

فهرست مطالب

فصل صفرم

۸ یادآوری اتحادها، تجزیه و عبارت‌های گویا

فصل سوم: تابع (پایه یازدهم)

۱۱۳ قسمت اول: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

۱۲۷ قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق

۱۴۲ قسمت سوم: اعمال روی توابع

فصل اول: معادله درجه دوم

۲۵ قسمت اول: معادله درجه اول و روش‌های حل آن

۳۰ قسمت دوم: معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

۴۶ قسمت سوم: کاربردهای معادله درجه دوم

۵۵ قسمت چهارم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

فصل چهارم: کار با داده‌های آماری

۱۶۰ قسمت اول: گردآوری داده‌ها، انواع متغیرها

۱۶۸ قسمت دوم: معیارهای گرایش به مرکز (حدوسط)

۱۷۸ قسمت سوم: معیارهای (شاخص‌های) پراکندگی

فصل پنجم: نمایش داده‌ها

۱۹۱ قسمت اول: نمودارهای تک متغیره

۲۰۲ قسمت دوم: نمودارهای چند متغیره

فصل دوم: تابع (پایه دهم)

۶۲ قسمت اول: مفهوم رابطه و روش‌های نمایش آن

۶۶ قسمت دوم: مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن

۷۵ قسمت سوم: مقدار تابع در یک نقطه، دامنه و برد تابع

۸۳ قسمت چهارم: توابع خطی و کاربرد آن‌ها در حل مسائل

۹۷ قسمت پنجم: سهمی (نمودار تابع درجه دوم)

فصل ششم: آمار

۲۰۸ قسمت اول: شاخص‌های آماری

۲۲۰ قسمت دوم: سری‌های زمانی

فهرست مطالب

فصل دهم: الگوهای غیرخطی

قسمت اول: دنباله هندسی ۳۴۶

قسمت دوم: ریشه n ام و توان های گویا ۳۶۴

قسمت سوم: تابع نمایی ۳۷۷

آزمون های جامع ۳۸۵

پاسخ نامه تشریحی ۴۰۳

آزمون نوبت اول ۱۴۰۲ ۵۸۵

فصل هفتم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

قسمت اول: گزاره ها، منطق ریاضی ۲۲۸

قسمت دوم: ترکیب عطفی و فعلی ۲۳۳

قسمت سوم: گزاره های شرطی و دو شرطی ۲۴۲

قسمت چهارم: استدلال های ریاضی ۲۵۴

فصل هشتم: آمار و احتمال

قسمت اول: اصول شمارش ۲۶۳

قسمت دوم: تبدیل، ترکیب ۲۷۳

قسمت سوم: احتمال (۱) ۲۸۰

قسمت چهارم: احتمال (۲) ۲۹۹

قسمت پنجم: چرخه آمار در حل مسائل ۳۰۵

فصل نهم: الگوهای خطی

قسمت اول: مدل سازی و دنباله ۳۱۸

قسمت دوم: دنباله حسابی (عددی) ۳۲۹



درسنامه و تست

فصل صفر

یادآوری اتحادها، تجزیه و عبارتهای گویا

قبل از این که درس رو شروع کنیم دوس داریم یه سلام و احوالپرسی کنیم باهاتون. سلام، خویین دانشجویهای آینده؟ آقایان و خانمهای رشته انسانی، همین شروع کتاب، دوس داریم براتون آرزو کنیم که هم تو مسائل درسی هم غیردرسی، به هر چی که خوبه برسید. شما در سالهای قبل با مفهوم عبارت جبری و اتحاد و تجزیه آشنا شدید پس فقط می‌خواهیم این مباحث رو یادآوری کنیم براتون. دوستان خوبم، خواهشاً فرمول اتحادها رو حتماً حفظ کنید چون تا آخر کتاب باهاشون سروکار داریم. اینقدر که اسم اتحادها توی ریاضی میاد اسم فریود توی روانشناسی نمیداد! این فصل به طور غیرمستقیم در تمام کتاب، کاربرد داره.

برای مشاهده فیلم آموزش این درس QR-code بالا را اسکن کنید

انواع اتحادهای جبری مشهور

1 اتحادهای مربع دو جمله‌ای: در این اتحادها دو جمله‌ای‌های $a + b$ و $a - b$ به توان ۲ می‌رسند. a را جمله اول و b را جمله دوم می‌نامیم:

دو برابر اولی در دومی
اولی به توان ۲
دومی به توان ۲

اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای (اتحاد اول): $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ مثال: $(\Delta x + 2y)^2 = (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(2y) + (2y)^2 = \Delta x^2 + 4\Delta x y + 4y^2$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای (اتحاد دوم): $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ مثال: $(\frac{m}{3} - 6z)^2 = (\frac{m}{3})^2 - 2(\frac{m}{3})(6z) + (6z)^2 = \frac{m^2}{9} - 4mz + 36z^2$

$$(\frac{m}{3})^2 = \frac{m^2}{3^2} = \frac{m^2}{9}$$

یه لحظه به من توجه کن! در محاسبه $(\frac{m}{3})^2$ دقت کنید که توان ۲ هم برای m است و هم برای ۳، یعنی:

ضمناً برای محاسبه $2(\frac{m}{3})(6z)$ ابتدا به عددها توجه کنید، یعنی اول عدد ۶ را با عدد ۳ ساده می‌کنیم که جوابش برابر ۲ می‌شود. حالا ۲ به دست آمده را در سمت چپ ضرب می‌کنیم:

$$2(\frac{m}{3})(6z) = 4mz$$

در محاسبه $(6z)^2$ هم باید دقت کنید که توان ۲ هم برای ۶ است، هم برای z :

$$(6z)^2 = 6^2 \times z^2 = 36z^2$$

مثال: حاصل $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ را به دست آورید.

پاسخ: به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای حاصل هر کدام از عبارتهای $(1 + \sqrt{2})^2$ و $(1 - \sqrt{2})^2$ را حساب کرده، جوابها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = [1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2] + [1^2 - 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2] = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$$

تست: اگر $x - y = 3$ و $x \cdot y = 4$ باشد، حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

۲۴ ۴

۲۰ ۲

۱۷ ۲

۱۴ ۱

پاسخ: مقدار $x - y$ به ماداده شده ولی مقدار $x^2 + y^2$ را باید به دست آوریم. در این جور سوالات، باید خودمان دو طرف رابطه داده شده را به توان ۲ برسانیم:

$$x - y = 3 \xrightarrow{\text{دوطرف رو به توان ۲ برسون}} (x - y)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9 \xrightarrow{\text{به جای } x \cdot y \text{ مقدارش رو}} x^2 - 2(4) + y^2 = 9$$

که در متن سوال داده شده بذار

$$x^2 - 8 + y^2 = 9 \xrightarrow{\text{عدد ۸- رو به راست ببر}} x^2 + y^2 = 9 + 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = 17 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است. چون } x^2 + y^2 \text{ رو میخوایم}$$

تست: اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

۱۶ **۴**

۱۴ **۲**

۱۲ **۲**

۱۰ **۱**

پاسخ:

سمت چپ رو به کمک اتحاد اول باز کن $\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x)(\frac{1}{x}) = 16$
 دو طرف رو به توان ۲ برسون $\rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 4^2$
 گزینۀ (۳) صحیح است. $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$
 عدد ۲ رو بر سمت راست $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$

۲ اتحاد مزدوج: در این اتحاد، دو پرانتز به شکل $(a+b)$ و $(a-b)$ در هم ضرب می‌شوند، در این حالت خیلی سریع می‌گوییم جواب برابر می‌شود با $a^2 - b^2$.

به عبارت دیگر در این اتحاد، جملاتی مانند a و b عیناً در دو پرانتز تکرار می‌شوند. فقط در یکی از پرانتزها علامت بین a و b مثبت و در پرانتز دیگر علامت بین a و b منفی است.

دومی به توان ۲
 اولی به توان ۲

مثال $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$
 مثال $(\frac{x}{2} - \frac{y}{5})(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}) = (\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{5})^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

تست: حاصل عبارت $A = (\sqrt{x}-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چقدر است؟

۱ **۴**

-۱ **۲**

$\sqrt{2}-1$ **۲**

$\sqrt{2}+1$ **۱**

پاسخ: اگر همین الان به جای x ها $\sqrt{2}$ را قرار دهیم، محاسبات پیچیده‌ای خواهیم داشت، پس ابتدا پرانتزهای اول و آخر را در کنار هم می‌نویسیم و به کمک اتحاد مزدوج حاصل ضرب آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$A = (\underbrace{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}})(x+1) = ((\sqrt{x})^2 - 1^2)(x+1) = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = x^2 - 1$$

گزینۀ (۴) صحیح است. $\Rightarrow A \text{ حاصل} = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$
 حالا به جای x
 عدد $\sqrt{2}$ رو بنظر

تست: حاصل عبارت $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)(a^2+b^2)$ کدام است؟

$a^4 - b^4$ **۴**

$a^6 - b^6$ **۲**

$a^8 - b^8$ **۲**

$a^2 - b^2$ **۱**

پاسخ: ابتدا حاصل ضرب دو پرانتز سمت چپ را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

حالا حاصل ضرب عبارت $a-b$ را در $a+b$ به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{(a-b)(a+b)}_{\text{دوباره اتحاد مزدوج}} = a^2 - b^2$$

و در نهایت، عبارت $a^2 - b^2$ را در $a^2 + b^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}_{\text{باز هم، اتحاد مزدوج}} = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4 \Rightarrow \text{گزینۀ (۴) درست است.}$$

یادآوری: به لحظه‌ها من توجه کن! انسانی‌ها، در مبحث اتحادها، نیازی به حفظ فرمول اتحاد جمله مشترک نیست (دنبال علتش نباشین لطفاً) بلکه فقط در تجزیه که

کمی جلوتر آموزش می‌دهیم به این اتحاد نیاز داریم پس فعلاً فراموشش کنید و اگر دو پرانتز دیدید که یک عبارت در آن‌ها تکرار شده، پرانتزها را به شکل معمولی در هم ضرب کنید؛ مثلاً:

$$(6x+2)(6x-2) = 36x^2 - 18x + 12x - 6 = 36x^2 - 6x - 6$$

مفهوم تجزیه

اگر یک عبارت جبری را بتوانیم به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر (با توان کم تر مهوول) بنویسیم، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر نتوان عبارت‌ها را تجزیه کرد. به هر کدام از عبارت‌های جبری به دست آمده از تجزیه، یک عامل اول می‌گوییم. مثلاً عبارت $x^2 - 16$ را به شکل $(x-4)(x+4)$ تجزیه می‌کنیم (نمونه تمهیزیه روکمی یلوثر توضیح میدم) یعنی در ابتدا توان x برابر ۲ بود ولی بعد از تجزیه، توان x در هر کدام از پرانتزها برابر ۱ شد، یعنی با تجزیه، توان x کوچک تر می‌شود. هر عبارت جبری به عامل هایش بخش پذیر است. مثلاً وقتی عبارت $x^2 - 5x - 6$ را به صورت $(x-6)(x+1)$ تجزیه می‌کنیم، $(x+1)$ و $(x-6)$ هر دو، عوامل اول عبارت اصلی هستند و ضمناً عبارت اصلی یعنی $x^2 - 5x - 6$ هم بر $x+1$ و هم بر $x-6$ بخش پذیر است.

