به‌نام خدا

فهرست

مسابقات حذفی ۱
اصل ضرب ۴
اصل جمع ۱۱
اصل متمم ۱۷
معماهای منطقی ۲۲
ترکیب (۱) ۲۸
بخش‌پذیری و چند مسئلهٔ شمارشی ۳۷
قضیهٔ بنیادی حساب و چند مسئلهٔ شمارشی ۴۴
زیرمجموعه‌ها ۵۰
مسئله‌های الگوریتمی ۵۷
جایگشت‌های خطی (۱) ۶۹
اصول شمارش ۷۶
رابطه‌های بازگشتی (۱) ۸۶
مسئلهٔ مسیر (۱) ۹۲
مسئله‌های متفرقه (۱) ۱۰۴
رابطه‌های بازگشتی (۲) ۱۱۷
شمارش مضاعف ۱۲۱
مسئله‌های اکسترمال ۱۲۶
جایگشت‌های خطی (۲) ۱۴۲
رابطه‌های بازگشتی (۳) ۱۵۰
رنگ‌آمیزی ۱۵۸
ترکیب (۲) ۱۶۹

زوجیت	۱۷۹
مسئلهٔ مسیر (۲)	۱۸۸
اصل لانه کبوتری	۱۹۳
ترتیب لغت‌نامه‌ای	۲۰۲
ترکیب (۳)	۲۰۶
ناوردایی	۲۱۲
رابطه‌های بازگشتی (۴)	۲۲۱
مسئله‌های متفرقه (۲)	۲۳۳
اعداد فیبوناتچی	۲۴۸
الگویابی	۲۵۶
محاسبهٔ میانگین	۲۷۱
معادلات خطی با ضرایب واحد	۲۷۷
فرایندهای متناوب	۲۸۷
مسئلهٔ مسیر (۳)	۲۹۷
اصل شمول و عدم شمول	۳۰۶
مسئلهٔ ژوزفوس	۳۱۳
مبناهای عددنویسی	۳۲۱
شمارش اشکال هندسی	۳۳۱
بازی‌ها	۳۴۴
استقرای ریاضی	۳۵۴
نظریهٔ گراف	۳۶۲
جایگشت‌های دوری، مقدمه‌ای بر نظریهٔ شمارشی پولیا	۳۷۵
مسئله‌های متفرقه (۳)	۳۸۴

تقدیم به گل‌های باغ زندگی‌ام
ریحانه و نیلوفر

پیشگفتار

سال‌هاست که در گوشه و کنار دنیا مسابقات و المپیادهای ریاضی با عناوین و در سطوح مختلف (ملی، منطقه‌ای، بین‌المللی) برگزار می‌شوند. قدمت برخی از این مسابقات به بیش از نیم قرن می‌رسد. این مسابقات عرصه‌ای است برای نخبگان جوان و علاقه‌مندان ریاضی که توانایی خود را در حل مسائل ریاضی محک بزنند. در کشور ما نیز حدود سه دهه از برگزاری المپیادهای ریاضی می‌گذرد. در طول این سال‌ها شاهد آن بوده‌ایم که دانش‌آموزان مستعد و علاقه‌مند با شور و اشتیاق فراوان، بعضاً با برنامه‌ریزی چند ساله، خود را برای شرکت در این مسابقات و رقابت با دیگر دانش‌آموزان آماده می‌کنند؛ خوشبختانه درخشش دانش‌آموزان ایرانی در عرصه‌های بین‌المللی باعث شده تا تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در المپیادها به نحو چشمگیری افزایش یابد. از طرف دیگر، تا همین اواخر تعداد مدارسی که برای آماده‌سازی دانش‌آموزانشان کلاس‌های ویژه برگزار می‌کردند بسیار اندک بود و کتاب‌های مرتبط با المپیاد ریاضی از تعداد انگشتان دو دست فراتر نمی‌رفت؛ ولی اکنون به علت استقبال دانش‌آموزان بسیاری از مدارس و مؤسسات آموزشی کلاس‌ها و دوره‌های آموزشی المپیاد برگزار می‌کنند و در حوزهٔ نشر نیز طی سال‌های اخیر کتاب‌های متعددی در زمینهٔ المپیاد منتشر شده است.

