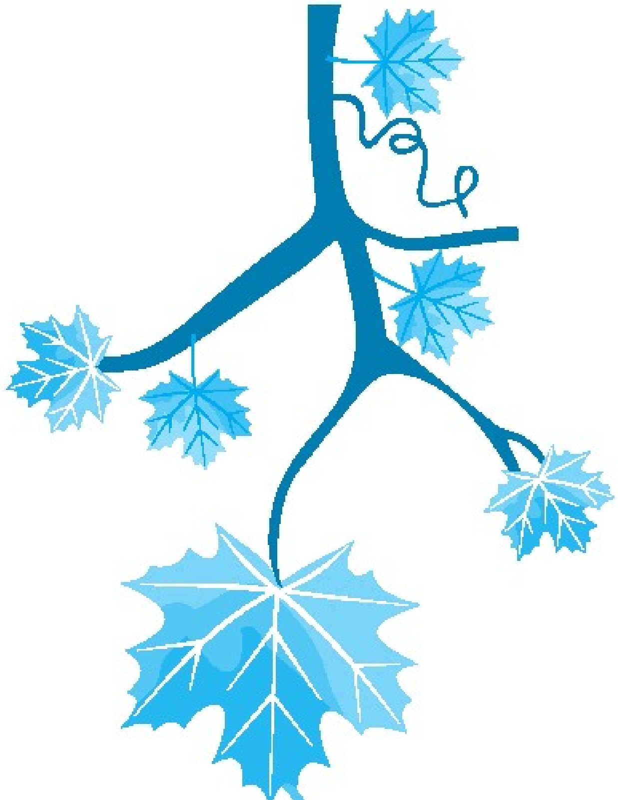
روش‌های احتمالاتی در المپیاد

مؤلف

حمید کاملی

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده وهریک
از کتاب های این پروژه برگی از آن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است. امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بارواقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.
التماس دعا

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی شود المپیادهای علمی می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چرا که درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگراند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چند گزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود در قابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متاسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سوال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی از این افراد راجع به موفقیت هایشان سوال می شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می دانند بنابرین فعالیت در یکی از زمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری از دانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته ی مورد علاقه ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که در نهایت به حل سوالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده در زندگی به دید یک مساله ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی از شاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر از عهده آن ها برمی آیند.

۵. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال در یکی از المپیاد های علمی (حتی مدال برنز) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن در سایت های معتبر مخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف از جمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنوات نه چندان دور مدال آور یکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر
رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مولفین

در طی سال‌های اخیر روش‌های احتمالاتی به عنوانی روشی مؤثر و آسان در حل مسائل شناخته شده است به‌طوری که در حال حاضر در دوره‌های المپیاد کشورهایی مانند امریکا و کانادا و همچنین دوره‌های آمادگی مسابقات دانشجویی به‌صورت جدی تدریس می‌شود.

در بیشتر مسأله‌هایی که با استفاده از روش‌های احتمالاتی حل می‌شوند به دنبال اثبات وجود یک شی با خاصیت مطلوب هستیم. همیشه برای حل این گونه مسائل لازم نیست یک ساختار با الگوریتم برای پیدا کردن شی موردنظر ارائه شود. گاهی فقط نیاز است که وجود یک شی با خاصیت مطلوب را ثابت کنیم و حتی نیاز به ارائه‌ی یک مثال هم نیست. برای این کار می‌توانیم یک مجموعه از اشیاء در نظر بگیریم و احتمال وجود یک شی با خاصیت موردنظر در این مجموعه را حساب کنیم.

اگر این احتمال بزرگ‌تر از صفر باشد، نتیجه می‌گیریم که در این مجموعه حداقل یک شی با خاصیت مطلوب وجود دارد.

بدیهی است که اگر این احتمال صفر باشد، مطمئن هستیم که در این مجموعه هیچ شی‌ای خاصیت مطلوب را ندارد. این تکنیک حل مسأله، به عنوان «روش‌های احتمالاتی» شناخته می‌شود. به‌طور خلاصه در این روش ثابت می‌کنیم احتمال این‌که یک شی مطلوب وجود داشته باشد بزرگ‌تر از صفر است.

مطالعه‌ی این کتاب می‌تواند برای دانش‌جویان، دبیران و دانش‌آموزانی که خود را برای مرحله‌ی دوم و مراحل بعدی المپیادهای ریاضی و کامپیوتر آماده می‌کنند، مفید باشد. به دانش‌آموزانی که قصد مطالعه‌ی این کتاب را دارند توصیه می‌شود ابتدا با مباحث ترکیبیات و همچنین تکنیک‌های مختلف حل مسأله تا حدی آشنایی داشته باشند سپس به فراگیری روش‌های احتمالاتی بپردازند.