روش‌های تجزیه یک عبارت جبری

۱ فاکتورگیری: در این روش از عوامل مشترک با توان کوچک تر، فاکتور می‌گیریم. به عبارت $5x^3 - 10x^2$ توجه کنید. اول به عددها نگاه می‌کنیم. عدد ۱۰ بر ۵ بخش پذیر است پس از ۵ فاکتور می‌گیریم. حالا به متغیرها توجه می‌کنیم بین x^3 و x^2 باید از x^2 فاکتور بگیریم چون توانش کوچک تر است پس در کل از $5x^2$ فاکتور می‌گیریم:

حالا می‌خواهیم جملات داخل پرانتز را بسازیم. $5x^2$ چطور می‌شود به $5x^3$ تبدیل می‌شود؟ باید در x ضرب شود، هم چنین برای تبدیل $5x^2$ به $10x^2$ باید 2 را در 5 ضرب کنیم. پس جملات داخلی پرانتز هم به دست آمدند:

یه لحظه به من توجه کن! گاهی باید از یک پرانتز هم فاکتور بگیریم پس لطفاً وحشت نکنید به عبارت زیر توجه کنید:

$$12x^2y(x-y)^4 - 7xy^2(x-y)^3$$

۷ و ۱۲ عامل مشترکی ندارند، از بین x و x^2 باید از x ، از بین y و y^2 باید از y و از بین $(x-y)^4$ و $(x-y)^3$ باید از $(x-y)^3$ فاکتور بگیریم، پس در کل، از $xy(x-y)^3$ فاکتور می‌گیریم:

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$(a+b)^2 - 2(a+b)$ $2xy^3 - 6x^2y^2z^2$
 $15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2$ $12x^4(x^2-5)^2 + 3x^3(x^2-5)^2$

پاسخ: $(a+b)$ از $(a+b)$ فاکتور می‌گیریم.
 از $2xy^2$ فاکتور می‌گیریم.
 دقت کنید که ۱۸ و ۱۵ هر دو به ۳ بخش پذیرند پس خواهیم داشت:

$15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2 = 3(x-y)^2 [5y(x-y) - 6x^2] = 3(x-y)^2 [5yx - 5y^2 - 6x^2]$

$12x^4(x^2-5)^2 + 3x^3(x^2-5)^2 = 3x^3(x^2-5)^2 [4x + (x^2-5)]$

تست: عبارت جبری $10x^2z^2 - 15xy^3$ بر کدام عبارت، بخش پذیر است؟

- $5x$ $15x$ $5x^2$ $2z^2 - 3y^3$

پاسخ: ۱۵ و ۱۰ هر دو بر ۵ بخش پذیرند. ضمناً x و x^2 مشاهده می‌کنیم که باید از x فاکتور بگیریم چون توانش کوچک تر است.

گزینه (۱) صحیح است. $\Rightarrow 10x^2z^2 - 15xy^3 \xrightarrow{\text{فاکتوراز } 5x} 5x(2xz^2 - 3y^3)$

تست: در تجزیه $10x^3(x^2+3)^4 - 10x^5(x^2+3)^3$ کدام عامل، وجود ندارد؟

- $10x^3$ x^2+3 x^2-3 x^2+3

پاسخ: $10x^3(x^2+3)^4 - 10x^5(x^2+3)^3 = 10x^3(x^2+3)^3 [2x^2 - (x^2+3)] = 10x^3(x^2+3)^3 (2x^2 - x^2 - 3)$

ملاحظه می‌کنید که عبارت تجزیه شده بالا شامل (x^2+3) نیست، پس جواب گزینه (۲) است.

۲ استفاده از اتحادها: در این روش از اتحادها برای تجزیه کردن کمک می‌گیریم.

۱ تجزیه از طریق اتحاد مربع دو جمله‌ای: اگر یک عبارت سه تا جمله داشت و دلتای آن، صفر شد ($\Delta = b^2 - 4ac$) قطعاً می‌توانیم از اتحادهای اول یا دوم برای تجزیه آن استفاده کنیم.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \Rightarrow$ تجزیه به کمک اتحاد اول

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \Rightarrow$ تجزیه به کمک اتحاد دوم

به عبارت دیگر در مبحث اتحادها در متن سؤال، عبارت $(a + b)^2$ یا $(a - b)^2$ داده می‌شد و ما می‌گفتیم جواب‌هایشان می‌شود $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ ولی در مبحث تجزیه، بر عکس است یعنی عبارت‌های $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ به ما داده می‌شوند و ما باید آن‌ها را به شکل اولیه آن‌ها یعنی $(a + b)^2$ یا $(a - b)^2$ تبدیل کنیم. البته کمی جلوتر خواهید دید که برای تجزیه از بقیه اتحادها نیز به صورت بر عکس استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 - 4x + 1 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a=4 & b=-4 & c=+1 \end{array}$$

به عبارت مقابل توجه کنید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(+1) = 16 - 16 = 0$$

می‌خواهیم آن را تجزیه کنیم، ابتدا دلتا را تشکیل می‌دهیم:

دلتا صفر شد پس متوجه می‌شویم که می‌توانیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای (اول یا دوم) برای تجزیه این عبارت استفاده کنیم. ضریب x منفی است پس از اتحاد دوم کمک می‌گیریم، از $4x^2$ و ۱ جذر می‌گیریم تا a و b در اتحاد مشخص شوند.

حالا عبارت داده شده را به شکل $(a - b)^2$ می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4x^2 & - & 4x & + & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a=2x & & b=1 & & \end{array} \\ \hline (2x - 1)^2 \end{array}$$

تست: تجزیه شده چند تا از عبارت‌های زیر، نادرست است؟

$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ ۱ صفر پاسخ: ۱

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{3})^2$ ۲

$2x^5(x-1)^3 - 8x^3(x-1)^4 = 2x^3(x-1)^2(x-2)^2$ ۳

۳

۲

۱

$$4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4x^2 & + & 4x & + & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a=2x & & b=1 & & \end{array} \\ \hline (2x + 1)^2 \end{array}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\frac{2}{3})^2 - 4(1)(\frac{1}{9}) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^2 & - & \frac{2}{3}x & + & \frac{1}{9} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a=x & & b=\frac{1}{3} & & \end{array} \\ \hline (x - \frac{1}{3})^2 \end{array}$$

دلتا صفر شد ضمناً ضریب x مثبت است، پس از اتحاد اول استفاده می‌کنیم:

دلتا صفر شد و ضریب x ، عددی منفی است پس از اتحاد دوم برای تجزیه عبارت استفاده می‌کنیم:

$2x^5(x-1)^3 - 8x^3(x-1)^4 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} 2x^3(x-1)^2[x^2 - 4(x-1)] = 2x^3(x-1)^2[x^2 - 4x + 4] = 2x^3(x-1)^2(x-2)^2$ پس گزینه (۳) درست است.

تجزیه با اتحاد دوم

تست: اگر $a - 2b = 1$ باشد، حاصل $2a^2b - 8a^2b^2 + 8ab^3$ کدام است؟

۱ $-2ab$

۲ $2ab$

۳ ab

۴ $-ab$

پاسخ: ابتدا از $2ab$ موجود در تمام جملات فاکتور می‌گیریم:

$$2a^2b - 8a^2b^2 + 8ab^3 = 2ab(a^2 - 4ab + 4b^2)$$

دلتای عبارت داخل پرانتز را حساب می‌کنیم (متغیر رو مثلاً a فرض کنید و b رو عدد فرض کنید یا برعکس)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4b)^2 - 4(1)(4b^2) = 16b^2 - 16b^2 = 0$$

دلتا صفر شد پس از اتحاد دوم برای تجزیه استفاده می‌کنیم جذر a^2 می‌شود a و جذر $4b^2$ می‌شود $2b$ پس داریم:

$$\text{پس گزینه (۳) درست است.} \\ \text{عبارت بالا} = 2ab(a - 2b)^2 = 2ab(1)^2 = 2ab$$

ب) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: اگر دو جمله داشته باشیم و بین آن‌ها علامت منها وجود داشت همیشه می‌توانیم، برای تجزیه آن از این اتحاد استفاده کنیم. برای تجزیه هم کافی است از این دو جمله جذر بگیریم تا a و b معلوم شوند:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

جذر a جذر b

مثال ۱: $x^2 - 100 = (x-10)(x+10)$

مثال ۲: $(2x-3)^2 - 25 = ((2x-3)-5)((2x-3)+5)$

شاگرد: استاد، حتماً باید جملات توان ۲ داشته باشه؟

دبیر: لزومی نداره که جملات داده شده، حتماً توان ۲ داشته باشن فقط کافیه بین اونها علامت \ominus باشه:

مثال ۱: $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$

مثال ۲: $25x^6 - 3 = (\sqrt{3}x^3 - \sqrt{3})(\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3})$

تست: در کدام گزینه، عبارت داده شده اشتباه تجزیه شده است؟

۱ $1 - 9x^2 = (1 - 3x)(1 + 3x)$

۲ $x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

۳ $18x^5(x^2 + 5)^3 - 15x^3(x^2 + 5)^4 = 3x^3(x^2 + 5)^3(x + 5)(x - 5)$

۴ $x^8 - 81x^4 = x^4(x^2 + 9)$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها

۱ $1 - 9x^2 = (1 - 3x)(1 + 3x)$

۲ $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$

۳ $x^8 - 81x^4 = x^4(x^4 - 81) = x^4(x^2 + 9)(x^2 - 9) = x^4(x^2 + 9)(x - 3)(x + 3)$

۴ $18x^5(x^2 + 5)^3 - 15x^3(x^2 + 5)^4 = 3x^3(x^2 + 5)^3[6x^2 - 5(x^2 + 5)]$

$$= 3x^3(x^2 + 5)^3(6x^2 - 5x^2 - 25) = 3x^3(x^2 + 5)^3(x^2 - 25) = 3x^3(x^2 + 5)^3(x + 5)(x - 5)$$

پس گزینه (۳) درست است.

تست: اگر $a - b = -6$ و $b^2 - a^2 = 66$ باشد، حاصل عبارت $a + b$ کدام است؟

$-\sqrt{11}$ ۱

۱۱ ۲

-۱۱ ۳

$\sqrt{11}$ ۴

پاسخ: دقت کنید که وقتی $a - b = -6$ است حاصل $b - a$ برابر $+6$ خواهد بود.

گزینه (۳) درست است. $\Rightarrow b + a = 11 \xrightarrow{\text{رو با هم ساده کن و } 6 \text{ و } 66}$ $6(b + a) = 66 \Rightarrow (b - a)(b + a) = 66 \Rightarrow (b - a) = 6$ $\Rightarrow b^2 - a^2 = 66$
تجزیه با مزدوج

پ) تجزیه به کمک اتحاد یک جمله مشترک: اگر یک عبارت به شکل $\bigcirc^2 + m\bigcirc + n$ داشته باشیم (\bigcirc هر عبارت دلخواهی میتونه باشه) و m و n دو

عدد باشند، فقط با داشتن دو شرط مهم، می‌توانیم به کمک اتحاد جمله مشترک، آن را تجزیه کنیم:

شرط اول: دو عدد مثل a و b پیدا شوند که ضربشان برابر با n شود.

شرط دوم: جمع a و b هم برابر با m شود.

شاگرد: استاد زراندوز! من نفهمیدم a و b یهو از کجا ظاهر شدن؟

دبیر: مگه نمیدونی که من شعبده‌بازی هم بلدم؟ عزیز دل برادر، خودمون دنبال دو تا عدد مثل a و b می‌گردیم که ضربشون بشه n و جمعشون

بشه m ، حالا فهمیدی؟ اگه نفهمیدی به دقیقه گوش کن تا ادامه درس رو بگم! بذار کلامم مُنعقد بشه لطفاً بعدش سؤال بپرس!

پس از یافتن a و b عبارت به شکل زیر تجزیه می‌شود:

$$\bigcirc^2 + m\bigcirc + n = (\bigcirc + a)(\bigcirc + b)$$

مثلاً می‌خواهیم عبارت $x^2 - 4x - 5$ را تجزیه کنیم، جمله مشترک x است (هون x و مربعش یعنی x^2 رو در عبارت، مشاهده می‌کنیم) حالا باید ببینیم آیا دو عدد پیدا می‌شوند که ضربشان (-5) و جمعشان (-4) شود، جواب، مثبت است و این اعداد (-5) و $(+1)$ هستند پس خواهیم داشت:

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

ضرب دو عدد باید -5 شود. جمع دو عدد باید -4 شود.

یک عبارت دیگر را با هم تجزیه می‌کنیم. به عبارت $(x - 3)^2 + 5(x - 3) + 6$ دقت کنید، جمله مشترک برابر $(x - 3)$ است چون $(x - 3)$ و مربعش یعنی $(x - 3)^2$ مشاهده می‌شوند پس آن را داخل پرانتزها قرار می‌دهیم:

$$(x - 3)(x - 3 + 5 + 6)$$

حالا دنبال دو عدد هستیم که ضربشان برابر $+6$ و جمعشان برابر $+5$ شود. این دو عدد $+3$ و $+2$ هستند لذا با این دو عدد، پرانتزهای بالا را کامل می‌کنیم:

$$(x - 3 + 2)(x - 3 + 3) = (x - 1)(x)$$

اگر داخل پرانتزهای بالا را ساده کنیم به جواب $x(x - 1)$ خواهیم رسید.

شاگرد: استاد چه روش باحالی بود، پس من دیگه، همه سه جمله‌ای‌ها رو این جوری تجزیه می‌کنم!

