌کنیم:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=A-G+B-G+C-G=A+B+C-3G$$

حال با توجه به این‌که G محل برخورد میانه‌هاست $G=\frac{A+B+C}{3}$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{حاصل}=A+B+C-3(\frac{A+B+C}{3})=\overline{O}$$

۲ | 600 ابتدا به کمک قضیهٔ تالس نسبت‌های ایجاد شده روی اضلاع را به دست می‌آوریم، سپس نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع و مثلث را برحسب سینوس زاویهٔ B می‌نویسیم:



$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{ABC}}=\frac{(۲)(۳k')\sin B}{\frac{۱}{۲}(۵)(۵k')\sin B}=\frac{۶}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۵}=۴۸\%$$

Final assessment Test

۳ | 601

$$A=\begin{bmatrix}۱+۱ & ۳ & ۳\\ ۱ & ۲+۲ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۳+۳\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌های قطرفرعی}=۱+۴=۵$$

۱ | 602 ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی باید با هم یکسان باشند:

$$\begin{cases}y+۱=۰\Rightarrow y=-۱\\ x+۲=۵\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

حال باید مجموع A و B قطری باشد:

$$A+B=\begin{bmatrix}۸ & a-۱\\ b & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۰\end{cases}\Rightarrow a+b=۱$$

۳ | 603

$$C^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۶\\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۶\\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳} & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۶ & ۱۸\\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$C^۲ \text{ جمع درایه‌های سطر اول}=۳+۶+۱۸=۲۷$$

۱ | 604 کافیست $A^{-۱}$ را حساب کنیم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳-۴}\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ -۱ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم: $A^{-۱}BA+A^{-۱}CA=A^{-۱}(B+C)A$

$$=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & ۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳ & ۶\\ ۱۰ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & ۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳۳ & ۴۶\\ -۲۵ & ۳۵\end{bmatrix}$$

۱ | 605 طرفین تساوی داده شده را در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱}=A\xrightarrow{\times A}I=A^۲$$

حال کافیست مربع ماتریس را برابر I قرار دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & ۲\\ b & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & ۲\\ b & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+۲b & ۲a+۶\\ ab+۳b & ۲b+۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}۲a+۶=۰\Rightarrow a=-۳\\ ۲b+۹=۱\Rightarrow b=-۴\end{cases}\Rightarrow a+b=-۷$$

۴ | 606

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & a & ۰\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ a & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+۱ & ۳a-۲\\ ۳a-۲ & ۱۴\end{bmatrix}$$

$$|AB|=۱۴(a^۲+۱)-(۳a-۲)^۲=۵a^۲+۱۲a+۱۰$$

$|AB|$ همواره مثبت است، چون در عبارت به‌دست آمده $a>۰$ و $\Delta<۰$ است بنابراین این ماتریس به ازای همهٔ مقادیر a وارون‌پذیر است.

۳ | 607 باید ماتریس A وارون‌پذیر باشد، یعنی دترمینان آن مخالف صفر باشد:

$$|A|=(a-۱)(a+۱)-۳\neq ۰\Rightarrow a^۲\neq ۴\Rightarrow a\neq\pm ۲$$

۲ | 608 اگر فرض کنیم $BAC=D$ باشد، در این صورت $A=B^{-۱}DC^{-۱}$ می‌باشد، حال باید ابتدا $B^{-۱}D$ را حساب کرده و حاصل آن را از چپ در $C^{-۱}$ ضرب کنیم:

$$A=B^{-۱}DC^{-۱}=(۱+\tan^۲x)B^{-۱}C^{-۱}$$

$$=(۱+\tan^۲x)\frac{۱}{۱+\tan^۲x}\begin{bmatrix}۱ & \tan x\\ -\tan x & ۱\end{bmatrix}\frac{۱}{۱+\tan^۲x}\begin{bmatrix}۱ & -\tan x\\ \tan x & ۱\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{۱}{۱+\tan^۲x}\begin{bmatrix}۱+\tan^۲x & ۰\\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ & \end{bmatrix}$$

۴ | 609

$$A-۲I=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$(A-۲I)^۲-۸(A-۲I)-(I)=\bar{O}$$

$$\xrightarrow{\times(A-۲I)^{-۱}}(A-۲I)-۸I-(A-۲I)^{-۱}=\bar{O}$$

$$(A-۲I)^{-۱}=A-۱۰I\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\ n=-۱۰\end{cases}$$

۳ | 610 باید $\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & a+۱\end{vmatrix}=۰$ باشد، بنابراین: $a+۱-۶=۰\Rightarrow a=۵$