این کتاب در ۴ فصل نوشته شده است. در فصل اول تعریف‌ها و مفاهیم نظریه احتمال به همراه مثال‌هایی برای آشنایی بیشتر ارائه شده است. همچنین قضیه‌هایی از نظریه احتمال آورده شده است که تا به حال در حل مسائل المپیادهای ریاضی و کامپیوتر استفاده شده است.

در فصل دوم مسائلی که در المپیادهای مختلف ارائه شده و همچنین تعدادی از مسائل معروف که حل آنها بسیار آموزنده است ارائه شده است. در فصل سوم برای هر مسأله راهنمایی و در فصل چهارم پاسخ کامل ارائه شده است که توصیه می‌شود حتماً قبل از مطالعه‌ی پاسخ سؤال‌ها از راهنمایی‌های آنها استفاده شود.

تعدادی از مسائل این کتاب از منابع مختلف جمع‌آوری شده‌اند، اما روش‌های ارائه شده برای حل آنها، احتمالاتی و متفاوت با راه‌حل اصلی آنها است. در اکثر اوقات راه‌حل احتمالاتی ارائه شده ساده‌تر از راه‌حل اصلی آن است، اما مسائلی نیز وجود دارند که با استفاده از روش‌های معمول، ساده‌تر حل می‌شوند و هدف از ارائه‌ی راه‌حل احتمالاتی برای آنها، کسب مهارت بیشتر خواننده در این زمینه است. از این‌رو توصیه

می‌کنیم پس از مطالعه‌ی این کتاب، سعی کنید مسائل را علاوه بر راه‌حل‌های معمول، با استفاده از روش‌های احتمالاتی هم حل کنید. پیشاپیش از این‌که مسائل جدید را با من هم در میان می‌گذارید سپاس‌گزارم.

با وجود چندین دوره بازخوانی کتاب، احتمال اشتباه در این کتاب بیشتر از صفر است، از این‌رو نظرات و پیشنهادات شما با احتمال بسیار زیاد استفاده خواهد شد.

در پایان بر خود لازم می‌دانم صمیمانه‌ترین سپاس‌گزاری را از استادم، دکتر حسین حاجی‌ابولحسن داشته باشم که هر چه در روش‌های احتمالاتی فراگرفته‌ام را از ایشان می‌دانم. همچنین از راهنمایی‌های دکتر محرم ایرد موسی و David Arthur کمال تشکر و قدردانی را دارم. لازم می‌دانم از زحمات آقای سعید کاملی که من را در ویرایش و نمونه‌خوانی این اثر همراهی کردند، سپاس‌گزاری نمایم.

فهرست مطالب

۱

مقدمه

۱-۱ تعاریف اولیه

در زندگی روزمره بارها با آزمایش‌های تصادفی مختلفی روبرو می‌شویم. مانند وقتی که یک سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم و از نتیجه‌ی آن اطلاعی نداریم یا وقتی در یک قرعه‌کشی بانک شرکت می‌کنیم، از نتیجه‌ی آن اطلاعی نداریم و این قرعه‌کشی نتایج مختلفی می‌تواند داشته باشد. تا اینجا با عبارت‌هایی مانند آزمایش تصادفی آشنا شده‌ایم. هرکدام از این آزمایش‌های تصادفی نتایج گوناگونی می‌تواند داشته باشد که هرکدام از این نتایج ممکن را، یک پیشامد می‌گوییم.

تعریف مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه** می‌نامند و با Ω نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال وقتی یک تاس را یک بار پرتاب می‌کنیم، این یک آزمایش تصادفی است و هرکدام از نتایج ممکن برای عدد این تاس یک پیشامد است. با توجه به تعریف ارائه شده، تمام نتایجی که این آزمایش می‌تواند داشته باشد، فضای نمونه‌ی آزمایش است. پس فضای نمونه‌ی این آزمایش، مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ است.

در آزمایش پرتاب سکه می‌دانیم، سکه یا شیر می‌آید یا خط. پس فضای نمونه را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\Omega = \{\text{خط و شیر}\}$$

در مثال پرتاب تاس پیشامدهای متفاوتی می‌توان تعریف کرد، که در اینجا به چند تا از آن‌ها اشاره می‌شود.

۱. عدد ۱ ظاهر شود.

۲. عدد ظاهر شده عضوی از مجموعه‌ی $A = \{۱,۳,۵\}$ باشد. در اینجا مجموعه‌ی A یک پیشامد است و اگر عدد تاس برابر با عضوی از A باشد، می‌گوییم پیشامد A اتفاق افتاده است.

۳. عدد ظاهر شده هم مضرب ۳ باشد و هم مضرب ۲ باشد. اگر نتیجه‌ی آزمایش پرتاب تاس عضوی از مجموعه‌ی $B = \{۶\}$ باشد، می‌گوییم پیشامد B اتفاق افتاده است.