دبیر: شاگرد خوب من، این طورم نیست که همیشه بشه از این اتحاد استفاده کرد. مثلاً به عبارت $x^2 - 2x - 5$ دقت کن؛ چه اعدادی ضربشون

میشه (-5) و جمعشون (-2) ؟ هیچ دو عددی پیدا نمیشن. پس این عبارت به کمک اتحاد جمله مشترک، قابل تجزیه نیست و کلاً چنین عبارتی رو

به شما نمیدن سر کنکور، به چیز جالبم بگم، توی یک سه جمله‌ای، چه دلتا صفر بشه چه نشه شما میتونی از اتحاد جمله مشترک استفاده کنی،

فقط شرطش اینه که اون جمله مشترکه وجود داشته باشه و اون دو تا عدد هم پیدا بشن.

تست: یکی از عامل‌های اول $2x^3 + 6x^2 - 8x$ کدام است؟

$x + 4$ ۱

$x + 3$ ۲

$x + 1$ ۳

$x - 4$ ۴

پاسخ:

گزینه (۴) صحیح است. $\Rightarrow 2x(x^2 + 3x - 4) = 2x(x + 4)(x - 1)$
تجزیه با اتحاد جمله مشترک

تست: عبارت $x^2 + x^2 - 2$ را تجزیه می‌کنیم. کدام عامل در تجزیه شده آن وجود ندارد؟

۴ $x^2 + 2$

۲ $x^2 - 2$

۲ $x - 1$

۱ $x + 1$

پاسخ: x^4 را می‌شود به صورت $(x^2)^2$ نوشت. پس الان جمله مشترک x^2 است:

$$(x^2)^2 + 1x^2 - 2 = (x^2 \quad \quad)(x^2 \quad \quad)$$

حالا به دنبال دو عدد هستیم که ضربشان -2 و جمعشان $+1$ شود این اعداد $+2$ و -1 هستند: $(x^2 + 2)(x^2 - 1) = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)$ تجزیه با مزدوج پس گزینه (۳) درست است.

تجزیه سه جمله‌ای هایی که ضرب x^2 در آن‌ها مربع کامل است

گاهی اوقات یک سه جمله‌ای به ما داده می‌شود که در آن ضرب x^2 عددی مربع کامل (به جز ۱) است. (۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹ و ... اعداد معروف مربع کامل هستند) در این حالت، برای تجزیه این سه جمله‌ای، کافی است از جمله شامل x^2 جذر گرفته تا جمله مشترک معلوم شود سپس این جمله مشترک را از درون جمله دیگر که شامل x است بیرون می‌کشیم. مثلاً می‌خواهیم عبارت $(9x^2 + 18x + 8)$ را تجزیه کنیم ۹ مربع کامل است، و جذر $9x^2$ می‌شود $3x$ ، پس $3x$ جمله مشترک است و باید $18x$ را طوری بنویسیم که در آن $3x$ دیده شود. می‌توانیم $18x$ را به صورت $6(3x)$ بنویسیم.

حالا دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان بشود ۸ و جمعشان بشود ۶ این اعداد ۴ و ۲ هستند:

$$9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x + 4)(3x + 2)$$

تست: در یکی از عوامل اول $25x^2 + 30x - 7$ عدد ثابت کدام است؟

۴ -6

۲ 6

۲ -1

۱ 1

پاسخ: ضرب x^2 یعنی عدد ۲۵ مربع کامل است. پس از $25x^2$ جذر می‌گیریم، جذرش برابر با $5x$ می‌شود پس باید $30x$ را طوری بنویسیم که در آن $5x$ دیده شود لذا آن را به شکل $6(5x)$ می‌نویسیم:

$$25x^2 + 30x - 7 = (5x)^2 + 6(5x) - 7 = (5x + 7)(5x - 1)$$

در عامل $(5x - 1)$ عدد ثابت (-1) است و در عامل $(5x + 7)$ عدد ثابت $+7$ است. پس گزینه (۲) درست است.

تجزیه سه جمله‌ای هایی که در آن‌ها ضرب x^2 مربع کامل نیست

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $3x^2 - x - 2$ را تجزیه کنیم. الان ضرب x^2 یعنی عدد ۳ مربع کامل نیست. در چنین عبارت‌هایی، بهترین روش این است که ابتدا ضرب x^2 را در عدد ثابت ضرب کنیم، بنابراین در این جا ۳ را در -2 ضرب کرده و به عبارت $3x^2 - x - 6$ می‌رسیم. حال عبارت به دست آمده را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$3x^2 - x - 6 = (x - 3)(3x + 2)$$

در مرحله آخر، باید عدد ثابت یکی از پرانتزها را بر ضرب اولیه یعنی ۳ تقسیم کرده و x پرانتز دیگر را در ۳ ضرب کنیم. البته مهم نیست از کدام پرانتز شروع کنیم اما در این عبارت بهتر است پرانتزی را که ۳ دارد انتخاب کرده و ۳ را بر ۳ تقسیم کنیم و در پرانتز دیگر یعنی $(x + 2)$ عدد ۳ را در x ضرب کنیم، در نتیجه عبارت مطلوب برابر است با:

$$(x - \frac{2}{3})(3x + 2) = (x - 1)(3x + 2)$$

تست: عبارت $2x^3 + 5x^2 + 2x$ بر کدام عبارت زیر، بخش پذیر نیست؟

۴ $x + 2$

۲ $x - 2$

۲ $2x + 1$

۱ x

پاسخ: ابتدا از x فاکتور گرفته و سپس عبارت داخل پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$$2x^3 + 5x^2 + 2x = x(2x^2 + 5x + 2) = x(x+2)(2x+1)$$

این عبارت را به روش گفته شده تجزیه می‌کنیم.

عامل $(x - 2)$ در تجزیه شده عبارت بالا دیده نمی‌شود. پس گزینه (۳) صحیح است.

شاگرد: استاد آگه همیشه به توضیح بدین که $(2x^2 + 5x + 2)$ رو چه جوری تجزیه کردین، می‌چکرم.

دبیر: ضریب x^2 عدد ۲ هست که مربع کامل هم نیست پس ۲ رو در جمله آخر ضرب می‌کنیم: $x^2 + 5x + 4 = (2x^2 + 5x + 2)$ تبدیل میشه به

$$x^2 + 5x + 4 = (x+4)(x+1)$$

حالا عبارت حاصل رو به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

آخر سر هم، در یکی از پرانتزها عدد ثابت رو بر ۲ تقسیم و در پرانتز دیگه، x رو در ۲ ضرب می‌کنیم: $(x + \frac{4}{2})(2x + 1) = (x + 2)(2x + 1)$ جواب

۳ تجزیه به کمک دسته‌بندی: وقتی تعداد جملات یک عبارت زیاد باشد (پیش‌تر از 3^3)، برای تجزیه به دسته‌بندی احتیاج پیدا می‌کنیم. فقط باید دقت

کنیم که کدام جمله‌ها را با هم در نظر بگیریم. در واقع جملات را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که یا با هم تشکیل اتحاد بدهند، یا این‌که دارای قسمت مشترک باشند و بعد از فاکتورگیری، بتوانیم دوباره آن‌ها را تجزیه کنیم.

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

ب $x^2 + y^2 - 1 - 2xy$

۱ $ax - by - ay + bx$

پاسخ: ۱ ax و bx را یک دسته و $-by$ و $-ay$ را یک دسته دیگر در نظر می‌گیریم:

$$ax - by - ay + bx = \underbrace{ax - ay}_{\text{فاکتور از } x} - \underbrace{by - ay}_{\text{فاکتور از } y} = x(a - y) - y(b - a) = (a - y)(x - y)$$

ب سه جمله x^2 و y^2 و $-2xy$ را با هم به عنوان یک دسته در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 1 = (x - y)^2 - 1^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - y - 1)(x - y + 1)$$

تجزیه با اتحاد دوم

تست: کدام عامل در تجزیه $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ وجود ندارد؟

۴ $2x + 1$

۲ $2x - 1$

۲ $x + 2$

۱ $x - 2$

پاسخ: ۴

$$2x^3 + x^2 - 8x - 4 = x^2(2x+1) - 4(2x+1) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (2x+1)} (2x+1)(x^2-4) = (2x+1)(x-2)(x+2) \Rightarrow$$

گزینه (۳) صحیح است. اتحاد مزدوج

تست: اگر $2a + b = 1$ باشد، حاصل $4a^2 + b^2 - 4a - 2b + 4ab$ کدام است؟

۴ -1

۲ 1

۲ 3

۱ صفر

پاسخ: به روش دسته‌بندی، عبارت داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$4a^2 + b^2 + 4ab - 4a - 2b = (2a + b)^2 - 2(2a + b) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow$$

گزینه (۴) صحیح است. فاکتور از (-2) تجزیه با اتحاد اول

ب.م.م و ک.م.م دو عبارت جبری

* بزرگ‌ترین عبارت (چندجمله‌ای) که عبارت‌های P و Q بر آن بخش‌پذیر باشند را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) دو عبارت P و Q می‌گویند. **نکته** معمولاً از ب.م.م در فاکتورگیری و ساده کردن کسرها کمک می‌گیرند.

* کوچک‌ترین عبارت (چندجمله‌ای) که بر عبارت‌های P و Q بخش‌پذیر باشد را کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عبارت P و Q می‌گویند. **نکته** معمولاً از ک.م.م در مخرج مشترک‌گیری دو عبارت استفاده می‌شود. (البته در حل معادلات گویا هم از آن بهره می‌گیریم)

این تعاریف برای بیش از ۲ عبارت (۳ یا بیش‌تر) نیز برقرار هستند.

برای به‌دست آوردن ب.م.م و ک.م.م دو عبارت، آن دو را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، سپس خواهیم داشت:

ب.م.م \Leftarrow حاصل ضرب عوامل مشترک با کم‌ترین توان
 ک.م.م \Leftarrow حاصل ضرب عوامل مشترک با بیش‌ترین توان در عوامل غیرمشترک

مثال: ب.م.م و ک.م.م عبارت‌های $x^3 - 6x^2 + 9x$ و $x^3 - x - 6$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا هر دو عبارت را تا جایی که امکان دارد تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$$

فاکتور از x تجزیه با اتحاد دوم ($\Delta=0$)

$$\frac{x^3 - x - 6}{x} = (x - 3)(x + 2)$$

تجزیه با جمله مشترک

برای محاسبه ب.م.م فقط با عوامل مشترک با توان کوچک‌تر کار داریم. الان عامل مشترک با توان کوچک‌تر فقط $(x - 3)$ است پس ب.م.م را به‌دست آوردیم. حالا به سراغ ک.م.م می‌رویم تمام عوامل را در هم ضرب می‌کنیم (هه مشترک، هه غیرمشترک) و از توان‌های بزرگ‌تر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ک.م.م} = x(x - 3)^2(x + 2)$$

شاگرد: بخشید همیشه $(x^2 - 6x + 9)$ رو به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کرد؟ آخه من خیلی این اتحاد رو دوس دارم.

دبیر: چرا که نه! چه اعدادی ضرب‌شون میشه +9 و جمعشون -6! خب معلومه (-3) و (-3) پس داریم: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$
 خب حاصل $(x - 3)(x - 3)$ هم که برابر میشه با $(x - 3)^2$

تست: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک در چندجمله‌ای‌های $x^3 - 9x^2 + 21x - 10$ و $x^3 - 9x$ کدام است؟

1 $x + 3$
2 $x - 3$
3 $(x - 7)(x^2 + 9x)$
4 $(x + 3)^2$

پاسخ: ابتدا عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم تا عوامل مشترک، مشخص شوند:

$$\begin{cases} x^3 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7) \\ x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک یا همان ب.م.م دو عبارت برابر با $x - 3$ می‌باشد. در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

تعریف عبارت‌های گویا و با معنی بودن آن‌ها

به کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشد، عبارت گویا می‌گویند. مانند $\frac{\sqrt{2}x}{5}$ ، $\frac{1}{x}$ ، $\frac{5x}{x^2 + 1}$. واضح است که اگر صورت یا مخرج یک کسر

چندجمله‌ای نباشند، آن کسر، عبارت گویا نیست. مثلاً عبارت‌های \sqrt{x} ، $\frac{\sqrt{x}}{2x - 1}$ و $\frac{|x|}{2y + 6}$ گویا نیستند چون متغیر زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق است.

حالا می‌خواهیم بدانیم یک عبارت گویا چه وقت بامعنی است؟

می‌دانیم که مخرج یک کسر نباید صفر باشد، پس مقدار یک عبارت گویا وقتی بامعنی است که مخرج آن صفر نباشد. یعنی جاهایی که مخرج یک عبارت گویا صفر می‌شود، مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. مثلاً عبارت $\frac{x}{x - 1}$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است، چون عدد ۱ مخرج آن را به صفر تبدیل می‌کند. در این حالت می‌گوییم دامنه این عبارت گویا برابر است با: $\{1\} - \mathbb{R}$ یعنی X هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به جز عدد ۱.

