

بچیده‌ترین معادله شدی برایم
Δ زدم و نیامد آن به طرسم!
با دیدن بچند چوماهت...
احساس عمیق وضوب دارم
انگار ریشه‌ی صفتی دارم!

فصل ۵



معادله و تابع درجه‌ی دوم

هر چه درباره‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو و دیدگاه تابعی آن بخواهید این جاست...
روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دو، روابط بین ریشه‌هایش، سهمی و ویژگی‌های آن،
کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دو در حل مسائل مختلف.
این فصل یکی از مهم‌ترین آیتم‌های کنکور شماسه است؛ یادتان باشد معادله‌ی درجه‌ی
دو چیزی نیست که در این فصل تمام شود! در ریاضیات تجربی و در بخش‌های
مختلف نیاز به مباحث این فصل مُدام احساس می‌شود؛ درست مثل یکی از چهار
عمل اصلی...!

تابع و معادله‌ی درجه‌ی دو، ابزاری است راه‌گشا که بدون تسلط به آن شاید بتوان
گفت نابینا وارد کنکور شده‌اید!! حوصله‌ی زیاد و تست کافی پیشنهاد ما در این
فصل است...

ایستگاه ۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و بررسی Δ در ریاضی تجربی، حکم یکی از چهار عمل اصلی ریاضی را دارد، از بس کاربردی است.

معادله‌ی درجه‌ی اول و دوم

۱ **معادله‌ی درجه‌ی اول:** معادله‌ای بر حسب متغیر x ، که بعد از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان مجهولش ۱ باشد، را معادله‌ی درجه‌ی اول می‌گوییم. فرم کلی این معادله به صورت $ax + b = 0$ و مقدار ریشه‌ی آن هم $x = -\frac{b}{a}$ است. ($a \neq 0$)

این جوری هم‌بیین: برای حل معادله‌ی درجه‌ی اول، ابتدا عدد ثابت را به سمت راست تساوی منتقل کرده، سپس دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم...

① تست: دو برابر عددی را از ۲۵ کم کرده‌ایم و حاصل، نصف همان عدد شده است. مساحت مربعی که طول ضلعش این عدد باشد، کدام است؟

۱۰۰ (۱) ۱۴۴ (۲) ۶۴ (۳) ۲۵۶ (۴)

پاسخ: اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم:

$$25 - 2x = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{مرتب کن}} 25 = \frac{x}{2} + 2x \xrightarrow{\text{ساده کن}} 25 = \frac{x + 4x}{2} \rightarrow 25 = \frac{5x}{2} \xrightarrow{\times 2} 50 = 5x \xrightarrow{\text{مسااحت مربع به توان ۲ برسون}} x^2 = 100$$

۲ **معادله‌ی درجه‌ی دوم:** معادله‌ای را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن، ۲ باشد معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گوییم. فرم کلی این معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است: که a, b و c سه عدد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است!

معادله‌ی $x^2 = A$

یک معادله‌ی خیلی کاربردی، این است که بعد از ساده کردن معادله، برسیم به عبارت «عدد ثابت = x^2 »، مثل $x^2 = 3$. اگر u ، عبارتی بر حسب x بوده و A هم عددی ثابت باشد، آن وقت:

$A = 0$	$A < 0$	$A > 0$	$u^2 = A$
نتیجه می‌دهد: $u = 0$	ریشه ندارد. آخه عبارت نامنفی u^2 ، هیچ‌گاه برابر عدد منفی نمی‌شود!	نتیجه می‌دهد: $u = \sqrt{A}$ و $u = -\sqrt{A}$	

① تست: در معادله‌ی $9\left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 - 1 = 0$ ، مقدار ریشه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

-۲ (۱) -۱ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ:

$$9\left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 - 1 = 0 \xrightarrow{\text{انتقال به سمت راست}} 9\left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 = 1 \xrightarrow{+9} \left(2x + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \\ 2x + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{-\frac{5}{3}} \begin{cases} 2x = -\frac{4}{3} \\ 2x = -2 \end{cases} \xrightarrow{+2} \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی کوچکتر}} x = -1$$

عبارت «عدد مثبت + u^2 »، همواره مثبت است. **بیین:** $(x-1)^2 + 3 > 0$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش تجزیه

در معادله‌ی درجه‌ی دومی که ضریب x^2 در آن ۱ باشد، به عنوان ساده‌ترین راه، می‌رویم سراغ تجزیه! در این روش معادله‌ی $x^2 + mx + n = 0$ را در نظر می‌گیریم: ۱ فرم تجزیه‌شده‌ی معادله را می‌نویسیم: $(x + \text{دایره}) (x + \text{مربع}) = 0$ ۲ برای کامل کردن پرانتزها، به دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان بشود n و جمعشان هم m ۳ حالا اون دوتا عددی را که پیدا کردیم جای‌گذاری می‌کنیم و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم. این روش برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، کلی نیست، گاهی دو عدد با ضرب و جمع می‌خواهید پیدا نمی‌کنید.

اگر ضرب چند عبارت، مساوی صفر شود، تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر می‌گذاریم.

① تست: در معادله‌ی $x^2 - 20x + 51 = 0$ ، تفاضل ریشه‌ها، کدام ویژگی زیر را دارد؟

عدد فرد (۱) مضرب ۳ (۲) مضرب ۷ (۳) عدد اول (۴)

پاسخ: دنبال دو عدد با حاصل ضرب ۵۱ هستیم که جمع آن‌ها -20 باشد! این دو عدد -3 و -17 هستند:

$$x^2 - 20x + 51 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-17)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-17=0 \\ x-3=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=17, x=3 \xrightarrow{\text{تفاضل ریشه‌ها}} 17-3=14 \xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} 14 \text{ مضرب ۷ است.}$$

وقتی که معادله‌ی درجه‌ی دوم عدد ثابت نداشته باشد، **این طوری**: $ax^2 + bx = 0$ ، سریع از x ، فاکتور گرفته و به حاصل ضرب دو عبارت می‌رسیم که مساوی صفر شده است، بعدش معادله حل می‌شود...
این جوری هم ببین: اگر $ax^2 + bx = 0$ شود، ریشه‌ها عبارت‌اند از $x = 0$ و $x = -\frac{b}{a}$. آخه:
 $ax^2 + bx = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(ax + b) = 0$

تست: مساحت مستطیل مقابل برابر ۶ است. کدام گزینه درباره‌ی x درست است؟
 (۱) عددی زوج است.
 (۲) عددی مربع کامل است.
 (۳) عددی دورقمی است.
 پاسخ: (۲)

مساحت مستطیل = طول \times عرض $\Rightarrow S = (3x - 2)(x - 2) \xrightarrow{\text{مساوی ۶ بندز}} (3x - 2)(x - 2) = 6$
 $\xrightarrow{\text{ضرب و ساده کن}} 3x^2 - 9x + 6 = 6 \xrightarrow{-6} 3x^2 - 9x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} 3x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 3$
 طول ضلع مستطیل باید مثبت باشد، پس $x = 0$ قابل قبول نیست، در نتیجه $x = 3$ است که عددی اول می‌باشد.

حالا فرض کنید ضریب x^2 ، مساوی ۱ نباشد، در این حالت کلی هم اگر ریشه‌ها اعداد گویا باشند، می‌توانید با روش تجزیه معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنید...
تکنیک معلم کنکور: ضریب x^2 را در عدد ثابت معادله ضرب کرده و بعد آن را نادیده بگیرید! حالا معادله‌ی درجه‌ی دومی دارید که ضریب x^2 در آن ۱ است، خوب تجزیه‌اش کنید! کار که تمام شد و حاصل به فرم $(x + m)(x + n)$ درآمد، در یک پرانتز، (به دلخواه) a را در x ضرب کنید و در پرانتز دیگری عدد ثابت را بر a تقسیم!
این جوری هم ببین:

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + ca = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (x + m)(x + n) = 0 \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم } a} (ax + m)(x + \frac{n}{a}) = 0$
 ضرب کن و حذف کن

ببین:
 $5x^2 - 9x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x + 1)(x - 10) = 0 \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم ۵}} (5x + 1)(x - \frac{10}{5}) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = -\frac{1}{5}, 2$
 ضرب و حذف

تست: در معادله‌ی $3x^2 - 11x + 6 = 0$ ریشه‌ی بزرگ‌تر چند برابر ریشه‌ی کوچک‌تر است؟
 (۱) ۳/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۵/۵
 پاسخ: (۳)

$3x^2 - 11x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x - 2)(x - 9) = 0 \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم ۳}} (3x - 2)(x - \frac{9}{3}) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = \frac{2}{3}, 3$
 ضرب و حذف

ریشه‌ی بزرگ $= \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$
 ریشه‌ی کوچک $= \frac{2}{3}$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش مربع کامل

۱) برای این که عبارت $x^2 + bx$ را مربع کامل کنیم باید به آن $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه کنیم.

این جوری هم ببین:
 $x^2 + bx \xrightarrow{\text{مربع کامل کن}} x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = (x + \frac{b}{2})^2$

۲) برای این که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را با روش مربع کامل حل کنید، مراحل زیر را به ترتیب اجرا کنید:

الف) عدد ثابت را به سمت راست تساوی ببرید و بعد دو طرف را به ضریب x^2 تقسیم کنید:

این جوری هم ببین:
 $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c \xrightarrow{+a} x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

ب) حالا سمت چپ تساوی را همان طور که یاد دادیم، مربع کامل کنید و بعد معادله را حل کنید.

ببین: حل معادله‌ی $3x^2 + 2x - 8 = 0$ با روش مربع کامل:

$3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 8 \xrightarrow{+3} x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{8}{3} \xrightarrow{+\frac{1}{9}} x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} + \frac{1}{9}$
 $\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{25}{9} \xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3}$
 $\begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \end{cases}$
 ساده کن

تکنیک معلم کنکور: اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را با روش مربع کامل حل کنیم تا به صورت $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ درآید، (ضریب x داخل پرانتز یک باشد) عددی که باید به دو طرف تساوی اضافه شود $\frac{b^2}{4a^2}$ است و عددی که در نهایت باید از آن جذر بگیریم $\frac{\Delta}{4a^2}$ خواهد بود...

تست: برای حل معادله‌ی $2x^2 + 9x + 4 = 0$ به روش مربع کامل، عددی که باید در سمت راست تساوی از آن جذر بگیریم، کدام است؟

- (۱) $\frac{49}{8}$ (۲) $\frac{49}{4}$ (۳) $\frac{49}{16}$ (۴) $\frac{81}{16}$

پاسخ:

$$2x^2 + 9x + 4 = 0 \xrightarrow{a=2, b=9, c=4} \Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 \Rightarrow \Delta = 49 \xrightarrow{\text{عددی که باید جذر بگیریم}} \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{49}{4(2)^2} = \frac{49}{16}$$

تست: برای حل معادله‌ی $25x^2 - 25x + 6 = 0$ با روش مربع کامل، کدام عدد را می‌توانیم به دو طرف تساوی اضافه کنیم؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) 1

پاسخ:

$$25x^2 - 25x + 6 = 0 \xrightarrow{a=25, b=-25} \frac{b^2}{4a^2} = \frac{(-25)^2}{4(25)^2} = \frac{1}{4}$$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش Δ

متداول‌ترین روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، همین است. در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

۱ Δ را پیدا می‌کنیم: $\Delta = b^2 - 4ac$ ۲ مقدار ریشه‌ها، در صورتی که Δ منفی نباشد، عبارت‌اند از: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(\sqrt{3} + 1)x^2 - x + 1 = \sqrt{3}$ ، ریشه‌ی مثبت کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\sqrt{3} + 1$ (۳) $2\sqrt{3} - 1$ (۴) $2\sqrt{3} - 2$

پاسخ:

$$(\sqrt{3} + 1)x^2 - x + 1 = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} (\sqrt{3} + 1)x^2 - x + (1 - \sqrt{3}) = 0 \xrightarrow{\text{پیداکن } \Delta} \Delta = (-1)^2 - 4(\sqrt{3} + 1)(1 - \sqrt{3}) = 9$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x_1 = \frac{1 + 3}{2(\sqrt{3} + 1)}, x_2 = \frac{1 - 3}{2(\sqrt{3} + 1)} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مثبت}} x_1 = \frac{1 + 3}{2(\sqrt{3} + 1)} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \xrightarrow{\text{مویزایی}} \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{3} - 1$$

دو معادله‌ی درجه‌ی دوم خاص

۱ اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع هر سه ضریب، برابر صفر شود، مثل $5x^2 + 6x - 11 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها همواره ۱ بوده و دیگری هم می‌شود: نسبت عدد ثابت معادله به ضریب x^2

این جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a + b + c = 0$ ، آن وقت: $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a}$

۲ اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع ضریب‌های اولی و آخری برابر ضریب وسطی باشد، مثل $5x^2 + 6x + 1 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها، همواره -۱ بوده و دیگری هم می‌شود: قرینه‌ی عدد ثابت معادله، تقسیم بر ضریب x^2

این جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a + c = b$ ، در این صورت: $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$

یه سطح بالاتر! در هر معادله‌ای و با هر درجه‌ای که داشته باشد، اگر مجموع همه‌ی ضریب‌ها برابر صفر شود، حتماً یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ بوده است و برای تعیین بقیه‌ی ریشه‌ها، عبارت را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم...

تست: در معادله‌ی $(2\sqrt{2} - 1)x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$ یکی از ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2} - 3}{9}$ (۲) $\frac{\sqrt{2} - 3}{7}$ (۳) $\frac{\sqrt{2} - 1}{7}$ (۴) $\frac{\sqrt{2} - 1}{9}$

پاسخ:

$$a = 2\sqrt{2} - 1, b = -\sqrt{2}, c = 1 - \sqrt{2} \xrightarrow{a+b+c} (2\sqrt{2} - 1) + (-\sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = 1, x = \frac{c}{a} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1} \xrightarrow{\text{مویزایی}} x = \frac{(1 - \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)}{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)} \xrightarrow{\text{ضربکن}} \frac{\sqrt{2} - 3}{7}$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم ناقص

اگر در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ضریب x یا عدد ثابت صفر بودند نیازی به تجزیه و روش Δ نیست! این معادله‌ها را **ناقص** می‌گوییم:
۱ اگر $c = 0$ باشد، از x فاکتور بگیرید و تمام!...

$$3x^2 + 5x = 0 \xrightarrow[\text{فاکتور}]{c=0} x(3x+5) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = 0, -\frac{5}{3}$$

ببین:

۲ اگر $b = 0$ باشد، عدد ثابت را به سمت دیگر تساوی ببرید و بعد هم دو طرف، تقسیم بر a ، بقیه‌اش را بلدید...

$$3x^2 - 7 = 0 \xrightarrow[\text{تغیال}]{b=0} 3x^2 = 7 \xrightarrow{+3} x^2 = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$$

ببین:

جمع‌بندی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم؛ دید کنکوری!