در نتیجه دستگاه دوم به‌صورت $\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ در می‌آید که داریم:

$$\frac{۴}{۲}=\frac{۲}{۱}\neq\frac{۱}{۲}$$ جواب ندارد

۲ | 611

$$\begin{vmatrix}\log(۶-۲\sqrt{۵}) & \log(۱+\sqrt{۵})\\ -۲ & ۱\end{vmatrix}=\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})=\log(\underbrace{۶^۲-(۲\sqrt{۵})^۲}_{۱۶})=۴\log ۲=۴k$$

۲ | 612 ماتریس $A^{-۱}$ را پیدا کرده و B را می‌سازیم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & ۲ & -۳ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۲ & ۱\\ -۳ & ۲ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$$

حال ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون چهارم B به‌صورت زیر است:

$$B_۱=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۳\\ ۲ & -۱ & ۲\\ -۳ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow|B_۱|=۳(-۷)-۲(۱۲)-۳(۱)=-۴۸$$

613 ۲ فرض کنیم $A=\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$ باشد، در این صورت:

$$|A+I|=\begin{vmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix}=(k+1)^3=64 \Rightarrow k+1=4 \Rightarrow k=3$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|A-I|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8$$

614 ۱

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-1(-1-0)=1$$

$$A+I=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I|=3(-1)=-3$$

$$|A^{93}+A^{94}|=|A^{93}(I+A)|=\underbrace{|A|}_{1}{}^{93} \times \underbrace{|A+I|}_{-3}=-3$$

615 ۲ ابتدا دترمینان خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$|A^{-1}+A|=|A^{-1}(I+A^2)|=|A^{-1}||I+A^2|$$

حال ماتریس $I+A^2$ را تشکیل می‌دهیم و دترمینان آن را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2+I=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^2+I|=6$$

بنابراین دترمینان خواسته شده برابر است با :

$$|A^{-1}+A|=\frac{|I+A^2|}{|A|}=\frac{6}{2}=3$$

616 ۳ به جای این‌که درایه‌های خارج قطر اصلی را صفر قرار دهیم و درگیر محاسبات شویم بهتر است عددی را انتخاب کنیم که درایه‌های خارج قطر اصلی را صفر کند ولی به ازای آن درایه‌های قطر اصلی یکسان نشود، بنابراین تنها $x=-1$ قابل قبول است، چون به ازای $x=1$ ماتریس تبدیل به یک ماتریس قطری و اسکالر می‌شود.

617 ۲ ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ 11 & 4 & -3 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

618 ۲ از ماتریس A از سمت چپ و از ماتریس B از سمت راست فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}B=AIB=AB$$

619 ۴ باید بررسی کنیم A^{11} از کدام ترکیب A^2 و A^3 به‌دست می‌آید؛ یکی از ترکیب‌ها به‌صورت $A^{11}=(A^3)^3\times A^2$ است؛ بنابراین توان سوم ماتریس A^3 را پیدا می‌کنیم و در A^2 ضرب می‌کنیم:

$$(A^3)^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^3)^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -18 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -18 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -22 & 1 \end{bmatrix}$$

620 ۱

$$(I-A)^2=I^2-2AI+A^2=I-2A+A=I-A$$

$$(I-A)^{10}=I-A$$

بنابراین $B=I-(I-A)=A$ در نتیجه $B^{10}=A^{10}=A$

621 ۲ فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ باشد،در این صورت خواهیم داشت:

$$A+I=\begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & b+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+I)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+1=3 \Rightarrow a=2 \\ b+1=4 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow |A|=2\times 3-0=6$$

622 ۳

$$A+B=\begin{bmatrix} \cos x-\frac{\sqrt{2}}{2} & \sin x \\ \sin x & \cos x+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B|=0$$

$$\cos^2 x-\frac{1}{2}-\sin^2 x=0 \Rightarrow \underbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}_{\cos 2x}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

بنابراین برای x چهار جواب $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ وجود دارد.

623 ۴

$$A^3=2I \Rightarrow A^3-I=I \Rightarrow (A-I)(A^2+A+I)=I$$

$$(A-I)^{-1}=A^2+A+I$$

$$A(A-I)^{-1}=A^3+A^2+A=2I+A^2+A$$

$$A(A-I)^{-1}=A^2+A+2I \Rightarrow \alpha=1\ ,\ \beta=2 \Rightarrow \alpha+\beta=3$$

624 ۱ از خاصیت $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ استفاده می‌کنیم:

$$A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}B^{-1}=[B(A^{-1}+B^{-1})A]^{-1}$$

$$=[BA^{-1}A+BB^{-1}A]^{-1}=[B+A]^{-1}=I^{-1}=I$$

625 ۳ ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ است و طبق قضیهٔ کیلی ـ همیلتن داریم:

$$A^2-4A+I=\bar{O} \xrightarrow{\times A^{-1}} A-4I+A^{-1}=\bar{O} \Rightarrow A^{-1}=4I-A$$