سال‌ها تدریس‌ام در کلاس‌های آموزشی المپیاد، به ویژه در زمینهٔ ترکیبیات، منجر به تدوین طرح درسی مدون و فراهم آوردن مجموعه‌ای جامع از مسائل زیبای المپیادی شده است. خوشبختانه، نشر علوم ریاضی ره‌آورد برنامه‌ای مفصل برای انتشار کتاب‌هایی در زمینهٔ المپیاد ریاضی که با دیدگاهی نو تألیف شده باشند دارد. من نیز بر آن شدم که به دوستانم در این زمینه کمک کنم.

کتابی که در دست دارید جلد اول از مجموعهٔ کتاب‌های «روش‌های ترکیبیات» است. این کتاب در ۴۵ فصل تنظیم شده است. سعی شده است اکثر مفاهیم مورد نیاز المپیاد در درس ترکیبیات از قبیل شمارش، رابطه‌های بازگشتی، اصل لانه کبوتری، استقرای ریاضی، زوجیت، رنگ‌آمیزی، ناوردایی، ... در حد مقدمات بیان شود، لذا این کتاب مرجعی مناسب برای کسب آمادگی شرکت در مرحلهٔ اول المپیادهای ریاضی و کامپیوتر است. در هر فصل یک مسئله به عنوان نمونه حل شده و پس از آن تعدادی تمرین آورده شده است. در پایان هر فصل نیز حل اکثر تمرین‌ها به طور کامل آمده است و فقط در مورد تعداد محدودی از آنها به راهنمایی یا جواب آخر اکتفا شده است.

در هر فصل ازکتاب، غیر از سه فصل که اختصاص به مسئله‌های متفرقه دارد و تمرین‌های آنها با روش‌های مختلف حل می‌شوند، تمرین‌ها با هدف مشخصی انتخاب شده‌اند و حل آنها باعث تسلط بر یک یا چند روش متداول حل مسئله در موضوع موردنظر خواهد شد.

تمرین‌های این کتاب از مسائل مرحلهٔ اول المپیادهای ریاضی و کامپیوتر ایران و همچنین از مسابقات معتبر برگزار شده در کشورهای مختلف انتخاب و به صورت موضوعی دسته‌بندی شده‌اند. تلاش بر این بوده که تمرین‌های انتخاب شده زیبا و جذاب باشند تا خواننده با رغبت به مطالعهٔ کتاب ادامه دهد.

علی‌رضا علیپور

آذر ۱۳۹۱

مسابقات حذفی

همان‌گونه که می‌دانید در بسیاری از کشورهای دنیا هر سال مسابقات فوتبال به دو صورت برگزار می‌شوند، یکی مسابقات لیگ است که بازی‌های آن به‌صورت دوره‌ای برگزار می‌شود و هر دو تیم با هم بازی می‌کنند (البته به‌صورت رفت و برگشت) و دیگری مسابقات حذفی است.

مسئله اگر n تیم در یک دوره مسابقات حذفی شرکت کنند، تعداد بازی‌هایی که برای مشخص شدن قهرمان باید انجام شود چند تا است؟

قانون مسابقات حذفی این است که در هر بازی تیم بازنده از دور مسابقات حذف می‌شود و این بازی‌ها ادامه پیدا می‌کند تا فقط یک تیم در گردونهٔ مسابقات بماند و این تیم به عنوان قهرمان شناخته می‌شود.

مثلاً به ازای $n = ۲$ با انجام یک مسابقه قهرمان مشخص می‌شود و به ازای $n = ۳$ با انجام دو مسابقه، ابتدا تیم‌های اول و دوم بازی می‌کنند و سپس برندهٔ این بازی به مصاف تیم سوم می‌رود تا تیم قهرمان مشخص شود.