مثال: ابتدا عبارت‌های گویا را مشخص کنید، سپس بگویید عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری تعریف نشده‌اند؟

- ا) $\frac{x-2}{x^2-4}$ ب) $\frac{x^2-x}{x^2+1}$ ج) $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$
 ت) $3x^2+2x-1$ ث) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$ چ) $\frac{|x|}{1-|x|}$

پاسخ: عبارت‌های (ا)، (ب)، (ت) و (ث)، گویا هستند، چون صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای هستند.

مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x^2-4} \xrightarrow{\text{مخرج}} x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{\text{جنر می‌گیریم}} x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

دقت کنید وقتی از دو طرف یک رابطه، هذر می‌گیریم به عدد سمت راست، علامت‌های \oplus و \ominus می‌دهیم.

ب) مخرج ریشه ندارد، پس عبارت گویا به ازای هر عدد حقیقی، تعریف شده است. (غ ق ق)

$$\frac{x^2-2}{x^2+1} \xrightarrow{\text{مخرج}} x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$

مذکر: مقدار x^2 نمی‌تواند با عددی منفی مساوی شود.

ت) مخرج اصلاً متغیر ندارد، در نتیجه این عبارت، همه جا تعریف شده است.

$$3x^2+2x-1 = \frac{3x^2+2x-1}{1}$$

ث) عبارت گویای مورد نظر، فقط به ازای $x=-1$ تعریف نشده است.

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x+1} \xrightarrow{\text{مخرج}} x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

تست: عبارت گویای $\frac{x^3-3x^2+2x}{(x^2-x)(x^2-4)}$ به ازای چند مقدار طبیعی برای x تعریف نشده است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow (x^2-x)(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=1 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{\text{جنر}} x=\pm 2 \end{cases}$$

پس عبارت گویای داده شده، به ازای ۴ مقدار، برای x تعریف نشده است ولی فقط اعداد ۱ و ۲ طبیعی هستند پس جواب برابر با گزینه (۲) است.

تست: اگر عبارت گویای $\frac{3mx^2-6m^2x}{x^2-mx}$ به ازای $x=1$ تعریف نشده باشد، مقدار عبارت گویا، به ازای $x=-1$ کدام است؟

- ۱) ۹ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $-\frac{9}{2}$ ۴) $-\frac{9}{2}$

پاسخ: کافی است مخرج را مساوی صفر قرار داده و به جای x آن، عدد ۱ را جایگذاری کنیم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2-mx=0 \xrightarrow{x=1} 1^2-m \times 1 = 0 \Rightarrow m=1$$

حالا در عبارت گویای متن سؤال، به جای تمام m ها عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \text{عبارت اصلی} = \frac{3(1)x^2-6(1)^2x}{x^2-1x} = \frac{3x^2-6x}{x^2-x} \xrightarrow{x=-1} \text{حاصل} = \frac{3(-1)^2-6(-1)}{(-1)^2-(-1)} = \frac{9}{2}$$

ملق زراددوزی: گاهی اوقات لازم است دامنه یک کسر به شکل $\frac{A}{\frac{B}{C}}$ را تعیین کنیم (در مبدا اعمال روی توابع سال یازدهم):

برای یافتن دامنه، ابتدا معادلات $B=0$ ، $C=0$ و $D=0$ را حل می‌کنیم و سپس جواب‌ها را از \mathbb{R} حذف می‌کنیم؛

$$\text{مثلاً می‌خواهیم دامنه تابع } y = \frac{x-1}{\frac{x-4}{2x}} \text{ را تعیین کنیم:}$$

$$y = \frac{x-1}{\frac{x-4}{2x}}$$

$$\begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \xrightarrow{\text{جنر}} x=\pm 3 \end{cases}$$

$$D_y = \mathbb{R} - \{-3, 0, 3, 4\}$$

↓
 D_y یعنی دامنه تابع y

پس دامنه کسر (تابع) به شکل مقابل است:

ساده کردن عبارت های گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا، صورت و مخرج آن را به عوامل اولش تجزیه می‌کنیم. (برای تئوری از فاکتورگیری و اتحادها کمک می‌گیریم.) سپس عامل‌های مشترک را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم، با این کار عبارت گویا را ساده کرده‌ایم. توجه کنید عبارت را باید تا جایی ساده کنیم که دیگر، ساده‌تر نشود.

شاگرد: استاد همیشه گفت در واقع ب.م.م. رو از صورت و مخرج ساده می‌کنیم؟

دبیر: آفرین به تو!

تست: در ساده‌شده عبارت گویای $\frac{x^2 - 2x^2 - 35x}{(x^2 - 25)(x^2 - 49)}$ مخرج کسر، کدام است؟

$4x$ (۱) $x^2 + 2x - 35$ (۲) $x^2 - 2x + 35$ (۳) $4x(x-1)$ (۴)

پاسخ: ۲

$$\frac{\overbrace{x^2 - 2x^2 - 35x}^{\text{فاکتور از } x}}{(x^2 - 25)(x^2 - 49)} = \frac{\overbrace{x(x^2 - 2x - 35)}^{\text{اتحاد جمله مشترک}}}{(x-5)(x+5)(x-7)(x+7)} = \frac{x(x-7)(x+5)}{(x-5)(x+5)(x-7)(x+7)} = \frac{x}{(x-5)(x+7)}$$

تجزیه با مزدوج تجزیه با مزدوج

گزینه (۳) درست است. $\Rightarrow x^2 + 2x - 35 = (x-5)(x+7) =$ مخرج کسر ضرب می‌کنیم

تست: ساده‌شده کدام عبارت، نادرست است؟

$\frac{30a^3 - 6a^2m}{m^2a - 25a} = \frac{6a^2}{m+5}$ (۱)

$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{x-1}{2x+1}$ (۲)

پاسخ: بررسی گزینه‌ها

$\frac{a^3x^2b + a^2x^3}{a^2b^3x + a^3b^2x} = \frac{ax^2}{b^2}$ (۳)
 $\frac{x^3(x^2+4)^2 - x^2(x+6)(x^2+4)^2}{x^6 - 16x^2} = \frac{x(x^2+4)(x+1)}{x+2}$ (۴)

$\frac{\overbrace{6a^3}^{\text{فاکتور از } 6a^3}}{m^2a - 25a} = \frac{6a^3(\cancel{5} - m)}{a(m^2 - 25)} = \frac{6a^3(\cancel{5} - m)}{a(m - 5)(m + 5)} = \frac{-6a^3}{a(m + 5)} = \frac{-6a^2}{m + 5}$ (۱)

فاکتور از a اتحاد مزدوج

به لحظه به من توجه کن! وقتی دو عبارت قرینه را از صورت و مخرج کسر ساده می‌کنیم به جای یکی از آن‌ها ۱ و به جای دیگری (-۱) قرار می‌دهیم. الان

(۵ - m) و (m - 5) قرینه بودند پس همین کار را کردیم.

$\frac{a^3x^2b + a^2x^3}{a^2b^3x + a^3b^2x} = \frac{a^3x^2(b+a)}{a^2b^2x(b+a)} = \frac{a^3x^2}{a^2b^2x} = \frac{ax^2}{b^2}$ (۲)

(۳) صورت و مخرج را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(2x+1)} = \frac{x-1}{2x+1}$ (۳)

ضریب x^2 مربع کامل نیست. از روش گفته شده در درسنامه استفاده کنید.

$\frac{x^3(x^2+4)^2 - x^2(x+6)(x^2+4)^2}{x^6 - 16x^2} = \frac{x^3(x^2+4)^2(x^2+4 - (x+6))}{x^2(x^2-16)} = \frac{x^3(x^2+4)^2(x^2-x-2)}{x^2(x^2-4)(x^2+4)}$ (۴)

$= \frac{x(x^2+4)}{x^2(x^2+4)^2(x-2)(x+1)} = \frac{x(x^2+4)(x+1)}{x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

پس گزینه (۱) صحیح است.

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق دو عبارت گویا مثل جمع و تفریق دو عدد کسری عمل می‌کنیم. یعنی از مخرج مشترک‌گیری استفاده می‌کنیم. (برای مخرج مشترک‌گیری هم کافیه، ابتدا مخرج‌ها رو هم‌بزه کنیم سپس ک.م.م مخرج‌ها رو پیدا کنیم و اون رو به عنوان مخرج مشترک بنویسیم، حالا مخرج‌ها برای تبدیل شدن به ک.م.م در هرچی که ضرب شده باشن، صورت‌ها رو هم در همون عبارت ضرب می‌کنیم و در نهایت، جمع و تفریق رو انجام می‌دیم.)

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

آ $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1}$

ب $\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-1}$

پاسخ: آ) الان مخرج‌ها قابل تجزیه شدن نیستند پس با ضرب آن‌ها ک.م.م به دست می‌آید:

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1) - (x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{(x^2-1) - (x^2-4)}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2-1-x^2+4}{(x+2)(x+1)} = \frac{3}{(x+2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} x^2-x = x(x-1) \\ x^2-1 = (x-1)(x+1) \end{cases} \Rightarrow \text{ک.م.م مخرج‌ها} = x(x+1)(x-1)$$

ب) ابتدا مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+x}{x(x+1)(x-1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)(x-1)}$$

تست: حاصل $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1}$ کدام است؟

۱ $\frac{x+2}{x^2-1}$

۲ $\frac{x-1}{x+1}$

۳ $\frac{x+1}{x-1}$

۴ $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

پاسخ: عبارت x^2-1 به کمک اتحاد مزدوج برابر می‌شود با $(x-1)(x+1)$ پس ک.م.م مخرج‌ها برابر با $(x-1)(x+1)$ است. لذا داریم:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x(x+1) + 2(x-1) - (x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+2x-2-x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

ملق زانوری برای حل سؤالات مربوط به عبارت‌های گویا، می‌توانیم به جای تجزیه صورت و مخرج‌ها، عددگذاری کنیم. یعنی به جای متغیرها یک عدد دلخواه قرار دهیم. ساده‌ترین اعداد ۱، ۲ و ۳ هستند فقط باید حواستان باشد که هیچ مخرجی نباید صفر شود. حالا تست قبلی را به همین روش حل می‌کنیم الان x را مثلاً ۲ فرض می‌کنیم (به x نمی‌تونیم یک بدیم چون دو تا مخرج صفر میشن).

$$\text{عبارت} = \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-1} \xrightarrow{x=2} \text{عبارت} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{6+2+1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

حالا در گزینه‌ها نیز عدد $x=2$ را قرار می‌دهیم، باید به جواب ۳ برسیم:

گزینه (۱): $\frac{x^2+1}{x^2-1} \xrightarrow{x=2} \frac{5}{3}$ (نادرست)

گزینه (۲): $\frac{x+1}{x-1} \xrightarrow{x=2} \frac{3}{1} = 3$ (درست)

گزینه (۳): $\frac{x-1}{x+1} \xrightarrow{x=2} \frac{1}{3}$ (نادرست)

گزینه (۴): $\frac{x+2}{x^2-1} \xrightarrow{x=2} \frac{4}{3}$ (نادرست)

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

برای ضرب و تقسیم دو عبارت گویا نیز مثل ضرب و تقسیم عددهای کسری عمل می‌کنیم و سپس عبارت گویای به‌دست آمده را تا حد امکان ساده می‌کنیم، یعنی:

۱ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (هورت رودر هورت و مفرج رودر مفرج ضرب می‌کنیم).
 ۲ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (کسر اول رودر معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم).

تست: حاصل تقسیم $\frac{4x^2 - 25y^2}{2x^2y + 5xy^2} \div \frac{6x^2 - 15xy}{9x^2y^2}$ کدام است؟

۳x

۴

۳y

۳

پاسخ:

$$\frac{4x^2 - 25y^2}{2x^2y + 5xy^2} \div \frac{6x^2 - 15xy}{9x^2y^2} = \frac{4x^2 - 25y^2}{2x^2y + 5xy^2} \times \frac{9x^2y^2}{6x^2 - 15xy} = \frac{(4x^2 - 25y^2)}{(2x^2y + 5xy^2)} \times \frac{(9x^2y^2)}{(6x^2 - 15xy)}$$

تجزیه یا مزدوج فاکتور از 3x

$$= \frac{(2x - 5y)(2x + 5y)}{xy(2x + 5y)} \times \frac{(9x^2y^2)}{(3x)(2x - 5y)} = \frac{9x^2y^2}{3x^2y} = 3y \Rightarrow$$

گزینه (۲) صحیح است.