۳ 657 مشتق تابع را با شیب خط داده‌شده برابر قرار می‌دهیم تا طول نقطهٔ تقاطع مشخص شود، سپس این طول را در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم تا عرض نقطهٔ تقاطع معلوم شود.

$$\begin{cases} y'=2x \\ m_D=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow M(1,2+a)$$

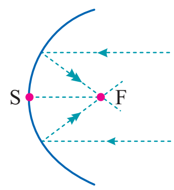
حال باید $(b\,,5)=(1\,,2+a)$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=4$$

۴ 658 شعاع‌های بازتابش همگی از کانون سهمی می‌گذرند؛ بنابراین باید مختصات کانون سهمی را به دست آوریم:

$$\begin{cases} S(-1\,,1) \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow F(-1+1,1)=(0,1)$$

۲ 659 هر شعاع نورانی که به موازات محور سهمی بر آن بتابد، شعاع‌های بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد، بنابراین کانون سهمی $F(0/9\,,-1)$ است:



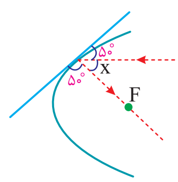
$$\begin{cases} S(-1/6\,,-1) \\ F(0/9\,,-1) \end{cases} \Rightarrow p=0/9-(-1/6)=2/5=\frac{5}{2}$$

عرض کانون و رأس یکسان است، بنابراین سهمی افقی است و چون طول رأس کمتر از کانون است، سهمی رو به راست باز می‌شود:

$$(y+1)^2=4(\frac{5}{2})(x+1/6) \xrightarrow{x=0} (y+1)^2=10(0+1/6)$$

$$\Rightarrow y+1=\pm 4 \Rightarrow y=3,-5$$

۲ 660 زاویهٔ تابش و خط مماس با زاویهٔ باز تابش و خط مماس با هم برابر است، بنابراین:



$$\Rightarrow 50^\circ+50^\circ+x=180^\circ \Rightarrow x=80^\circ$$

۱ 661 قسمت هاشور خورده درون دایرهٔ $x^2+y^2=3$ و بیرون سهمی $y^2=x$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 3 \\ y^2\ge x \end{cases} \Rightarrow x\le y^2\le 3-x^2$$

۳ 662 هر دو نقطهٔ داده شده x و z یکسان دارند، بنابراین معادلهٔ خط گذرا از نقاط A و B به صورت $\begin{cases} x=1 \\ z=3 \end{cases}$ است.

۲ 663 در این مکعب $0\le x\le 4\,,0\le y\le 2\,,-2\le z\le 3$ است، بنابراین حجم مکعب مستطیل برابر است با:

$$V=4\times 2\times 5=40$$

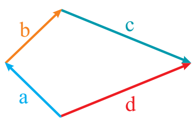
۱ 664 ابتدا تساوی داده شده بین دو بردار را به یک تساوی بین نقاط تبدیل می‌کنیم و سپس نقطهٔ A را در ابتدای همهٔ نقاط طرفین تساوی قرار می‌دهیم:

$$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC} \Rightarrow D-B=2(C-D) \Rightarrow 3D=2C+B$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\underbrace{\frac{1}{3}}_{m}\overrightarrow{AB}+\underbrace{\frac{2}{3}}_{n}\overrightarrow{AC} \Rightarrow m+n=1$$

۴ 665 در ساعت ۲ [عصر یا صبح] زاویهٔ دو بردار از همه کمتر است و ضرب داخلی آن‌ها بزرگتر است.

۳ 666 چون حاصل $a.b+c.d$ خواسته شده، پس سعی می‌کنیم رابطه‌ای بین $a\,,b\,,c\,,d$ پیدا کنیم که آن هم باتوجه به شکل کاملاً مشخص است: $a+b+c=d$. در نتیجه $a+b=d-c$ بنابراین داریم:



$$|a+b|=|d-c| \Rightarrow |a|^2+|b|^2+2a.b=|d|^2+|c|^2-2d.c$$

$$\Rightarrow 1^2+1^2+2a.b=2^2+2^2-2d.c \Rightarrow 2a.b+2c.d=6$$

$$\Rightarrow a.b+c.d=3$$

۳ 667 سه بردار هم‌اندازه‌اند و مجموع آن‌ها صفراست، بنابراین زاویهٔ دوبه‌دوی آن‌ها 120° است.