راه‌حل. نشان می‌دهیم که مسابقات حذفی بین n تیم به هر صورتی که برگزار شود تعداد بازی‌ها برابر $n - ۱$ است. روشی ساده برای اثبات این مطلب وجود دارد. توجه کنید که برای مشخص شدن قهرمان، $n - ۱$ تیم باید حذف شوند. چون در هر بازی یک تیم از دور مسابقات حذف می‌شود، لذا برای معلوم شدن $n - ۱$ تیم حذف شده نیاز به انجام $n - ۱$ بازی است.

تمرین‌ها

۱. دوازده کشتی‌گیر در جام جهان‌پهلوان تختی شرکت کرده‌اند. ممکن است دو کشتی‌گیر چند بار با هم مبارزه کنند. کسی که پنج بار ببازد از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در این جام حداکثر چند کشتی برگزار می‌شود؟ (توجه کنید که کشتی تساوی ندارد.)

(مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۹)

۲. ۵۰ سکهٔ ۱ تومانی و یک دستگاه داریم. هر بار می‌توان دو سکهٔ a و b تومانی را وارد دستگاه کرد و یک سکهٔ $a+b$ تومانی دریافت نمود. می‌دانیم که برای هر عدد طبیعی سکه وجود دارد. حداقل چند بار از این دستگاه استفاده کنیم تا ۵۰ سکهٔ ۱ تومانی اولیه به یک سکهٔ ۵۰ تومانی تبدیل شود؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸ ۵) ۴۹

(مرحلهٔ اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۲)

۳. محمدحسین می‌خواهد یک نمایشگاه وسایل خانگی را برق‌کشی کند. متأسفانه در کل این نمایشگاه تنها یک پریز برق وجود دارد. البته محمدحسین فکر اینجا را کرده و با خود تعداد زیادی n راهی آورده است. به یک n راهی ($n \geq ۱$) می‌توان n تا دو شاخهٔ برق وصل کرد و یک دو شاخه دارد که باید به طریقی (مستقیم به پریز یا توسط n راهی‌های دیگر) به برق وصل شود تا دوشاخه‌هایی را که بدان وصل‌اند برق‌دار کند. اگر محمدحسین ده تا ۱۰ راهی، هفت تا ۷ راهی، پنج تا ۴ راهی، چهار تا ۲ راهی و صد تا ۱ راهی داشته باشد، حداکثر چند وسیلهٔ خانگی را می‌تواند به برق متصل کند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۵۲ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۷ ۵) هیچ‌کدام

(مرحلهٔ اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۴)

۴. ۱۶ تیم در مسابقات جام حذفی و لیگ شرکت کرده‌اند. می‌دانیم که اگر تیم «الف» از تیم «ب» قوی‌تر باشد هر بار که تیم «الف» با تیم «ب» بازی کند برنده خواهد شد. همچنین می‌دانیم اگر تیم «الف» از تیم «ب» قوی‌تر باشد و تیم «ب» از تیم «ج» قوی‌تر باشد در این صورت تیم «الف» نیز حتماً از تیم «ج» قوی‌تر خواهد بود. مسابقات جام حذفی و لیگ به‌صورت زیر برگزار می‌شوند.

- مسابقات جام حذفی: در این مسابقات در مرحلهٔ اول ۸ مسابقه انجام می‌شود و هر تیم در یک بازی شرکت می‌کند. تیم‌های بازنده از مسابقات حذف می‌شوند و ۸ تیم پیروز

به مرحلهٔ بعد راه پیدا می‌کنند. در مرحلهٔ دوم، ۴ بازی انجام می‌شود و تیم‌های پیروز به مرحلهٔ بعد می‌روند. در مرحلهٔ سوم که مرحلهٔ نیمه‌نهایی است ۲ بازی انجام می‌شود و تیم‌های پیروز به فینال راه پیدا می‌کنند. تیم برندهٔ فینال قهرمان جام حذفی و تیم بازندهٔ فینال نایب قهرمان است.

- مسابقات لیگ: در این مسابقات هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند و به تیم برندهٔ هر بازی ۳ امتیاز و به تیم بازنده ۰ امتیاز داده می‌شود. در انتها تیم‌ها را با توجه به امتیاز آنها مرتب کرده و رتبهٔ هر تیم معلوم می‌شود.