تکنیک معلم کنکور: برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم در کنکور، دقت کنید **۱** شاید ناقص باشد یا **۲** شاید خاص باشد: $a+c = \pm b$ ، اگر این هم نبود **۳** تجزیه را امتحان کنید و یادتان باشد همیشه **۴** روش Δ جواب می‌دهد!...

این مجذورها در روش Δ به کارتان می‌آید: حفظ باشید!

۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	عدد
۴۰۰	۳۶۱	۳۲۴	۲۸۹	۲۵۶	۲۲۵	۱۹۶	۱۶۹	۱۴۴	۱۲۱	۱۰۰	مجذور عدد

تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

وضعیت تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با کمکی Δ و به‌صورت زیر تعیین می‌شود: $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	وضعیت ریشه‌ها
ریشه‌ی حقیقی ندارد.	ریشه‌ی مضاعف دارد. فرمول ریشه‌ی مضاعف: $x = \frac{-b}{2a}$	دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. فرمول ریشه‌ها: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	

منظور از ریشه‌ی مضاعف، وجود دو ریشه‌ی مساوی با همدیگر است. راستی ریشه‌ی **مضاعف** را گاهی ریشه‌ی **مکرر مرتبه‌ی دوم** هم می‌گویند...

تست: ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ کدام است؟

پاسخ: $-\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴)

$$x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\text{رو حساب کن}} \Delta = (2m+3)^2 - 4(1)(m^2) \xrightarrow{\text{اتحاد و بازکن و ساده کن}} \Delta = 12m + 9$$

$$\xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف دارد}} 12m + 9 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}} m = -\frac{3}{4} \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{\text{در معادله}} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0 \xrightarrow[\text{بیداکن}]{\text{ریشه‌ی مضاعف رو}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-\frac{3}{2})}{2(1)} = \frac{3}{4}$$

کنترل Δ درست

یادتان باشد هر تستی از معادله‌ی درجه‌ی دوم را که حل کردید و کارتان تمام شد، حتماً در مرحله‌ی آخر باید Δ را کنترل کنید.

- چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است**، باید علاوه بر هر شرطی که یافته‌اید، شرط $\Delta > 0$ هم برقرار باشد...
- چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است**، باید شرط $\Delta \geq 0$ در کنار تمام فرض‌های مسئله نوشته شده و بررسی شود...

دورزدن Δ !

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، عددهای a و c علامت‌های متفاوت داشته باشند، آن وقت معادله، حتماً دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز است و در این حالت برای فهمیدن تعداد ریشه‌ها، نیازی به محاسبه‌ی Δ نداریم!...

تست: معادله‌ی $\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$ چند ریشه دارد؟

- پاسخ: (۱) هیچ (۲) یک ریشه‌ی ساده (۳) ریشه‌ی مضاعف (۴) دو ریشه‌ی متمایز

$$\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5} \xrightarrow{x \neq 0} \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} - \frac{3}{5} = 0 \xrightarrow{\text{دو طرف را در } 4x^2 \text{ ضرب کن}} 1 - 4x - \frac{12x^2}{5} = 0 \xrightarrow{\times 5} 5 - 20x - 12x^2 = 0$$




$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 12x^2 + 20x - 5 = 0 \xrightarrow{a=12, c=-5} \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله حتماً دو ریشه‌ی متمایز دارد.}$$

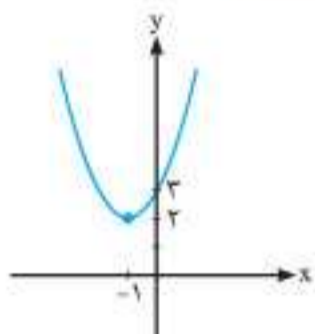
ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

این‌جا رفتار و ویژگی‌های تابع درجه‌ی دوم را می‌بینید. موضوعی که در کتاب درسی بسیار مفصل به آن پرداخته شده است. رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم و تسلط بر آن، در بیشتر مسائل ریاضی، مهم و کاربردی است.

سهمی

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط‌های $a \neq 0$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود و نمودار این تابع، یک سهمی است.

$y = ax^2 + bx + c$		
$x = -\frac{b}{2a}$ طول رأس:		رأس سهمی
$y = -\frac{\Delta}{4a}$ عرض رأس:		
همچنین می‌توانید با جای‌گذاری طول رأس در تابع، عرض رأس را پیدا کنید.		
$x = 0 \Rightarrow y = c$ به جای x بگذارید صفر: همیشه یک نقطه‌ی تلاقی دارد.		تلاقی با محور y ها
$\Delta > 0$ محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند. (یعنی همان ریشه‌هایش...)		تلاقی با محور x ها
$\Delta = 0$ بر محور x ها مماس است.		
$\Delta < 0$ محور x ها را قطع نمی‌کند.		
$a < 0$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین است:  ماکزیم داریم.	$a > 0$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست:  مینیمم داریم.	تأثیر علامت a
		محور تقارن (همواره یکی)
<ol style="list-style-type: none"> مختصات رأس سهمی ریشه‌های آن در صورت وجود: که نقطه‌های برخورد با محور x ها هستند. نقطه‌ی تلاقی با محور y ها رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامت a 		برای رسم سهمی نیاز است



ببین: اگر $y = x^2 + 2x + 3$ باشد، آن‌وقت دهانه‌های سهمی رو به بالاست ($a = 1$) و طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ و عرض رأس هم می‌شود $y = 1 - 2 + 3 = 2$ یعنی $x = -1$ در سهمی $y = 1 - 2 + 3 = 2$ با محور y ها برخورد می‌کند و معادله‌ی محور تقارنش $x = -1$ است. از آن‌جایی که $\Delta = 4 - 12 = -8$ است، ریشه هم ندارد. منظور از کمترین یا بیشترین مقدار سهمی، همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است...

تست: کمترین مقدار تابع $y = kx^2 - 8x + (6k - 1)$ برابر با ۳ است. طول رأس سهمی کدام است؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)

پاسخ: عبارت درجه‌ی دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس $a > 0$ بوده است که در این‌جا می‌شود $k > 0$. خوب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است.

$$kx^2 - 8x + (6k - 1) = 0 \xrightarrow{\Delta \text{ و حساب کن}} \Delta = 64 - 4(k)(6k - 1) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 64 - 24k^2 + 4k$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول عرض رأس}} \frac{64 - 24k^2 + 4k}{-4k} = 3 \xrightarrow{\text{فرض تست}} 24k^2 - 4k - 64 = 12k \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24k^2 - 16k - 64 = 0 \xrightarrow{+8} 3k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta = 4 - 4(3)(-8) = 100 \Rightarrow k = \frac{2 \pm 10}{6} = 2 \text{ و } \frac{-8}{6} \quad k > 0 \Rightarrow k = 2 \xrightarrow{\text{طول رأس}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

چنانچه سهمی از نقطه‌ی (m, n) بگذرد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

تست ۱: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x = -2$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(-1, -1)$ بگذرد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴)

پاسخ:

۱ محور تقارن: $y = ax^2 + bx + c \rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -2 \xrightarrow{\text{طرفین بسطین کن}} b = 4a$

۲ تلاقی با محور y ها: $y = 5 \xrightarrow{x=0} c = 5$

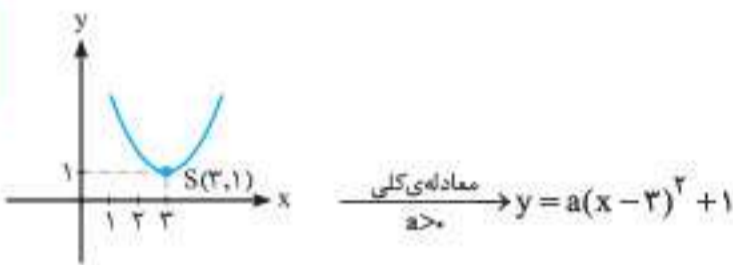
۲ گذشتن از نقطه $(-1, -1)$: $x = -1, y = -1 \rightarrow -1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=5} a - b = -6 \xrightarrow{b=4a} a - 4a = -6$

طبق ۱

$\rightarrow a = 2 \xrightarrow{b=4a} b = 8 \rightarrow a + b + c = 2 + 8 + 5 = 15$

نوشتن معادله‌ی سهمی

۱ اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(h, k)$ داده شده باشد: در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال، a را پیدا کنید. **ببین:**



تست ۱: معادله‌ی سهمی مقابل کدام است؟

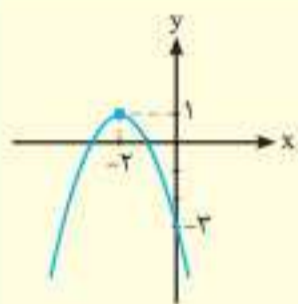
۱ $y = -x^2 + 4x - 3$

۲ $y = -x^2 - 4x - 3$

۳ $y = -x^2 - 4x + 3$

۴ $y = x^2 - 4x - 3$

پاسخ:



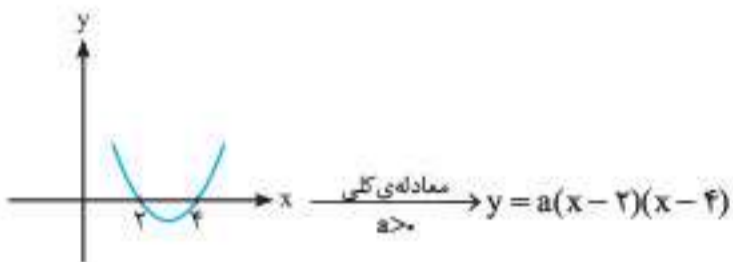
$S(-2, 1) \xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی سهمی } a < 0} y = a(x - h)^2 + k \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن } h = -2, k = 1} y = a(x + 2)^2 + 1$

سهمی از نقطه‌ی $(0, -3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه را در معادله‌ی آن صدق می‌دهیم:

$y = a(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow{x=0, y=-3} -3 = a(0 + 2)^2 + 1 \Rightarrow -3 = 4a + 1 \xrightarrow{\text{حل معادله}} a = -1 \xrightarrow{\text{در معادله سهمی}} y = -1(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} y = -x^2 - 4x - 3$

همان‌طور که دیدید برای کار کردن با سهمی‌هایی که معادله‌ی آن‌ها به فرم $y = a(x - h)^2 + k$ نوشته شده است، می‌توانید اتحاد مربع دو جمله‌ای موجود را باز کرده و عبارت را ساده کنید.

۲ اگر نقاط تلاقی سهمی با محور x ها به فرم x_1 و x_2 باشند: در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال a را به دست بیاورید. **ببین:**



تست ۱: سهمی مقابل از نقطه‌ی $(-2, -10)$ می‌گذرد، نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y ها چه عرضی دارد؟

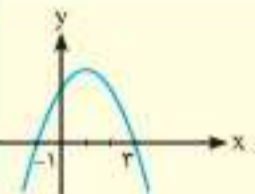
۱۰ (۲)

۶ (۴)

۵ (۱)

۸ (۳)

پاسخ:



فرم کلی سهمی $a < 0$: $y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} y = a(x + 1)(x - 3) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} y = a(x^2 - 2x - 3) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن } (-2, -10)}$

$-10 = a(4 + 4 - 3) \Rightarrow -10 = 5a \Rightarrow a = -2 \xrightarrow{\text{در معادله سهمی}} y = -2(x^2 - 2x - 3) \xrightarrow{\text{تلاقی با محور y ها } x=0} y = -2(-3) = 6$

در حالت خاص که معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعف x دارد، معادله‌اش به صورت $y = a(x - x_0)^2$ درمی‌آید! **قرارداد:** ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را برای تابع $y = ax^2 + bx + c$ **صفرهای سهمی** می‌نامیم.



۲ نوشتن معادله سهمی با داشتن سه نقطه از آن: معمولاً ضابطه سهمی را در این حالت به فرم کلی $y = ax^2 + bx + c$ نوشته و نقطه‌ها را در آن صدق می‌دهیم، دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و a ، b و c را پیدا می‌کنیم. اما طراح کنکور چیزی را دوست دارد که می‌خواهیم به آن بپردازیم: **دو نقطه از سه نقطه قانون دارند!** تکنیک معلم کنکور: فرض کنید نقطه‌ها $(1, 3)$ ، $(4, 6)$ و $(-2, 1)$ باشند، در دوتای اول، قانون $y = x + 2$ در نقطه‌ها برقراره! خوب معادله سهمی را

به فرم $y = a(x-1)(x-4) + x + 2$ بنویسید و بعد نقطه‌ی سوم را در آن صدق دهید... حالا این قانون در دو نقطه می‌تواند هر چیز دیگری هم باشد:

$$y = a(x-1)(x-4) + x + 2 \xrightarrow{\text{صدق بده}} 1 = a(-3)(-6) + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

این جوری هم ببین: دو نقطه از سه نقطه سهمی، این طوری هستند: $(\alpha, f(\alpha))$ و $(\beta, f(\beta))$ معادله سهمی را به فرم $y = a(x-\alpha)(x-\beta) + f(x)$ بنویس و با صدق دادن نقطه‌ی سوم، a را پیدا کن و تمام! $f(x)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی دو است.

تست: سهمی گذرنده از نقطه‌های $(2, 4)$ ، $(-1, 1)$ و $(4, -14)$ محور y را در چه عرضی قطع می‌کند؟

پاسخ: -6 (۱) 4 (۲) 6 (۳) -4 (۴)

$$y = a(x-2)(x+1) + x^2 \xrightarrow{\text{صدق بده}} -14 = a(2)(5) + 16 \Rightarrow 10a = -30 \Rightarrow a = -3$$

$$y = -3(x-2)(x+1) + x^2 \xrightarrow{\text{تلاقی با } y=0} y = -3(-2)(1) + 0 = 6$$

مماس بودن سهمی بر خط

اگر خط دلخواه $y = mx + n$ بر یک سهمی مماس شده باشد، به جای y سهمی بگذارید: $mx + n$ و سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله‌ی آخری قرار دهید: $\Delta = 0$...

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است؟ (خارج ۹۳)

پاسخ: -4 (۱) 4 و -12 (۲) -4 و 12 (۳) 12 (۴)

$$y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \xrightarrow{\text{نیمساز ناحیه اول } y=x} x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} x = 2x^2 + mx + x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 0 \Rightarrow \text{مماس یعنی}} m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} m^2 - 8m - 48 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

اگر $m = 12$ باشد، معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از: $2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{m=12} 2x^2 + 12x + 18 = 0$ که به وضوح جوابش $x = -3$ است و در ناحیه‌ی اول نیست! پس فقط $m = -4$ قابل قبول خواهد بود.