$$a.(2b-c)=2a.b-a.c=\underbrace{2|a||b|\cos 120^\circ}_{2\times 1\times 1\times (-\frac{1}{2})}-\underbrace{|a||c|\cos 120^\circ}_{1\times 1\times (-\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$$

۱ 668 اگر فرض کنیم $U=(a_1,a_2,a_3)$ و $V=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم:

$$|U.V|\le |U||V| \Rightarrow \left|\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3}\right|\le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}$$

حال طرفین نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2\le 12\times\frac{1}{3}=4$$

۳ 669 اندازهٔ پاره‌خط BH عبارت است از اندازهٔ تصویر بردار $\overrightarrow{BA}$ بر بردار $\overrightarrow{BC}$ بنابراین:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(-1,0,-1) \\ \overrightarrow{BC}=(1,1,0) \end{cases} \Rightarrow |BH|=\frac{|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ 670 با توجه به بردارهای u و v بردار $u\times v$ را پیدا کرده و با بردار داده شده برای $u\times v$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u=(a,1,-2) \\ v=(2,b,-2) \end{cases} \Rightarrow u\times v=(-2+2b,-4+2a,ab-2)=(c,2,10)$$

حال دو بردار در صورتی مساوی هستند که مؤلفه‌های نظیر آن‌ها مساوی باشد:

$$\begin{cases} -4+2a=2 \Rightarrow a=3 \\ ab-2=10 \Rightarrow b=4 \\ -2+2b=c \Rightarrow c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=(3,1,-2) \\ u\times v=(6,2,10) \end{cases}$$

حال با معلوم شدن بردارهای u و v داریم:

$$u\times(u\times v)=(14,-42,0)=14(1,-3,0)=14(i-3j)$$

۳ | 671 برای پیدا کردن اندازهٔ تفاضل دو بردار نیاز به کسینوس زاویهٔ دو بردار است، بنابراین رابطهٔ $|a\times(a-b)|=۱۶$ را ساده کرده و سینوس زاویهٔ دو بردار را پیدا می‌کنیم سپس از روی سینوس مقدار کسینوس به دست می‌آید:

$$|a\times(a-b)|=|\underbrace{a\times a}_{\bar{0}}-a\times b|=۱۶\Rightarrow|a||b|\sin\theta=۱۶$$

$$۴\times۵\times\sin\theta=۱۶\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\theta>۹۰^\circ}\cos\theta=-\frac{۳}{۵}$$

حال اندازهٔ تفاضل دو بردار قابل محاسبه است:

$$|a-b|^۲=\underbrace{|a|^۲}_{۱۶}+\underbrace{|b|^۲}_{۲۵}-\underbrace{۲|a||b|\cos\theta}_{۴\times۵\times(-\frac{۳}{۵})}=۶۵\Rightarrow|a-b|=\sqrt{۶۵}$$

۳ | 672 مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار برابر اندازهٔ ضرب خارجی آن دو بردار است. بنابراین:

$$S=|a\times(a-b)|=|\underbrace{a\times a}_{\bar{0}}-a\times b|=|-a\times b|=|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

از طرفی کسینوس زاویهٔ دو بردار $\frac{۳}{۵}$ است، بنابراین:

$$\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱\Rightarrow\frac{۹}{۲۵}+\sin^۲\theta=۱\xrightarrow{\sin^۲\theta=\frac{۱۶}{۲۵}}\sin\theta=\frac{۴}{۵}$$

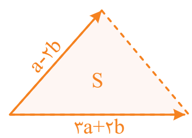
حال اندازهٔ بردار a را نیز به دست می‌آوریم:

$$|a|=\sqrt{۴^۲+۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

بنابراین اکنون مساحت متوازی‌الاضلاع قابل محاسبه است:

$$S=|a||b|\sin\theta=۶\times۱۰\times\frac{۴}{۵}=۴۸$$

۲ | 673 می‌دانیم مساحت مثلث تولید شده توسط دو بردار نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن‌هاست.



بنابراین خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}|(۳a+۲b)\times(a-۲b)|=\frac{۱}{۲}|۳\underbrace{a\times a}_{\bar{0}}-۶a\times b+۲b\times a-۴\underbrace{b\times b}_{\bar{0}}|$$

می‌دانیم $a\times b=-b\times a$ بنابراین مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}|-۶a\times b-۲a\times b|=۴|a\times b|=۴\underbrace{|a|}_{۴}\underbrace{|b|}_{۳}\underbrace{\sin۳۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}=۲۴$$

