

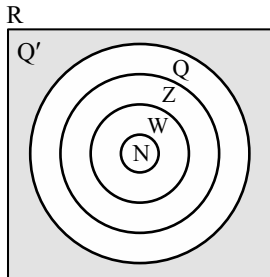
مؤلف درس، تست‌های طراحی شده و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی - مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

صفحه‌های ۵ تا ۲ ریاضی ۱

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد - به مجموعه‌های زیر توجه کنید:



$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  : مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  : مجموعه‌ی اعداد حسابی

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  : مجموعه‌ی اعداد صحیح

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$  : مجموعه‌ی اعداد گویا

$Q'$  : مجموعه‌ی اعداد گنگ

$R = Q \cup Q'$  : مجموعه‌ی اعداد حقیقی

مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد را به صورت  $O = \{2k - 1 \mid k \in N\}$  و مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج را به صورت  $E = \{2k \mid k \in N\}$  نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی اعداد حسابی را می‌توانیم به صورت  $W = \{k - 1 \mid k \in N\}$  نمایش دهیم.

اعمال بر روی مجموعه‌های اعداد - در دو جدول زیر، اعمال بر روی مجموعه‌های اعداد نمایش داده شده است:

| نماد                           | به معنی                             | مثال  | نماد   | به معنی | مثال  |
|--------------------------------|-------------------------------------|---|--------|---------|---|
| $\in$<br>( $\notin$ )          | عضویت<br>(عدم عضویت)                | $\sqrt{2} \in Q'$ , $\frac{1}{2} \in Q$ , $0.7222\dots \in Q$<br>$-7 \notin N$ , $0.702002000200\dots \notin Q$ | $\cap$ | اشتراک  | $N \cap Z = N$ , $Q \cap Q' = \emptyset$              |
| $\subset$<br>( $\not\subset$ ) | زیرمجموعه بودن<br>(زیرمجموعه نبودن) | $N \subset W$ , $Q' \subset R$ , $Z \subset Q$<br>$N \not\subset Q'$ , $Q \not\subset Q'$ , $Z \not\subset N$   | $\cup$ | اجتماع  | $N \cup Z = Z$ , $Q \cup Q' = R$                      |
|                                |                                     |   | $-$    | تفاضل   | $W - N = \{0\}$ , $N - W = \emptyset$<br>$R - Q = Q'$ |

توجه: در مجموعه‌های اعداد داریم:  $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

بازه‌ها

تعریف بازه - در این بخش با نوع دیگری از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی بنام بازه یا فاصله آشنا می‌شویم. وقتی بخواهیم کلیه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد را نمایش دهیم از نماد بازه استفاده می‌کنیم. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی و  $a < b$  باشد، آنگاه مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین  $a$  و  $b$  را با نماد  $(a, b)$  نمایش می‌دهیم و آن را بازه‌ی باز  $a$  و  $b$  می‌نامیم. بازه‌هایی که شامل دو نقطه‌ی ابتدا و انتها هستند، بسته‌اند و با نماد  $[a, b]$  نمایش داده می‌شوند، همچنین بازه‌هایی که فقط شامل یک نقطه‌ی ابتدا یا انتها هستند نیم‌باز هستند و با نمادهای  $[a, b)$  یا  $(a, b]$  نمایش داده می‌شوند. به مثال‌های زیر در مورد بازه‌ها و نمایش‌های مختلف آن توجه کنید.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| <p>(۱) <math>(1, 2)</math><br/>باز: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid 1 &lt; x &lt; 2\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> | <p>(۲) <math>[1, 2]</math><br/>بسته: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 2\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> | <p>(۳) <math>[1, 2)</math><br/>نیم‌باز: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid 1 \leq x &lt; 2\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> | <p>(۴) <math>(1, 2]</math><br/>نیم‌باز: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid 1 &lt; x \leq 2\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> |
|---|--|---|---|

برای نمایش مجموعه‌ی  $\{x \in R \mid x > a\}$  در قالب نماد بازه، از نماد  $(a, +\infty)$  استفاده می‌کنیم. توجه کنید که  $+\infty$  و  $-\infty$  اعداد حقیقی نیستند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>(۱) <math>(1, +\infty)</math><br/>باز: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid x &gt; 1\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> | <p>(۲) <math>(-\infty, 1)</math><br/>باز: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid x &lt; 1\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> | <p>(۳) <math>[1, +\infty)</math><br/>نیم‌باز: نوع بازه<br/>نمایش مجموعه‌ای:<br/><math>\{x \in R \mid x \geq 1\}</math><br/>نمایش هندسی:<br/></p> |
|--|--|--|

مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با نماد بازه به صورت  $(-\infty, +\infty)$  نمایش می‌دهیم.

تذکره: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی و  $a < b$  باشد، آنگاه:

[۱]  $(a, b) \subset (a, b) \subset [a, b]$

[۲]  $(a, b) \subset [a, b] \subset [a, b]$

[۳]  $a \in [a, b]$

[۴]  $a \notin [a, b]$

[۵]  $\{a, b\} \subset [a, b]$

مثال: همی عبارت‌های زیر برای بازه  $(-7, 11)$  درست هستند.

(۱)  $-7 \notin (-7, 11)$

(۲)  $5 \in (-7, 11)$

(۳)  $11 \in (-7, 11)$

(۴)  $\{0, 3\} \subset (-7, 11)$

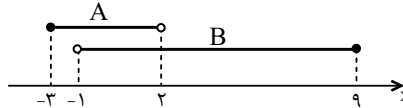
(۵)  $\{12, 5\} \subset (-7, 11)$

(۶)  $(-7, 11) \subset (-7, 11)$

اعمال بر روی بازه‌ها: در محاسبات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو یا چند بازه، به طور معمول از نمایش هندسی استفاده می‌کنیم.

مثال: اگر  $A = [-3, 2)$  و  $B = (-1, 9]$ ، آنگاه مجموعه‌های  $A \cap B$ ،  $A \cup B$  و  $A - B$  را به دست آورید.

حل: ابتدا نمایش هندسی هر دو بازه را روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که:

$A \cap B = (-1, 2)$  و  $A \cup B = [-3, 9]$  و  $A - B = [-3, -1)$

تذکره: به برابری‌های زیر در بازه‌ها توجه کنید:

$R - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$

$R - (a, b) = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$

$R - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

$R - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

مثال:  $R - \{5\}$  برابر  $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$  است.

مثال:  $R - (-1, 2)$  برابر  $(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$  است.