تذکره: می‌توانیم از روش عددگذاری هم استفاده کنیم. مثلاً به X ها عدد ۱ و به Y ها عدد ۲ را نسبت می‌دهیم:

$$\text{عبارت اصلی} = \frac{4(1)^2 - 25(2)^2}{2(1)^2(2) + 5(1)(2)^2} \div \frac{6(1)^2 - 15(1)(2)}{9(1)^2(2)^2} = \frac{-96}{24} \div \frac{-24}{36} = \frac{-96}{24} \times \frac{36}{24} = 6$$

در گزینه‌ها هم به جای X و Y به ترتیب ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که فقط جواب گزینه (۲) برابر با ۶ می‌شود.

تست: حاصل ضرب کدام عبارت گویا در $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$ برابر با $x - y$ می‌گردد؟

 $\frac{x - y}{2xy}$
 $\frac{2xy}{x - y}$
 $\frac{x + y}{2xy}$
 $\frac{2xy}{x + y}$

پاسخ: اگر آن عبارت گویا را A در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A \times \frac{x^2 - y^2}{2xy} = x - y \Rightarrow A = (x - y) \div \left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right) \Rightarrow A = \frac{x - y}{1} \div \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{x - y}{1} \times \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2xy(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{2xy}{x + y}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

یادداشت:

اتحاد مربع دوجمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک

۱. ☆ حاصل $(\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}+1)^2$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $4\sqrt{2}$ ۳ $1+4\sqrt{2}$ ۴ 4

۲. عبارتی در تساوی $\frac{x^2}{9} + A + 16 = (\frac{x}{3} - 4)^2$ کدام است؟

- ۱ $\frac{8}{3}x$ ۲ $\frac{4}{3}x$ ۳ $-\frac{4}{3}x$ ۴ $-\frac{8}{3}x$

(سراسری خارج از کشور - ۹۷)

۳. ☆ اگر $xy^2 = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $(x-3y^2)^2 - (x+3y^2)^2$ کدام است؟

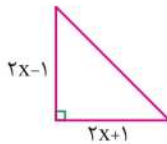
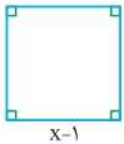
- ۱ 8 ۲ 12 ۳ 16 ۴ 18

۴. ☆ حاصل عبارت $A = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ به ازای $x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{5}$ کدام است؟

- ۱ -3 ۲ -4 ۳ -5 ۴ -6

۵. ☆ اگر مساحت مربع مقابل را A و مساحت مثلث را B بنامیم، حاصل $A + 2B$ کدام است؟

- ۱ $5x^2 - 2x$ ۲ $5x^2 + 1$ ۳ $x^2 - 5x$ ۴ $x^2 + 7x$



(سراسری - ۹۷)

۶. ☆ اگر $2x + \frac{5}{x} = 9$ باشد حاصل $4x^2 + \frac{25}{x^2}$ کدام است؟

- ۱ 43 ۲ 51 ۳ 57 ۴ 61

(سراسری - ۹۵)

۷. ☆ اگر $(5x - \frac{3}{2x}) = 4$ باشد، حاصل $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$ کدام است؟

- ۱ 24 ۲ 29 ۳ 31 ۴ 32

(سراسری خارج از کشور - ۹۵)

۸. ☆ اگر $(3x + \frac{1}{2x}) = 5$ باشد، حاصل $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$ کدام است؟

- ۱ 18 ۲ 20 ۳ 21 ۴ 22

۹. ☆ در تساوی $\frac{1-x^{16}}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ عبارت A کدام است؟

- ۱ $1-x$ ۲ $1-x^2$ ۳ $1-x^4$ ۴ $1-x^8$

استفاده از فاکتورگیری در تجزیه

۱۰. دوجمله‌ای $40x^2y^2 - 30xy^4$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- ۱ $4x^2 - 3y^2$ ۲ $4x^2 + 3y^2$ ۳ $10x^2y^2$ ۴ $10xy^3$

۱۱. در تجزیه $2x(x^2-6)^3 - x^3(x^2-6)^2$ کدام عامل زیر وجود ندارد؟

- ۱ $x^2 - 12$ ۲ $x^2 - 13$ ۳ x ۴ $x^2 - 6$

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج

۱۲. ☆ عبارت $16x^2y + 40x^2y^2 + 25xy^2$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

- ۱ $4x - 5y$ ۲ $(4x + 5y)^2$ ۳ x^2y^2 ۴ $(5x + 4y)^2$

۱۳. ☆ در تجزیه $x^6y^2 - x^2y^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱ $x^2 + y^2$ ۲ $x + y$ ۳ $x - y$ ۴ $(x + y)^2$

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت، پاسخ‌گویی به تست‌های دارای ☆ الزامی است. تست‌های دارای ★ دشوار هستند و حل آن‌ها اختیاری است. ضمناً تست‌هایی که در آن‌ها هیچ ستاره‌ای وجود ندارد را بعد از حل سؤالات با علامت ☆ در صورت داشتن فرصت کافی حل کنید.

۱۴. دو جمله‌ای $x^8 - 256$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر نیست؟

- ۱ $x^4 + 16$
 ۲ $x^2 + 4$
 ۳ $x - 4$
 ۴ $x - 2$

☆ ۱۵. اگر $c - d = -7$ و $d^2 - c^2 = 77$ باشد مقدار $c^2 + d^2 + 2cd$ کدام است؟

- ۱ ۶۴
 ۲ ۸۱
 ۳ ۱۲۱
 ۴ ۱۴۴

☆ ۱۶. کدام عبارت در تجزیه شده عبارت $(x^2 - 2x^2 + 1)$ وجود دارد؟

- ۱ $(x-1)^2$
 ۲ $(x+1)^2$
 ۳ $(x-1)^3$
 ۴ $(x-2)^2$

☆ ۱۷. اگر عبارت $5x^2 + mx + 10$ به صورت توان دوم مجموع دو جمله باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱ $2\sqrt{10}$
 ۲ $2\sqrt{5}$
 ۳ $10\sqrt{2}$
 ۴ $5\sqrt{2}$

☆ ۱۸. اگر $2x - y = 6$ و $4x^2 - y^2 = 12$ باشد، $x + y$ کدام است؟

- ۱ صفر
 ۲ ۴
 ۳ -۴
 ۴ ۲

☆ ۱۹. اگر $a - 2b = 5$ و $a^2 = 4b^2 + 15$ باشد، حاصل $a^3 - 2b$ کدام است؟

- ۱ ۶۳
 ۲ ۶۵
 ۳ ۳۳
 ۴ ۳۱

☆ ۲۰. اگر $x^2 + 4y^2 = 4xy$ باشد، مقدار $x^2 - 4y^2$ کدام است؟

- ۱ ۵
 ۲ ۲
 ۳ -۳
 ۴ صفر

استفاده از اتحاد یک جمله مشترک

☆ ۲۱. عبارت $2x^3 + 2x^2 - 4x$ بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر نیست؟

- ۱ $x+1$
 ۲ $x-1$
 ۳ $x+2$
 ۴ $2x$

☆ ۲۲. عبارت $4x^3 - 6x^2 + 2x$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

- ۱ $2x+1$
 ۲ $2x-1$
 ۳ $x+1$
 ۴ $x+2$

☆ ۲۳. عبارت $x^2 - 3x^2 - 4$ بر کدام عبارت بخش پذیر نیست؟

- ۱ x^2+1
 ۲ $x+2$
 ۳ $x-2$
 ۴ $x+1$

☆ ۲۴. در تجزیه عبارت $16x^2 - 12x^2 - 12$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- ۱ $x-6$
 ۲ $x+2$
 ۳ $x+3$
 ۴ $x+6$

☆ ۲۵. در تجزیه $16x^4 + 24x^2 - 7$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱ $2x-1$
 ۲ $4x^2+7$
 ۳ $2x^2+7$
 ۴ $2x+1$

☆ ۲۶. در تجزیه $a(a-2)(a-3) - 4a + 8$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱ $a-1$
 ۲ $a-2$
 ۳ $a+1$
 ۴ $a-4$

☆ ۲۷. در تجزیه $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱ $a-6$
 ۲ $a-3$
 ۳ $a-2$
 ۴ $a+2$

☆ ۲۸. عبارت $(x^2+x)^2 - (x^2+x) - 2$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

- ۱ x^2+x-1
 ۲ $x+1$
 ۳ $x-2$
 ۴ $x+2$

☆ ۲۹. عبارت $(x^2 - 4x + 2)^2 + 3(x^2 - 4x + 2) + 2$ بر کدام عامل بخش پذیر نیست؟

- ۱ $x-1$
 ۲ $x-2$
 ۳ $x-3$
 ۴ $x+1$

☆ ۳۰. در تجزیه $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱ $x-8$
 ۲ $x-4$
 ۳ $x+2$
 ۴ $x+4$

(سراسری - ۸۳)

(سراسری خارج از کشور - ۹۳)

(سراسری خارج از کشور - ۹۷)

(سراسری خارج از کشور - ۸۸)

(سراسری - ۹۰)

(سراسری خارج از کشور - ۹۰)

استفاده از روش دسته‌بندی در تجزیه

۳۱. در تجزیه عبارت $2x^3 - x^2 - 8x + 4$ کدام دو جمله‌ای وجود ندارد؟

- ۱ $x - 2$ ۲ $2x - 1$ ۳ $x + 2$ ۴ $2x + 1$

(سراسری خارج از کشور - ۸۹)

۳۲. اگر $a + 2b = 3$ ، حاصل $a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab$ کدام است؟

- ۱ ۱۵ ۲ ۱۶ ۳ ۱۷ ۴ ۱۸

۳۳. عبارت $x^2 - (x - 1)(x^2 - x + 3) - x$ بر کدام عامل بخش پذیر است؟

- ۱ $x - 3$ ۲ $x - 1$ ۳ $x + 1$ ۴ $x + 3$

محاسبهٔ ب.م.م. و ک.م.م عبارت‌های جبری

۳۴. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه جمله‌ای‌های $12x^2 - 12x - 9$ و $12x^2 + 16x + 4$ و $16x^2$ کدام است؟

- ۱ $2x + 1$ ۲ $2x + 2$ ۳ $4x + 1$ ۴ $4x + 2$

۳۵. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $x^2 + x^3 - 2x^2$ و $x^3 - 2x^2 + x$ کدام است؟

- ۱ $x(x - 1)(x + 2)$ ۲ $x^2(x - 1)^2$ ۳ $x(x - 1)$ ۴ $x^2(x - 1)^2(x + 2)$

۳۶. ب.م.م عبارت $x^4 - 4$ و $x^4 + x^2 - 2$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

- ۱ $x - 1$ ۲ $x^2 + 2$ ۳ $x^2 - 2$ ۴ $x + 1$

۳۷. اگر A و B به ترتیب کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چندجمله‌ای‌های $x^3 - 9x$ و $3x - 9$ باشند، حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

- ۱ $x^2 - 3x$ ۲ $3x^2 - 9x$ ۳ $x^2 + 3x$ ۴ $3x^2 + 9x$

با معنا بودن عبارات گویا

۳۸. کدام عبارت گویا بوده و همه جا تعریف شده است؟

- ۱ $\frac{1}{|x| + 1}$ ۲ $\frac{1 + x^2}{x^2}$ ۳ $\frac{\sqrt{x}}{x + x^2}$ ۴ $\frac{1 + x(x + 1)}{x^2 + 1}$

۳۹. اگر عبارت گویای $\frac{mx^2 + x - 2}{x(2x - m)}$ به ازای $x = -1$ تعریف نشده باشد، مقدار عبارت گویا به ازای $x = 1$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{1}{4}$

۴۰. عبارت گویای $\frac{x + a}{x + b}$ به ازای $x = -1$ تعریف نشده و به ازای $x = 1$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ -1 ۲ 1 ۳ -2 ۴ 2

ساده کردن عبارات گویا

۴۱. ساده‌شدهٔ عبارت گویای $\frac{-6x(x^2 - 4)^2 + 2(x^2 - 4)^3}{2(x^2 - 4)^2(x + 1)}$ کدام است؟

- ۱ $x - 1$ ۲ $2x$ ۳ $x + 4$ ۴ $x - 4$

۴۲. اگر $a = \sqrt{2} + 1$ و $b = \sqrt{2} - 1$ باشد، حاصل $\frac{ab^3 + a^3b + 2a^2b^2}{a^3b - ab^3}$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ 1