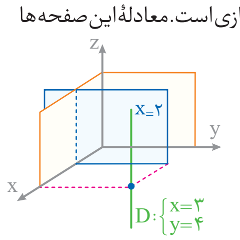
۱ | 674 حجم متوازی السطوح برابر با قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار است:

$$V=|(a\times b).((a+b)\times(a-b))|=|(a\times b).(\underbrace{-a\times b+b\times a}_{۲b\times a})|=۲|a\times b|^۲$$

$$\begin{cases}a=(۱,-۱,۱)\\ b=(۱,-۲,۲)\end{cases}\Rightarrow a\times b=(۰,-۱,-۱)\Rightarrow V=۲\times(\sqrt{۲})^۲=۴$$

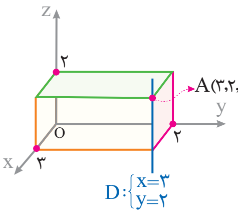
۴ | 675 بردارهای $a\times i, b\times i, c\times i$ همگی عمود بر i هستند، پس قطعاً همگی درون یک صفحه قرار گیرند و در نتیجه ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

۱ | 676 گزینه‌های ۲ و ۴ خط محسوب می‌شوند، از طرف دیگر این خط عمود بر صفحهٔ xy است و با صفحات xz و yz موازی است. معادلهٔ این صفحه‌ها به ترتیب $y=۰$ و $x=۰$ است، بنابراین این خط با هر صفحهٔ دیگر که موازی این صفحه‌ها باشد، موازیست، بنابراین گزینهٔ ۱ جواب است چون صفحه‌ای به موازات yz است.



۲ | 677 ویژگی مشترک خط و نقطهٔ داده شده $z=۲$ است. بنابراین این صفحه شامل نقطهٔ A و خط D است.

۱ | 678 با توجه به اطلاعات مسئله شکل آن به صورت مقابل است و حجم آن برابر است با:



$$V=۲\times۳\times۲=۱۲$$

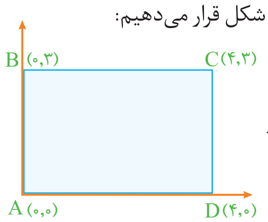
۴ | 679 برای فرود ایمن باید $w+t$ در راستای ℓ باشد، یعنی $w+t$ موازی ℓ باشد، اگر $t=ai+bj$ فرض شود، آنگاه:

$$\begin{cases}w+t=(۳+a)i+(b+۲)j\\ \ell=-i+۴j\end{cases}\Rightarrow\frac{۳+a}{-۱}=\frac{b+۲}{۴}\Rightarrow۴a+b=-۱۴$$

تنها گزینه‌ای که در رابطهٔ فوق صدق می‌کند گزینهٔ ۴ است، زیرا:

$$۴(-۴)+۱(۲)=-۱۴$$

۴ | 680 یک دستگاه مختصات دو بعدی روی شکل قرار می‌دهیم:



$$\begin{cases}\vec{AC}=(۴,۳)\\ \vec{BD}=(۴,-۳)\end{cases}\Rightarrow\vec{AC}.\vec{BD}=۱۶-۹=۷$$

۲ | 681 می‌دانیم $a+b+c=\bar{0}$ بنابراین $b+c=-a$ است حال به کمک این رابطه عبارت خواسته شده را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$a.b+a.c-b.c=a.(b+c)-b.c=-a.a-b.c=-|a|^۲-b.c$$

اکنون a را به طرف دوم می‌بریم و خواهیم داشت:

$$b+c=-a\Rightarrow|b+c|=|-a|$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$|b+c|^۲=|-a|^۲\Rightarrow|b|^۲+|c|^۲+۲b.c=|a|^۲$$

$$۹+۲۵+۲b.c=۱۶\Rightarrow۲b.c=-۱۸\Rightarrow b.c=-۹$$

با معلوم شدن b.c حاصل عبارت خواسته شده قابل محاسبه است:

$$\text{حاصل عبارت}=-|a|^۲-b.c=-۱۶-(-۹)=-۷$$

۲ | 682 a.c را به طرف اول تساوی برده و از عکس قانون پخشی استفاده می‌کنیم:

$$a.b=a.c\Rightarrow a.b-a.c=۰\Rightarrow a.(b-c)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=\bar{0} & \times\\ a\perp(b-c) & \checkmark\\ b=c & \times\end{cases}$$

چون بردارها دو به دو متمایز و غیر صفر هستند بنابراین باید a عمود بر $b-c$ باشد که در گزینهٔ ۲ بردار a بر $b-c$ عمود است.

۳ | 683 چون زاویهٔ a, a' هیچگاه بزرگتر از ۹۰° نیست، بنابراین همواره باید $a.a'\geq۰$ باشد، در نتیجه تنها گزینهٔ قابل قبول، گزینهٔ ۳ است.