صفحه‌های ۲ و ۳ ریاضی ۱

تیپ ۱

مجموعه‌های اعداد

(ریاضی ۱ - صفحه ۲ - کار در کلاس - مکمل ۱-ب)

$0 / 222 \dots \in Q'$  (۴)

$(\sqrt{8} - 2\sqrt{2}) \in W$  (۳)

$(-0 / 4 + 1 \frac{2}{5}) \in N$  (۲)

$(\pi + \frac{2}{3}) \notin Q$  (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱)

$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\} \subset Q'$  (۴)

$(0 / 6 + \frac{2}{3}) \in (Q \cap R)$  (۳)

$-\frac{3}{4} \in (Z \cup Q')$  (۲)

$(\sqrt{3} + 5) \notin (R - Q)$  (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۲ - مرتبط با پاراکراف ۲)

$(R \cap Q) \subset Q'$  (۴)

$(Q \cap W) \subset Z$  (۳)

$(Z \cup Q) \subset W$  (۲)

$Q \subset (R \cap Z)$  (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱)

$W \cup N$  (۴)

$(W \cap Z) - \{0\}$  (۳)

$N - Q'$  (۲)

$W - (W - N)$  (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) و (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

$(Q' - N) \cup Q = R$  (۴)

$N \cap (Q' - R) = \emptyset$  (۳)

$(Z - N) \cap W = \emptyset$  (۲)

$(Z - N) \cup W = Z$  (۱)

۶- فرض کنید  $C$ ،  $B$  و  $A$  مجموعه‌های اعدادی هستند که  $\{A, B, C\} = \{W, Z, Q'\}$  است. اگر  $A \cap B = \emptyset$  و  $C - A = \emptyset$  باشد، حاصل

(ریاضی ۱ - صفحه ۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) و (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

$\{0, -1, -2, \dots\}$  (۴)

$Q'$  (۳)

$\emptyset$  (۲)

$\{-1, -2, \dots\}$  (۱)

صفحه‌های ۳ تا ۵ ریاضی ۱

تیپ ۲

تعریف بازه

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مشابه ۱)

$\{3, 5\} \neq (3, 5)$  (۴)

$\{-2, 1\} \subset [-3, 0)$  (۳)

$\emptyset \subset (-15, 1)$  (۲)

$[-1, 2) \subset [-1, 2]$  (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۵ - کار در کلاس - مشابه ۱)

$3 \in R - (2, 3)$  (۴)

$2 \notin R - (2, 3]$  (۳)

$-\frac{5}{2} \notin \left( \frac{-5}{2}, 2 \right]$  (۲)

$0 \in (-3, 0]$  (۱)

۷- کدام گزینه‌ی زیر درست نیست؟

۸- کدام گزینه‌ی زیر درست نیست؟

۹- اگر بازه‌ی  $[2n-1, 3n+14]$  شامل عدد ۵ باشد، حداقل مقداری که  $n$  می‌تواند اختیار کند، کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۳- مرتبط با پاراگراف ۲) و (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

(۱) ۳ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۲

صفحه‌های ۴ و ۵ ریاضی ۱

تیپ ۳

اعمال بر روی بازه‌ها

۱۰- دو بازه‌ی  $A = (a-2, b)$  و  $B = [a, b+3]$  مفروض‌اند، حاصل  $A \cap B$  کدام است؟  $(a < b)$   
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

(۱)  $[b, b+3]$  (۲)  $[a, b]$  (۳)  $(a-2, b+3)$  (۴)  $(a-2, a)$

۱۱- اگر اشتراک مجموعه‌های  $A = (-\infty, \frac{2a-5}{3}]$  و  $B = [a, +\infty)$ ، مجموعه‌ای تک عضوی باشد،  $a$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۱۲- اگر نمایش مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به صورت بازه‌های  $A = [-1, 2]$  و  $B = (-3, a]$  و  $A \cap B$  غیر تهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن برای  $a$ ، کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون- ۱۰ بهمن ۹۳)

(۱)  $\{a | a \geq -1\}$  (۲)  $\{a | -1 \leq a < 2\}$  (۳)  $\{a | a < -3\}$  (۴)  $\{a | -2 < a < -1\}$

۱۳- اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، اشتراک دو مجموعه‌ی  $A = [\frac{-4}{n}, 4)$  و  $B = (\frac{1}{n+1}, 2)$  در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند عضو دارد؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

(۱) یک (۲) پنج (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۱۴- اگر  $(-\infty, \frac{a}{3}] \cup [2a-1, +\infty) = \mathbb{R}$ ، حدود  $a$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

(۱)  $a \leq \frac{2}{3}$  (۲)  $a \leq 1$  (۳)  $a \geq 1$  (۴)  $a \geq \frac{2}{3}$

۱۵- اشتراک بازه‌های  $(a, -2]$  و  $(b, 4]$  برابر  $(-\frac{2}{3}, 1)$  است. اجتماع بازه‌های  $(-2a-1, b)$  و  $(b, a)$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون- ۲۳ مهر ۹۵)

(۱)  $(-3, 1)$  (۲)  $(-1, \frac{2}{3})$  (۳)  $(1, 4)$  (۴)  $(-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$

۱۶- اگر  $A = [-3, 4)$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} | (-x) \in A\}$ ، آنگاه مجموعه‌ی  $A - B$  کدام بازه‌ی زیر است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون- ۲۱ آذر ۹۳)

(۱)  $(3, 4)$  (۲)  $(-4, -3)$  (۳)  $(-3, 3)$  (۴)  $(-4, 4)$

۱۷- کدام بازه شامل تعداد بیشتری از اعداد طبیعی است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

(۱)  $[-3, 5] \cap (2, 5)$  (۲)  $[0, 3) \cup (1, 5)$  (۳)  $[1, 6] - [2, 3]$  (۴)  $(0, 6) \cap [1, 7)$

۱۸- اگر  $A \cup B = (-3, 2]$  و  $A - B = (1, 2]$  و  $B - A = (-3, -1)$ ، آنگاه مجموعه‌ی  $A$  در  $\mathbb{Z}$  چند عضو دارد؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۹- اگر  $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 3x-1 \geq \frac{1}{2}\}$ ،  $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 4x - \frac{3}{2} < 5\}$  و  $C = \{x | x \in \mathbb{W}, x-4 \leq 0\}$  باشند، حاصل  $(A \cap B) - C$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون- ۹۲)

(۱)  $[\frac{1}{2}, \frac{13}{8}) - \{1\}$  (۲)  $[\frac{1}{2}, \frac{13}{8})$  (۳)  $\mathbb{R} - \{1\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{0, \pm 1, \pm 2\}$

۲۰- اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$ ، آنگاه مجموعه‌ی  $(A - B) \cup (B - A)$  برابر کدام گزینه است؟  
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

(۱)  $\mathbb{R} - (1, 4]$  (۲)  $\mathbb{R} - [1, 4)$  (۳)  $\mathbb{R} - [1, 4]$  (۴)  $\mathbb{R} - (1, 4)$

## ۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

صفحه‌های ۷ تا ۵ ریاضی ۱

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی  $\leftarrow$  مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌ی متناهی می‌نامند، اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامند. در مجموعه‌های نامتناهی، تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است.

به مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در زیر توجه کنید.

| مجموعه‌های زیر متناهی‌اند                  | مجموعه‌های زیر نامتناهی‌اند                       |
|--|---|
| (۱) $\{a, b\}$                             | مجموعه‌ی اعداد طبیعی (۱)                          |
| مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی (۲)           | اعداد گویای بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5}$ (۲) |
| مجموعه‌ی حروف الفبای انگلیسی (۳)           | بازه‌ی $(-1, 1)$ (۳)                              |
| مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو زمین (۴)      | اعداد صحیح کوچکتر از $-5$ (۴)                     |
| مجموعه‌ی اعداد اول بین $100$ تا $10^5$ (۵) | مجموعه‌ی خطوطی که از نقطه‌ی $(0, 1)$ می‌گذرند (۵) |
| مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد $36$ (۶) |   |

توجه  $\leftarrow$  در بحث متناهی بودن یک مجموعه، بزرگی آن مجموعه اهمیت ندارد، نکته‌ی اساسی آن است که اگر وقت به اندازه‌ی کافی داشته باشیم، بتوانیم اعضای مجموعه را بشماریم.

مثال: مجموعه‌ی موش‌های کره‌ی زمین، یک مجموعه‌ی متناهی است، با اینکه تعداد آنها را نمی‌دانیم. پس ندانستن تعداد اعضای یک مجموعه، دلیلی بر نامتناهی بودن آن مجموعه نیست.

تذکره: مجموعه‌های  $N, W, Z, Q, Q', R$  همگی نامتناهی‌اند.

مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای متناهی است.

اعمال بر روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی  $\leftarrow$  اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، آنگاه جدول زیر وضعیت اعمال بر روی دو مجموعه را نمایش می‌دهد:

| وضعیت                       | $A \cap B$                        | $A \cup B$ | $A - B$                           | $B - A$                           |
|-----------------------------|-----------------------------------|------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| متناهی $A$ و متناهی $B$     | متناهی                            | متناهی     | متناهی                            | متناهی                            |
| نامتناهی $A$ و متناهی $B$   | متناهی                            | نامتناهی   | نامتناهی                          | متناهی                            |
| نامتناهی $A$ و نامتناهی $B$ | می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. | نامتناهی   | می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. | می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. |

مثال: مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت و مجموعه‌ی اعداد حسابی هر دو نامتناهی‌اند ولی اشتراک آنها مجموعه‌ی  $\{0\}$  است که مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعه‌ی اعداد صحیح  $(Z)$  و مجموعه‌ی اعداد حسابی  $(W)$  هر دو نامتناهی‌اند ولی  $Z - W = Z^-$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

تذکره: اگر مجموعه‌ی  $A$ ، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه  $A$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

اگر مجموعه‌ی  $A$ ، مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.

مثال: اگر  $B \subset \{x \in R \mid x > 2\}$  باشد، آنگاه  $B$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است، زیرا زیرمجموعه‌ی آن مجموعه‌ای نامتناهی است.

مثال: اگر  $A \subset \{x \in Z \mid 1 < x < 10\}$  باشد، آنگاه  $A$ ، مجموعه‌ای متناهی است، زیرا مجموعه‌ی  $A$ ، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است.

صفحه‌های ۵ تا ۷ ریاضی ۱

تیپ ۴

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

(ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۶ - کار در کلاس - مشابه ۱)

(۲) مجموعه‌ی اعداد اعشاری بین  $0/4$  و  $0/7$ (۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح مکعب کامل و کوچکتر از  $1000$ 

۱) ۲۱- کدام مجموعه‌ی زیر متناهی است؟

(۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح نابیشتر از  $-1$ (۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح  $17$  رقمی

- ۲۲- کدام مجموعه‌ی زیر متناهی نیست؟  
 (۱) مجموعه‌ی اعداد اول زوج  
 (۲) مجموعه‌ی گریه‌های کره‌ی زمین  
 (۳) مجموعه‌ی تمام خطوط گذرنده از مبدأ مختصات  
 (۴) مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴
- ۲۳- کدام مجموعه‌ی زیر نامتناهی نیست؟  
 (۱) مجموعه‌ی خطوط مماس بر یک دایره  
 (۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین دو عدد گویا  
 (۳) بازه‌ی (۰, ۴)  
 (۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت که با معکوس خود برابرند.
- ۲۴- کدام یک از عبارات‌های زیر همواره درست است؟  
 الف) هر مجموعه‌ی متناهی ناتهی از اعداد، دارای بزرگترین و کوچکترین عضو است.  
 ب) هر مجموعه‌ی نامتناهی از اعداد، دارای بزرگترین و کوچکترین عضو نیست.  
 (۱) فقط الف  
 (۲) فقط ب  
 (۳) هر دو  
 (۴) هیچ کدام
- ۲۵- کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟  
 (۱)  $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 > 25\}$   
 (۲)  $A_2 = \{x \mid x \text{ عدد اول بزرگتر از } 1000\}$   
 (۳)  $A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 9, x < 100\}$   
 (۴)  $A_4 = \{x \mid x \text{ عدد حقیقی کوچکتر از } 100\}$
- ۲۶- کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟  
 (۱)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 1000\}$   
 (۲)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{2} < x < 1\}$   
 (۳)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 53\}$   
 (۴)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -x \in \mathbb{N}\}$
- ۲۷- کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای متناهی را نشان می‌دهد؟  
 (۱)  $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$   
 (۲)  $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, 1 - x < 3\}$   
 (۳)  $C = \{x^3 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$   
 (۴)  $D = \{1 - x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 4\}$
- ۲۸- چند تا از مجموعه‌های زیر متناهی نیست؟  
 الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مضرب ۴ باشند ولی مضرب ۲ نباشند.  
 ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبتی که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارند.  
 پ) مجموعه‌ی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از -۱  
 ت) مجموعه‌ی اعداد گویایی که مربعشان با خودش برابر است.  
 (۱) یکی  
 (۲) دو تا  
 (۳) سه تا  
 (۴) چهار تا
- ۲۹- اگر  $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{4}{n} \in \mathbb{Z}\}$ ،  $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{Z}\}$  و  $C = \{n \in \mathbb{W} \mid \frac{1}{n} < 1\}$ ، آنگاه:  
 (۱) A و B متناهی و C نامتناهی است.  
 (۲) A و C نامتناهی و B متناهی است.  
 (۳) B و C متناهی و A نامتناهی است.  
 (۴) B و C نامتناهی و A متناهی است.
- اعمال بر روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی  
 تیپ ۵  
 صفحه‌های ۵ تا ۷ ریاضی ۱
- ۳۰- اگر مجموعه‌های  $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$  و  $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$  مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟  
 (۱)  $A - B$   
 (۲)  $B - A$   
 (۳)  $A \cap B$   
 (۴)  $A \cup B$
- ۳۱- کدام مجموعه‌ی زیر نامتناهی نیست؟  
 (۱)  $W \cap Z$   
 (۲)  $R - Q'$   
 (۳)  $Q - N$   
 (۴)  $N - W$
- ۳۲- اگر A مجموعه‌ی اعداد اول و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟  
 (۱)  $A \cup B$   
 (۲)  $A \cap B$   
 (۳)  $B - A$   
 (۴)  $A - B$
- ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مرتبط با تمرین ۲ و (سراسری انسانی - ۹۶)  
 ریاضی ۱ - صفحه‌ی ۷ - مرتبط با تمرین ۲ و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۶)