وضعیت کامل یک سهمی نسبت به محور xها

- اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه قطع کند، در این صورت $\Delta > 0$ بوده است.
- اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه **قطع نکند**، در این صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور x ها یکی از چهار حالت زیر را دارد:

همواره بالای محور	بالای محور، مماس بر آن	همواره پایین محور	پایین محور، مماس بر آن	شرط
$a > 0$ و $\Delta < 0$	$a > 0$ و $\Delta = 0$	$a < 0$ و $\Delta < 0$	$a < 0$ و $\Delta = 0$	

جمله‌ی **مربع کامل شدن عبارت درجه‌ی دوم**، یعنی در آن عبارت، Δ مساوی صفر شده ...!

تست: همگی نقاط نمودار تابع $y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}$ بالای محور x هاست. چند جواب طبیعی و یک‌رقمی برای m وجود دارد؟

پاسخ: (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

$$y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(m+1)\left(\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 7 - m$$

دو تا \rightarrow تعداد $\rightarrow m = 8, 9 \xrightarrow{m \text{ طبیعی و یک‌رقمی}} m > 7 \xrightarrow{\cap} m > 7 \xrightarrow{\text{سهمی بالای محور تعارض}} \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 7 - m < 0 \Rightarrow m > 7 \\ a > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases}$

تست: هرگاه نمودار تابع $y = (k-2)x^2 - 3x + 2 + k$ پایین محور x ها و بر آن مماس باشد، در این صورت چند مقدار برای k وجود دارد؟

پاسخ: (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

$$y = (k-2)x^2 - 3x + (2+k) \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (-3)^2 - 4(k-2)(k+2) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = -4k^2 + 25$$

یکی \rightarrow تعداد جواب $\rightarrow k = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\cap} \begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow -4k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2} \\ a < 0 \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2 \end{cases}$

عبارت درجه‌ی دوم با علامت ثابت: یک تیر و دو نشان!

نتیجه‌ی بسیار مهم و البته کنکوری جدول قبلی که درباره‌ی وضع سهمی و محور x ‌ها گفتیم، این است که اگر بگویند عبارت درجه‌ی دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است، خوب انگار سهمی آن کاملاً بالا یا کاملاً پایین محور x ‌ها افتاده...! این جواری هم ببین:

$ax^2 + bx + c \leq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	شرط
$\Delta \leq 0$ و $a < 0$	$\Delta < 0$ و $a < 0$	$\Delta \leq 0$ و $a > 0$	$\Delta < 0$ و $a > 0$	

تست: به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 5$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

$$m > 1 \quad (1) \qquad 1 < m < \frac{14}{5} \quad (2) \qquad m > \frac{14}{5} \quad (3) \qquad m \geq \frac{14}{5} \quad (4)$$

پاسخ:

$(m-1)x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (6)^2 - 4(m-1)(5) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 56 - 20m$

$\xrightarrow{\text{عبارت همواره مثبت}} \left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0 \Rightarrow 56 - 20m < 0 \Rightarrow m > \frac{14}{5} \\ a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{array} \right\} \cap \rightarrow m > \frac{14}{5}$

ویژگی محور تقارن سهمی

۱ محور تقارن سهمی همیشه از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور y ‌هاست.

این جواری هم ببین: طول رأس سهمی، همیشه با مقدار داده‌شده برای محور تقارن سهمی مساوی است: **ببین:** $x = 4 \Rightarrow$ طول رأس = ۴

معادله‌ی محور تقارن

۲ هر دو نقطه‌ای که روی سهمی بوده و عرض مساوی با هم داشته باشند، نسبت به محور تقارن سهمی قرینه‌اند. در این حالت برای پیدا کردن مقدار عددی محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرد، **ببین:**

$A(-3, 4), B(5, 4) \xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = \frac{-3 + 5}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x = 1$
 دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی

تست: دو نقطه‌ی $(1, \beta)$ و $(-3, \beta)$ روی نمودار سهمی با کمترین مقدار a قرار دارند. اگر سهمی محور y ‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، کدام نقطه روی این سهمی واقع است؟

$(-3, 14) \quad (1) \qquad (-2, 2) \quad (2) \qquad (-2, 3) \quad (3) \qquad (-3, 13) \quad (4)$

پاسخ:

دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی

$(1, \beta), (-3, \beta) \xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = \frac{1 + (-3)}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x = -1 \xrightarrow{\text{محور تقارن از رأس می‌گذرد}} \text{رأس } x = -1 \xrightarrow{\text{فرض } a = \text{کمترین مقدار}} S(-1, 1)$
 میانگین طول‌ها را بگیر

$\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}} y = a(x+1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{تلاقی با } y=3} 3 = a(0+1)^2 + 1 \Rightarrow a = 2$
 (۰, ۳)

$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} y = 2(x+1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{استحسان گزینه‌ها}} 3 = 2(-2+1)^2 + 1 \Rightarrow 3 = 2 + 1 \checkmark$
 معادله‌ی سهمی
 گزینه‌ی «۳»

تابع چاق و لاغر

تکنیک معلم کنکور: تابعی را که ضابطه‌اش به صورت یک عبارت درجه‌ی اول، ضربدر یک عبارت درجه‌ی دوم باشد تابع چاق و لاغر می‌نامیم، **ببین:**

$y = \underbrace{(2x-1)}_{\text{چاق}} \underbrace{(x^2+5x-4)}_{\text{لاغر}}$

۱ اگر تست بگویند: «تابع چاق و لاغر، محور x ‌ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند»، دلتای تابع درجه‌ی دوم را منفی کنید...

تست: نمودار تابع $y = (x+2)(x^2 - 2x + m)$ محور x ‌ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مقادیر m به کدام صورت است؟

$m > 1 \quad (1) \qquad -2 < m < -1 \quad (2) \qquad m > -1 \quad (3) \qquad m < 1 \quad (4)$

پاسخ:

$y = (x+2)(x^2 - 2x + m) \xrightarrow{\Delta \text{ جایی رو حساب کن}} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(m) = 4 - 4m \xrightarrow{\text{تابع فقط یک ریشه دارد}} 4 - 4m < 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m > 1$
 $\Delta < 0$ جایی

۲ اگر تست بگویند: «تابع چاق و لاغر، بر محور x ‌ها مماس است»، در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

الف) دلتای عبارت درجه‌ی دوم صفر بوده است.

ب) ریشه‌ی عبارت درجه‌ی اول (همون لاغره) باید ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم باشد.

تست: نمودار تابع $y = (\frac{1}{3}x - k)(x^2 + 2x - 3)$ بر محور x ‌ها مماس است. در این صورت تفاضل مقادیر k کدام است؟

$\frac{4}{3} \quad (1) \qquad 1 \quad (2) \qquad \frac{2}{3} \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \quad (4)$

پاسخ: همان طور که می بینید در قسمت چاق، Δ نمی تواند صفر شود:
 $x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta \text{ چاقی رو حساب کن}} \Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16$
 پس می ماند یک راه! ریشه‌ی عبارت لاغر باید در تابع چاق صدق کند تا نمودار تابع بر محور x ها مماس شود:
 $\frac{1}{3}x - k = 0 \xrightarrow{\text{ریشه رو حساب کن}} \frac{1}{3}x = k \Rightarrow x = 3k \xrightarrow{\text{بذار توی تابع درجه‌ی دوم}} (3k)^2 + 2(3k) - 3 = 0$
 $\xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم با دومی برابر است}} 9k^2 + 6k - 3 = 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 3k^2 + 2k - 1 = 0 \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left(\frac{1}{3}\right) - (-1) = \frac{4}{3}$

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

قسمتی شیرین و کنکوری! بیشتر دانش آموزان کار با S و P را دوست دارند و چه چیزی بهتر از این که این بخش سهم خوبی در کنکور هم داشته باشد...

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم: S و P

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض $\Delta > 0$ و وجود دو ریشه به نام‌های α و β داریم:

نماد	بر حسب ریشه‌ها	بر حسب ضرایب‌ها	مجموع دو ریشه
S	$\alpha + \beta$	$-\frac{b}{a}$	مجموع دو ریشه
P	$\alpha\beta$	$\frac{c}{a}$	حاصل ضرب دو ریشه

تست: عدد $\frac{5}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2 - 6x - 4m - 1 = 0$ است. حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟
 $\frac{5}{3}$ (۱) $-\frac{25}{9}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{25}{9}$ (۴) $-\frac{2}{3}$ (۵)
 پاسخ:
 $x = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{بذار توی معادله}} m\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{3}\right) - 4m - 1 = 0 \xrightarrow{\times 9} 25m - 90 - 36m - 9 = 0$
 $\xrightarrow{\text{ریشه در معادله صدق می‌کند}} -11m - 99 = 0 \Rightarrow m = -9 \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} -9x^2 - 6x + 35 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{35}{-9}$
 حل کن

رابطه‌ای بین ریشه‌ها در تست حضور دارد...

هر تستی که در آن «رابطه‌ای مشخص، بین دو تا ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو داده شده باشد» حتماً با روش S و P حل می‌شود: برای این منظور بنویسید:
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ (۱) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (۲) رابطه‌ای که تست بین دو ریشه داده است!
 حالا با کمک سه رابطه‌ی بالا و جای‌گذاری، پارامتر موجود در تست را پیدا کنید...

تست: در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگری ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ (خارج ۹۳)
 15 (۴) 14 (۳) 12 (۲) 10 (۱)
 پاسخ:
 $x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\left(-\frac{8}{1}\right) = 8 \\ \alpha\beta = \frac{m}{1} = m \end{cases}$
 $\alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \xrightarrow{\text{بذار توی}} \frac{\beta}{2} + 5 + \beta = 8 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{\beta}{2} + \beta = 3$
 $\xrightarrow{\times 2} \beta + 2\beta = 6 \Rightarrow 3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 \xrightarrow{\text{بذار توی}} \alpha + 2 = 8 \Rightarrow \alpha = 6 \xrightarrow{\text{بذار توی}} 6 \times 2 = m \Rightarrow m = 12$

کنترل Δ

در تستی که با S و P حل کرده‌اید و برای پارامتر موجود در سؤال، دو مقدار به دست آورده‌اید، یادتان باشد برای هر کدام کنترل کنید که Δ مثبت می‌شود یا منفی؟! چنانچه به ازای پارامتری، $\Delta < 0$ شود آن مقدار پارامتر، قابل قبول نیست!
 این جور هم ببین: خود S و P به تنهایی، لزوماً وجود ریشه را برای معادله‌ی درجه‌ی دوم تضمین نمی‌کنند، حتماً چک Δ لازم است...

این طوری بدانید که کنترل Δ همیشه لازم است، مگر این که $\frac{c}{a} < 0$ شود...

❶ تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

پاسخ: (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \xrightarrow{\text{همه رویارسمت چپ}} mx^2 + 3x + (m^2 - 2) = 0 \xrightarrow{\text{P و S رو تشکیل بده}} \begin{cases} \text{I} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{m} \\ \text{II} \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 2}{m} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha = 1}{\beta} \rightarrow \alpha\beta = 1 \xrightarrow{\text{در II بذار}} 1 = \frac{m^2 - 2}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} m^2 - 2 = m \xrightarrow{\text{مرتب کن}} m^2 - m - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \text{در معادله جای گذاری کن} \rightarrow m = -1, m = 2 \begin{cases} m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \\ m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کنترل } \Delta} \begin{cases} \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 5 \text{ ق ق} \Rightarrow m = -1 \\ \Delta = 9 - 4(2)(2) = -7 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$\alpha = k\beta$

اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی، k برابر ریشه‌ی دیگر است، غیر از روش کلی که در قسمت قبل گفتیم، می‌توانید سریع قرار

دهید: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$ و پارامتر را پیدا کنید.

❶ تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + mx + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی معادله، کدام می‌تواند باشد؟

پاسخ: (۱) ۲/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۵

$$2x^2 + mx + 9 = 0 \xrightarrow{\text{یک ریشه } k \text{ برابر دیگری}} \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{m^2}{2 \times 9} = \frac{(2+1)^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2}{18} = \frac{9}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} m^2 = 81 \Rightarrow m = \pm 9 \Rightarrow \begin{cases} m = -9 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} 2x^2 - 9x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-9}{2}\right) = 4/5 \\ m = 9 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} 2x^2 + 9x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{2} = -4/5 \end{cases}$$

دومی در گزینه‌ها موجود نیست.

محاسبه‌ی رابطه‌های معروف بین ریشه‌ها برحسب S و P

در این مدل از تست‌ها، یک معادله‌ی درجه‌ی دو دارید که خوب پارامتر هم ندارد و قرار است عبارتی را که برحسب ریشه‌ها داده شده است، حساب کنید. مثل مجموع مکعبات ریشه‌ها یا هر چیز دیگری! طبق جدول زیر موارد مهم را به خاطر بسپارید:

مدل اول) معروف‌ها:

به فارسی	برحسب ریشه‌ها	حاصل عبارت خواسته‌شده برحسب S و P
مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^2 + \beta^2$	$S^2 - 2P$
مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^3 + \beta^3$	$S^3 - 3SP$
قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها	$ \alpha - \beta $	$\sqrt{S^2 - 4P}$ یا $\frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$
مجموع جذرهای ریشه‌های مثبت	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

اینم دلیلش: واسه اثبات حالت‌هایی شبیه به (۲) و (۴)، عبارت را مساوی k گرفته و به توان ۲ برسانید و بعد حسابشون کنید، ببین:

$$\text{I} \quad k = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} k = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \xrightarrow{\text{نتیجه } \alpha, \beta > 0} |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

❶ تست: در معادله‌ی $x^2 - 8x + 4 = 0$ ریشه‌ها را α و β نامیده‌ایم. حاصل تقسیم $\alpha^2 + \beta^2$ به $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ چقدر است؟

پاسخ: (۱) $\frac{56\sqrt{3}}{3}$ (۲) $28\sqrt{3}$ (۳) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ (۴) $56\sqrt{3}$

پاسخ:

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \begin{cases} \frac{-b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 8 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 8^2 - 2(4) = 56 \\ \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{4}} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{56}{\sqrt{12}} = \frac{56}{2\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{مجموعی}} \frac{56 \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{28\sqrt{3}}{3}$$

① در معادله‌ی $x^2 + 3x - 1 = 0$ حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \begin{cases} \frac{-b}{a} \rightarrow S = -3 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرمول}} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP = (-3)^2 - 2(-3)(-1) = -36$$

پاسخ:

① یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (m+3)x + 3m = 0$ از دیگری ۵ واحد بیشتر است. m کدام عدد می‌تواند باشد؟

$$\alpha = \delta + \beta \Rightarrow \alpha - \beta = \delta \xrightarrow{\text{رابطه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \delta \xrightarrow{\text{نشان ۲ برسون}} \Delta = 25a^2 \Rightarrow (m+3)^2 - 4(1)(3m) = 25(1)^2$$

Δ معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$\xrightarrow{\text{اتحاد و ساده‌کن}} m^2 - 6m + 9 = 25 \Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m = 8, -2$$

پاسخ:

مدل دوم) غیر معروف‌ها:

اگر حاصل عبارتی را که بر حسب ریشه‌ها نوشته شده، خواستند و جزء جدول مدل اول نبود، ابتدا عبارت را با عملیات جبری مانند مخرج مشترک‌گیری، فاکتورگیری و اتحاد ساده می‌کنیم؛ با این هدف که در آن‌ها فقط $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ یا عبارت‌های معروفی که در جدول گفتیم دیده شود، بعدش عبارت را بر حسب S و P نوشته و حاصل آن را از روی معادله پیدا می‌کنیم...

① تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \xrightarrow[\text{مخرج جنر P است}]{\text{صورت جزء جدول است}} \frac{\sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \begin{cases} \frac{-b}{a} \rightarrow S = -\left(\frac{-12}{4}\right) = 3 \\ \frac{c}{a} \rightarrow P = \frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری در ①}} \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3 + 1}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

پاسخ:

① در معادله‌ی $2x^2 + 7x - 20 = 0$ با ریشه‌های α و β ، حاصل $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کدام است؟

$$2x^2 + 7x - 20 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{2}, P = \frac{c}{a} = \frac{-20}{2} = -10$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\text{از } \alpha\beta \text{ فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{بر حسب S و P بنویس}} PS \xrightarrow[\text{جای گذاری کن}]{\text{طبق ①}} (-10)\left(-\frac{7}{2}\right) = 35$$

پاسخ:

مدل سوم) رابطه‌ی غیرمقارن بین ریشه‌ها:

در این مدل، α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و رابطه‌ای غیرمقارن بین α و β خواسته شده است. مثل $\alpha^2 + \delta\beta = ?$. خوب در این حالت کافی است بدانید α و β (هر دو) در معادله صدق می‌کنند، یعنی باید اول کار (مثلاً) با گذاشتن α در معادله‌ی درجه‌ی دوم رابطه‌ای برای α به دست بیاورید تا آن را در عبارت خواسته شده بگذارید و بعد به رابطه‌های معروف برسید...

① تست: α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 5 = 0$ هستند. حاصل $\alpha^2 + 2\beta$ کدام است؟

$$\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} (2\alpha + 5) + 2\beta = ?$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) + 5 = ? \xrightarrow{S = \frac{-b}{a} = 2} 2S + 5 = 2(2) + 5 = 9$$

پاسخ:

بحث درباره‌ی علامت ریشه‌ها فقط با کمکی S و P

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی $\Delta > 0$ باشد و در واقع معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، می‌توانید بدون آن که معادله را حل کرده و ریشه‌هایش را پیدا کنید، فقط با کمک علامت S و P درباره‌ی علامت ریشه‌ها اظهار نظر کنید.

این جوړی هم ببین: یادت باشه اگه علامت ریشه‌ها رو خواستن، به یاد علامت S و P بیفتی...

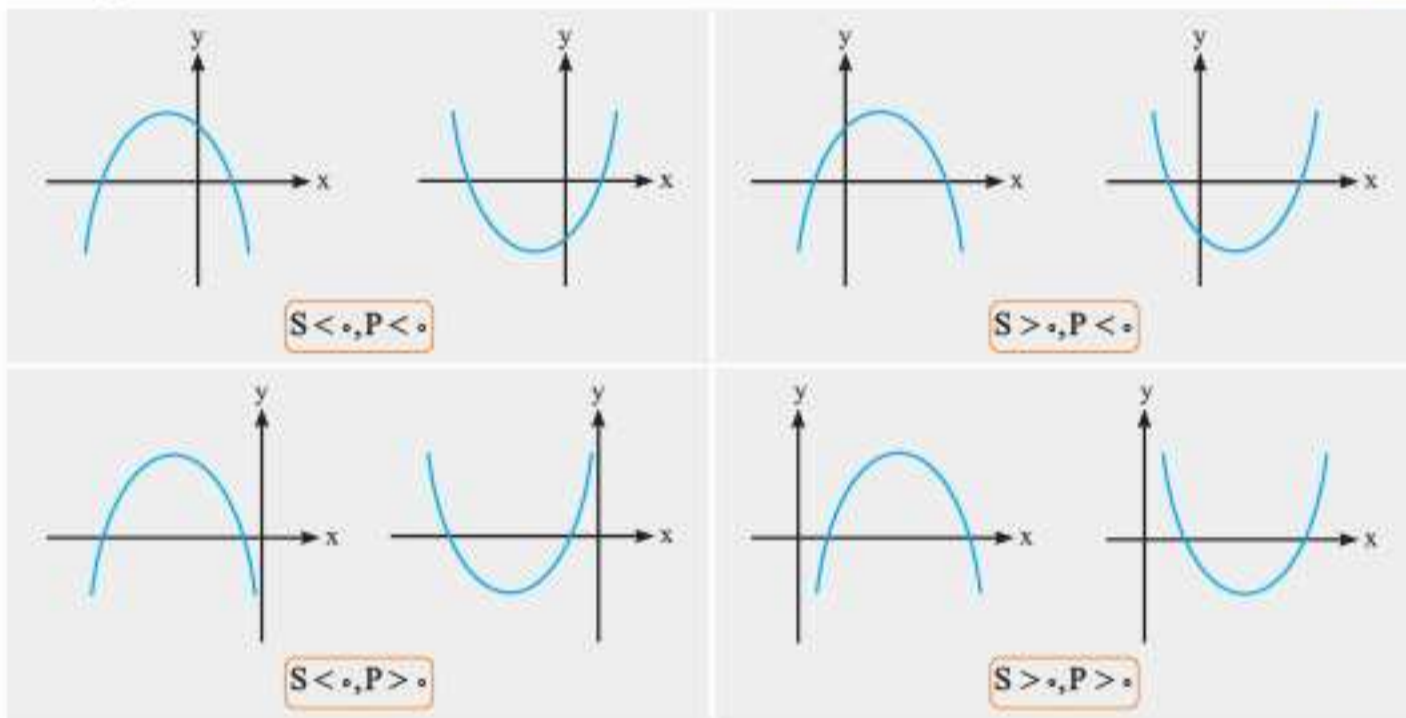
وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta > 0$	$P > 0$	$P < 0$
$S > 0$	هر دو ریشه مثبت هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و ریشه‌ی مثبت از قدر مطلق ریشه‌ی منفی، بزرگ‌تر است: مثل ۴ و -۲.
$S < 0$	هر دو ریشه منفی هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و قدر مطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت، بزرگ‌تر است: مثل -۵ و ۲.

۱ اگر $S = 0$ و $P \neq 0$ باشد، یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد: مثل ۳ و -۳. در این حالت حتماً P منفی است.

۲ اگر $P = 0$ باشد، یعنی معادله حتماً یک ریشه‌ی صفر دارد.

این جوړی هم ببین: چهار حالتی را که در جدول قبل آوردیم، به صورت نموداری هم ببینید: برای $y = ax^2 + bx + c$ و با فرض $\Delta > 0$ داریم:



Ⓢ تست: کدام یک از معادله‌های زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟

۴ $x^2 - 4x + 2 = 0$

۳ $x^2 + 8x + 1 = 0$

۲ $x^2 - 2x + 4 = 0$

۱ $x^2 - 4x - 2 = 0$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

× علامت ریشه‌ها مختلف است. $x^2 - 4x - 2 = 0 \rightarrow P = -2$ گزینه‌ی «۱»

× اصلاً ریشه ندارد. $x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$ گزینه‌ی «۲»

× هر دو ریشه منفی‌اند. $x^2 + 8x + 1 = 0 \rightarrow S = -8$ ریشه‌ها هم علامت‌اند $P = 1$ گزینه‌ی «۳»

اما در گزینه‌ی «۴»، $P = 2$ و $S = 4$ است که یعنی وجود دو ریشه‌ی مثبت: در ضمن Δ آن هم مثبت است...

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

برای تسلط به این بخش، پیشنهاد می‌کنیم حتماً ایستگاه ۳ را خوب خوانده باشید و تست‌های آن رازده باشید. چون می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دوم بنویسیم...

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با داشتن S و P آن

اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی را داشته باشید، که آن‌ها را به ترتیب S و P می‌نامیم، آن وقت معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر

می‌شود: $x^2 - Sx + P = 0$

این جوړی هم ببین: اگر دو تا عدد حقیقی α و β را بخواهید به طوری که جمع آن‌ها مساوی عدد معلوم S و ضربشان هم P باشد، برای پیدا کردن این

دو عدد باید معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر، $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ هستند؟

(۱) $x^2 + 4x - a = 0$ (۲) $x^2 + ax + 4 = 0$ (۳) $x^2 - 4x + a = 0$ (۴) $x^2 + ax - 4 = 0$

پاسخ:

$\alpha = 2 + \sqrt{4-a}$, $\beta = 2 - \sqrt{4-a}$

جمع کن $\rightarrow S = (2 + \sqrt{4-a}) + (2 - \sqrt{4-a}) = 4$

ضرب کن $\rightarrow P = (2 + \sqrt{4-a}) \times (2 - \sqrt{4-a}) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} P = 4 - (4-a) = a$

پس معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر برابر است با: $x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow[S=a]{S=4} x^2 - 4x + a = 0$

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با کمک معادله‌ای دیگر؛ دو معادله‌ی درجه‌ی دوم در یک تست!

در این مدل تست‌ها، دو تا معادله‌ی درجه‌ی دوم بهتون میدن! ریشه‌های معادله‌ی اولی α و β فرض می‌شوند و ریشه‌های معادله‌ی دوم هم بر حسب α و β داده می‌شوند؛ خوب شما S و P معادله‌ی اول را حساب می‌کنید، بعدش مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های دومی را تشکیل می‌دهید و S' و P' می‌نامید. حالا باید S' و P' را با ساده کردن و عملیات جبری بر حسب S و P ساخته و حساب کنید، خوب حالا S' و P' هم معلوم شده، دیگه برو واسه خودت!

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

پاسخ:

۱ $2x^2 - 3x = 1 \xrightarrow{\text{سرتیب کن}} 2x^2 - 3x - 1 = 0$

$\xrightarrow{\frac{b}{a}}$ $S = \frac{3}{2} = \alpha + \beta$

$\xrightarrow{\frac{c}{a}}$ $P = -\frac{1}{2} = \alpha\beta$

۲ $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$

$\xrightarrow{\frac{-b}{a}}$ $S' = -\frac{k}{\lambda} = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

$\xrightarrow{\frac{c}{a}}$ $P' = -\frac{1}{\lambda} = (\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2)$

حالا ساده می‌کنیم:

$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{بر حسب S و P جای گذاری کن}} PS \xrightarrow{\text{طبق ۱}} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{طبق ۲}} -\frac{k}{\lambda} = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\times(-\lambda)} \frac{k}{\lambda} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\times(-\lambda)} k = 6$

گاهی تست، ریشه‌های معادله‌ی اولی را به زبان ریاضی برایتان α و β اعلام نمی‌کند؛ بلکه رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی دومی و معادله‌ی اول را به صورت فارسی به شما می‌دهد، باز هم مراحل شما فرقی با قبل ندارد. ریشه‌های اولی را α و β بگیرید و از روی جملات فارسی داده‌شده، ریشه‌های دومی را بر حسب α و β بنویسید و بعد هم دقیقاً مثل قبل عمل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمترند؟ (کنکور ۹۴)

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

پاسخ:

۱ $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$\xrightarrow{\frac{b}{a}}$ $S = \frac{3}{2}$

$\xrightarrow{\frac{c}{a}}$ $P = -\frac{1}{2}$

فرم ریشه‌های دومی رو بنویس

$\frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1$

از معکوس، یک واحد کمتر

معادله‌ی دوم:

$S' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 \Rightarrow S' = \frac{S}{P} - 2$

$P' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \times \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1$

عددهای ۱ رو جای گذاری کن

$S' = \frac{S}{P} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$

$P' = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$

معادله‌ی دوم رو بنویس $\rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

در این بخش به سؤالاتی می‌پردازیم که شاید در ظاهر معادله‌ی درجه‌ی دوم نباشند اما با تغییر متغیر یا تبدیل مدل ریاضی آن، درجه‌ی دوم می‌شوند. تست‌های ماکزیمم و مینیمم کردن در این بخش، خیلی مهم هستند...

معادلاتی که با تغییر متغیر به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شوند

در بعضی معادله‌ها، که خوب نه درجه‌ی اول هستند و نه درجه‌ی دوم، عبارتی را می‌بینیم که یک بار با توان ۱ و یک بار هم با توان ۲ حضور دارد. در این حالت کافی است اسم آن عبارت را متغیر جدیدی مثل t ، در نظر بگیریم تا عبارت درجه‌ی دومی بر حسب t دربیاید و بعد آن را حل کنیم. در آخر که مقدار t به دست آمد، آن را مساوی عبارت خودش گذاشته و دوباره معادله‌ی دیگری را حل می‌کنیم تا x به دست بیاید.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴

پاسخ: ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow t = 12, t = 6$ تجزیه کن $\rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0$ بذار در معادله $\rightarrow x^2 + x = t$

برابر مقدار اولیه‌ی t بذار $\rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$ حل کن $\rightarrow \begin{cases} (x + 4)(x - 3) = 0 \\ (x - 2)(x + 3) = 0 \end{cases}$ ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow x = -4, 3, 2, -3$ جمع ریشه‌ها $\rightarrow -2$

اگر در معادله‌ای، یکی از جمله‌ها مجذور دیگری بود، روش حل آن تغییر متغیر و استفاده از معادله‌ی درجه‌ی دو است: **ببین:**

الف) $x^6 + 3x^3 - 4 = 0 \xrightarrow{x^3 = t} t^2 + 3t - 4 = 0$

ب) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0 \xrightarrow[\substack{\sqrt{x} = t \\ x, t \geq 0}]{\sqrt{x} = t} t^2 - 5t + 4 = 0$

تست: معادله‌ی $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - 6 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) هیچ
- (۲) دو
- (۳) چهار
- (۴) یک

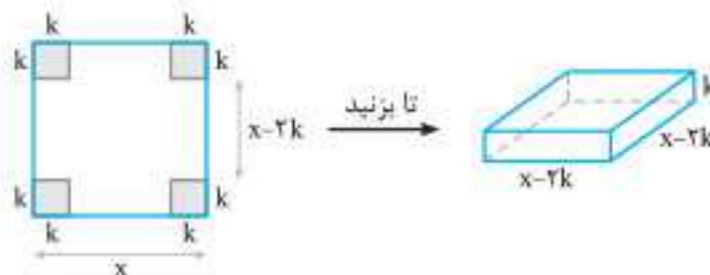
در معادله بذار $x^2 = t \rightarrow t^2 - 2\sqrt{3}t - 6 = 0$ $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 36$ $\Delta = b^2 - 4ac$ ریشه‌ها رو پیدا کن

تا تعداد ریشه $\rightarrow \begin{cases} x^2 = 3 + \sqrt{3} \xrightarrow{\text{جنر بگیر}} x = \pm\sqrt{3 + \sqrt{3}} \\ x^2 = \sqrt{3} - 3 \xrightarrow{x^2 \geq 0} \text{امکان ندارد. منفی است} \end{cases}$ $t = \frac{2\sqrt{3} \pm 6}{2} = \sqrt{3} + 3$ و $\sqrt{3} - 3$ ریشه‌ها رو پیدا کن