۱ | 684 برای پیدا کردن زاویهٔ a, a' زاویهٔ بین a و b را حساب می‌کنیم ولی جلوی کسینوس قدر مطلق می‌گذاریم:

$$\cos\theta=\left|\frac{a.b}{|a||b|}\right|=\left|\frac{۰-۱+۰}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}\right|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$$

813 ۱ از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(x+۱)^۲+(۲x+۱)^۲=(۲x+۳)^۲ \Rightarrow x^۲-۶x-۷=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۷\\x=-۱\end{cases}$$

پس اضلاع مثلث ۸ و ۱۵ و ۱۷ و مساحت آن $\frac{۸\times۱۵}{۲}=۶۰$ است.

814 ۱ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر A و B دایره‌ای است که A و B دوسر قطر آن هستند؛ بنابراین:

$$O=\frac{A+B}{۲}=\frac{(-۴,۱)+(۲,۵)}{۲}=(-۱,۳)$$

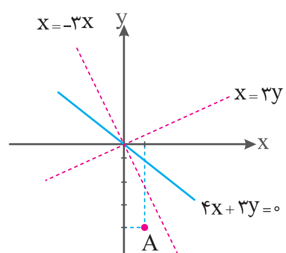
$$R=|OA|=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

حال معادلهٔ دایره را می‌نویسیم، سپس به جای y صفر قرار می‌دهیم تا محل تقاطع با محور x ها به‌دست آید:

$$(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۳ \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲+۹=۱۳ \Rightarrow x=۱,-۳$$

815 ۲ دایره‌ای که بردو خط مماس است، مرکزش روی نیمساز دو خط است:

$$\frac{۴x+۳y}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\pm\frac{x}{\sqrt{۱}} \Rightarrow \begin{cases}۴x+۳y=۵x \Rightarrow x=۳y \quad \times\\ ۴x+۳y=-۵x \Rightarrow y=-۳x\end{cases}$$

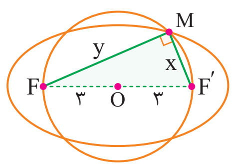


با توجه به شکل مسئله $y=۳x$ قابل قبول است؛ حال مرکز را به‌صورت $O(\alpha,-۳\alpha)$ روی این خط فرض می‌کنیم حال چون دایره بر محور y ها مماس است، شعاع آن هم برابر $R=|\alpha|$ خواهد شد، بنابراین:

$$(x-\alpha)^۲+(y+۳\alpha)^۲=\alpha^۲ \xrightarrow{A(۱,-۴)} (۱-\alpha)^۲+(-۴+۳\alpha)^۲=\alpha^۲$$

$$\Rightarrow ۹\alpha^۲-۲۶\alpha+۱۷=۰ \Rightarrow \alpha=۱,\frac{۱۷}{۹} \Rightarrow R_{max}=\frac{۱۷}{۹}$$

816 ۳ در این بیضی $۲a=۸$ و $۲b=۲\sqrt{۷}$ است، بنابراین:



$$\begin{cases}a=۴\\b=\sqrt{۷}\end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{۱۶-۷}=۳$$

بنابراین باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}x+y=۸ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy=۶۴\\x^۲+y^۲=۳۶\end{cases} \Rightarrow ۳۶+۲xy=۶۴ \Rightarrow xy=۱۴$$

حال مجموع دو عدد ۸ و حاصل ضرب آن ۱۴ است، بنابراین:

$$x^۲-۸x+۱۴=۰ \xrightarrow{\Delta'=۱۶-۱۴=۲} x=۴\pm\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases}x_۱=۴-\sqrt{۲}\\x_۲=۴+\sqrt{۲}\end{cases}$$

817 ۲ سهمی افقی است، بنابراین عرض رأس و عرض کانون با هم برابر است:

$$y^۲+ay+bx+۱=۰ \xrightarrow{f'_y=۰} ۲y+a=۰ \Rightarrow y=-\frac{a}{۲}=-۲ \Rightarrow a=۴$$

حال به جای a=۴ قرار می‌دهیم و معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$y^۲+۴y+bx+۱=۰ \Rightarrow (y+۲)^۲=-bx-۱+۴$$

$$\Rightarrow (y+۲)^۲=-b(x-\frac{۳}{b}) \Rightarrow \begin{cases}S(\frac{۳}{b},-۲)\\p=-\frac{b}{۴}\end{cases}$$

بنابراین $F(\frac{۳}{b}-\frac{b}{۴},-۲)$ است؛ حال طول کانون را برابر با ۰/۲۵- قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳}{b}-\frac{b}{۴}=-۰/۲۵ \Rightarrow \frac{۱۲-b^۲}{۴b}=-\frac{۱}{۴}$$

$$۱۲-b^۲=-b \Rightarrow b^۲-b-۱۲=۰ \Rightarrow (b-۴)(b+۳)=۰ \Rightarrow b=۴,-۳$$

818 ۴

$$A^۳=\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۶&۲&۲۴\\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۰&۶&۸۶\\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