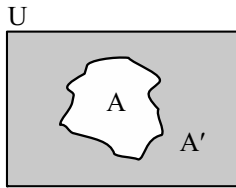
- ۱۳-۳۲- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه نامتناهی باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی این دو مجموعه نادرست است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مرتبط با تمرین ۳) و (آزمون کانون - ۲۱ آذر ۹۳)
- (۱) مجموعه  $A \cap B$  ممکن است نامتناهی باشد.  
(۲) مجموعه  $A \cup B$  لزوماً نامتناهی است.  
(۳) مجموعه  $A \cap B$  ممکن است متناهی باشد.  
(۴) مجموعه  $A - B$  لزوماً نامتناهی است.
- ۱۴-۳۴- اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد اول بزرگ‌تر از  $10^{1396}$  و  $B$  مجموعه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از  $10^{1396}$  باشد، کدام گزینه نادرست است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مرتبط با تمرین ۳) و (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)
- (۱)  $A \cap B$  متناهی است. (۲)  $A - B$  نامتناهی است. (۳)  $B - A$  نامتناهی است. (۴)  $A \cup B$  متناهی است.
- ۱۵-۳۵- اگر  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۲)
- (۱)  $A \cap B$  (۲)  $B - A$  (۳)  $A - B$  (۴)  $(A - B) - A$
- ۱۶-۳۶- اگر مجموعه‌ی  $A$  متناهی و مجموعه‌های  $B$  و  $C$  نامتناهی باشند، مجموعه‌های  $A \cap (B \cup C)$  و  $B - (A \cap C)$ ، به ترتیب از راست به چپ، چگونه‌اند؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مرتبط با تمرین ۳) و (آزمون کانون- ۲۳ مهر ۹۵)
- (۱) متناهی - متناهی (۲) نامتناهی - نامتناهی (۳) متناهی - نامتناهی (۴) نامتناهی - متناهی
- ۱۷-۳۷- کدام گزینه در حالت کلی درست نیست؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مرتبط با تمرین ۶)
- (۱) اگر مجموعه‌ای دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آنگاه نامتناهی است.  
(۲) اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.  
(۳) اشتراک دو مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.  
(۴) اگر حداقل یکی از دو مجموعه نامتناهی باشد، اجتماع آنها مجموعه‌ای نامتناهی است.
- ۱۸-۳۸- اگر  $A \subset B$  و  $A$ ، مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی  $B - A$  چگونه است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۶- کار در کلاس- مرتبط با ۴)
- (۱) متناهی است. (۲) نامتناهی است. (۳) تهی است. (۴) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.
- ۱۹-۳۹- اگر  $A = \{x \in Z \mid x < -2\}$  و  $B = \{x \in W \mid 1 < x < 158\}$ ، آنگاه:  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مکمل تمرین ۶)
- (۱)  $A$  متناهی و  $B$  نامتناهی است. (۲)  $A$  نامتناهی و  $B$  متناهی است.  
(۳)  $A$  و  $B$  نامتناهی هستند. (۴)  $A$  و  $B$  متناهی هستند.
- ۲۰-۴۰- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۷- مرتبط با تمرین‌های ۳ و ۶) و (آزمون کانون- ۲۱ آبان ۹۵)
- (۱) اشتراک دو مجموعه نامتناهی، الزاماً مجموعه‌ای نامتناهی است.  
(۲) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، الزاماً مجموعه‌ای نامتناهی است.  
(۳) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی، آنگاه مجموعه‌ی  $A$  الزاماً نامتناهی است.  
(۴) اگر  $A \subseteq B$  و  $A \cap B$  مجموعه‌ای نامتناهی، آنگاه مجموعه‌ی  $B$  الزاماً نامتناهی است.

۲. متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

صفحه‌های ۸ تا ۱۰ و ۱۲ ریاضی ۱

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه



**مجموعه مرجع** به طور کلی، در هر مبحث، مجموعه‌ای که تمامی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌نامیم و با  $M$  یا  $U$  نمایش می‌دهیم. به مجموعه مرجع، مجموعه اصلی یا عام نیز گفته می‌شود.

**متمم یک مجموعه** هرگاه  $U$  مجموعه مرجع و  $A \subset U$  باشد، آنگاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  (یا  $A^C$ ) نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل همه اعضای  $U$  است که در  $A$  نیستند.

$$\text{مجموعه } A' = U - A = \text{متمم مجموعه } A$$

**توجه** با توجه به تعریف،  $U' = \emptyset$  و  $\emptyset' = U$ .

**مثال:** اگر  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  مجموعه مرجع،  $A = \{0, 2, 3\}$  و  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  باشد، آنگاه  $A'$  و  $B'$  را بیابید.

$A' = U - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{0, 2, 3\} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B' = U - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 8\}$

**نتیجه:** اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A \subset U$  باشد، آنگاه:

- (۱)  $U - A = A'$
- (۲)  $A \cap A' = \emptyset$
- (۳)  $A - A' = A$
- (۴)  $A \cup A' = U$
- (۵)  $(A')' = A$

**مثال:** اگر  $W$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه متمم مجموعه اعداد طبیعی یعنی  $N'$ ، مجموعه  $\{0\}$  است.

**مثال:** اگر  $N$  را مجموعه مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه اعداد طبیعی زوج، مجموعه اعداد طبیعی فرد است. اجتماع مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه اعداد طبیعی فرد، مجموعه اعداد طبیعی است. از طرفی اشتراک مجموعه اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد طبیعی زوج، تهی است.

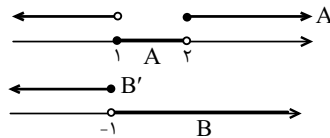
**مجموعه متمم در بازه‌ها:** اگر  $R$  مجموعه مرجع باشد، آنگاه به متمم بازه‌های زیر توجه کنید:

- (۱)  $A = [a, b] \Leftrightarrow A' = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$
- (۲)  $A = [a, b) \Leftrightarrow A' = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$
- (۳)  $A = (a, b] \Leftrightarrow A' = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$
- (۴)  $A = (a, b) \Leftrightarrow A' = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

**مثال:** اگر  $R$  مجموعه مرجع،  $A = [1, 2)$  و  $B = (-1, +\infty)$  باشند، آنگاه مجموعه‌های  $A'$  و  $B'$  را با نماد بازه نمایش دهید.