مسئله‌های کاربردی معروف از معادله‌ی درجه‌ی دوم

تعداد بازی‌ها $= \frac{n(n-1)}{2}$	در یک دوره بازی که هر تیم با هر کدام از تیم‌های دیگر فقط یک بازی انجام می‌دهد، با فرض داشتن n تیم، تعداد بازی‌ها یک عبارت درجه‌ی دوم است.	۱) تعداد بازی‌ها
ضلع مربع اصلی $= \sqrt{\frac{V}{k}} + 2k$	اگر چهار مربع کوچک به ضلع k را از گوشه‌های مربعی برش بزنیم و با تا زدن صفحه یک جعبه به حجم V بسازیم...	۲) ساختن قوطی
یکی از اضلاع مستطیل $= \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16S}}{4}$	با یک رشته سیم به طول ℓ ، می‌خواهیم مستطیلی به مساحت S بسازیم...	۳) حصارکشی

اینم شکل قوطی:



❶ تست: می‌خواهیم با بریدن چهار مربع به ضلع ۳ در گوشه‌های یک صفحه‌ی مربعی شکل و بعد تا کردن آن، یک ظرف به حجم ۷۵ بسازیم. ضلع مربع را باید چند در نظر بگیریم؟

پاسخ: ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴)

$$x = \sqrt{\frac{V}{k}} + 2k \xrightarrow{V=75, k=3} x = \sqrt{\frac{75}{3}} + 2(3) = \sqrt{25} + 6 = 5 + 6 = 11$$

❷ با یک طناب ۱۵ متری می‌خواهیم دور تادور مستطیلی به مساحت ۹ را کاملاً ببوشانیم. ضلع کوچک‌تر مستطیل کدام است؟

پاسخ: ۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴)

$$a = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 4S}}{4} \xrightarrow{\ell=15, S=9} a = \frac{15 + \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 + \sqrt{81}}{4} = \frac{15 + 9}{4} = 6$$

ضلع دیگر مستطیل رو پیدا کن $S = ab = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{6} \xrightarrow{\text{ساده کن}} b = \frac{3}{2} = 1/5$

حل مسائل ماکزیمم و مینیمم به کمک معادله‌ی درجه‌ی دوم

غیر از چند مسئله‌ی معروفی که در کتاب درسی اشاره شده و در بالا به آن‌ها پرداختیم، می‌خواهیم به یک مدل از تست‌ها توجه کنیم که دسته‌ی متنوعی را هم شامل می‌شوند: فرم این تست‌ها این طوری است که در ظاهر خبری از عبارت درجه‌ی دوم، ریشه و... نیست! صورت تست یک مسئله‌ی ریاضی است که با یک سری توضیحات، در نهایت خواسته که یک چیزی ماکزیمم یا مینیمم شود. شاخصه‌ی اصلی تست‌هایی که چنین فرمی دارند و با کمک تابع درجه‌ی دوم حل می‌شوند، این است که دو تا متغیر در تست حضور دارد. (معمولاً مثبت‌اند، چون در سوالات کاربردی و عملی حضور داریم...!)

اما روش برخورد ما با این تست‌ها این طوری است:

❶ از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را بر حسب دیگری پیدا می‌کنیم؛ مثلاً m را بر حسب n . **ببین:** $m + 2n = 4 \Rightarrow m = 4 - 2n$

❷ حالا عبارتی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود می‌نویسیم و بعد متغیری را که در مرحله‌ی قبل بر حسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.

❸ خوب الان عبارتی که در مرحله‌ی ❷ پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه‌ی دوم است بر حسب یک متغیر. جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکزیمم شود، به تابع درجه‌ی دومی با a منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیمم شود، حتماً در تابع درجه‌ی دوم حاصل، a مثبت درمی‌آید؛ منظورمان از a ، ضریب x^2 است...!

❹ می‌دانید برای آن که عبارت $ax^2 + bx + c$ به ماکزیمم یا مینیمم خود برسد باید x مساوی $-\frac{b}{2a}$ شود و مقدار ماکزیمم یا مینیمم هم، $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

❶ تست: برای دو عدد مثبت x و y می‌دانیم: $3x + 2y = 24$. اگر xy بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار $y - x$ کدام است؟

پاسخ: ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

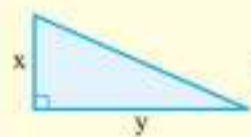
$$3x + 2y = 24 \xrightarrow{y \text{ را پیدا کن}} y = \frac{24 - 3x}{2} \xrightarrow{\text{در رابطه بذار}} xy = x \left(\frac{24 - 3x}{2} \right) \xrightarrow{\text{کسر را تفکیک کن}} x \left(12 - \frac{3}{2}x \right)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 12x - \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} -\frac{3}{2}x^2 + 12x \xrightarrow{\text{ماکزیمم شود}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{3}{2})} = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$\xrightarrow{y = \frac{24 - 3x}{2}} y = \frac{24 - 3(4)}{2} = \frac{24 - 12}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow y - x = 6 - 4 = 2$$

❷ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه‌ی آن ۱۶ است، بیشترین مقدار خود را دارد. این مساحت چقدر است؟

پاسخ: ۸ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴)



$$x + y = 16 \xrightarrow{y \text{ را بر حسب } x \text{ بنویس}} y = 16 - x \xrightarrow{S = \frac{1}{2}xy} S = \frac{1}{2}x(16 - x) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 8x - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = -\frac{1}{2}x^2 + 8x$$

$$\xrightarrow{S \text{ ماکزیمم شود}} S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1^2 - 4(-\frac{1}{2})(64)}{4(-\frac{1}{2})} = -\frac{1 - 128}{-2} = \frac{127}{2} = 63.5$$

فصل در یک نگاه

تجزیه: وقتی ضریب x^2 ، مساوی ۱ بوده و ریشه‌ها صحیح باشند: $x^2 + mx + n = 0 \Rightarrow (x + \text{ضریبان } n)(x + \text{جمعشان } m) = 0$

مربع کامل: عددی که می‌توانیم اضافه کنیم: $\frac{b^2}{4a^2}$
 عددی که در سمت راست از آن جذر می‌گیریم: $\frac{\Delta}{4a^2}$

حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$

ریشه‌ها $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

ریشه‌ها $\Delta = 0$: $x = \frac{-b}{2a}$

روش $\Delta = b^2 - 4ac$

تعداد ریشه‌ها
 $\Delta > 0$: دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.
 $\Delta = 0$: یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
 $\Delta < 0$: ریشه‌ی حقیقی ندارد.

حالت‌های خاص
 جمع ضرایب، مساوی صفر بشود ریشه‌ها $a + b + c = 0 \rightarrow 1$ و $\frac{c}{a}$

ضریب x^2 + عدد ثابت = ضریب x ریشه‌ها $a + c = b \rightarrow -1$ و $-\frac{c}{a}$

عدد ثابت ندارد: فاکتور بگیر: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$ ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ و 0

مختصات رأس: $x = -\frac{b}{2a}$ و $y = -\frac{\Delta}{4a}$ یا به عبارتی $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

تلاقی با محور x ها
 $\Delta > 0$: در دو نقطه محور را قطع می‌کند.
 $\Delta = 0$: مماس است و بالای محور $a > 0$
 مماس است و پایین محور $a < 0$

سهمی $y = ax^2 + bx + c$

فاقد نقطه‌ی برخورد $\Delta < 0$:
 $a > 0$: قطع نمی‌کند: همواره بالای محور
 $a < 0$: قطع نمی‌کند: همواره پایین محور

علامت a
 $a > 0$: دهانه‌ی سهمی رو به بالا است: مینیمم دارد.
 $a < 0$: دهانه‌ی سهمی رو به پایین است: ماکزیمم دارد.

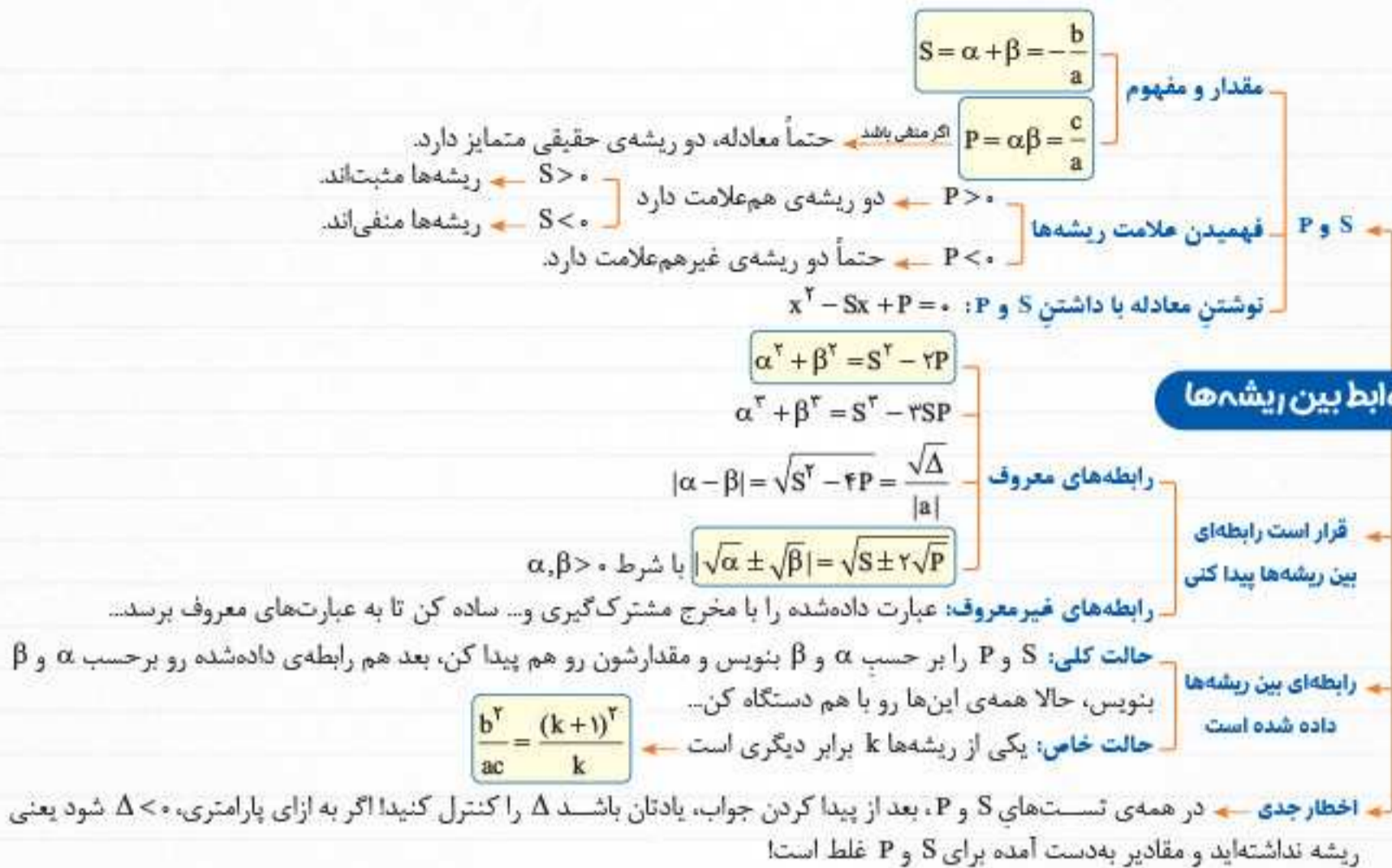
محور تقارن: معادله: $x = -\frac{b}{2a}$ ویژگی محور تقارن: خط عمودی است و از رأس سهمی می‌گذرد: هر سهمی فقط یک محور تقارن دارد!

مماس بر خط $y = mx + h$: قرار دهید: $ax^2 + bx + c = mx + h$ و معادله‌ی حاصل را ساده کرده و Δ ی آن را برابر صفر بگذارید.
 تلاقی با محور y ها: مختصات نقطه‌ی تلاقی: $(0, c)$

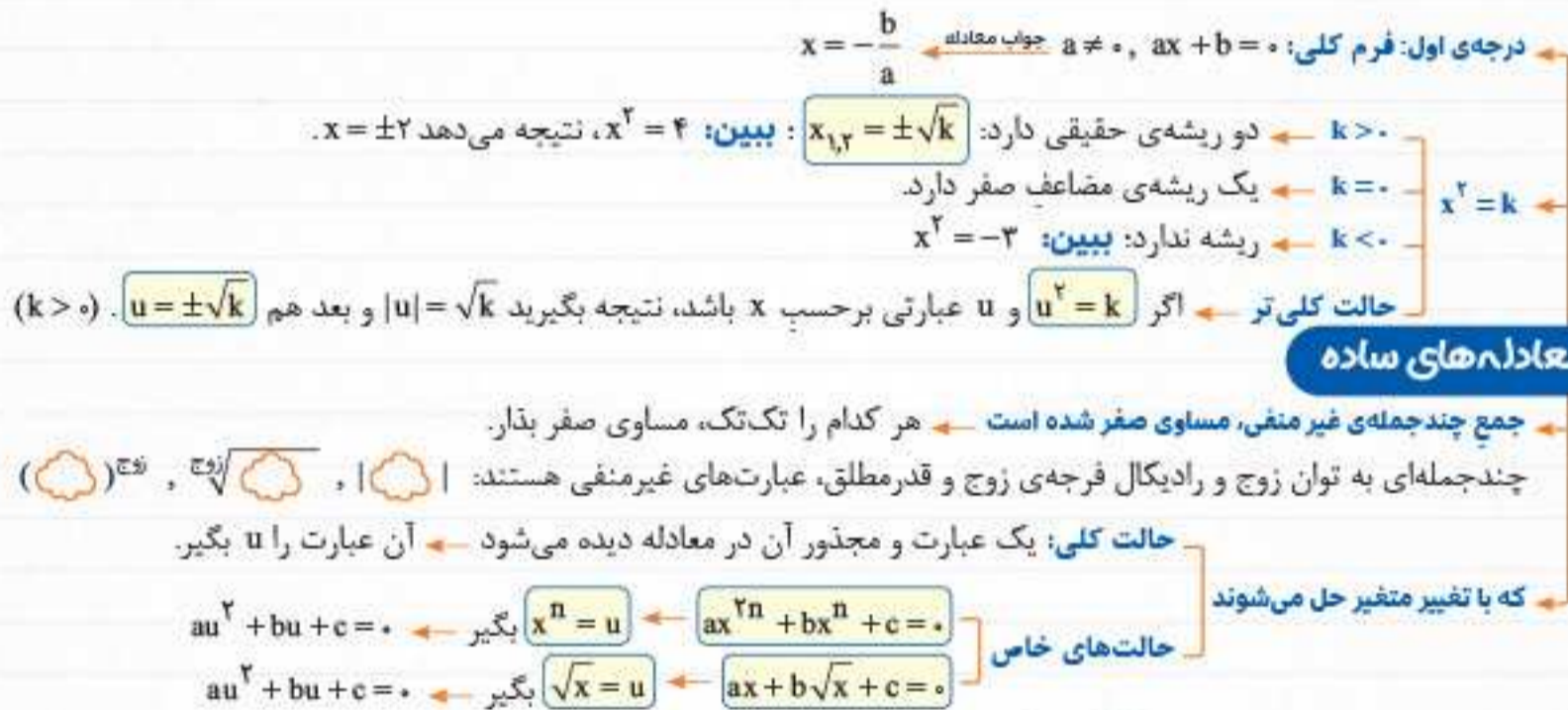
نوشتن معادله‌ی سهمی
 رأس سهمی نقطه‌ی $S(h, k)$ داده شده است معادله‌ی سهمی $y = a(x - h)^2 + k$
 صفرهای سهمی x_1 و x_2 داده شده‌اند معادله‌ی سهمی $y = a(x - x_1)(x - x_2)$



روابط بین ریشه‌ها



معادله‌های ساده



فال متولد خرداد



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

برای دوران مرور و جمع‌بندی، فقط تست‌های با شماره‌ی صورتی...