جمع و تفریق عبارات گویا

۴۳. حاصل $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} - \frac{5x + 3}{x + 1}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2x + 3}{x + 1}$ ۲ $\frac{2x + 3}{x + 1}$ ۳ $\frac{-2(2x + 3)}{x + 2}$ ۴ $\frac{2(2x + 3)}{x + 2}$

(سراسری خارج از کشور - ۹۱)

۴۴. حاصل عبارت $\frac{x}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} - \frac{4x - 2}{x^2 - 1}$ کدام است؟

- ۱ -2 ۲ -1 ۳ 1 ۴ 2

(سراسری خارج از کشور - ۹۸)

 ☆ ۴۵. حاصل عبارت با معنی $\frac{2a}{a^2 - 4b^2} + \frac{1}{a + 2b} - \frac{1}{a - 2b}$ ، کدام است؟

$$\frac{2}{a + 2b} \quad \frac{2}{a - 2b} \quad \frac{a}{a + 2b} \quad \frac{a}{a - 2b}$$

(سراسری - ۹۸)

 ☆ ۴۶. حاصل عبارت با معنی $\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x - 1}{2x + 1} - \frac{2x + 1}{2x - 1}$ ، به صورت $\frac{P(x)}{4x^2 - 1}$ است. کدام است؟

$$-8x \quad -4x \quad -4x + 1 \quad 2x - 2$$

(سراسری - ۹۹)

 ۴۷. اگر مخرج کسرها صفر نباشند، حاصل عبارت $\frac{x^2 + 3x^2 + 2x}{x(x+1)(x^2 - 4)} - \frac{2}{x^2 - 2x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x - 2} \quad \frac{2}{x} \quad \frac{x}{x - 2}$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۹)

 ۴۸. با فرض این که مخرج کسرها صفر نیستند، حاصل عبارت $\frac{x + 2}{x^2 + x - 2} - \frac{2x}{x^2 - x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{x + 1} \quad \frac{1}{x - 1} \quad \frac{x - 2}{x + 1} \quad \frac{x - 2}{x - 1}$$

ضرب و تقسیم عبارات گویا

(سراسری - ۹۶)

 ۴۹. خلاصه شده عبارت $\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} \div \left(x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{x - 1} \quad \frac{-1}{x + 1} \quad 1 \quad -1$$

(سراسری - ۹۳)

 ☆ ۵۰. حاصل $\left(2x + 1 - \frac{2}{x}\right) \div \left(2 + \frac{1}{x + 1}\right)$ کدام است؟

$$2 - \frac{2}{x} \quad 2 + \frac{1}{x} \quad x + \frac{1}{x} \quad x - \frac{1}{x}$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۳)

 ☆ ۵۱. حاصل عبارت $\left(1 + \frac{3x}{x^2 - 4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x - 1}\right)$ کدام است؟

$$\frac{x + 4}{x + 2} \quad \frac{x - 4}{x - 2} \quad \frac{x - 4}{x - 2} \quad \frac{x + 4}{x + 2}$$

(سراسری - ۹۲)

 ۵۲. حاصل $\left(x + \frac{2}{x - 3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x - 2}\right)$ کدام است؟

$$x - 1 \quad x + 1 \quad 2x + 1 \quad x + 2$$

(سراسری - ۹۰)

 ۵۳. خلاصه شده عبارت $\left(1 - \frac{6}{x + 2}\right) \left(\frac{5x - 2}{x - 4} + x\right)$ کدام است؟

$$x - 2 \quad x - 1 \quad x + 1 \quad x + 2$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۰)

 ☆ ۵۴. خلاصه شده عبارت $\left(x - \frac{x + 6}{x - 4}\right) \left(\frac{x^2 + 9}{x + 1} - 5\right)$ کدام است؟

$$x^2 + 3x - 4 \quad x^2 - 3x + 4 \quad x^2 + 5x + 6 \quad x^2 - 7x + 6$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۲)

 ۵۵. حاصل $\left(2 + \frac{x^2}{x - 4}\right) \div \left(1 + \frac{8}{x - 4}\right)$ کدام است؟

$$2x - 2 \quad x - 2 \quad x + 1 \quad x + 2$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۴)

 ☆ ۵۶. حاصل عبارت $\left(1 - \frac{2}{x^2 + x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2}$ برابر کدام است؟

$$\frac{1}{x^2} \quad 1 \quad 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{صفر}$$

(سراسری خارج از کشور - ۹۶)

 ۵۷. ساده شده عبارت $\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x - 6} \div \left(2 - \frac{4x - 3}{x}\right)$ کدام است؟

$$\frac{-x}{2} \quad \frac{x}{2} \quad \frac{-1}{2x} \quad \frac{2x - 3}{x}$$



۳

پاسخ‌های تشریحی

یادآوری اتحادها، تجزیه و عبارت‌های گویا

فصل ۵

۲ ۱

حاصل تک تک عبارات $(1+\sqrt{2})^2$ و $(\sqrt{2}-1)^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورده و جواب هایشان را از هم کم می‌کنیم:

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + \sqrt{2}^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{2}^2 - 2(\sqrt{2})(1) + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{جواب نهایی} = (3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

۴ ۲

بنا به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\left(\frac{x}{3} - 4\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{3}\right)(4) + 4^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3}x + 16$$

این جمله خواسته شده

$$\Rightarrow A = -\frac{8}{3}x$$

۳ ۳

$$\left\{ \begin{aligned} (x+3y)^2 &= x^2 + 6xy + 9y^2 \\ (x-3y)^2 &= x^2 - 6xy + 9y^2 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \text{عبارت مطلوب} = x^2 + 6xy + 9y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 12xy$$

$$\frac{\text{طبق فرض}}{xy^2 = \frac{4}{3}} \Rightarrow 12\left(\frac{4}{3}\right) = 16$$

۱ ۴

پرانتهزهای اول و آخر، تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند پس آن‌ها را کنار هم می‌نویسیم:

$$A = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) = (\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2)(x + y)$$

$$= \underbrace{(x - y)}_{\text{مزدوج}}(x + y) = x^2 - y^2 \xrightarrow{y = \sqrt{5}} \frac{x - \sqrt{5}}{y = \sqrt{5}}$$

دوباره مزدوج

$$A = \sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2 = 2 - 5 = -3$$

۱ ۵

$$A = \underbrace{(x-1)^2}_{\text{اتحاد دوم}} = x^2 - 2x + 1$$

$$B = \text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2}$$

$$= \frac{(2x)^2 - 1^2}{2} = \frac{4x^2 - 1}{2}$$

$$A + 2B = x^2 - 2x + 1 + \cancel{2} \left(\frac{4x^2 - 1}{\cancel{2}} \right)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 1 = 5x^2 - 2x$$

۴ ۶

$$2x + \frac{5}{x} = 9 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(2x + \frac{5}{x}\right)^2 = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2(2x)\left(\frac{5}{x}\right) + \frac{25}{x^2} = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 81 - 20 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 61$$

۳ ۷

$$\left(\Delta x - \frac{3}{2X}\right)^2 = 4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\Delta x - \frac{3}{2X}\right)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)\left(\frac{3}{2X}\right) + \left(\frac{3}{2X}\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 25\Delta x^2 - 15 + \frac{9}{4X^2} = 16$$

$$\xrightarrow{\text{رو به سمت راست ببر}} 25\Delta x^2 + \frac{9}{4X^2} = 15 + 16 \Rightarrow 25\Delta x^2 + \frac{9}{4X^2} = 31$$

۴ ۸

$$\left(3x + \frac{1}{2X}\right)^2 = 5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(3x + \frac{1}{2X}\right)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (3x)^2 + 2(3x)\left(\frac{1}{2X}\right) + \left(\frac{1}{2X}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4X^2} = 25 \Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4X^2} = 25 - 3 = 22$$

۱ ۹

$$\underbrace{1-x^8}_{\text{تجزیه با مزدوج}} = \underbrace{(1-x^4)}_{\text{دوباره تجزیه با مزدوج}} \underbrace{(1+x^4)}_{\text{باز هم تجزیه با مزدوج}} = \underbrace{(1-x^2)}_{\text{باز هم مزدوج}} \underbrace{(1+x^2)}_{\text{باز هم مزدوج}} \underbrace{(1+x^4)}_{\text{باز هم مزدوج}} \underbrace{(1+x^4)}_{\text{باز هم مزدوج}}$$

$$= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^4)$$

$$= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^4)$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در رابطه داده شده}} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^4)}{A}$$

$$= \frac{1-x}{A} = 1 \Rightarrow A = 1-x$$

۱ ۱۰

اعداد ۳۰ و ۴۰ هر دو بر ۱۰ بخش پذیرند، ضمناً بین X^3 و X از x فاکتور می‌گیریم و بین Y^2 و Y^4 از Y^2 فاکتور می‌گیریم پس در کل از $10xy^2$ فاکتور می‌گیریم:

$$40x^3y^2 - 30xy^4 = 10xy^2(4x^2 - 3y^2)$$

عامل $(4x^2 - 3y^2)$ در گزینه ۱ دیده می‌شود، پس دو جمله‌ای داده شده بر آن بخش پذیر است.

۲ ۱۱

از عبارت $x(x^2-6)$ فاکتور می‌گیریم:

$$2x(x^2-6)^2 - x^3(x^2-6)^2 = x(x^2-6)^2(2(x^2-6) - x^2)$$

$$= x(x^2-6)^2(2x^2-12-x^2) = x(x^2-6)^2(x^2-12)$$

۲ ۱۲

$$16x^3y + 40x^2y^2 + 25xy^3 \xrightarrow{\text{فاکتور از } xy} xy(16x^2 + 40xy + 25y^2)$$

$$= xy(4x + 5y)^2$$

۴ ۱۳

$$x^6y^2 - x^2y^6 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x^2y^2} x^2y^2(x^4 - y^4)$$

$$= x^2y^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = x^2y^2(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$$

بنابراین در تجزیه به دست آمده، عامل $(x+y)$ وجود ندارد.

۲۰ ۴

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$$

تجزیه با اتحاد دوم $\rightarrow (x-2y)^2 = 0$ از دو طرف $\rightarrow x-2y=0$ جذر بگیر.

$$x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y) = 0$$

تجزیه با مزدوج

۲۱ ۱

$$2x^2 + 2x - 4x = \frac{(2x)}{(2x)} 2x(x^2 + x - 2) = 2x(x+2)(x-1)$$

فاکتور از (2x) تجزیه با جمله مشترک

بنابراین در بین گزینه‌ها تنها بر (x+1) بخش پذیر نیست.

۲۲ ۲

روش اول:

$$4x^2 - 6x + 2 = \frac{(2x)^2 - 2(2x)}{(2x)} = (2x-1)(2x-2) = 2x(2x-1)(x-1)$$

فاکتور از (2x) فاکتور از x

توضیح حل بالا: در عبارت $4x^2 - 6x + 2$ ضریب x^2 یعنی عدد ۴ مربع کامل است پس از $4x^2$ جذر می‌گیریم که برابر می‌شود با (2x) حالا جمله ۶x را طوری نوشتیم که در آن 2x ایجاد شود یعنی به شکل $2(2x)$ نوشتیم و در نهایت از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه استفاده کردیم.

شاگرد: استاد نمیشد اولش از 2x فاکتور بگیریم!

دبیر: چرا میشد، اون وقت باید به شکل زیر عمل می‌کردیم:

$$4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1)$$

در داخل پرانتز حالا ضریب x، مربع کامل نیست پس از روش گفته شده در درسنامه برای تجزیه آن استفاده می‌کنیم یعنی ابتدا ۲ رودر جمله آخر (عدد) ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 - 3x + 1 \xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x-2)(x-1)$$

حالا در یکی از پرانتزها، عدد ثابت رو بر ۲ تقسیم و در پرانتز دیگه، x رودر ۲

$$(x - \frac{2}{2})(2x - 1) = (x-1)(2x-1)$$

ضرب می‌کنیم:

پس کل عبارت داده شده در متن سؤال به شکل $2x(x-1)(2x-1)$ تجزیه خواهد شد. بنابراین بر (2x-1) بخش پذیر است.

روش دوم: هلق رانجوری می‌توانیم عبارت‌های موجود در گزینه‌ها را مساوی صفر قرار دهیم و مقدار x را به دست آوریم. این مقدار x را در چند جمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم، اگر حاصل صفر شود چند جمله‌ای ما بر آن عبارت بخش پذیر است.