دقت کنید که نتیجهٔ مساوی در این مسابقات نداریم. پایین‌ترین (بدترین) رتبه‌ای که تیم نایب قهرمان مسابقات جام حذفی در مسابقات لیگ می‌تواند داشته باشد چه رتبه‌ای است؟

۱) دوم ۲) سوم ۳) پنجم ۴) نهم ۵) سیزدهم

(مرحلهٔ اول نوزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۷)

راه‌حل‌ها

۱. ۵۹. مجموع تعداد باخت‌های تیم‌ها برابر تعداد بازی‌های انجام شده است. چون هر تیم حداکثر ۵ باخت دارد و در ضمن تیمی وجود دارد که کمتر از ۵ باخت دارد، لذا این مجموع از ۵۹ بیشتر نیست. در ضمن به سادگی می‌توان مثالی از ۵۹ مسابقه ارائه داد که کلیهٔ شرایط موردنظر را داشته باشد.

۲. ۴۹. پس از هر بار استفاده از دستگاه تعداد سکه‌ها یکی کم می‌شود. چون در ابتدا ۵۰ سکه و در پایان یک سکه داریم، لذا ۴۹ بار باید از دستگاه استفاده کنیم.

۳. ۱۵۲. تعداد پریزهای آزاد برابر $۱ + ۱۰ \times ۱۰ + ۷ \times ۷ + ۵ \times ۴ + ۴ \times ۲ + ۱۰۰ \times ۱$ است که $۱۰ + ۷ + ۵ + ۴ + ۱۰۰$ تا از آنها توسط همین n راهی‌ها اشغال می‌شود.

۴. نهم. دو تیمی که به فینال مسابقات حذفی رسیده‌اند، در واقع هر یک قوی‌ترین تیم در بین تیم‌های یک گروه ۸ تیمی بوده‌اند، لذا نایب قهرمان حداقل از ۷ تیم قوی‌تر است، پس رتبهٔ این تیم در مسابقات لیگ از نهم نمی‌تواند بدتر باشد.

اصل ضرب

بسیاری از مسائل ترکیبیات در المپیادهای مختلف مسئله‌های شمارشی هستند و اصل ضرب به نوعی پایه و اساس اصول شمارش است. در این فصل با بیان چند مسئله قصد داریم تسلط شما را در به‌کارگیری این اصل در حل مسائل شمارشی افزایش دهیم.

مسئلهٔ زیر از مرحلهٔ اول دهمین المپیاد کامپیوتر ایران که در سال ۱۳۷۹ برگزار شده انتخاب شده است.

مسئله تعداد رشته‌هایی به طول ۱۰ متشکل از A، T، C و G را بیابید که در آنها A و T مجاور هم نباشند و C و G نیز مجاور هم نباشند.

راه‌حل. برای تشکیل یک رشتهٔ به طول ۱۰، ۱۰ مرحله در نظر می‌گیریم: ابتدا نوشتن حرف اول، سپس نوشتن حرف دوم، ...و در نهایت نوشتن حرف دهم. برای حرف اول ۴ انتخاب وجود دارد. با توجه به شرط مسئله به ازای هر انتخابی از حرف اول، برای حرف دوم ۳ انتخاب وجود دارد. به طور مشابه برای هر انتخابی از حروف اول و دوم، برای حرف سوم ۳ انتخاب وجود دارد و ...

۴ ۳ ۳ ... ۳

لذا بنابر اصل ضرب، پاسخ برابر $۳^۹ \times ۴$ است.