819 ۳

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}}_{A}.X.\underbrace{\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۴&۳\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۸\end{bmatrix}}_{C} \Rightarrow X=A^{-۱}.C.B^{-۱}$$

$$X=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۴&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۸\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}$$

ضریب $-\frac{۱}{۴}$ را با درایه‌های ماتریس وسطی ساده می‌کنیم:

$$X=\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۴&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵&۶\\۴&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۷\\-۴&-۴\end{bmatrix}$$

820 ۳ قرینه ستون اول را به ستون سوم و ۲- برابر آن را به ستون دوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}-۴&۱&۱\\۱&۲-x&۱\\۳&۲&۳-x\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}-۴&۹&۵\\۱&-x&۰\\۳&-۴&-x\end{vmatrix}=۰$$

حال دترمینان را حول ستون سوم بسط می‌دهیم:

$$۵(-۴+۳x)-x(۴x-۹)=۰ \Rightarrow -۴x^۲+۲۴x-۲۰=۰$$

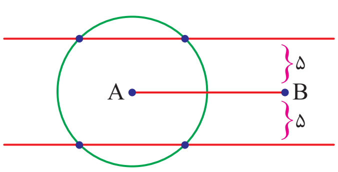
$$\Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۱,۵$$

821 ۳ با استفاده از رابطهٔ $۱+\cot^۲C=\frac{۱}{\sin^۲C}$ مقدار $\sin C$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\cot C=\frac{\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \sin C=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶} \Rightarrow AH=۶۴$$

822 ۴ نقطهٔ C باید از ضلع AB به فاصلهٔ ۵ باشد، پس روی خط‌های موازی با AB و به فاصلهٔ ۵ واحد از AB قرار دارد. همچنین، نقطهٔ C باید روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ قرار گیرد. از برخورد این دایره با خط‌های موازی ۴ نقطه به‌دست می‌آید.



آزمون‌های جامع

823 ۲ ابتدا از قضیه تالس استفاده می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{EAB}\sim\overset{\Delta}{EDC}\Rightarrow\frac{EA}{AD}=\frac{EB}{BC}\Rightarrow\frac{۵}{x}=\frac{۳x-۴}{۴}\Rightarrow۳x^۲-۴x=۲۰$$

$$\Rightarrow(۳x-۱۰)(x+۲)=۰\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}\ \text{یا}\ x=-۲\ \times$$

چون دو مثلث EAB و ECD متشابهند، پس نسبت مساحت های آن‌ها مساوی و با مجذور نسبت تشابه است لذا داریم:

$$\frac{S_{EAB}}{S_{ECD}}=(\frac{AE}{DE})^۲=(\frac{۵}{۵+\frac{۱۰}{۳}})^۲=(\frac{۱۵}{۲۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\frac{S_{EAB}}{S_{ABCD}}=\frac{۹}{۲۵-۹}=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{EAB}}=\frac{۱۶}{۹}$$

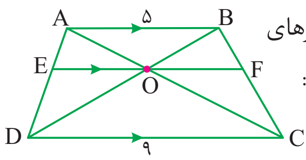
824 ۱ از تشابه مثلث‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{BEF}:\frac{AE}{EF}=\frac{DE}{BE}$$

$$\overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{DEG}:\frac{AE}{EG}=\frac{BE}{DE}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{EF}=\frac{EG}{AE}\Rightarrow AE^۲=EF.EG$$

825 ۱ اگر نقطهٔ O محل برخورد قطرهای ذوزنقه باشد، طبق قضیه تالس داریم:



$$\frac{۱}{OE}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۹}\Rightarrow OE=\frac{۴۵}{۱۴}$$

از طرفی $OE=OF$ و می‌توان نوشت:

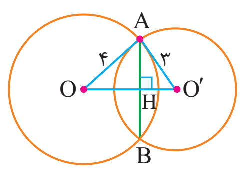
$$EF=۲OE=۲\times\frac{۴۵}{۱۴}=\frac{۴۵}{۷}$$

826 ۲ از رابطهٔ استوارت استفاده می‌کنیم:

$$AD^۲=\frac{۳\times۸^۲+۶\times۷^۲}{۳+۶}-۳\times۶=\frac{۴۸۶}{۹}-۱۸$$

$$AD^۲=۳۶\Rightarrow AD=۶$$

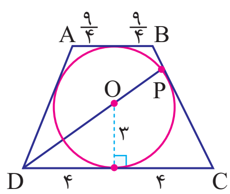
827 ۴ ناحیه مشترک بین دو کره یک دایره است که شعاع آن با AH برابر است، مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و داریم:



$$AH=\frac{۴\times۳}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\text{مساحت ناحیه مشترک}=\pi(AH^۲)=\frac{۱۴۴}{۲۵}\pi=۵/۷۶\pi$$