ایستگاه ۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات



آموزش ۷۴۵+

(کتاب درسی)

۴۵۱. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(2x-2)^2 = 4$ چقدر است؟

- (۴) $\frac{7}{4}$
- (۳) $\frac{7}{3}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۱) $\frac{4}{3}$

(کتاب درسی)

۴۵۲. ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x = 0$ چند واحد با یکدیگر اختلاف دارند؟

- (۴) $\frac{7}{6}$
- (۳) $\frac{6}{7}$
- (۲) $\frac{7}{3}$
- (۱) $\frac{3}{7}$

(کتاب درسی)

۴۵۳. اگر عدد p ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، مقدار $2p^2 + 3p + 4$ کدام است؟

- (۴) ۶
- (۳) ۵
- (۲) ۳
- (۱) ۲

۴۵۴. کدام عبارت قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عامل درجه‌ی اول نیست؟

- (۴) $4x^2 + 3x - 1$
- (۳) $x^2 - 11x + 10$
- (۲) $4x^2 - 10x + 8$
- (۱) $x^2 - 3x - 10$

(کتاب درسی)

۴۵۵. برای حل معادله‌ی $x^2 + 2x = 24$ به روش مربع کامل، چه عددی به طرفین معادله اضافه کنیم تا سمت چپ معادله، مربع کامل شود؟

- (۴) ۱
- (۳) ۲۵
- (۲) ۱۶
- (۱) ۴

(کتاب درسی)

۴۵۶. ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$ کدام‌اند؟

- (۴) $\frac{3}{2}$ و ۳
- (۳) $\frac{3}{2}$ و -۳
- (۲) $-\frac{3}{2}$ و -۳
- (۱) $\frac{-3}{2}$ و ۳

۴۵۷. در معادله‌ی $(3m+1)x^2 - 5x + 2 - 5m = 0$ یکی از ریشه‌ها -۱ است. حاصل جمع ریشه‌ی دیگر معادله با m کدام است؟

- (۴) $\frac{71}{13}$
- (۳) $\frac{70}{13}$
- (۲) $\frac{17}{13}$
- (۱) $\frac{18}{13}$

۴۵۸. معادله‌ی $x(2x-5) = a$ دو ریشه‌ی مساوی دارد. این ریشه کدام است؟

- (۴) $\frac{5}{2}$
- (۳) $\frac{5}{4}$
- (۲) $-\frac{5}{4}$
- (۱) $-\frac{5}{2}$

(کتاب درسی)

۴۵۹. اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن برادر بزرگ‌تر کدام است؟

- (۴) ۱۰
- (۳) ۸
- (۲) ۴
- (۱) ۶

(کتاب درسی)

۴۶۰. مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی، ۲۹۰ است. حاصل ضرب این دو عدد چقدر است؟

- (۴) ۲۵۵
- (۳) ۱۴۳
- (۲) ۹۹
- (۱) ۱۹۵

۴۶۱. معادله‌ی درجه‌ی دوم $mx^2 + mx + 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. حدود m کدام است؟

- (۴) $m < 4$
- (۳) $m > 0$
- (۲) $0 < m < 4$
- (۱) $m < 0$

۴۶۲. معادله‌ی $ax^2 + x + 3 = 0$:

(۱) به ازای $a = \frac{1}{8}$ ، ریشه‌ی مضاعف دارد.

(۲) به ازای $a = \frac{1}{12}$ ، دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد.

(۳) به ازای $a = \frac{1}{6}$ ، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

(۴) به ازای هر عدد منفی a ، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۴۶۳. اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2 + \alpha + 2}$ کدام است؟

- (۴) ۲
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۲) ۱
- (۱) $\frac{1}{2}$

(کتاب درسی)

۴۶۴. معادله‌ی $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$ را به روش تجزیه به صورت $(b-r)(b+s) = 0$ تبدیل کرده و حل کرده‌ایم. مقدار $\frac{r}{s}$ کدام است؟ ($r, s > 0$)

- (۴) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۱) $\frac{1}{5}$

۴۶۵. برای حل معادله‌ی $S^2 - 3S - 2 = 0$ به روش مربع کامل به جایی می‌رسیم که باید از عددی جذر بگیریم. آن عدد کدام است؟

- (۴) $\frac{23}{4}$
- (۳) $\frac{19}{4}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۱) $\frac{21}{4}$

تأیید ۷۰+



۴۶۶. معادله‌های $x^2 + 6x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه‌ی مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیر مشترک کدام است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴)

۴۶۷. کوچک‌ترین عدد صحیح m که به ازای آن معادله‌ی $x^2 - 3x - m + 9 = 0$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، کدام است؟

- ۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

۴۶۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله‌ی $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ‌ها است؟ (خارج ۹۸)

- ۱ < m < ۵ (۱) ۲ < m < ۵ (۲) ۲ < m < ۴ (۳) ۲ < m < ۶ (۴)

۴۶۹. کدام عبارت به ازای مقادیر مختلف m ، همواره قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عامل درجه‌ی اول است؟

- (۱) $x^2 - mx + 1 + m^2$ (۲) $(m^2 + 2)x^2 - x + 3$ (۳) $-2x^2 + 3x + m^2 + 2$ (۴) $(m+1)x^2 - 3x + m$

۴۷۰. اگر $x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ باشد، حاصل $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

- ۲ $\sqrt{3}$ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

۴۷۱. فشار خون نرمال مردان بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) با رابطه‌ی $P = 0.006s^2 - 0.2s + 120$ محاسبه می‌شود که در آن P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی که فشار خون آن ۱۲۴ میلی‌متر جیوه باشد، کدام است؟ ($\sqrt{241} \approx 15.5$) (کتاب درسی)

- ۲۶ (۱) ۲۶/۵ (۲) ۲۷/۵ (۳) ۲۷ (۴)

۴۷۲. برای حل معادله‌ی $x^2 + 3x - 2 = 0$ به روش مربع کامل کردن، آن را به شکل $(x+a)^2 = b+2$ نوشته‌ایم. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۴/۷۵ (۱) ۴/۵ (۲) ۳/۵ (۳) ۳/۷۵ (۴)

۴۷۳. معادله‌ی $ax^2 - 3x + a + 4 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$ (۲) $(-2, \frac{1}{2}) - \{0\}$ (۳) $(-\frac{1}{2}, 2) - \{0\}$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}) - \{0\}$

۴۷۴. سعید از معلم ریاضی خود سنش را پرسید. معلم پاسخ داد: «سن من ۴ سال بعد، مربع سنی می‌شود که ۲۶ سال قبل داشتیم.» سن معلم ریاضی سعید کدام است؟

- ۳۱ (۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴)

۴۷۵. عدد ۱۵ را به صورت مجموع دو عدد دیگر می‌تویسیم. اگر حاصل ضرب دو عدد به دست آمده $52/25$ باشد، اختلاف دو عدد کدام است؟

- ۴ (۱) ۴/۵ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴)

ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

۴۷۶. مختصات رأس سهمی به معادله‌ی $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 1$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$ (۲) $(\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$ (۳) $(\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$ (۴) $(-\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$

۴۷۷. اگر خط به معادله‌ی $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y = 1 - 2mx + 3x^2$ باشد، مقدار m کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴)

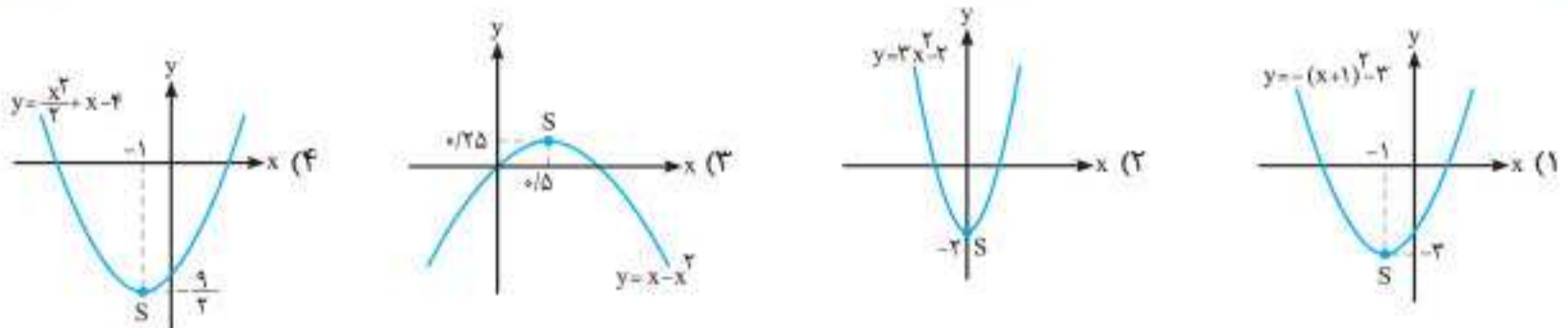
۴۷۸. طول رأس سهمی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - (4m-2)x + 3$ برابر ۳ است. درباره‌ی این سهمی کدام گزینه درست است؟

- (۱) محور x ‌ها را قطع نمی‌کند. (۲) شکل سهمی رو به پایین است. (۳) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است. (۴) سهمی از نقطه‌ی $(2, 5)$ می‌گذرد.

۴۷۹. رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

- ۲ (۱) ۶ (۲) -۴ (۳) -۸ (۴)

۴۸۰. معادله‌ی کدام سهمی به درستی کنار آن نوشته نشده است؟ (کتاب درسی)



۴۸۱. سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 8x + 1$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

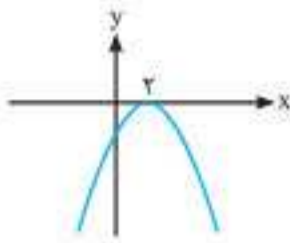
- (۱) چهارم (۲) سوم (۳) دوم (۴) اول

تسلط ۷۸٪

آموزش ۴۵٪

۴۸۲. به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور طول‌ها و مماس بر آن است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳



۴۸۳. اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + 8x + c$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۸ (۳) -۴ (۴) -۶

۴۸۴. به ازای کدام مقدار a بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 2x - 12$ برابر با ۱۸۰ است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۸۵. کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

- (۱) $x = 2$ (۲) $x = 2/5$ (۳) $x = 3$ (۴) $x = 3/5$

۴۸۶. به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

- (۱) $k > \frac{9}{4}$ (۲) $k < \frac{9}{4}$ (۳) $k > \frac{-9}{4}$ (۴) $k < \frac{-9}{4}$

۴۸۷. سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $\sqrt{3} - \sqrt{2} + x\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3x^2$ به ازای مقادیر مختلف x :

- (۱) گاهی مثبت و گاهی منفی است. (۲) گاهی منفی و گاهی صفر است.
(۳) همواره منفی است. (۴) همواره مثبت است.

۴۸۸. نمودار تابع $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(0, 4)$ (۴) $(4, +\infty)$

۴۸۹. اگر $(0, 5)$ و $(-2, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله‌ی خط تقارن این سهمی کدام است؟

- (۱) $x = -2$ (۲) $x = -1$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 1$

۴۹۰. نقطه‌ی $S(-1, -4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = 3x^2 + ax + b$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۴۹۱. رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟

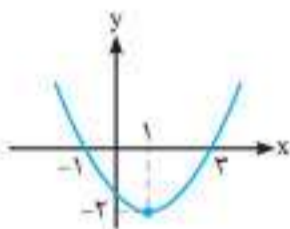
- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۱۸ (۴) ۱۸

۴۹۲. خط به معادله‌ی $y = \frac{3}{5}x$ ، محور تقارن تابع $f(x) = x^2 - 4x + c$ را روی نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار c کدام است؟

- (۱) $4/4$ (۲) $9/2$ (۳) $4/6$ (۴) $4/5$

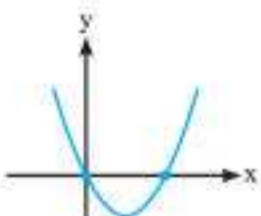
۴۹۳. معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $y = x^2 - x - 3$ (۲) $y = 2x^2 + x - 1$
(۳) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ (۴) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$



۴۹۴. مقدار a کدام باشد تا نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + (2a - 5)x + a^2 - 2$ مطابق شکل مقابل باشد؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$



۴۹۵. به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3 + 2a)x$ از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) هیچ مقدار a (۲) تمام مقادیر a (۳) ۱ (۴) ۲

۴۹۶. سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاطی به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام

نقطه عبور می‌کند؟

- (۱) $(-2, -3)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 3)$ (۴) $(1, 2)$

(کنکور تیزا ۱۴۰۱)

(کتاب درسی)

(خارج تیزا ۱۴۰۱)

(کتاب درسی)

(کنکور تیزا ۱۴۰۱)

(کتاب درسی)

تئوریات ۷۰٪

۴۹۷. فرض کنید نقاط $(-۲, ۵)$ ، $(۰, ۵)$ و $(۱, ۱۱)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (کنکور ۹۹)

- (۱) $(-۱, ۳)$ (۲) $(-۱, ۴)$ (۳) $(۲, ۹)$ (۴) $(۲, ۱۵)$

۴۹۸. اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m$ برابر ۷ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۴۹۹. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x هاست؟ (خارج ۹۶)

- (۱) $a < ۱$ (۲) $a < -۲$ (۳) $a > ۳$ (۴) $-۲ < a < ۱$

۵۰۰. در سهمی به معادله $y = (x+2)^2 + (x-4)^2 - ۱۸$:

- (۱) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور x ها قرار دارد.
 (۲) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور y ها قرار دارد.
 (۳) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت منفی محور x ها قرار دارد.
 (۴) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور x ها قرار دارد.