٤. عدد ظاهر شده مضرب ۳ یا مضرب ۲ باشد. مجموعه‌ی $C = \{۲,۳,۶\}$ حالت‌های مطلوب آزمایش است و اگر یکی از این حالت‌های مطلوب ظاهر شود، پیشامد C اتفاق افتاده است.

۵. عدد ظاهر شده هم مضرب ۵ و هم مضرب ۲ باشد. مجموعه‌ی $D = \phi$ حالت مطلوب آزمایش است، زیرا هیچ عددی در فضای نمونه‌ی $\Omega = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ وجود ندارد که هم مضرب ۵ و هم مضرب ۲ باشد.

حال فرض کنید آزمایش، پرتاب دو تاس باشد، برای هر تاس ۶ حالت داریم، پس فضای نمونه شامل ۳۶ عضو است.

$$\Omega = \{(i,j)|i,j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

که در آن پیشامد (i,j) وقتی رخ می‌دهد که تاس اول i و تاس دوم j بیاید.

در این آزمایش پیشامدها کمی پیچیده‌تر می‌شوند. به عنوان مثال پیشامد

$A = \{(i,j)|۲ \leq i \leq ۴, ۵ \leq j \leq ۶\}$

زمانی اتفاق می‌افتد که تاس اول ۲، ۳ یا ۴ بیاید و تاس دوم ۵ یا ۶ بیاید.

مثال ۱-۱-۱ در آزمایش پرتاب ۲ تاس، پیشامد اینکه مجموع عدد دو تاس برابر ۶ باشد را بدست آورید.

پاسخ: فرض کنید عضو اول زوج مرتب (x,y) برابر با عدد تاس اول و عضو دوم برابر با عدد تاس دوم باشد. پیشامد اینکه مجموع دو تاس برابر با ۶ باشد به این صورت است.

$$A = \{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

همان‌طور که تا به اینجا مشاهده کردید اگر $A \subseteq \Omega$ باشد، A یک پیشامد است. اگر نتیجه‌ی آزمایش عضوی از مجموعه‌ی A باشد می‌گوییم پیشامد A رخ داده است.

بدیهی است که اگر A یک پیشامد باشد آنگاه متمم A که با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم هم یک پیشامد است.

با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌دانیم که اگر A و B دو پیشامد باشند آنگاه $A \cup B$، $A \cap B$ هم پیشامد هستند. پیشامد $A \cup B$ یعنی حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیافتد، یا به صورت معادل

نتیجه‌ی آزمایش عضو حداقل یکی از دو مجموعه‌ی A و B باشد. همچنین پیشامد $A \cap B$ یعنی هم پیشامد A و هم پیشامد B اتفاق بیافتد، یا به صورت معادل نتیجه‌ی آزمایش عضو هر دو مجموعه‌ی A و B باشد. پیشامدهایی که اتفاق افتادن آن‌ها غیر ممکن باشد را با ϕ نشان می‌دهیم.

قضیه (**دمورگان**): اگر $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ تعدادی مجموعه باشند داریم

$$\overline{\left(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=۱}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\left(\bigcap_{l=۱}^{n} A_l\right)} = \bigcup_{i=۱}^{n} \overline{A_i}$$

اگر $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ پیشامدهایی از فضای نمونه Ω باشند، همچنان قضیه‌ی دمورگان برای آن برقرار است.

در مثال پرتاب دوتاس دیدیم که تعداد حالت‌های مطلوب برای اینکه پیشامد A (مجموع عدد دو تاس برابر با ۶ باشد)، اتفاق بیافتد برابر با ۵تا است و کل حالت‌هایی که نتیجه‌ی این آزمایش تصادفی می‌تواند داشته باشد، ۳۶تا است. به صورت شهودی احتمال اتفاق افتادن یک پیشامد مانند A را، نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به کل حالت‌ها تعریف می‌کند. منظور از حالت مطلوب عضوی از پیشامد A است. در این مثال فرض بر این بود که تاس کاملاً متقارن است و احتمال اینکه هر عددی ظاهر شود برابر با $\frac{۱}{۶}$ است.

همانند این مثال، در بسیاری از آزمایش‌ها فرض می‌کنیم تمام عضوهای فضای نمونه از نظر رخ دادن هم شانس هستند، یعنی با احتمال برابر رخ می‌دهند. با توجه به این فرض، احتمال اتفاق افتادن پیشامد E در فضای نمونه S را این طور تعریف می‌کنیم

$$\Pr(E) = \frac{\text{تعداد عضوهای متعلق به } E}{\text{تعداد عضوهای متعلق به } S}$$

مثال ۱-۱-۲ در یک کیسه ۴ مهره‌ی سیاه و ۱۲ مهره‌ی سفید قرار دارد. ۲ مهره به صورت تصادفی و بدون دیدن رنگ آنها، از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه ۲ مهره سیاه باشند چقدر است.