تمرین‌ها

۱. چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور xها را قطع می‌کنند؟

$$(-۱۵,۶),\ (۷,۸),\ (۱۲,-۷),\ (۵,-۵),\ (۳,۲),$$
$$(-۱,-۳),\ (-۹,۱),\ (۵,۱۵),(۱۹,-۱۱),\ (۴,۹)$$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱ ۵) ۲۴

(مرحلهٔ اول بیست‌وپنجمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۵)

۲. چند عدد سه رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟

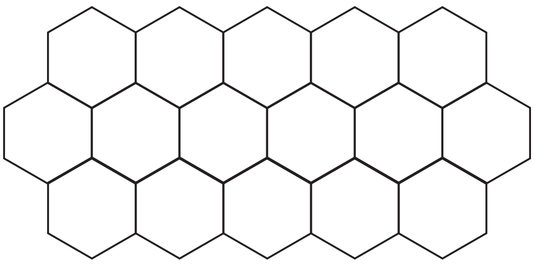
۱) ۶۴۸ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۸۱۰ ۵) ۹۰۰

(مرحلهٔ اول بیست‌وپنجمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۵)

۳. به چند طریق می‌توان اعداد صحیح از ۷− تا ۷ را در یک دنباله قرار داد به‌طوری که قدرمطلق جملات دنباله، دنباله‌ای صعودی تشکیل دهند؟

(تورنمنت ریاضی هاروارد ـ ام‌آی‌تی ـ ۲۰۰۹)

۴. به چند طریق می‌توان ناحیه‌های شش‌ضلعی شکل زیر را با سه رنگ رنگ کرد طوری که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند؟



۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲ ۵) ۱۶

(تورنمنت ریاضی دبیرستانی دانشگاه جورجیا ـ ۲۰۰۸)

۵. به چند طریق n نفر با شماره‌های ۱ تا n می‌توانند به n اتاق با شماره‌های ۱ تا n بروند به‌طوری که هیچ فردی در اتاق هم‌شماره با خود نرود؟ (توجه کنید در یک اتاق هر تعداد فرد ممکن است وارد شوند.)

(تورنمنت ریاضی دبیرستانی دانشگاه جورجیا ـ ۲۰۰۸)

۶. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهانگردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همهٔ بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)

(مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۹۰)

۷. شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان بازگردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ (توجه کنید که این شخص به هر ترتیبی می‌تواند به این سه شهر سفر کند.)

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰ ۵) ۲۱۶

(مرحلهٔ اول بیست‌وهشتمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۸)

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول ۴ × ۴ قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

(مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۹۰)

۹. به چند طریق می‌توان ۸ خانه از یک جدول ۸ × ۸ را علامت گذاشت به طوری که هیچ دو خانهٔ علامتداری در یک سطر یا یک ستون نباشند و در ضمن هیچ‌یک از ۴ خانهٔ واقع در گوشه‌های جدول نیز علامت نداشته باشند؟

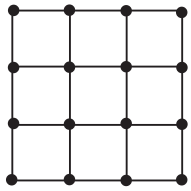
(تورنمنت ریاضی هاروارد ـ ام‌آی‌تی ـ ۲۰۰۴)

۱۰. شش جعبهٔ خالی با اندازه‌های مختلف داریم. ابعاد جعبه‌ها طوری است که درون هر جعبه می‌توان همهٔ جعبه‌های کوچک‌تر از آن را، جدا از هم، جا داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را درون بزرگ‌ترین جعبه جاسازی کرد؟ (توجه کنید که می‌شود بعضی از جعبه‌ها را درون بعضی دیگر قرار داد.)

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۰۰ ۵) ۲۴۰

(مرحلهٔ اول بیست‌وششمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۶)

۱۱. شکل صفحهٔ بعد از ۲۴ پاره‌خط و ۱۶ نقطه تشکیل شده است. می‌بینید که در بیشترین حالت برای رفتن از یک نقطه به یک نقطهٔ دیگر باید حداقل از ۶ پاره‌خط بگذریم. می‌خواهیم از مجموع ۱۸ قطر مربع‌های کوچک ۲ تا را رسم کنیم تا در بیشترین حالت با پیمایش ۵



پاره‌خط بتوان از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر رسید. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۹ ۴) ۳۶ ۵) ۸۱

(مرحلهٔ اول دوازدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۰)

۱۲. یک جدول ۱۲×۱۰ داریم. مختصات خانهٔ بالا سمت چپ $(۰,۰)$، و مختصات خانهٔ پایین سمت راست $(۹,۱۱)$ است. چند زیر جدول (زیر مستطیل از خانه‌ها) شامل خانهٔ $(۷,۵)$ است؟ (بدیهی است که خانهٔ $(۷,۵)$ به تنهایی و کل جدول، هر کدام یک زیر جدول محسوب می‌شوند.)