$A' = R - A = R - [1, 2) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

$B' = R - B = R - (-1, +\infty) = (-\infty, -1]$



**متمم و اعمال بر روی مجموعه‌ها:** اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع  $U$  باشند، آنگاه با استفاده از نمودار ون و هاشور زدن مجموعه‌های مورد نظر، می‌توان درستی قوانین زیر را بررسی کرد:

- (۱)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- (۲)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- (۳)  $A - B = A \cap B'$
- (۴)  $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

صفحه‌های ۸ تا ۱۰ و ۱۲ ریاضی ۱

تیپ ۶

متمم یک مجموعه

- ۱-۴۱ اگر  $Z$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه  $N'$  کدام مجموعه زیر است؟  
 (۱) مجموعه اعداد حسابی (۲) مجموعه اعداد صحیح نامنفی (۳) مجموعه اعداد صحیح نامثبت (۴) مجموعه اعداد صحیح مثبت  
 (ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مشابه ۵)
- ۲-۴۲ اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد، آنگاه مجموعه  $W'$  کدام است؟  
 (۱)  $N$  (۲)  $\{-k \mid k \in N\}$  (۳)  $Z - N$  (۴)  $R - W$   
 (ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۵) و (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)
- ۳-۴۳ اگر  $R$  مجموعه مرجع باشد، کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱)  $-2/1 \in N'$  (۲)  $2\sqrt{5} \in (R - Q')$  (۳)  $-5/1 \in Q$  (۴)  $\sqrt{2} \in Z'$   
 (ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۵) و (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)
- ۴-۴۴ اگر  $N$  مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه  $A = \{x \in N : x^2 < 100\}$  کدام است؟  
 (۱)  $\{100, +\infty\}$  (۲)  $\{1, 12, 13, 14, \dots\}$  (۳)  $\{x \in N \mid x > 11\}$  (۴)  $\{x \in N \mid x > 9\}$   
 (ریاضی ۱- صفحه ۸- مرتبط با فعالیت) و (آزمون کانون - ۲۳ مهر ۹۵)
- ۵-۴۵ اگر  $B = \{x \in R \mid x \leq -1\}$ ،  $A = \{x \in R \mid x > 1\}$  باشد، آنگاه  $A' \cap B'$  کدام است؟  
 (۱)  $[-1, 1)$  (۲)  $(-1, 1)$  (۳)  $(-1, 1]$  (۴)  $[-1, 1]$   
 (ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) و (آزمون کانون - ۲۱ آبان ۹۵)

- ۴۶- اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد صحیح،  $A' = \{5, 6, 7, 8\}$  و  $B' = \{7, 8, 9, 10\}$  باشد، آنگاه مجموعه  $(A \cup B)'$  چند عضوی است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)
- (۱) ۲ عضوی (۲) ۵ عضوی (۳) ۷ عضوی (۴) ۸ عضوی
- ۴۷- اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی و  $A = \{n \in \mathbb{N} | n > 7\}$  و  $B = \{5, 6, 8\}$ ، آنگاه مجموعه  $A' \cup B'$ ، یک مجموعه ی ..... است.  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)
- (۱) ۶ عضوی (۲) ۷ عضوی (۳) ۸ عضوی (۴) ۹ عضوی
- ۴۸- اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ،  $A = \{4, 5, 6\}$  و  $B' = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه مجموعه  $A - B$  چند عضو دارد؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مشابه ۶)
- (۱) ۱ عضو (۲) ۲ عضو (۳) ۳ عضو (۴) ۴ عضو
- ۴۹- اگر  $A$  و  $B$  زیرمجموعه های مجموعه مرجع  $U$  باشد بطوریکه  $U = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$ ،  $A, U = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$  مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۶ و  $B$  مجموعه اعداد مربع کامل، آنگاه  $A - B'$  چند عضو دارد؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) و (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)
- (۱) ۱۲ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۱
- ۵۰- اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم و  $A \subset U$ ، آنگاه  $A$  را کدام مجموعه زیر در نظر بگیریم تا تعداد عضوهای مجموعه  $A'$  بیشتر باشد؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱)
- (۱) اعداد فرد (۲) مقسوم علیه های عدد ۳ (۳) اعداد اول (۴) مربع کامل
- ۵۱- اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < 2 - x \leq 5\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} | \frac{2x+3}{x} \in \mathbb{W}\}$ ، آنگاه مجموعه  $A \cap B'$  شامل چند عدد طبیعی است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)
- (۱) سه (۲) دو (۳) یک (۴) هیچ
- ۵۲- اگر  $N$  مجموعه مرجع و  $A \subset N$  باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۱۲- مرتبط با تمرین ۲)
- (۱) اگر  $A$  نامتناهی باشد، آنگاه  $A'$  نامتناهی است. (۲) اگر  $A$  نامتناهی باشد، آنگاه  $A'$  متناهی است.  
(۳) اگر  $A$  متناهی باشد، آنگاه  $A'$  متناهی است. (۴) اگر  $A$  متناهی باشد، آنگاه  $A'$  نامتناهی است.
- ۵۳- مجموعه  $U$ ، مجموعه مرجع و  $A \subset U$ ، کدام مجموعه با  $A$  برابر است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۴)
- (۱)  $A' \cup \emptyset'$  (۲)  $(A \cup U') \cup U$  (۳)  $(A \cap \emptyset) \cup A'$  (۴)  $(A' \cap \emptyset) \cup A$
- ۵۴- مجموعه های  $A$  و  $B$  در مجموعه مرجع  $U$  داده شده اند. اگر  $A \subset B$  باشد، آنگاه:  
(ریاضی ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه ۳)
- (۱)  $A = B$  (۲)  $A \in B$  (۳)  $A' \subset B'$  (۴)  $B' \subset A'$
- ۵۵- اگر  $A \subset B$  و  $U$  مجموعه مرجع آن ها باشد، کدام گزینه صحیح است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با ۳)
- (۱)  $A' \cup B' = U$  (۲)  $A \cup B = U$  (۳)  $A' \cup B = U$  (۴)  $A \cap B = B$
- ۵۶- متمم مجموعه  $A \cup (B - A)$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) و (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)
- (۱)  $A' \cup B'$  (۲)  $A' - B$  (۳)  $B' - A'$  (۴)  $A' - B'$
- ۵۷- اگر  $A \cup B = U$  باشد، کدام گزاره همواره صحیح است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) و (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)
- (۱)  $A \cap B' = \emptyset$  (۲)  $A - B = B - A$  (۳)  $A' = B - A$  (۴)  $A' \cup B' = U$
- ۵۸- اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی و  $\{ \text{شمارنده های اول عدد } 20 \}$  و  $A = \{2k - 1 | k \in A\}$  باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعه  $A - (A \cap B')$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) و (آزمون کانون - ۱۷ شهریور ۹۶)
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳
- ۵۹- اگر  $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  مجموعه مرجع،  $A = \{1, 3, 5\}$  و  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  باشد، کدام عدد متعلق به مجموعه  $(A - B)' \cap (A \cup B)'$  نیست؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۶۰- اگر  $A \cap B = \{a, b, c, d\}$  و  $A \cap C = \{b, c, e, f\}$ ، آنگاه  $A - (B - C)$  کدام است؟  
(ریاضی ۱- صفحه ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)
- (۱)  $\{a, c, e, f\}$  (۲)  $\{a, d\}$  (۳)  $\{e, f\}$  (۴)  $\{b, d\}$