پاسخ: پیشامد E را اینطور تعریف می‌کنیم که ۲ مهره، سیاه باشند. هدف محاسبه‌ی احتمال پیشامد E است. برای مشخص شدن فضای نمونه، ابتدا مهره‌ها را از ۱ تا ۱۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید مهره‌های سیاه شماره‌های ۱ تا ۴ باشند. حال فضای نمونه مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \cdots, ۱۶\}$ است.

$$\Omega = \{(i,j) | ۱ \leq i < j \leq ۱۶\}$$

پس پیشامد E هم به این صورت خواهد بود:

$$E = \{i, j\} | ۱ \leq i < j \leq ۴\}$$

پس احتمال پیشامد E برابر است با

$$\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۶}{۲}} = \frac{۱}{۲۰}$$

تا اینجا با مفهوم احتمال تا حدی آشنا شدیم. اما مفهوم احتمال نیاز به تعریف‌هایی دقیق‌تر دارد که در زیر **۲** نوع تعریف ارائه می‌شود. تعریف ۱، تفکر رایج در مورد احتمال است و تعریفی شهودی از مفهوم احتمال به حساب می‌آید. اما تعریف **۲** کمی پیچیده‌تر ولی دقیق است.

تعریف فرض کنید یک آزمایش را N بار تکرار کنیم و N یک عدد خیلی بزرگ باشد (فرض کنید شرایط آزمایش ثابت باشد) و فرض کنید تعداد دفعاتی که پیشامد A اتفاق افتاده است را با $N(A)$ نشان دهیم. در این صورت اگر N به بینهایت میل کند نسبت $N(A)$ به N به یک مقدار ثابت همگرا می‌شود که این مقدار ثابت را با $\Pr(A)$ نشان می‌دهیم و **احتمال** پیشامد A می‌نامیم.

به عنوان مثال وقتی می‌گوییم احتمال اینکه در پرتاب یک تاس عدد ۱ بیاید برابر با $\frac{۱}{۶}$ است، منظور این است که اگر یک تاس را N بار پرتاب کنیم و تعداد دفعاتی که ۱ آمده برابر با n باشد داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{N} = \frac{۱}{۶}$$

با توجه به تعریف ارائه شده نتیجه می‌شود که احتمال اتفاق افتادن پیشامد A عددی بین صفر و یک است، یعنی $۰ \leq \Pr(A) \leq ۱$. اگر پیشامد A اتفاق نیافتد، $N(A)$ برابر با صفر و در نتیجه $\Pr(A) = ۰$ است.

تعریف آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونه‌ی آن S است. تابع $\Pr$ را برای هر پیشامد E از این فضای نمونه اینطور تعریف می‌کنیم که در **۳** اصل زیر صدق کند:

اصل ۱: $۰ \leq \Pr(E) \leq ۱$

اصل **۲**: $\Pr(S) = ۱$

اصل **۳**: برای هر دنباله‌ای از پیشامدهای $E_۱, E_۲, \cdots, E_n$ که به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم $E_i \cap E_j = \phi$ آنگاه داریم

$$\Pr\Big(\bigcap_i E_i\Big) = \sum_i \Pr(E_i)$$

تابع $\Pr(E)$ را احتمال پیشامد E تعریف می‌کنیم.

اصل ۱ بیان می‌کند که احتمال اینکه نتیجه‌ی آزمایش عضوی از پیشامد E باشد عددی بین ۰ و ۱ است. اصل ۲ بیان می‌کند که احتمال اینکه نتیجه‌ی آزمایش عضوی از فضای نمونه باشد، برابر با ۱ است. اصل ۳ یعنی اگر دو پیشامد E_1 و E_2 با هم اشتراک نداشته باشند احتمال $E_1 \cup E_2$ برابر است با مجموع احتمال E_1 و E_2. تابع $\Pr$ که با این ۳ اصل تعریف شده است، کاملاً مطابق با تعریف شهودی احتمال است که در ابتدا مثال‌هایی از آن ذکر شد.

در این کتاب، برای بدست آوردن احتمال یک پیشامد از تعریف‌های قبلی که گفته شده استفاده می‌شود، زیرا تعریف ۲ و استفاده از آن نیاز به مقدماتی دارد که موضوع این کتاب نیست و از آنها صرف‌نظر شده است. از این رو به خوانندگان علاقه‌مند توصیه می‌شود که برای تسلط بیش‌تر به مرجع‌های ۱۵، ۱۶ یا ۱۷ مراجعه کنند.

مثال ۳-۱-۱ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال هر کدام از پیشامدهای زیر را تعیین کنید.

الف) سه بار شیر بیاید.

ب) برای ۳ سکه به ترتیب این نتیجه بدست آید: شیر، خط، شیر

ج) ۲ بار شیر و یک بار خط بیاید.

د) تعداد شیرها بیشتر از تعداد خط‌ها باشد.