۵۰۱. اگر نمودار تابع $y = mx^2 + (m+4)x + (2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، در این صورت چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار

۵۰۲. در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دو شرط $\frac{b^2}{4} < ac$ و $b + \frac{c}{4} < -2a$ برقرار است. کدام گزینه قطعاً درست است؟

- (۱) $a > ۰$ (۲) $c > ۰$ (۳) $ac > ۰$ (۴) $ab < ۰$

۵۰۳. اگر خط به معادله $x = \frac{2}{3}$ سهمی به معادله $y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{33}{16}$ (۳) $\frac{289}{16}$ (۴) $\frac{305}{16}$

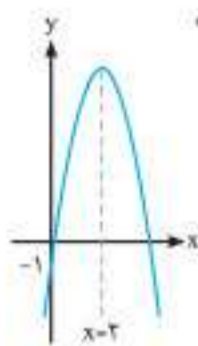
۵۰۴. رأس سهمی به معادله $y = -2x^2 + bx - 3$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۶ (۳) ۴ و -۶ (۴) -۴ یا ۶

۵۰۵. نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه‌ی دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟ (خارج تیرا ۱۴۰۱)

- (۱) $-\frac{1}{18}$ (۲) $-\frac{5}{18}$ (۳) $-\frac{7}{6}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۵۰۶. سهمی به معادله $y = -2(x+2m-5)^2 + m + 2n$ مطابق شکل مقابل است. رأس سهمی به معادله $y = mx^2 + nx + 1$ کدام نقطه است؟



- (۱) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$ (۳) $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ (۴) $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$

۵۰۷. سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه‌ی $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصله‌ی رأس سهمی از نقطه‌ی M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟ (خارج ۱۴۰۰)

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۰۸. محور تقارن سهمی‌های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

- (۱) -۸ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) ۴

۵۰۹. سهمی به معادله $y = x^2 - (2m^2 + 1)x + m^4 + m^2 + \frac{1}{4}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

- (۱) محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند.
 (۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد.
 (۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود.
 (۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

۵۱۰. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (خارج ۹۹)

- (۱) $(5, -7)$ (۲) $(5, -9)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(1, 5)$

۵۱۱. رأس سهمی به معادله‌ی $y = -3x^2 + (2m-1)x + 5$ روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی $y - 2 = 0$ سهمی را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) $\pm \sqrt{2}$ (۴) قطع نمی‌کند

۵۱۲. با توجه به ضابطه‌ی سهمی $y = 2x^2 - mx + m - 2$ به ازای کدام مقدار مثبت m ، مساحت مثلثی که دو رأس آن سفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی است، برابر ۲ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۵۱۳. اگر مجموعه‌ی نقاط سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - x + \frac{2}{3}$ دارای عرضی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{3}$ باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۱۴. سهمی به معادله‌ی $y = (2x+1)(x+8)$ با خط به معادله‌ی $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(5, 13)$ (۲) $(15, 23)$ (۳) $(7, 15)$ (۴) $(9, 25)$

۵۱۵. به ازای چه مقادیری از a ، سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

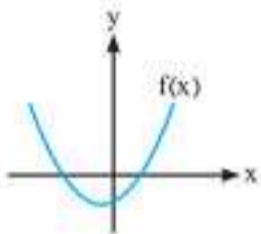
- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a > 0$ (۳) $a \leq -2$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۵۱۶. اگر رأس نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x - c$ نقطه‌ی $(-1, 3)$ باشد، مختصات رأس نمودار تابع $y = f(2x-1)$ کدام است؟

- (۱) $(4, -5)$ (۲) $(4, 5)$ (۳) $(0, 5)$ (۴) $(0, 3)$

۵۱۷. اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با نمودار مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $abc > 0$ (۲) $\alpha^2 + \beta^2 < 0$ (۳) $\frac{b^2}{4} < ac$ (۴) $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\Delta}{4a}$



ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم



۵۱۸. هرگاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 9x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) $4/5$ (۴) $-4/5$

۵۱۹. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x - 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{9}$ (۲) $\frac{29}{9}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴) $\frac{28}{9}$

۵۲۰. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $m^2 = (2m-1)x^2 - 2x + 1$ برابر با $\frac{1}{4}$ است. حاصل ضرب دو ریشه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۵۲۱. به ازای کدام مقدار m حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + m = 0$ مساوی ۴ است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار m

۵۲۲. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $|x' - x''|$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۱۲ (۴) ۳

۵۲۳. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $-3x^2 + (m+1)x + m = 0$ برابر با $\alpha = 1$ است. ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۵۲۴. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(2x+1)(3x^2 - 7x + 1) = 0$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۲۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد α ، a و β تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱ (خارج تیرا ۱۴۰۱)

آموزش ۴۵٪

(کنکور ۹۶)

۵۲۶. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $\frac{1}{8}x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۲۷. معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ دو ریشه‌ی α و β دارد و $\alpha < \beta$ است. حاصل عبارت $5\alpha^2 + 7\beta^2$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۳ (۳) ۲۱ (۴) ۱۵

۵۲۸. اگر در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۵۲۹. در معادله‌ی $x^2 - 2x + 64 = 0$ ، حاصل $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

- (۱) ۶ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{6}$

۵۳۰. مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)x - (\sqrt{2} + 1) = 0$ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - 1$ (۴) $\sqrt{6} - \sqrt{3} + 1$

۵۳۱. برای کدام مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a-1)x^2 + 2ax + 3 - a = 0$ معکوس یکدیگرند؟

- (۱) $a = 2$ (۲) $a = \frac{1}{2}$ (۳) $a = -1$ (۴) هیچ مقدار a

۵۳۲. برای کدام مقادیر k در معادله‌ی $kx^2 - 4x + k + 2 = 0$ یکی از ریشه‌ها ۳ برابر ریشه‌ی دیگر است؟

- (۱) ۳ و ۱ (۲) -۱ و -۳ (۳) ۱ و -۳ (۴) -۱ و ۳

(خارج ۹۹)

۵۳۳. معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$ (۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

۵۳۴. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $3ax^2 + bx - a = 0$ مساوی $\frac{2}{3}$ است. ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۳۵. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 2x - 1 = 0$ با ریشه‌های α و β حاصل $\alpha^2 + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^2$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) -۲۷ (۴) ۲۷

۵۳۶. بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی $x^2 + 2x + 2c - 1 = 0$ رابطه‌ی $\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 = 0$ برقرار است. حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) -۷ (۳) -۴ (۴) -۸

۵۳۷. جذر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ را با هم جمع کرده‌ایم. حاصل در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $2 + 2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

۵۳۸. اگر بین ضرایب معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه‌ی $c + 2b + 4a = 0$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{2c}$ (۲) $\frac{c}{2a}$ (۳) $-\frac{a}{2c}$ (۴) $-\frac{c}{2a}$

۵۳۹. معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) $-\frac{5}{2}$

۵۴۰. در معادله‌ی $x^2 - 5x + m^2 + 5m = 0$ اگر $\alpha = 2$ یک ریشه‌ی آن باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^2 + \beta^2$ چقدر است؟ (β ریشه‌ی دیگر معادله است.)

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۹ (۳) -۱۹ (۴) به مقدار m بستگی دارد.

۵۴۱. به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 5 + m = 0$ مجذور ریشه‌ی دیگر است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲ (۳) -۲۲ (۴) -۳

(کنکور تیر ۱۴۰۱)

۵۴۲. به ازای دو مقدار a ، یک ریشه‌ی معادله‌ی $3x^2 - ax + 4 = 0$ سه برابر ریشه‌ی دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

تثبیت ۷۰٪

۵۴۳. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $(\sqrt{4-2\sqrt{3}})x^2 + (1-\sqrt{3})x = 17$ درست است؟

- (۱) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
 (۲) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.
 (۳) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
 (۴) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.

(خارج ۹۲)

۵۴۴. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

(خارج ۹۷)

۵۴۵. به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز است؟

- (۱) $-1 < m < 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $2 < m < 8$ (۴) $m > 8$

۵۴۶. نمودار تابع $f(x) = m^2x^2 - 3mx - 1$ به ازای مقادیر مختلف $m \neq 0$ ، همواره:

- (۱) بالای محور x ها قرار دارد.
 (۲) محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند.
 (۳) محور x ها را در یک طرف مبدأ قطع می‌کند.
 (۴) بر محور x ها مماس است.

۵۴۷. اگر از صفرهای تابع $f(x) = x^2 + 3x - c$ نیم واحد کم کنیم، حاصل ضرب صفرها چقدر تغییر خواهد کرد؟

- (۱) $\frac{c}{4}$ (۲) $\frac{c}{4} + c$ (۳) $\frac{c}{4} - c$ (۴) $\frac{c}{4}$

۵۴۸. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 29x + m^2 = 0$ ، مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۴۵ (۲) ۱۶۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۴۳

۵۴۹. برای کدام مقدار b ، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + bx + b = 0$ ، رابطه‌ی $\frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = 1$ برقرار است؟

- (۱) $-\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

۵۵۰. در تابع $f(x) = 2x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + \sqrt{5}$ با صفرهای α و β ، حاصل $|\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}| + |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{20}$

۵۵۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx + 2 = 0$ باشند و اعداد ۴، $x_1 + x_2$ و x_1x_2 تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۵۵۲. در معادله‌ی $4x^2 - 10x + 2m = 0$ ، دو برابر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر یک واحد بیشتر است. در این صورت مقدار m کدام است؟

- (۱) $5/76$ (۲) $2/88$ (۳) $5/4$ (۴) $2/52$

۵۵۳. ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ را α و β نامیده‌ایم. حاصل عبارت $A = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2} - \frac{\beta - 5}{\beta^2 - 6\beta + 7}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $-\frac{6}{5}$

۵۵۴. α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 - 8x + 4 = 0$ هستند. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ برابر باشند، مقدار

(کنکور دی ۱۴۰۱)

 $\log_{\sqrt{a}} a$ کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵۵. اگر در معادله‌ی $3x^2 - ax + b = 0$ ، بین اعداد a و b رابطه‌ی $2a + b = -12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله، کدام گزینه است؟

- (۱) $-b$ (۲) $-\frac{b}{2}$ (۳) $-\frac{b}{3}$ (۴) $-\frac{b}{6}$

(خارج تیر ۱۴۰۱)

۵۵۶. اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۵۷. در معادله‌ی $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{41}{2}$ (۴) $\frac{41}{8}$

۵۵۸. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ ، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $\alpha^2 + 4\beta^2 + (\alpha - 4)^2$ چقدر است؟

- ۴۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

۵۵۹. α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (کنکور تیر ۱۴۰۱)

- ۱ (۱) $\frac{13}{4}$ (۲) $\frac{21}{5}$ (۳) ۲ (۴)

۵۶۰. به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (خارج ۹۵)

- $m > 1$ یا $m < -2$ (۱) $-2 < m < 1$ (۲) فقط $m < -2$ (۳) فقط $m > 1$ (۴)

۵۶۱. به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز است؟ (کنکور ۹۷)

- $m < -6$ (۱) $m > 3$ (۲) $0 < m < 3$ (۳) $3 < m < 6$ (۴)

۵۶۲. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (کنکور ۹۲)

- $a \leq 2$ (۱) $0 < a \leq 2$ (۲) $2 < a < 3$ (۳) $0 < a < 3$ (۴)

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم



۵۶۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشند، در کدام گزینه آمده است؟ (کتاب درسی)

- $x^2 - 2x - 2 = 0$ (۱) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (۲) $x^2 + 2x - 2 = 0$ (۳) $x^2 - 2x - 4 = 0$ (۴)

۵۶۴. مجموع دو عدد حقیقی، $1/5$ و حاصل ضرب آن دو -7 است. یکی از آن دو عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

- $-\frac{7}{2}$ (۱) -2 (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) 3 (۴)

۵۶۵. دو عدد حقیقی که مجموعشان $2\sqrt{3}$ و حاصل ضربشان -1 است، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

- $\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3} = 0$ (۱) $\sqrt{3}x^2 - 6x - \sqrt{3} = 0$ (۲) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ (۳) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ (۴)

۵۶۶. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

- -2 (۱) -1 (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

۵۶۷. جواب‌های کدام معادله -2 برابر جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx = 2c$ است؟

- $x^2 - 2bx - 8c = 0$ (۱) $x^2 + 2bx + 8c = 0$ (۲) $x^2 - 2bx + 8c = 0$ (۳) $x^2 + 2bx - 8c = 0$ (۴)

۵۶۸. معادله‌ای که ریشه‌هایش عددهای حقیقی $\sqrt{a} - \sqrt{a+1}$ و $\sqrt{a} + \sqrt{a+1}$ هستند، در کدام گزینه دیده می‌شود؟ ($a \neq 0$)

- $x^2 + 2\sqrt{ax} - 1 = 0$ (۱) $x^2 - 2\sqrt{a+1}x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 2\sqrt{ax} + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 2\sqrt{ax} - 1 = 0$ (۴)

۵۶۹. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن از 3 برابر قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1$ دو واحد بیشتر باشند، کدام است؟

- $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۱) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (۲) $x^2 + 8x - 11 = 0$ (۳) $x^2 - 8x + 4 = 0$ (۴)

۵۷۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به صورت $\{1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta}\}$ است؟ (کنکور ۹۲)

- $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۱) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 3x - 1 = 0$ (۴)

۵۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (کنکور ۹۰)

- ۲۷ (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴)

۵۷۲. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x = x^2 - 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^2 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^2 + \frac{1}{x_2}$ است؟ (خارج ۱۴۰۰)

- $4x^2 = 51x + 221$ (۱) $4x^2 + 51x = 221$ (۲) $4x^2 = 51x + 197$ (۳) $4x^2 + 51x = 197$ (۴)

۵۷۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ باشند، کدام است؟

- $x^2 + 10x - 16 = 0$ (۱) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (۲) $x^2 - 10x - 16 = 0$ (۳) $x^2 + 10x + 16 = 0$ (۴)

۵۷۴. عددهای α و β صفرهای تابع $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 2$ هستند. ریشه‌های کدام معادله، اعداد $1 + \frac{1}{\alpha}$ و $1 + \frac{1}{\beta}$ است؟

- $4x^2 - 13x + 10 = 0$ (۱) $4x^2 + 13x + 10 = 0$ (۲) $4x^2 - 17x + 18 = 0$ (۳) $4x^2 + 17x + 18 = 0$ (۴)

آموزش 745+

تثبيت 770+

EO تسلط 587+

۵۷۵. به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟ (خارج ۹۶)

- ۹ (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴)

۵۷۶. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱۴ (۱) -۱۲ (۲) -۸ (۳) -۶ (۴)

۵۷۷. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x = 0$ باشند. $\frac{1}{(x_1+1)^2}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^2}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (کتکور ۱۴۰۰)

- ۱۲۵ (۱) $125x^2 + 16x = 1$ (۲) $125x^2 = 12x + 1$ (۳) $125x^2 + 12x = 1$ (۴)