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

گزینه (۱)

$$\frac{4(-\frac{1}{2})^3 - 6(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2})}{\text{قرار می‌دهیم}} \neq 0$$

در چند جمله‌ای متن سؤال

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گزینه (۲)

$$\frac{4(\frac{1}{2})^3 - 6(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2})}{\text{قرار می‌دهیم}} = 0$$

در چند جمله‌ای متن سؤال

پس حاصل چند جمله‌ای داده شده به ازای $x = \frac{1}{2}$ برابر صفر شد. لذا گزینه (۲) درست است.

۱۴ ۳

بین دو جمله، علامت تفریق وجود دارد پس قطعاً باید از اتحاد مزدوج برای تجزیه آن استفاده کنیم:

$$x^4 - 256 = (x^4 - 16)(x^4 + 16) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^4 + 16)$$

تجزیه با مزدوج دوباره تجزیه با مزدوج
جذر ۴ جذر ۱۶ جذر ۴ جذر ۴
باز هم تجزیه با مزدوج

$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$$

۱۵ ۳

$$d^2 - c^2 = 77 \Rightarrow (d-c)(d+c) = 77$$

تجزیه با مزدوج

$$\Rightarrow d+c = \frac{77}{1} = 77 \Rightarrow c^2 + d^2 + 2cd = (c+d)^2 = 77^2 = 5929$$

تجزیه با اتحاد اول

دقت دارید که چون $c-d = -7$ است لذا $d-c = 7$ خواهد بود.

۱۶ ۳

x^4 رامی‌توانیم به شکل $(x^2)^2$ در نظر بگیریم پس در عبارت $(x^2)^2 - 2x^2 + 1$ جمله مشترک x^2 است حالا به کمک اتحاد جمله مشترک، دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان +۱ و جمعشان -۲ شود، این دو عدد (-۱) و (-۱) هستند:

$$(x^2)^2 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x^2 - 1)$$

تجزیه با مزدوج تجزیه با مزدوج

$$= (x-1)(x+1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)^2$$

البته به کمک اتحاد دوم هم می‌توانستیم عبارت را تجزیه کنیم.

۱۷ ۳

در درسنامه گفتیم که اگر $\Delta = 0$ باشد، می‌توانیم عبارت را به شکل توان دوم مجموع دو جمله (یا تفاضل دو جمله) بنویسیم:

$$\Delta x^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4(\Delta)(1) = 0 \Rightarrow m^2 = 400 \Rightarrow m = \pm\sqrt{400} = \pm 20\sqrt{1}$$

ولی جواب $10\sqrt{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۸ ۱

$$4x^2 - y^2 = 12 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} (2x-y)(2x+y) = 12$$

$$\frac{2x-y=6}{\rightarrow} 6(2x+y) = 12 \Rightarrow 2x+y = \frac{12}{6} = 2$$

$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

حالا یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول حل می‌کنیم:

$$4x = 8 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{2x-y=6} 2(2) - y = 6 \Rightarrow y = 4 - 6 = -2$$

بنابراین $x+y = 2 + (-2) = 0$ می‌باشد.

۱۹ ۲

$$a^2 = 4b^2 + 15 \Rightarrow a^2 - 4b^2 = 15 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} (a-2b)(a+2b) = 15$$

$$\frac{a-2b=5}{\rightarrow} 5(a+2b) = 15 \Rightarrow a+2b = \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{cases} a-2b=5 \\ a+2b=3 \end{cases}$$

حالا از دو رابطه موجود، مقادیر a و b رامی‌یابیم:

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{a-2b=5} 4 - 2b = 5 \Rightarrow 2b = 4 - 5 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 - 2b = 4^2 - 2(-\frac{1}{2}) = 16 + 1 = 17$$

۲۳ ۴

تجزیه با اتحاد مزدوج

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$$

تجزیه با جمله مشترک

$$= (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$$

بنابراین بر $(x + 1)$ بخش پذیر نیست.

۲۴ ۳

$$(x^2 - 12)^2 - (4x)^2 = (x^2 - 12 - 4x)(x^2 - 12 + 4x)$$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

تجزیه با جمله مشترک

$$= (x^2 - 4x - 12)(x^2 + 4x - 12) = (x - 6)(x + 2)(x + 6)(x - 2)$$

تجزیه با جمله مشترک

از بین گزینه ها فقط عبارت $(x + 3)$ در تجزیه شده عبارت مشاهده نمی شود.

۲۵ ۳

عبارت $16x^4$ مربع کامل است و جذر آن برابر می شود با $4x^2$ ، پس باید از دل جمله $24x^2$ عبارت $4x^2$ را بکشیم بیرون. پس $24x^2$ را به شکل $6(4x^2)$ می نویسیم و از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه این سه جمله ای استفاده می کنیم:

$$16x^4 + 24x^2 - 7 = (4x^2)^2 + 6(4x^2) - 7 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 7)$$

تجزیه با مزدوج

تجزیه با جمله مشترک

$$= (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 7)$$

۲۶ ۱

$$a(a - 2)(a - 3) - 4a + 8 = a(a - 2)(a - 3) - 4(a - 2)$$

فاکتور از -4

$$\frac{(a - 2)}{(a - 2)} (a - 2)(a(a - 3) - 4) = (a - 2)(a^2 - 3a - 4)$$

تجزیه با جمله مشترک

$$= (a - 2)(a + 1)(a - 4)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $(a - 1)$ وجود ندارد.

۲۷ ۳

$$a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36 = a(a - 3)(a - 4) - 12(a - 3)$$

فاکتور از -12

$$\frac{(a - 3)}{(a - 3)} (a - 3)(a(a - 4) - 12) = (a - 3)(a^2 - 4a - 12)$$

تجزیه با جمله مشترک

$$= (a - 3)(a + 2)(a - 6)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $(a - 2)$ وجود ندارد.

۲۸ ۴

عبارت $(x^2 + x)$ دو بار تکرار شده، پس جمله مشترک خواهد بود. پس $x^2 + x$ را در هر دو پرانتز قرار می دهیم حال به دنبال دو عدد هستیم که ضربشان -2 و جمعشان -1 شود که عبارتند از -2 و $+1$:

$$(x^2 + x)^2 - 1(x^2 + x) - 2 = ((x^2 + x) + 1)((x^2 + x) - 2)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x + 1)(x + 2)(x - 1)$$

تجزیه با جمله مشترک

بنابراین تنها بر $(x + 2)$ بخش پذیر است.

۲۹ ۴

روش اول:

$$(x^2 - 4x + 2)^2 + 3(x^2 - 4x + 2) + 2$$

تجزیه با جمله مشترک

$$= ((x^2 - 4x + 2) + 1)((x^2 - 4x + 2) + 2)$$

$$= (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 3)(x - 2)^2$$

تجزیه با اتحاد دوم تجزیه با جمله مشترک

بنابراین بر $(x + 1)$ بخش پذیر نیست.

روش دوم: اگر طبق روش تستی گفته شده (قلق زران دوزی) عمل کنیم، متوجه می شویم که مقدار عبارت متن سؤال به ازای $x = -1$ صفر نمی شود (-1 ریشه گزینه ۴) است، ولی مقدار آن به ازای $x = 1$ ، $x = 2$ ، و $x = 3$ همگی برابر صفر است. پس عبارت داده شده فقط بر $(x + 1)$ بخش پذیر نیست.

۳۰ ۴

$$(x^2 - 6x - 4)^2 - 144 = (x^2 - 6x - 4)^2 - 12^2$$

تجزیه با مزدوج

$$= (x^2 - 6x - 4 + 12)(x^2 - 6x - 4 - 12)$$

$$= (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x - 16) = (x - 4)(x - 2)(x - 8)(x + 2)$$

تجزیه با جمله مشترک

تجزیه با جمله مشترک

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $(x + 4)$ وجود ندارد.

۳۱ ۴

روش اول:

$$\frac{x^2}{2x^2 - x^2} - \frac{4}{-8x + 4} = \frac{(2x - 1)}{x^2(2x - 1)} - \frac{4}{4(2x - 1)}$$

$$= (2x - 1) \frac{(x^2 - 4)}{x^2(2x - 1)} = (2x - 1)(x - 2)(x + 2)$$

تجزیه با مزدوج

بنابراین بر $(2x + 1)$ بخش پذیر نیست.

روش دوم: اگر به روش تستی عمل کنیم متوجه می شویم که ریشه گزینه ۴) یعنی $x = \frac{-1}{2}$ عبارت داده شده در متن سؤال را به صفر تبدیل نمی کند، پس این عبارت بر $(2x + 1)$ بخش پذیر نیست. ولی چند جمله ای متن سؤال به ازای $x = 2$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، و $x = -2$ برابر صفر می شود؛ پس این عبارت بر تمام عبارت های $x - 2$ ، $x - 1$ ، $2x - 1$ و $x + 2$ بخش پذیر است.

۳۲ ۱

$$a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

مربع دوجمله ای

$$= (a^2 + 4b^2 + 4ab) + 2(a + 2b) = (a + 2b)^2 + 2(a + 2b)$$

$$= 9 + 6 = 15$$

۳۳ ۲

$$x^2 - (x - 1)(x^2 - x + 3) - x = x(x - 1) - (x - 1)(x^2 - x + 3)$$

فاکتور از $(x - 1)$

فاکتور از x

$$= -(x - 1)(x^2 - x + 3 - x) = -(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$$

تذکره: عبارت $(x^2 - 2x + 3)$ قابل تجزیه نیست چون دلتای آن، منفی می شود.

۴۱

روش اول: در صورت کسر از $2(x^2 - 4)^2$ فاکتور می‌گیریم:

$$\text{عبارت} = \frac{2(x^2 - 4)^2(-3x + (x^2 - 4))}{2(x^2 - 4)^2(x + 1)} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$$

تجزیه با جمله مشترک

$$= \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x + 1)} = x - 4$$

روش دوم (عددگذاری): می‌توانیم به جای x ها یک عدد دلخواه مثل

$x = 0$ قرار دهیم:

$$x = 0 \rightarrow \frac{-6(0)(-4)^2 + 2(-4)^3}{2(-4)^2(1)} = \frac{-64}{16} = -4$$

حالا در گزینه‌ها هم به جای x ها عدد صفر را قرار می‌دهیم فقط حاصل گزینه «۴» برابر -4 می‌شود.

۴۲

ابتدا صورت و مخرج را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{ab^2 + a^2b + 2a^2b^2}{a^2b - ab^2} = \frac{ab(b^2 + a^2 + 2ab)}{ab(a^2 - b^2)} = \frac{(a + b)^2}{(a - b)(a + b)}$$

فاکتور از ab تجزیه با اتحاد اول فاکتور از ab تجزیه با مزدوج

$$= \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{a + \sqrt{2} + 1}{b + \sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

۴۳

روش اول:

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} - \frac{\Delta x + 3}{x + 1} = \frac{x(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} - \frac{\Delta x + 3}{x + 1}$$

$$= \frac{x(x + 3) - (x + 2)(\Delta x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{x^2 + 3x - (\Delta x^2 + 3x + 10x + 6)}{(x + 1)(x + 2)}$$

فاکتور از منفی

$$= \frac{x^2 + 3x - \Delta x^2 - 13x - 6}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{-4x^2 - 10x - 6}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \frac{-((2x)^2 + 5(2x) + 6)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{-2(2x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{-2(2x + 3)}{x + 2}$$

روش دوم:

خلق زانجوری در تست‌های مربوط به ساده کردن عبارت‌های گویا یا اعمال جبری روی عبارت‌های گویا می‌توانیم به جای تجزیه عبارت‌ها، از عددگذاری استفاده کنیم. یعنی به متغیر، عددی دلخواه را نسبت می‌دهیم به شرطی که مخرج هیچ کسری صفر نشود، سپس همان عددی را که به متغیر دادیم در گزینه‌ها نیز به جای متغیرها قرار می‌دهیم و گزینه درست را انتخاب می‌کنیم. همان‌طور که گفتیم می‌توانیم از روش عددگذاری هم استفاده کنیم. مثلاً به x عدد ۱ را نسبت می‌دهیم:

$$\text{عبارت اصلی} = \frac{1^2 + 3(1)}{1^2 + 3(1) + 2} - \frac{\Delta(1) + 3}{1 + 1} = \frac{4}{6} - \frac{4}{2} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

۳۴

$$\begin{cases} 12x^2 - 12x - 9 = 3(4x^2 - 4x - 3) = 3((2x)^2 - 2(2x) - 3) \\ = 3(2x + 1)(2x - 3) \\ 16x^2 + 16x + 4 = 4(4x^2 + 4x + 1) = 4(2x + 1)^2 \end{cases}$$