۲. متمم یک مجموعه

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

صفحه‌های ۱۳ تا ۱۴ ریاضی ۱

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

❖ دو مجموعه‌ی جدا از هم ◀ اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامند.

بنابراین اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه  $A \cap B = \emptyset$ .

■ مثال: دو مجموعه‌ی  $A = \{7, 8\}$  و  $B = \{3, 4\}$  جدا از هم هستند، زیرا عضو مشترکی ندارند.

■ مثال: مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ جدا از هم هستند.

🔗 نکته ◀ الف - اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه با استفاده از نمودار ون می‌توان درستی روابط زیر را بررسی کرد:

(۱)  $A - B = A$                       (۲)  $B - A = B$

(۳)  $A \subset B'$                         (۴)  $B \subset A'$

ب- دو مجموعه‌ی  $A - B$  و  $B - A$  همواره جدا از هم‌اند. در نتیجه  $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ .

❖ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ◀ فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه‌ی دلخواه متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی  $U$  هستند. اگر  $n(A)$  و

$n(B)$  به ترتیب تعداد اعضای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  باشند، آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را با  $n(A \cup B)$  نمایش می‌دهیم و

خواهیم داشت:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

در این فرمول،  $n(A \cap B)$  تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه است.

■ مثال: اگر  $n(A) = 10$ ،  $n(B) = 7$  و  $n(A \cup B) = 13$  باشد،  $n(A \cap B)$  را بیابید.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 13 = 10 + 7 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$

◀ حل:

■ مثال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۰ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۵ نفر، هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند. چند نفر در این کلاس، فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند؟

◀ حل: اگر مجموعه‌ی  $A$  را دانش‌آموزان فوتبالیست و مجموعه‌ی  $B$  را دانش‌آموزان والیبالیست در نظر بگیریم، آنگاه:

نفر  $n(A \cup B) = 15 + 10 - 5 = 20$  و  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A) = 15$  و  $n(B) = 10$

🔗 تذکر: برای دو مجموعه‌ی جدا از هم  $A$  و  $B$ ، داریم:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

■ مثال: اگر  $A = \{6, 7\}$  و  $B = \{2, 3, 4\}$  آنگاه  $A \cup B$  و تعداد اعضای آن را بیابید.

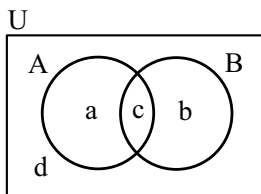
◀ حل:  $A$  و  $B$  جدا از هم‌اند، پس:

$A \cup B = \{6, 7\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

پس  $n(A \cup B) = 5$ . توجه کنید که  $n(A) = 2$  و  $n(B) = 3$ .

تعیین تعداد عضوهای یک مجموعه با استفاده از نمودار ون: در مسائل این بخش، با استفاده از نمودار ون و کامل کردن آن، می‌توان مجهول خواسته

شده را یافت. تعداد اعضای مجموعه‌های این نمودار با چهار عدد ثابت  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  کامل می‌شود که در آن:



$c = n(A \cap B)$  = تعداد همه‌ی عضوهایی که در هر دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  هستند.

$a + c = n(A)$  = تعداد عضوهای مجموعه‌ی  $A$

$b + c = n(B)$  = تعداد عضوهای مجموعه‌ی  $B$

$a + c + b = n(A \cup B)$  = تعداد همه‌ی عضوهایی که در مجموعه‌ی  $A$  یا  $B$  هستند.

$a = n(A - B)$  = تعداد عضوهایی که فقط در مجموعه‌ی  $A$  هستند.

$b = n(B - A)$  = تعداد عضوهایی که فقط در مجموعه‌ی  $B$  هستند.

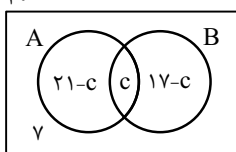
$d = n(A' \cap B')$  = تعداد همه‌ی عضوهایی که شامل مجموعه‌ی  $A$  یا  $B$  نیستند.

🔗 نکته ◀ برای رسم نمودار ون از  $c$  (اشتراک دو مجموعه) شروع می‌کنیم. (اگر  $c$  معلوم باشد، آن را قرار می‌دهیم و اگر مجهول باشد، برحسب

مجهول  $c$  قرار می‌دهیم)، سپس مقادیر  $a$  و  $b$  و در انتها  $d$  را یافته و نمودار را کامل کرده و مجهول خواسته شده را می‌یابیم.

■ مثال: در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۷ نفر عضو گروه سرود، ۲۱ نفر عضو گروه تئاتر و ۷ نفر عضو هیچ گروهی نیستند. چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس، عضو هر دو گروه هستند؟

۴۰



◀ حل: نمودار ون را رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو). تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند را  $c$  در

نظر می‌گیریم که مجهول است، پس مسأله را با  $c$  ادامه می‌دهیم؛ بنابراین نمودار به‌صورت مقابل است.

$40 = (21 - c) + c + (17 - c) + 7$

$\Rightarrow 40 = 45 - c \Rightarrow c = 5$

پس ۵ نفر عضو هر دو گروه هستند. تعداد نفراتی که فقط عضو گروه سرود هستند  $17 - 5 = 12$  نفرند.

نکته ۴۴ در حل مسائل مربوط به معادله‌های مجموعه‌ای، به تبدیل کلمات کلیدی زیر توجه کنید:

(الف)  $A$  و  $B$  معادل  $A \cap B$  است. (ب)  $A$  یا  $B$  معادل  $A \cup B$  است. (پ) «حداقل  $A$  یا  $B$ » معادل  $A \cup B$  است.  
(ت) فقط  $A$  معادل  $A - B$  است. (ث) فقط  $A$  یا فقط  $B$  معادل  $(A - B) \cup (B - A)$  است. (ه) «به جز  $A$ » معادل  $A'$  است.