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم



۵۷۸. طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل 45 cm^2 باشد، طول قطر آن چقدر است؟ (کتاب درسی)

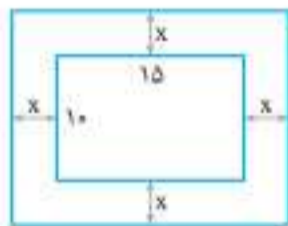
- $\sqrt{230}$ (۱) $\sqrt{231}$ (۲) $\sqrt{234}$ (۳) $\sqrt{236}$ (۴)

۵۷۹. در لیگ فوتبال که هر تیم با بقیه‌ی تیم‌ها فقط یک بازی به صورت حذفی انجام می‌دهد، اگر تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر ۱۰۵ باشد، در این لیگ چند تیم حضور دارند؟ (کتاب درسی)

- ۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

۵۸۰. یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت 300 cm^2 قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس کدام است؟ (کتاب درسی)

- 15×20 (۱)
 $16 \times 18 / 75$ (۲)
 $12 / 5 \times 24$ (۳)
 12×25 (۴)



۵۸۱. معادله‌ی $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ است. (کتاب درسی)

- (۱) دارای دو ریشه‌ی مثبت (۲) دارای چهار ریشه‌ی مثبت (۳) دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز (۴) فاقد ریشه‌ی حقیقی

۵۸۲. مستطیلی را با کمک یک سیم به طول ۲۰ ساخته‌ایم. اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود، مساحت مستطیل چقدر است؟

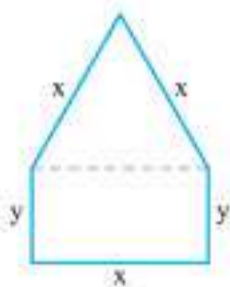
- ۲۴ (۱) ۳۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۵ (۴)

۵۸۳. یک ماهی‌گیر می‌خواهد مطابق شکل در کنار رودخانه، محوطه‌ای مستطیلی شکل را فنس‌کشی کند. اگر او فقط هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس‌کشی را داشته باشد، بیشترین سطحی که با این ۱۰۰ متر می‌تواند ایجاد کند، چند مترمربع است؟ (کتاب درسی)



- ۵۲۵ (۱) ۱۸۷۵ (۳) ۱۲۵۰ (۲) ۳۷۵۰ (۴)

۵۸۴. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. حداکثر مساحت ممکن (جهت نوردهی بیشتر) در بین پنجره‌هایی که محیطی برابر ۴m دارند، کدام است؟ (کتاب درسی)



- $\frac{4}{33}(6 - \sqrt{3})$ (۱) $\frac{4}{11}(6 + \sqrt{3})$ (۲) $\frac{4}{33}(6 + \sqrt{3})$ (۳) $\frac{4}{11}(6 - \sqrt{3})$ (۴)

۵۸۵. در مربع شکل زیر، دو مربع کوچک‌تر، مطابق شکل به فاصله‌ی برابر از بالا و پایین مربع بزرگ‌تر، طوری جدا می‌کنیم که اختلاف همد مساحت شکل باقی‌مانده با محیط آن، ۱۵ واحد باشد. طول ضلع مربع جدا شده کدام است؟



- ۳ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴)

۵۸۶. در مستطیلی با مساحت ۵ واحد مربع و محیط ۹ واحد، عرض مستطیل کدام است؟ (کتاب درسی)

- ۲/۵ (۱) ۲ (۲) ۲/۵ یا ۲ (۳) چنين مستطیلی وجود ندارد (۴)

۵۸۷. درباره‌ی معادله‌ی $6 = 0 + \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) ریشه‌ی مضاعف دارد. (۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۳) چهار ریشه دارد. (۴) دو ریشه دارد.

آموزش ۷۴۵+

تثبيت ۷۷۰+



(کتاب درسی)

۵۸۸. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ درست است؟

- (۱) دو ریشه‌ی قرینه دارد.
 (۲) یک ریشه‌ی مثبت دارد.
 (۳) چهار ریشه‌ی متمایز دارد.
 (۴) دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۵۸۹. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2 - 2SP + 2S$ ، کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

- (۱) $59 - 7\sqrt{69}$ (۲) $7 + \sqrt{69}$ (۳) ۵۰ (۴) $59 + 7\sqrt{69}$

۵۹۰. بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر همان قاعده برابر ۱۲ واحد است، بیشترین مساحت چند واحد مربع است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۵۹۱. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای با مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی ۱۵، کدام است؟

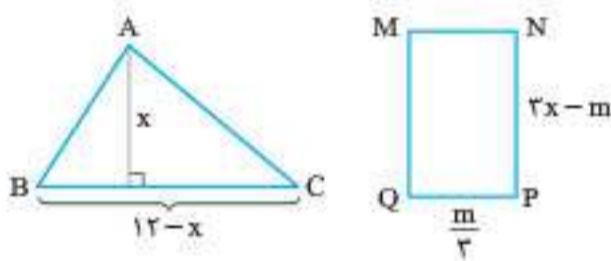
- (۱) $\frac{225}{2}\pi$ (۲) $\frac{225}{4}\pi$ (۳) $\frac{675}{4}\pi$ (۴) $\frac{675}{2}\pi$

۵۹۲. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\sqrt{106}$ و مجموع اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱۴ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

- (۱) ۲۲ (۲) $22/5$ (۳) ۲۱ (۴) $21/5$

۵۹۳. اگر مساحت مثلث ABC و مستطیل MNPQ هر دو ماکزیمم شود، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲



۵۹۴. حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $(1-x^2)^6 - 19(x^2-1)^2 = 216$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

۵۹۵. با استفاده از سیمی به طول ۸۰۰ سانتی‌متر، مستطیلی مانند شکل مقابل ساخته‌ایم. اگر مساحت این مستطیل ۲۰۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، طول آن چند سانتی‌متر است؟



- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۲۰۰

۵۹۶. اگر معادله‌ی $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $(-\infty, -4)$ (۲) $(4, +\infty)$ (۳) $(-4, 4)$ (۴) $(4, 9)$

۵۹۷. معادله‌ی $x^2 - 4|x| + 2 = 0$ دارد.

- (۱) دو ریشه‌ی مثبت
 (۲) چهار ریشه‌ی هم‌علامت
 (۳) چهار ریشه‌ی مثبت
 (۴) چهار ریشه‌ی دوبه‌دو قرینه

۵۹۸. حاصل ضرب ریشه‌های غیرصفر معادله‌ی $(x^2-1)^4 + (x^2-1)^2 - 2 = 0$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) ۴

۵۹۹. بین ارتفاع (h) و قاعده‌ی (b) متوازی‌الاضلاع‌ی رابطه‌ی $b + h = 9$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت ممکن که با این متوازی‌الاضلاع می‌توان ساخت، چقدر است؟

- (۱) $20/25$ (۲) $20/5$ (۳) $10/25$ (۴) $10/5$

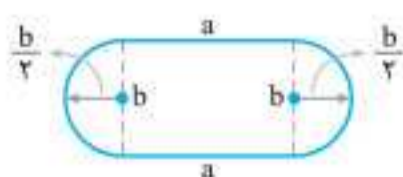
۶۰۰. فاصله‌ی بین نقطه‌ای با طول a روی سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - 3x + 3$ از نقطه‌ای با همین طول روی خط به معادله‌ی $2y + x + 1 = 0$ را d می‌نامیم.

مینیمم مقدار d چقدر است؟

- (۱) $77/16$ (۲) $31/16$ (۳) $81/16$ (۴) $131/16$

۶۰۱. زمین تنیسی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط زمین ۶۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را چه مقدار بگیریم تا مساحت قسمت مستطیلی شکل زمین حداکثر مقدار ممکن شود؟ ($\pi \approx 3$)

(کتاب درسی)



- (۱) $\frac{400}{3}m \times 100m$
 (۲) $\frac{800}{3}m \times 60m$
 (۳) $150m \times 100m$
 (۴) $150m \times 60m$

برای ۱۰۰٪

۶۰۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{(3\alpha-2)^2} + \frac{1}{(3\beta-2)^2}$ کدام گزینه خواهد بود؟

- (۱) $\frac{710}{289}$ (۲) $\frac{155}{289}$ (۳) $\frac{600}{289}$ (۴) $\frac{542}{289}$

۶۰۳. ریشه‌های کدام معادله اعداد $(\sqrt{3}-1)^4$ و $(\sqrt{3}+1)^4$ هستند؟

- (۱) $x^2 + 56x + 16 = 0$ (۲) $x^2 - 56x + 16 = 0$ (۳) $x^2 + 56x - 16 = 0$ (۴) $x^2 - 56x - 16 = 0$

۶۰۴. اگر شکل مقابل نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $bc < 0$
(۲) $bc > 0$
(۳) $bc = 0$
(۴) $bc \geq 0$

۶۰۵. فاصله‌ی بین دو ریشه‌ی یک سهمی برابر ۴ واحد است. اگر رأس سهمی نقطه‌ی (۱, ۱) باشد، معادله‌ی سهمی کدام است؟

- (۱) $y = -x^2 + 2x + 3$ (۲) $y = (x-1)(x+3) + 1$ (۳) $y = \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ (۴) $y = \frac{-1}{4}(x-1)(x+3)$

۶۰۶. بین ضرایب معادله‌ی $ax^2 - bx - c = 0$ روابط $c = a + b$ و $2b = 4a - c$ برقرار است. حاصل جمع توان سوم ریشه‌های معادله کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۵

(کنکور ۸۸)

۶۰۷. به ازای کدام مقادیر m از معادله‌ی $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

- (۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2} < m < 2$

۶۰۸. رابطه‌ی $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 56$ بین صفرهای تابع $f(x) = x^2 - bx - 3b^2$ برقرار است. نمودار تابع نسبت به کدام خط نمی‌تواند قرینه باشد؟

- (۱) $x = \frac{1}{2}$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) $x = -1$ و $x = 1$

۶۰۹. اگر مینیمم سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ بر ماکزیمم سهمی به معادله‌ی $g(x) = -x^2 + 6x - x$ منطبق بوده و فاصله‌ی بین نقاط تقاطع منحنی f با محور x ها، ۸ واحد باشد، در این صورت نمودار تابع f محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{63}{16}$ (۲) $-\frac{45}{4}$ (۳) $-\frac{63}{8}$ (۴) $-\frac{45}{8}$

۶۱۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $(2m+1)x^2 - 4(m+\frac{1}{2})x + m + 1 = 0$ باشند و بین آن‌ها رابطه‌ی $5\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = 20$ برقرار باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

آزمون فصل

⌚ زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

(کنکور ۹۸)

۶۱۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است؟

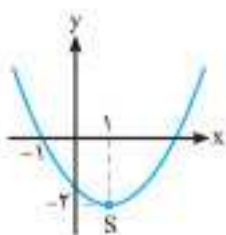
- (۱) $-2 < m < 2/5$ (۲) $-2 < m < 3/5$ (۳) $-1 < m < 3/5$ (۴) $-1 < m < 2/5$

۶۱۲. حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 22(x^2 + x) + 24 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) -۱۲۰ (۴) -۲۴۰

۶۱۳. معادله‌ی سهمی مقابل در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$
(۲) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
(۳) $y = 2(x-1)^2 - 2$
(۴) $y = x^2 - 2x - 1$





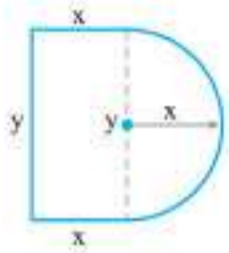
۶۱۴. در متوازی‌الاضلاع داده شده در شکل مقابل، مجموع طول دو ضلع مجاور برابر با ۱۱ واحد طول است. حداکثر مقدار مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$\frac{3}{4} \times 121$ (۴)

$\frac{1}{8} \times 121$ (۳)

$\frac{7}{8} \times 121$ (۲)

$\frac{3}{8} \times 121$ (۱)



۶۱۵. می‌خواهیم با طنابی به طول ۷۰ متر، سطحی متشکل از یک مستطیل و یک نیم‌دایره ایجاد کنیم. حداکثر مساحت ایجاد شده برابر است با: ($\pi \approx 3$)

1150 m^2 (۲)

1050 m^2 (۱)

350 m^2 (۴)

1225 m^2 (۳)

۶۱۶. به ازای کدام مقدار a ، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - x + a = 0$ ، مجموع معکوس ریشه‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است؟

(۴) هیچ مقدار a

-۴ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۶۱۷. اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx + 3 = 0$ به صورت $\left\{ \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}, \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \right\}$ باشد، مقدار b کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{6}$ (۳)

$\pm 2\sqrt{3}$ (۲)

$\pm 2\sqrt{6}$ (۱)

۶۱۸. ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $(\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{5}x + \sqrt{2} = 1$ چقدر از ریشه‌ی کوچک‌تر آن بیشتر است؟

$\sqrt{2}-1$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\sqrt{2}+1$ (۱)

۶۱۹. اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^2 + bx - c = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله اعداد $\frac{-1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\beta}$ است؟

$cx^2 + bx + a = 0$ (۴)

$cx^2 - bx + a = 0$ (۳)

$cx^2 - bx - a = 0$ (۲)

$cx^2 + bx - a = 0$ (۱)

(کنکور ۹۶)

۶۲۰. به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟

$5 < a < 14$ (۴)

$2 < a < 14$ (۳)

$2 < a < 5$ (۲)

$-2 < a < 2$ (۱)

۶۲۱. اگر صفرهای تابع درجه‌ی دوم $y = 3x^2 + bx + c$ برابر -3 و 5 باشند، کمترین مقدار این سهمی کدام است؟

۵۴ (۴)

۴۲ (۳)

-۴۸ (۲)

-۳۶ (۱)

۶۲۲. نمودار سهمی $y = (2m+3)x^2 + 6x + m$ همواره بالای محور x هاست. حدود m کدام است؟

$m > -\frac{3}{2}$ (۴)

$0 < m < \frac{3}{2}$ (۳)

$m > \frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2} < m < 0$ (۱)

۶۲۳. تابع درجه‌ی دوم $y = x^2 + bx + 8$ نسبت به خط $x = 3$ متقارن است. این تابع محور x ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

۶۲۴. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $-x^2 + 8x - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

۴ (۴)

۶۴ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

۶۲۵. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + x - 5 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{ \frac{\alpha}{\beta} - 1, \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right\}$ است؟

$5x^2 + 21x + 21 = 0$ (۴)

$5x^2 - 21x + 21 = 0$ (۳)

$5x^2 - x - 21 = 0$ (۲)

$5x^2 + x - 21 = 0$ (۱)

نگاهی خوبی کنکور رو صد پزلی...

خوندن درس، حل تست و رفع اشکال، مرور فصل و بعدش حل تست‌های مبحثی استاندارد در قالب آزمون‌های هدفمند، راضش اینها حلاله کتاب «آزمون‌نوم» ریاضیات تجربی پلاس» تکیه کن. صد آزمون برای صد درصد