پاسخ: فضای نمونه را اینطور تعریف می‌کنیم:

$$\Omega = \{(i,j,k) | i,j,k \in \{0,1\}\}$$

شیر آمدن سکه را معادل با یک و خط آمدن سکه را معادل با صفر در نظر می‌گیریم. پس فضای نمونه همانطور که تعریف شده است برابر با تمام سه‌تایی‌های مرتب با اعداد صفر و یک است. پس کل حالات ممکن برای هر آزمایش ۸تا است.

الف) پیشامد A را اینطور تعریف می‌کنیم که هر ۳ بار نتیجه شیر بیاید. پس A برابر است با مجموعه‌ی سه‌تایی‌هایی که هر سه عدد یک باشد. تنها یک ۳تایی مرتب داریم که هر ۳ عدد یک باشد. پس $|A| = 1$ و احتمال پیشامد A برابر با $\frac{1}{8}$ است.

ب) پیشامد B را مجموعه‌ی ۳تایی‌های مرتبی در نظر می‌گیریم که اولین عدد یک، دومین عدد صفر و سومین عدد یک باشد. پس داریم $B = \{(1,0,1)\}$ و در نتیجه $|B| = 1$ است. پس احتمال این پیشامد $\frac{1}{8}$ است.

ج) پیشامد C را مجموعه‌ی ۳تایی‌های مرتبی در نظر می‌گیریم که ۲تا از اعداد یک و یکی از اعداد صفر باشد. برای عددی که صفر است ۳ حالت وجود ارد و در نتیجه داریم $|C| = 3$. پس احتمال اتفاق افتادن پیشامد C برابر با $\frac{3}{8}$ است.

د) پیشامد D را مجموعه‌ی ۳تایی‌های مرتبی در نظر می‌گیریم که تعداد یک‌ها بیشتر از تعداد صفرها باشد. دو حالت داریم، یا هر سه عدد یک است یا هر دوتا یک و یکی هم صفر داریم.
پس $|D| = ۴$ است و احتمال اتفاق افتادن پیشامد D برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

توجه کنید که مجموع احتمال این ۴ پیشامد از ۱ بیشتر است و دلیل این اتفاق این است که این پیشامدها با هم اشتراک دارند. یعنی امکان دارد حداقل ۲تا از این پیشامدها با هم اتفاق بیافتند.

مثال ۱-۱-۴ در یک مراسم قرعه‌کشی، درون کیسه‌ای ۵۲ مهره که شماره‌های ۱ تا ۵۲ روی آن‌ها نوشته شده، ریخته شده است، هر نفر سه مهره بیرون می‌آورد. اگر شماره‌ی هیچ‌یک از این سه مهره بیشتر از ۴۰ نباشد، شخص موردنظر برنده است و در غیر اینصورت بازنده است. آیا احتمال برنده شده در این قرعه‌کشی از $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است؟

پاسخ: خیر، احتمال باخت در این مسابقه بیشتر از احتمال برنده شدن است. تعداد روش‌هایی که می‌توان سه عدد از ۵۲ عدد انتخاب کرد برابر با $\binom{۵۲}{۳}$ است. پس فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی، همه‌ی زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \cdots, ۵۲\}$ است. همچنین تعداد روش‌هایی که می‌توان سه عدد کوچکتر یا مساوی با ۴۰ انتخاب کرد برابر است با $\binom{۴۰}{۳}$. پس احتمال برنده شدن در این قرعه‌کشی برابر است با

$$\frac{\binom{۴۰}{۳}}{\binom{۵۲}{۳}} = \frac{۹۸۸۰}{۲۲۱۰۰} < \frac{۱}{۲}$$

مثال ۱-۱-۵ اگر در اتاقی n نفر داشته باشند که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، احتمال اینکه هیچ دونفری در یک روز از سال متولد نشده باشند، چقدر است؟

پاسخ: چون هر نفر در یکی از ۳۶۵ روز سال می‌تواند متولد شده باشد، پس کل حالت‌ها برابر با ۳۶۵^n است و در نتیجه فضای نمونه ۳۶۵^n تا عضو دارد. حال تعداد حالات مطلوب را حساب می‌کنیم. فرض کنید نفر اول ۳۶۵ حالت برای روز تولد داشته باشد. اگر قرار باشد هیچ دو نفری در یک روز به دنیا نیامده باشند، نفر دوم ۳۶۴ حالت برای روز تولد دارد و به همین طریق برای نفر nام $۳۶۵ - n + ۱$ حالت برای روز تولد داریم. پس احتمال اینکه هیچ دو نفری در یک روز به دنیا نیامده باشند برابر است با

$$\frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \cdots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{۳۶۵^n}$$

نکته‌ی جالب اینجاست که اگر $n = ۲۳$ باشد، مقدار این احتمال کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است. یعنی اگر در یک اتاق ۲۳ نفر قرار داشته باشند که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، احتمال اینکه حداقل دو نفر در یک

روز متولد شده باشند از $\frac{1}{2}$ بیشتر است. جالب‌تر اینکه اگر در یک اتاق ۵۰ نفر باشند احتمال اینکه دو نفر در یک روز متولد شده باشند حداقل ۰٫۹۷۵ است. مثال ارائه شده به پارادوکس روز تولد مشهور است. در بدست آوردن احتمال پیشامد موردنظر هیچ اشتباهی رخ نداده است و به علت عجیب بودن این قضیه، به آن پارادوکس روز تولد می‌گویند.