■ مثال: یک روستا ۴۰۰ کشاورز دارد که ۳۰۰ نفر از آنها گندم یا جو می‌کارند. در صورتی که ۲۱۰ نفر گندم و ۱۴۰ نفر جو بکارند، آنگاه:

(الف) چند نفر هم گندم می‌کارند و هم جو؟ (ب) چند نفر فقط گندم می‌کارند؟ (پ) چند نفر جو نمی‌کارند؟

راه حل اول: استفاده‌ی مستقیم از فرمول اجتماع:

(الف) در این سؤال  $n(U) = 400$  (مجموعه‌ی کشاورزان روستاست) و  $A$  مجموعه‌ی کشاورزانی که گندم می‌کارند، پس  $n(A) = 210$  و  $B$  مجموعه‌ی کشاورزانی که جو می‌کارند پس  $n(B) = 140$ ، لذا طبق فرمول اجتماع داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow 300 = 210 + 140 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 50$$

(ب) تعداد کشاورزانی که فقط گندم می‌کارند، برابر است با:

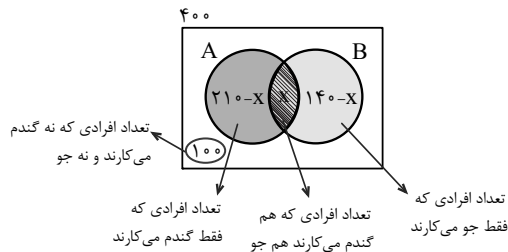
تعداد کشاورزانی که هم گندم می‌کارند و هم جو - تعداد کشاورزانی که گندم می‌کارند = تعداد کشاورزانی که فقط گندم می‌کارند

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 210 - 50 = 160$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 400 - 140 = 260$$

(پ) تعداد کشاورزانی که جو نمی‌کارند، برابر است با:

راه حل دوم: استفاده از نمودار ون: چون  $n(A \cap B)$  مجهول است، با فرض  $n(A \cap B) = x$ ، نمودار ون را کامل می‌کنیم.  
(الف)



$$n(A \cup B) = 300$$

$$\Rightarrow 300 = (210 - x) + x + (140 - x) \Rightarrow x = 50$$

(ب) باید  $210 - x$  را بیابیم، پس:

$$\xrightarrow{x=50} 210 - 50 = 160 = \text{تعداد افرادی که فقط گندم می‌کارند.}$$

(پ) تعداد افرادی که جو نمی‌کارند برابر است با:

$$400 - 140 = 260$$

صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۱

تیپ ۷

دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا)

۱) ۶۱- اگر  $E - F = E$  باشد، چه رابطه‌ای بین دو مجموعه‌ی ناتهی  $E$  و  $F$ ، همواره برقرار است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه ۱) و (آزمون کانون - ۲۲ آذر ۹۲)

(۴)  $E$  و  $F$  دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند

$$(۳) E = F$$

$$(۲) F \subset E$$

$$(۱) E \subset F$$

۲) ۶۲- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم در مجموعه‌ی مرجع  $U$  باشند، مجموعه‌ی  $[(A - B) \cup (B - A)]'$  برابر کدام مجموعه است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۰- فعالیت- مرتبط با ۱) و (آزمون کانون- ۷ آبان ۹۵)

$$(۴) A' \cap B'$$

$$(۳) A' \cap B$$

$$(۲) A' \cup B'$$

$$(۱) A \cup B$$

۳) ۶۳- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟ ( $U$  مجموعه‌ی مرجع است.)

(ریاضی ۱- صفحه ۱۰- فعالیت- مرتبط با ۱) و (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

$$(۴) (A \cup B)' = \emptyset$$

$$(۳) A - B = \emptyset$$

$$(۲) A \cup B = U$$

$$(۱) (A \cap B)' = U$$

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ ریاضی ۱

تیپ ۸

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۴) ۶۴- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم و  $U$  مجموعه‌ی مرجع باشد، در صورتی که  $n(A) = 4$  و  $n(B) = 9$ ، آنگاه  $n(A \cup B)$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۰- فعالیت- مرتبط با ۲)

$$(۴) 9$$

$$(۳) 26$$

$$(۲) 5$$

$$(۱) 13$$

۵) ۶۵- اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع  $U$ ،  $n(A) = 14$ ،  $n(A \cup B) = 25$  و  $A \cap B \neq \emptyset$  باشند، تعداد اعضای مجموعه‌ی  $A \cap B$  حداکثر چقدر است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۳- مرتبط با تمرین ۳)

$$(۴) 14$$

$$(۳) 13$$

$$(۲) 12$$

$$(۱) 11$$

۶) ۶۶- اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع  $U$ ،  $n(A) = 14$ ،  $n(A') = 10$  و  $n(B') = 8$  باشند، آنگاه  $n(B)$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

$$(۴) 7$$

$$(۳) 9$$

$$(۲) 8$$

$$(۱) 16$$

۷) ۶۷- مجموعه‌ی  $A$ ، ۱۰ عضوی و مجموعه‌ی  $B$ ، ۵ عضوی است. اگر مجموعه‌ی  $A - (A \cap B)$ ، ۷ عضوی باشد، مجموعه‌ی  $A \cup B$  چند عضو دارد؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) و (آزمون کانون- ۹ آبان ۹۳)

$$(۴) 15$$

$$(۳) 13$$

$$(۲) 12$$

$$(۱) 7$$

۸) ۶۸- اگر  $A$  و  $B$ ، دو مجموعه و  $n(A - B) = 12$  و  $n(B - A) = 14$  و  $n(A \cup B) = 31$  باشند، آنگاه  $n(A)$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

$$(۴) 23$$

$$(۳) 21$$

$$(۲) 19$$

$$(۱) 17$$

۹-۶۹ اگر  $n(A) = 18$  و  $n(A \cap B) = 15$  باشد، مقدار  $n(A \cap B')$  کدام است؟ (A و B زیرمجموعه‌ای از U هستند).