۱) ۷۳۵ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۱۰۰۸ ۴) ۱۲۶۰ ۵) ۱۲۰۰

(مرحلهٔ اول هجدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۶)

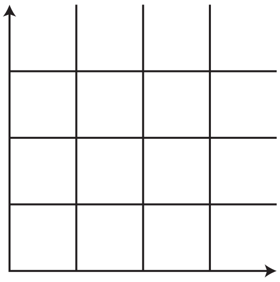
۱۳. یک رشتهٔ دودویی n رقمی را یک «عدد جهانی» می‌نامیم در صورتی که وقتی خودش را با معکوسش جمع بزنیم دو بر یک ایجاد نشود. مثلاً فرض کنید $n = ۶$. در این صورت $(۱۰۰۰۱۰)_۲$ یک عدد جهانی است چون معکوس آن $(۰۱۰۰۰۱)_۲$ است و موقع جمع‌زدن این دو عدد، هیچ دو رقم ۱ روی هم قرار نمی‌گیرند تا موقع جمع‌زدن دو بر یک به‌وجود آید. تعداد اعداد دودویی جهانی ۱۰ رقمی چقدر است؟

۱) $۲^۵$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۳^۵$ ۴) $۳^۸$ ۵) $۴^۴$

(مرحلهٔ اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۱)

۱۴. ربع اول صفحهٔ مختصات را مطابق شکل صفحهٔ بعد به خانه‌های ۱×۱ تقسیم می‌کنیم. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۱۴ را در ۱۴ تا از این خانه‌ها نوشت به طوری که شرایط زیر برقرار باشند.

- در خانهٔ $(۱,۱)$ (پایین‌ترین و سمت چپ‌ترین خانه) عدد ۱ نوشته شده باشد.
- اگر در خانه‌ای عددی نوشته شده بود، دقیقاً در یکی از دو خانهٔ پایینی یا سمت چپیِ آن خانه، عددی نوشته شده باشد.
- اگر در خانهٔ (x,y) یعنی خانهٔ سطر xاُم و ستون yاُم، عدد $i > ۱$ نوشته شده بود، هر یک از اعداد ۱ تا $i - ۱$، در خانه‌ای مثل (x',y') قرار داشته باشند که $۱ \leq x' \leq x$ و $۱ \leq y' \leq y$.



۱) ۸۱۹۲ ۲) ۱۶۳۸۴ ۳) ۲۴۵۷۵ ۴) ۲۴۵۷۶ ۵) هیچ‌کدام

(مرحلهٔ اول هفدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۵)

۱۵. به چند طریق می‌توان پاره‌خط‌های واحد یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ را با ۳ رنگ رنگ کرد به‌طوری که در هر مربع واحد دقیقاً دو رنگ به‌کار رود و از هر یک در رنگ‌آمیزی دو ضلع از مربع استفاده شود؟

(کلمبیا ـ ۱۹۹۷)

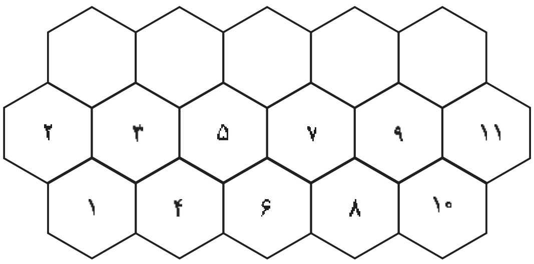
راه‌حل‌ها

۱. ۲۴. در بین نقاط داده شده ۶ نقطه بالای محور xها و ۴ نقطه پایین محور xها قرار دارند.

۲. $۹ \times ۹ \times ۹$.

۳. $۲^۷$.