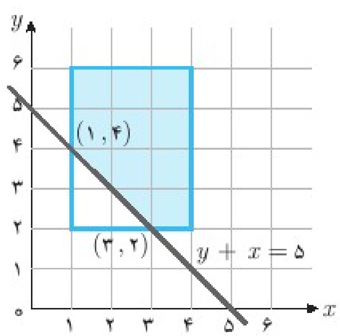
در تمام مثال‌هایی که تا به حال آورده شد، فضای نمونه و پیشامدها کمیت‌هایی گسسته بودند که تعداد حالت‌های مطلوب به سادگی قابل محاسبه بود. در ادامه چند مثال ارائه می‌شود که به محاسبه‌ی احتمال از طریق یافتن مساحت می‌پردازد. اثبات اینکه چرا محاسبه‌ی احتمال در مثال‌های پیش‌رو به این صورت است نیازمند توضیح مفاهیمی در نظریه‌ی احتمال و دانش اندکی در حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد. از این رو با ذکر چند مثال بعدی راهکاری برای محاسبه‌ی احتمال ارائه می‌کنیم و از اثبات صرف‌نظر می‌شود. خواننده برای یافتن اثبات‌های قضیه‌هایی که تا انتهای این فصل ارائه می‌شود، می‌تواند به مرجع‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۷ مراجعه کند.

به عنوان مثال فرض کنید یک دایره به شعاع ۳ در صفحه‌ی مختصات به مرکز $(0,0)$ رسم شده است و یک ناحیه A در این دایره قرار داده شده است که مساحت ناحیه A را با $|A|$ نشان می‌دهیم. یک نقطه‌ی X به صورت تصادفی در این دایره انتخاب می‌کنیم. می‌گوییم $x \in A$ است، اگر و تنها اگر نقطه‌ی x داخل ناحیه‌ی A قرار بگیرد. پس داریم

$$\Pr(x \in A) = \frac{|A|}{9\pi}$$

مثال ۱-۱-۶ فرض کنید x عددی تصادفی از بازه‌ی $[1,4]$ باشد و y عددی تصادفی از بازه‌ی $[2,6]$ باشد. احتمال این را حساب کنید که $x + y \geq 5$ باشد.

پاسخ: به ازای هر زوج مرتب (x,y) که انتخاب کنیم، یک نقطه در صفحه‌ی مختصات به دست می‌آید. پس فضای نمونه مستطیلی است که در شکل زیر نشان داده شده است، که مساحت آن ۱۲ است. حالات مطلوب تمام نقاط (x,y) هستند که در فضای نمونه قرار بگیرند و شرط $x+y \geq 5$ را نیز دارا باشند. پس حالات مطلوب برابر با مساحت ناحیه‌ی رنگی است.



پس احتمال اینکه $x + y \geq 5$ باشد برابر با $\frac{10}{12}$ است.

در اینجا چند حکم ساده که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

حکم ۱) اگر E یک پیشامد در فضای نمونه‌ی Ω باشد، آنگاه $\overline{E}$ هم یک پیشامد در این فضای نمونه است و داریم

$$\Pr(\overline{E}) = ۱ - \Pr(E)$$

به عبارت دیگر این حکم بیان می‌کند: احتمال اینکه یک پیشامد رخ دهد بعلاوه احتمال اینکه یک پیشامد رخ ندهد برابر با یک است. زیرا هر عضوی که از فضای نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود یا عضوی از E است یا عضوی از $\overline{E}$. مثلاً اگر احتمال آمدن یک شیر، در پرتاب یک سکه $\frac{۳}{۸}$ باشد احتمال آمدن خط باید $\frac{۵}{۸}$ باشد.

با استفاده از این حکم مثال قبل را می‌توان ساده‌تر حل کرد. زیرا ابتدا احتمال اینکه نقطه‌ی تصادفی در ناحیه‌ی سفید قرار بگیرد را حساب می‌کنیم و سپس این مقدار را از یک کم می‌کنیم. مساحت ناحیه‌ی سفید برابر با ۲ است. پس داریم

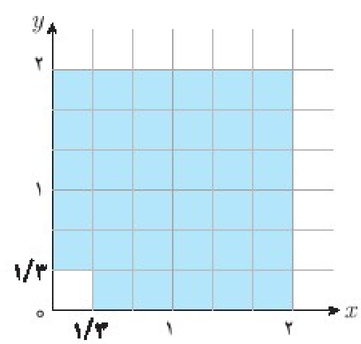
$$۱ - \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱۰}{۱۲}$$

مثال ۷-۱-۱ دو عدد x و y را به صورت تصادفی از بازه‌ی $[۰, ۲]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال هر کدام از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) حداقل یکی از x و y بزرگتر از $\frac{۱}{۳}$ باشند.