\Rightarrow م.م.ب. = $(2x + 1)$

۳۵

ابتدا دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 + x - 2) = x^2(x - 1)(x + 2) \\ x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2 \end{cases}$$

\Rightarrow م.م.ب. = $x^2(x - 1)^2(x + 2)$

۳۶

$$\begin{cases} x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) \\ \text{تجزیه با مزدوج} \\ x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) \\ \text{تجزیه با جمله مشترک} \end{cases}$$

\Rightarrow م.م.ب. = $(x^2 + 2)$

۳۷

ابتدا عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) \\ 3x - 9 = 3(x - 3) \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \text{م.م.ب.} = 3x(x - 3)(x + 3)$ و $B = \text{م.م.ب.} = (x - 3)$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3x(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = 3x(x + 3) \Rightarrow \frac{A}{B} = 3x^2 + 9x$$

۳۸

گزینه‌های (۱) و (۳) عبارت گویا نیستند. چون در آن‌ها داخل قدرمطلق یا زیر رادیکال است. گزینه (۲) به ازای $x = 0$ (ریشه مخرج) تعریف نمی‌شود. در گزینه (۴) مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

همواره تعریف شده است. \Rightarrow جواب ندارد $\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = -1$

ریشه مخرج است: $x = -1$

۳۹

$$x(2x - m) = 0 \xrightarrow{x=-1} -1(2(-1) - m) = 0 \Rightarrow -(-2 - m) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + m = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\frac{mx^2 + x - 2}{x(2x - m)} = \frac{-2x^2 + x - 2}{x(2x - (-2))} = \frac{-2x^2 + x - 2}{x(2x + 2)}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{-2 + 1 - 2}{1(2 + 2)} = \frac{-3}{4}$$

۴۰

گفته شده $x = -1$ عبارت را تعریف نشده می‌کند یعنی باید مخرج را مساوی صفر قرار داده و به جای x آن عدد -1 را قرار دهیم:

$$x + b = 0 \xrightarrow{x=-1} -1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

ضمناً عبارت گویا به ازای $x = 1$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود پس همه جا عدد (۱) را به جای x ها قرار می‌دهیم و حاصل کسر را مساوی با $-\frac{1}{2}$ می‌گذاریم:

$$\frac{x + a}{x + b} = \frac{x + a}{x + 1} \xrightarrow{x=1} -\frac{1}{2} = \frac{1 + a}{1 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت} &= \frac{(2x+1)^2}{x(2x+1)} \div \left(\frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{x} \right) \\ &= \frac{2x+1}{x} \div \left(\frac{-(2x+1)}{x} \right) \\ &= \frac{2x+1}{x} \times \frac{x}{-(2x+1)} = -1 \end{aligned}$$

۴۹ ۴

حال در گزینه‌ها نیز به جای x هاعددا را می‌گذاریم. جواب باید $\frac{-10}{3}$ شود، فقط جواب عبارت گزینه (۳) برابر $\frac{-10}{3}$ می‌شود (بقیه گزینه‌ها رو خودتون امتحان کنید).

$$\text{گزینه (۳): } \frac{-2(2x+3)}{x+2} = \frac{-2(2(1)+3)}{1+2} = \frac{-10}{3}$$

شاگرد: استاد اگه حاصل دو تا گزینه برابر $\frac{-10}{3}$ شد چی؟

۵۰ ۴

دبیر: اون وقت عددی که به x دادی رو عوض کن مثلاً x رو ۲ یا ۳ فرض کن قطعاً مشکل حل می‌شه. در تمام سوالات بعدی، همیشه از روش عددگذاری هم استفاده کرد.

۴۴ ۳

$$\begin{aligned} (2x+1-\frac{3}{x}) \div (2+\frac{1}{x+1}) &= \frac{x(2x+1)-3}{x} \div \frac{2(x+1)+1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+x-3}{x} \times \frac{x+1}{2x+2+1} = \frac{2x^2+x-3}{x} \times \frac{x+1}{2x+3} \\ &= \frac{(2x+3)(x-1)}{x} \times \frac{x+1}{2x+3} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

تذکره: در مرحله آخر، از خاصیت زیر در کسرها استفاده کرده ایم:

$$\frac{A \pm B}{C} = \frac{A}{C} \pm \frac{B}{C}$$

۵۱ ۱

$$\begin{aligned} (1+\frac{3x}{x^2-4}) \times (1-\frac{1}{x-1}) &= \frac{x^2-4+3x}{x^2-4} \times \frac{x-1-1}{x-1} \\ &= \frac{x^2+3x-4}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \frac{x+4}{x+2} \end{aligned}$$

۵۲ ۱

$$\begin{aligned} (x+\frac{2}{x-3})(1-\frac{1}{x-2}) &= \frac{x(x-3)+2}{x-3} \times \frac{x-2-1}{x-2} \\ &= \frac{x^2-3x+2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = x-1 \end{aligned}$$

۵۳ ۲

$$\begin{aligned} (1-\frac{6}{x+2})(\frac{5x-2}{x-4}+x) &= \frac{x+2-6}{x+2} \times \frac{5x-2+x(x-4)}{x-4} \\ &= \frac{x-4}{x+2} \times \frac{5x-2+x^2-4x}{x-4} = \frac{x-4}{x+2} \times \frac{x^2+x-2}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-4)} = x-1 \end{aligned}$$

۵۴ ۴

$$\begin{aligned} (x-\frac{x+6}{x-4})(\frac{x^2+9}{x+1}-5) &= \left(\frac{x(x-4)-(x+6)}{x-4} \right) \left(\frac{x^2+9-5(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^2-4x-x-6}{x-4} \times \frac{x^2+9-5x-5}{x+1} = \frac{x^2-5x-6}{x-4} \times \frac{x^2-5x+4}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \times \frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x-6)(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \overbrace{(x-6)(x-1)}^{\text{ضرب می‌کنیم}} = x^2-7x+6 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1} \quad \text{مخرج مشترک بگیر}$$

$$\frac{x(x+1)+3(x-1)-4x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x+3x-3-4x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

۴۵ ۱

$$\text{عبارت} = \frac{2a}{(a-2b)(a+2b)} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a-2b}$$

$$= \frac{2a+a-2b-(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{2a-4b}{(a-2b)(a+2b)}$$

$$= \frac{2(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{2}{a+2b}$$

۴۶ ۱

$$\text{عبارت} = \frac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$= \frac{x(2x-1)+(x-1)(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$= \frac{4x^2-4x+1-4x^2-4x-1}{4x^2-1} = \frac{-8x}{4x^2-1} \Rightarrow P(x) = -8x$$

۴۷ ۱

$$\text{عبارت} = \frac{x(x^2+3x+2)}{x(x+1)(x^2-4)} - \frac{2}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x(x+2)(x+1)}{x(x+1)(x-2)(x+2)} - \frac{2}{x(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$$

۴۸ ۱

$$\text{عبارت} = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)} - \frac{2x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

۴ ۶۱

تمام جملات را در ۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند:

$$2 \cdot \left(\frac{2x-1}{5} - \frac{1-2x}{4} = 3 \right) \Rightarrow 4(2x-1) - 5(1-2x) = 60$$

$$\Rightarrow 8x - 4 - 5 + 10x = 60$$

$$\Rightarrow 18x = 60 + 4 + 5 \Rightarrow 18x = 69 \Rightarrow x = \frac{69}{18}$$

$$\Rightarrow \text{نصف جواب} = \left(\frac{\frac{69}{18}}{2} \right) = \frac{69}{2 \times 18} = \frac{69}{36}$$

۴ ۶۲

طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم، بنابراین عرض مستطیل برابر با $y = \frac{x}{2}$ است و داریم:

$$\text{محیط} = 2(x+y) = 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2}x = 3x$$

$$\xrightarrow{\text{محیط}=15} 3x = 15 \Rightarrow \text{طول} : x = \frac{15}{3} = 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\text{طول} - \text{عرض} = 5 - 2.5 = 2.5$$

۳ ۶۳

$$\text{محیط} = (x+4) + x + (2x-1) = 25 \Rightarrow 4x + 3 = 25$$

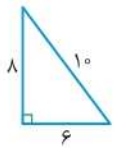
$$\Rightarrow 4x = 25 - 3 \Rightarrow 4x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{4} = 8$$

$$15 = \text{بزرگ‌ترین ضلع} \Rightarrow \underbrace{2(8)}_{15} - 1, 8, \underbrace{8+4}_{12}$$

$$\text{اضلاع مثلث} : x, x+2, x+4$$

$$\text{محیط} = x + x + 2 + x + 4 = 24 \Rightarrow 3x + 6 = 24$$

$$\Rightarrow 3x = 24 - 6 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$$



مثلث قائم‌الزاویه است. $10^2 = 6^2 + 8^2$ اضلاع مثلث: ۶، ۸، ۱۰

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

شاگرد: من نفهمیدم چرا گفتین مثلث، قائم‌الزاویه است؟

دبیر: کلاً اگر x ، y و z سه ضلع یه مثلث دلخواه باشن و z بزرگ‌ترین ضلع باشه اون وقت اگه رابطه فیثاغورث یعنی $z^2 = x^2 + y^2$ برقرار باشه می‌فهمیم که مثلث، قائم‌الزاویه است ضمناً اگه این مثلث، قائم‌الزاویه باشه مساحتش برابر با $\frac{x \times y}{2}$ خواهد بود.

۲ ۶۵

زوایای مثلث را $7x$ ، $11x$ و $18x$ در نظر می‌گیریم. (پهن گفته شده زوایا متناسب با اعداد ۷ و ۱۱ و ۱۸ هستند نه مساوی با اونوا) از آن‌جا که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است، داریم:

$$7x + 11x + 18x = 180^\circ \Rightarrow 36x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{36} = 5^\circ$$

$$\text{مثلث قائم‌الزاویه است.} \Rightarrow \underbrace{7(5)}_{35^\circ}, \underbrace{11(5)}_{55^\circ}, \underbrace{18(5)}_{90^\circ} \Rightarrow \text{اندازه زوایا}$$

اما چون زاویه‌های برابری وجود ندارد، لذا متساوی‌الساقین نیست.

۲ ۵۵

$$\left(2 + \frac{x^2}{x-4}\right) \div \left(1 + \frac{1}{x-4}\right) = \frac{2(x-4) + x^2}{x-4} \div \frac{x-4+1}{x-4}$$

$$= \frac{2x-8+x^2}{x-4} \div \frac{x+4}{x-4} = \frac{x^2+2x-8}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4}$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = x-2$$

۲ ۵۶

$$\left(1 - \frac{2}{x^2+x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2+x^2-2}{x^2+x^2} \times \frac{x^2-1+2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{(x^2+2)(x^2-1)(x^2+1)}{x^2(x^2+1)(x^2-1)} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+2-2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

۱ ۵۷

$$\text{عبارت} = \frac{(2x-3)^2}{2(2x-3)} \div \frac{2x-4x+3}{x}$$

$$= \frac{2x-3}{2} \times \frac{x}{-2x+3} = \frac{2x-3}{2} \times \frac{x}{-(2x-3)} = -\frac{x}{2}$$

معادله درجه دوم

۱

۱ ۵۸

روش اول: ابتدا معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = 2x(x-1) + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 2x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + 5 = 2x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 2x^2 + 2x = 3 - 5 \Rightarrow 8x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

روش دوم:

نکته تستی در این‌گونه سؤالات می‌توانیم اعداد گزینه‌ها را به جای x های معادله قرار دهیم؛ اگر به ازای یک عدد مشخص، دو طرف معادله با هم برابر شدند، می‌گوییم آن عدد، ریشه معادله است.

اعداد گزینه‌ها را به جای x های معادله قرار می‌دهیم، فقط به ازای $x = \frac{-1}{4}$ دو طرف معادله با هم مساوی می‌شوند؛ پس جواب معادله $-\frac{1}{4}$ است.

۲ ۵۹

برانتها رو در هم ضرب می‌کنیم

$$(x-1)(x^2+x+1) = x(x^2-2)$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 2x \Rightarrow x^3 - 1 = x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow x^3 - x^3 + 2x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۳ ۶۰

جواب معادله در معادله صدق می‌کند:

$$mx + m - 1 = 1 + \frac{x}{2} \xrightarrow{x=2} 2m + m - 1 = 1 + \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow 3m - 1 = 2 \Rightarrow 3m = 2 + 1 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{3} = 1$$