۴. ۶. ناحیه‌ها را به ترتیب نشان داده در شکل زیر رنگ می‌کنیم. برای ناحیه‌های ۱ و ۲ به ترتیب ۳ و ۲ انتخاب وجود دارد و پس از آن رنگ هر ناحیه به صورت یکتا تعیین می‌شود. توجه کنید رنگ هر ناحیه از ردیف بالا با رنگ ناحیهٔ متناظر آن در ردیف پایین یکسان است، مثلاً ناحیهٔ مجاور با ناحیه‌های ۲ و ۳ را در ردیف اول در نظر بگیرید، رنگ این ناحیه باید همان رنگ ناحیهٔ ۱ باشد. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر ۲×۳ است.



۵. $(n-۱)^n$. برای هر فرد $n-۱$ انتخاب وجود دارد.

۶. $۲^۵ \times ۶$. برای اولین، سومین، پنجمین، هفتمین، نهمین و یازدهمین حرکت فقط ۱ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک از این حرکت‌ها به سمت شکرستان است. از ۶ حرکت دیگر یکی را باید برای سفر به سماقستان اختصاص دهیم و برای هر یک از ۵ حرکت باقی مانده ۲ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک ممکن است سفر به نمکستان یا فلفلستان باشد.

۷. ۲۱۶. برای روز شنبه ۳×۳ انتخاب وجود دارد، ۳ انتخاب برای وسیلهٔ سفر و ۳ انتخاب برای شهر مقصد. به‌طور مشابه برای روزهای یکشنبه و دوشنبه نیز به‌ترتیب ۲×۲ و ۱×۳ انتخاب وجود دارد. برای روز سه‌شنبه نیز ۲ انتخاب برای وسیلهٔ برگشت به اصفهان وجود دارد.

۸. ۲۴. در هر سطر باید دقیقاً یک مهره قرارگیرد. برای سطرهای اول، دوم، سوم و چهارم به‌ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ انتخاب وجود دارد.

۹. ۲۱۶۰۰. برای سطرهای اول، هشتم، دوم، سوم، چهارم، پنجم، ششم و هفتم به‌ترتیب ۶، ۵، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ انتخاب وجود دارد.

۱۰. ۱۲۰. برای پنج جعبهٔ غیر از بزرگ‌ترین جعبه به‌ترتیب از بزرگ به کوچک به‌ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ انتخاب وجود دارد، زیرا هر یک باید درون جعبه‌ای بزرگ‌تر از خود قرار گیرد.

۱۱. ۸۱. دو قطری که رسم می‌شوند یکی موازی خط $y = x$ و دیگری موازی خط $y = -x$ است. لذا برای هر یک ۹ انتخاب وجود دارد.

۱۲. ۱۰۰۸. برای ضلع بالا، پایین، چپ و راست زیر جدول به‌ترتیب ۸، ۳، ۶ و ۷ انتخاب وجود دارد.

۱۳. $۳^۵$. برای رقم‌های اول و دهم ۳ انتخاب وجود دارد، زیرا این دو رقم برابر $(۰,۰)$، $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ می‌توانند باشند. به‌طور مشابه برای رقم‌های دوم و نهم، رقم‌های سوم و هشتم، رقم‌های چهارم و هفتم، و رقم‌های پنجم و ششم نیز ۳ انتخاب وجود دارد.

۱۴. $۲^{۱۳}$. برای عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۱۴ به‌ترتیب ۱، ۲، ۲، ... و ۲ انتخاب وجود دارد. با توجه به شرایط مسئله عدد $i+۱$ باید در خانهٔ سمت راست عدد i یا خانهٔ بالای آن قرار گیرد.

۱۵. $۳^{m+n} \times ۲^{mn}$. اگر دو ضلع از یک مربع واحد رنگ شده باشند برای رنگ‌آمیزی ۲ ضلع دیگر ۲ انتخاب وجود دارد، زیرا اگر دو ضلع رنگ شده همرنگ باشند، دو ضلع دیگر نیز باید همرنگ باشند ولی از رنگی دیگر، و اگر دو ضلع رنگ شده غیر همرنگ باشند، دو ضلع دیگر