ب) x و y با هم برابر باشند.

ج) $|x - y| > \frac{۱}{۳}$



پاسخ: هر زوج مرتب (x, y) که در بازه‌ی $[۰, ۲]$ انتخاب شوند، معادل است با انتخاب یک نقطه‌ی تصادفی در مربع ۲×۲، مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید. پس فضای نمونه این مربع ۲×۲ است.

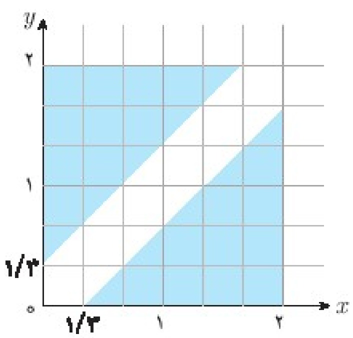
الف) پیشامد A را اینطور تعریف می‌کنیم که حداقل یکی از x و y بزرگتر از $\frac{۱}{۳}$ باشند. به جای اینکه احتمال پیشامد A را حساب کنیم، احتمال $\overline{A}$ را حساب می‌کنیم و با استفاده از حکم ۱، احتمال پیشامد A را بدست می‌آوریم. پیشامد $\overline{A}$ ، یعنی اینکه هم x و هم y کوچکتر از $\frac{۱}{۳}$ باشد.

اگر نقطه‌ی تصادفی در مربع سفید رنگ باشد هم x و هم y کوچکتر از $\frac{۱}{۳}$ هستند. پس احتمال

اینکه هر دو x و y کوچکتر از $\frac{۱}{۳}$ باشند برابر است با $\frac{۱}{۳۶} = \frac{\frac{۱}{۹}}{۴} = \frac{\text{مساحت مربع سفید}}{\text{مساحت مربع } ۲ \times ۲}$.
پس احتمال اینکه حداقل یکی از آنها از $\frac{۱}{۳}$ بزرگتر باشد برابر است با $۱ - \frac{۱}{۳۶} = \frac{۳۵}{۳۶}$.

ب) این پیشامد در صورتی اتفاق می‌افتد که نقطه‌ی تصادفی روی خط $y = x$ قرار بگیرد. پس احتمال این پیشامد برابر است با

$$\frac{\text{مساحت خط } x = y}{\text{مساحت مربع} ۲ \times ۲} = \frac{۰}{۴} = ۰$$



ج) این پیشامد در صورتی اتفاق می‌افتد که نقطه‌ی تصادفی در ناحیه‌ی سیاه رنگ از شکل زیر قرار داشته باشد. پس احتمال اینکه نقطه‌ی تصادفی داخل ناحیه‌ی سیاه باشد برابر است با

$$\frac{\text{مساحت ناحیه‌ی سیاه}}{\text{مساحت مربع } ۲ \times ۲} = \frac{(\frac{۵}{۳})^۲}{۴} = \frac{۲۵}{۳۶}$$

حکم ۲: فرض کنید E و F دو پیشامد از فضای نمونه باشند. اگر $E \subset F$ آنگاه $\Pr(E) \leq \Pr(F)$.
به صورت شهودی دلیل این حکم این است که اگر نتیجه‌ی آزمایش تصادفی عضوی از E باشد، حتماً عضوی از F هم هست. پس هر موقع که پیشامد E اتفاق بیافتد، آنگاه پیشامد F هم اتفاق می‌افتد. پس احتمال اتفاق افتادن پیشامد F بیشتر از احتمال اتفاق افتادن پیشامد E است.

به عنوان مثال این حکم بیان می‌کند که احتمال آمدن ۱ در پرتاب یک تاس، کمتر از احتمال آمدن عدد فرد است.

حکم ۳: فرض کنید دو پیشامد A و B جدا از هم باشند (با هم اشتراکی نداشته باشند) داریم

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

زیرا هر عضوی از $A \cup B$ دقیقاً عضو یکی از A یا B است. پس اگر پیشامد $A \cup B$ اتفاق بیافتد، دقیقاً یکی از دو پیشامد A و B اتفاق می‌افتد. به عنوان مثال فرض کنید یک تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد A را اینطور در نظر بگیرید تاس ۳ بیاید و پیشامد B را اینطور در نظر بگیرید که تاس زوج بیاید.