828 ۳ اگر r شعاع دایرهٔ محاط در ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد، داریم:

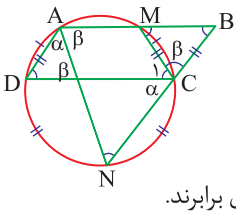


$$r^۲=\frac{AB.CD}{۴}=\frac{۸\times\frac{۹}{۲}}{۴}\Rightarrow r=۳$$

$$\Rightarrow DO=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

$$\Rightarrow DP=DO+r=۵+۳=۸$$

829 ۲ مطابق شکل زاویه‌های $\hat{D}$ و $\hat{B}$ (زوایای روبرو در متوازی‌الاضلاع) برابرند. همچنین $\hat{N}=\hat{D}$ (رو به یک کمان) پس مثلث ABN دو زاویه برابر دارد.

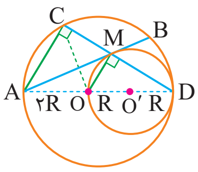


از طرفی کمان‌های محصور بین وترهای موازی برابرند.

$$AM\|CD\Rightarrow\widehat{AD}=\widehat{MC}\Rightarrow AD=MC=BC$$

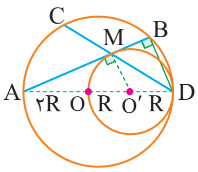
پس مثلث BCM دو ضلع برابر دارد. بنابراین کُلاً مثلث متساوی‌الساقین وجود دارد.

830 ۳ در مثلث ACD زاویه C زاویه محاطی روبه قطر است، بنابراین $\hat{C}=۹۰^\circ$ همچنین در مثلث OMD زاویهٔ M زاویهٔ محاطی روبه قطر است پس $\hat{M}=۹۰^\circ$ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ACD میانه وارد بر وتر نصف وتر است یعنی $OC=OD$ در نتیجه مثلث OCD متساوی‌الساقین است و OM ارتفاع وارد بر قاعده است پس میانه هست بنابراین:



$$MC=MD$$

از طرفی، اگر از M به O' وصل کنیم چون شعاع دایره در نقطهٔ M بر AB عمود است پس $A\hat{M}O'=۹۰^\circ$ و همچنین اگر از B به D وصل کنیم چون زاویه B محاطی روبه قطر است لذا $A\hat{B}D=۹۰^\circ$ و می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند پس $MO'\|BD$. پس در مثلث ABD داریم:

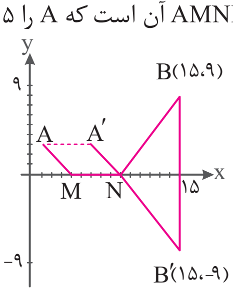


$$\frac{AM}{MB}=\frac{AO'}{O'D}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow AM=۳MB$$

روابط طولی را برای نقطهٔ M می‌نویسیم:

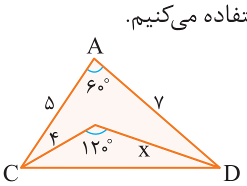
$$MC.MD=MA.MB\Rightarrow MC^۲=۳MB^۲\Rightarrow\frac{MC}{MB}=\sqrt{۳}$$

831 ۳ کوتاه‌ترین مسیر برای خط شکسته AMNB آن است که A را ۵ واحد به جلو منتقل کنیم تا به $A'(۶,۳)$ برسیم. سپس B را نسبت به محور x قرینه کنیم تا B' به‌دست آید، اگر A' را به B' وصل کنیم، نقطهٔ N به دست می‌آید و طول کوتاه‌ترین مسیر عبارتست از:



$$AM+MN+NB=AA'+A'B'=۵+\sqrt{۹^۲+۱۲^۲}=۱۵+۵=۲۰$$

832 ۱ قضیه کسینوس‌ها را در دو مثلث استفاده می‌کنیم.



$$CD^۲=۴^۲+x^۲-۲\times۴\times x\times\cos۱۲۰^\circ$$

$$CD^۲=۵^۲+۷^۲-۲\times۵\times۷\times\cos۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow۱۶+x^۲+۴x=۲۵+۴۹-۳۵$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x-۲۳=۰\Rightarrow x=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۰۸}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=-۲+\sqrt{۲۷}\ ✓\\x=-۲-\sqrt{۲۷}\ \times\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+۲=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}$$