پس داریم

$$\Pr(A)=\frac{۱}{۶} \qquad \Pr(B)=\frac{۳}{۶} \qquad \Pr(A\cup B)=\frac{۴}{۶}$$

در حالت کلی اگر پیشامدهای $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ دوبه دو اشتراک نداشته باشند داریم

$$\Pr\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} A_۱\Big)=\sum_{i=۱}^{n} \Pr(A_i)$$

اگر اشتراک دو پیشامد A و B لزوماً تهی نباشد داریم

$$\Pr(A\cup B)\leq \Pr(A)+\Pr(B)$$

زیرا هر عضوی از فضای نمونه اگر در $A\cup B$ باشد، در حداقل یکی از A یا B هم قرار دارد.
در پایان تعمیمی از حکم‌های گفته شده، در حکم (۴) و در قالب ۴ نتیجه آورده شده است.

حکم ۴ : فرض کنید n پیشامد $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ داریم که لزومی ندارد اشتراک هر دوتای آن‌ها تهی باشد. آنگاه داریم

۱.

$$\Pr\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\Big)=\sum_{i=۱}^{n} \Pr(A_i)-\sum_{i<j} \Pr(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k} \Pr(A_i\cap A_j\cap A_k)$$
$$-\cdots+(-۱)^{n+۱}\Pr(A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_n)$$

۲.

$$\Pr\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\Big)\leq \sum_{۱}^{n} \Pr(A_i)$$

۳.

$$\Pr\Big(\bigcap_{i=۱}^{n} A_i\Big)\geq ۱-\sum_{i=۱}^{n} \Pr(\overline{A}_i)$$

٤.

$$\Pr\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\Big)\geq \sum_{i=۱}^{n} \Pr(A_i)-\sum_{r<k} \Pr(A_r\cap A_k)$$

نتیجه‌ی اول و چهارم به سادگی با استفاده از قضیه‌ی شمول و عدم شمول، بدست می‌آید که از اثبات آن در اینجا صرف‌نظر شده است.

نتیجه‌ی دوم و سوم بسیار پرکاربرد هستند و در فصل بعد سوال‌های زیادی با استفاده از این دو نتیجه حل می‌شوند. برای اثبات نتیجه‌ی دوم از نظریه‌ی مجموعه‌ها و برای اثبات نتیجه‌ی سوم از نتیجه‌ی دوم و حکم (۱) استفاده کنید.

۱-۲ متغیرهای تصادفی

در اغلب آزمایش‌هایی که به صورت تصادفی انجام می‌شوند نتیجه‌ی آزمایش مورد نظر ما نیست بلکه متغیرهایی تعریف می‌شوند که تابعی از نتیجه‌ی آزمایش هستند. به عنوان مثال وقتی ۲ تاس را با هم پرتاب می‌کنیم شاید عدد هر کدام از تاس‌ها موردنظر ما نباشد و هدف محاسبه‌ی احتمال این باشد، که مجموع تاس‌ها برابر با ۷ باشد. در این مثال متغیر موردنظر ما حاصل‌جمع این دو تاس است.

از آنجا که نتیجه‌های آزمایش با احتمال‌هایی رخ می‌دهند بنابراین متغیرهایی که برحسب نتیجه‌ی آزمایش تعریف می‌شوند هم با احتمال‌هایی مقدار می‌گیرند بنابراین به این متغیرها که به صورت تصادفی مقداردهی می‌شوند، متغیرهای تصادفی می‌گویند.

فرض کنید آزمایش ما پرتاب ۳ سکه باشد. اگر متغیر Y را برابر با تعداد شیرهای ظاهر شده در پرتاب ۳ سکه در نظر بگیریم، آنگاه Y یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۰، ۱، ۲ یا ۳ را می‌تواند داشته باشد. با توجه به اینکه تعداد حالاتی که ۲ سکه شیر بیاید، ۳ تا و کل حالت‌های ممکن ۸ تا است، داریم

$$\Pr(Y=1) = \Pr(Y=2) = \frac{3}{8}$$

و تعداد حالاتی که ۳ سکه شیر بیاید، یکی و کل حالات‌ها ۸تا است، پس داریم

$$\Pr(Y=3) = \Pr(Y=0) = \frac{1}{8}$$

حال فرض کنید n سکه سالم را پرتاب می‌کنیم (منظور از سکه‌ی سالم یعنی احتمال اینکه شیر بیاید، با احتمال اینکه خط بیاید، یکسان است). متغیر تصادفی x را برابر با تعداد شیرهایی که در این آزمایش بدست می‌آید تعریف می‌کنیم. داریم

$$\Pr(X=i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}$$

زیرا تعداد حالت‌هایی که i تا شیر بیاید برابر است با $\binom{n}{i}$ و تعداد کل حالت‌های ممکن برای n سکه 2^n است.

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید درون جعبه‌ای N مهره وجود دارد که a مهره‌ی آن سفید و $N-a$ مهره‌ی آن سیاه است. n مهره به صورت تصادفی از جعبه بر می‌داریم. فرض کنید X متغیر تصادفی باشد که برابر با تعداد مهره‌های سفید بیرون آمده باشد. پس احتمال اینکه X برابر با k باشد برابر است با

$$\Pr(X=k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$