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مشابه تمرین ۴)

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

۱۰-۷۰ اگر مجموعه‌ی A،  $2m$  عضو و مجموعه‌ی B، n عضو و مجموعه‌ی  $A \cap B$ ،  $\frac{m+n}{2}$  عضو داشته باشد، مجموعه‌ی  $(A-B) \cup (B-A)$  چند

عضو خواهد داشت؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴) و (آزمون کانون - ۸ بهمن ۹۵)

- m (۱) n (۲) m+n (۳) m+2n (۴)

۱۱-۷۱ اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید کدام

است؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴) و (سراسری انسانی - ۹۴)

- ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

۱۲-۷۲ مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴) و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۴)

- ۴۰ (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴)

۱۳-۷۳ در یک کلاس درس، ۱۹ نفر به تاریخ و ۱۴ نفر به جغرافی علاقه‌مندند و ۶ نفر به هر دو درس و ۵ نفر به هیچ‌کدام از این دو درس علاقه‌ای ندارند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۵)

- ۳۰ (۱) ۳۲ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴)

۱۴-۷۴ در یک کلاس ۲۰ نفری، ۷-X نفر فقط در درس ریاضی و  $\frac{2}{3}X$  نفر فقط در درس علوم نمره‌ی بالای ۱۵ گرفته‌اند. اگر تعداد کسانی که در هر

دو درس نمره‌ی بالای ۱۵ گرفته‌اند یا در هیچ‌کدام نمره‌ی بالای ۱۵ نگرفته‌اند، برابر با ۱۲ باشد، تعداد کل افراد کلاس کدام است؟

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۶) و (آزمون کانون - ۶ مرداد ۹۶)

- ۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

۱۵-۷۵ در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌ی هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامه‌ی علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر آنها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر آنان در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۲ - کار در کلاس - مشابه ۲) و (سراسری انسانی - ۹۵)

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۶-۷۶ در یک کلاس ۳۰ نفری، اگر ۹ نفر در برنامه‌های پژوهشی و ۴ نفر هم در هر دو نوع برنامه‌ی پژوهشی و پرورشی شرکت کرده باشند و ۷ نفر در هیچ‌کدام از برنامه‌ها شرکت نکرده باشند، چند نفر فقط در برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۶) و (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

- ۱۴ (۱) ۱۳ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴)

۱۷-۷۷ در یک مهمانی ۲۵ نفر شرکت کرده‌اند. اگر ۱۴ نفر چای و ۱۷ نفر قهوه نوشیده باشند و ۶ نفر نه چای و نه قهوه نوشیده باشند، چند نفر حداکثر یک نوع نوشیدنی نوشیده‌اند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۶) و (آزمون کانون - ۲۴ شهریور ۹۶)

- ۱۲ (۱) ۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۹ (۴)

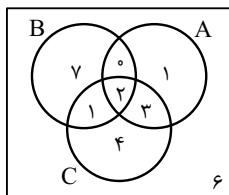
۱۸-۷۸ در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۳ نفر فوتبال و ۱۷ نفر والیبال بازی می‌کنند. اگر ۱۳ نفر نه فوتبال بازی کنند و نه والیبال، چند نفر حداقل یکی از دو رشته را بازی می‌کنند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۶)

- ۱۲ (۱) ۱۹ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

۱۹-۷۹ در یک نظرسنجی از ۱۲۰ نفر در شهر تهران، مشخص شد که ۷۲ نفر در یک هفته‌ی گذشته از مترو و ۴۹ نفر از اتوبوس استفاده کرده‌اند. همچنین ۲۴ نفر از آنها اعلام کرده‌اند که در این مدت از هر دو وسیله‌ی نقلیه استفاده کرده‌اند. چند نفر دقیقاً از یکی از دو وسیله استفاده کرده‌اند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۶)

- ۵۶ (۱) ۶۸ (۲) ۷۳ (۳) ۵۲ (۴)

۲۰-۸۰ یک باشگاه ورزشی دارای سه وسیله‌ی A (دارت)، B (تنیس روی میز) و C (بیلیارد) است. نمودار زیر، تعداد اعضای این باشگاه را نمایش می‌دهد. چند نفر در این باشگاه از تنیس روی میز یا بیلیارد استفاده می‌کنند؟ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - مرتبط با تمرین ۴)



۱۴ (۱)

۱۷ (۲)

۱۵ (۳)

۱۲ (۴)

## ۳. الگو و دنباله

## الگو (الگوهای خطی و الگوهای غیرخطی)

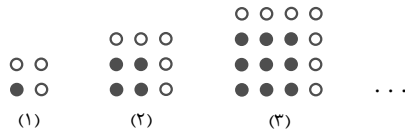
## صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰ ریاضی ۱

## الگو (الگوهای خطی و الگوهای غیرخطی)

یافتن یک مدل یا الگوی ریاضی برای پدیده‌ها، طرح‌های هندسی یا آزمایش‌های متوالی، نیاز به سازماندهی و تنظیم اطلاعات دارد. استفاده از جدول در پیدا کردن یک مدل ریاضی کمک می‌نماید. در این سازماندهی، شکل‌ها را با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و  $n$  ... مقدار آنها را با  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  و ... نمایش می‌دهیم.  $a_n$  را جمله  $n$ ام یا جمله عمومی الگو می‌نامیم و با در اختیار بودن آن می‌توانیم کلیه جملات الگو را بیابیم. برای یافتن یک مدل ریاضی، رابطه‌ای بین شماره‌ی هر مرحله (اندیس جمله) و مقدار آن (مقدار جمله) می‌یابیم که این رابطه در تمامی مراحل (شکل‌ها) ثابت است.

**مثال:** در شکل زیر، اگر  $a_n$  الگوی تعداد دایره‌های رنگی و  $b_n$  الگوی تعداد دایره‌های غیر رنگی باشد، جدول را کامل کنید و سپس  $a_n$  و  $b_n$  را پیدا کنید. چند دایره‌ی غیر رنگی در مرحله‌ی دهم داریم؟ آیا در مرحله‌ی تعداد دایره‌های رنگی ۸۸ خواهد بود؟

حل:



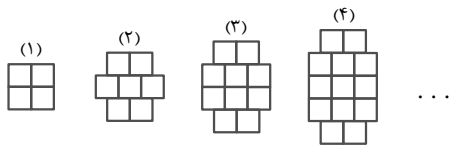
| شماره‌ی شکل | ۱        | ۲        | ۳        | ... | $n$      |
|-------------|----------|----------|----------|-----|----------|
| الگوی $a_n$ | $۱^۲$    | $۲^۲$    | $۳^۲$    | ... | $n^۲$    |
| الگوی $b_n$ | $۲(۱)+۱$ | $۲(۲)+۱$ | $۲(۳)+۱$ | ... | $۲(n)+۱$ |

بنابراین  $b_n = 2n + 1$  و  $a_n = n^2$ . تعداد دایره‌های غیر رنگی در مرحله‌ی دهم برابر  $b_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$ . مرحله‌ای که تعداد دایره‌های رنگی برابر ۸۸ باشد وجود ندارد، زیرا مربع هیچ عدد طبیعی برابر ۸۸ نخواهد بود یعنی معادله  $a_n = n^2 = ۸۸$  جواب طبیعی ندارد.

**الگوهای خطی** اگر جمله عمومی یک الگو به صورت  $t_n = an + b$  باشد ( $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت)، آن الگو را خطی می‌نامیم. یک الگوی خطی، نقاطی به مختصات  $(n, t_n)$  بر روی خط  $y = ax + b$  هستند که در آن  $n$  عددی طبیعی است. در این حالت، میزان تغییر جملات، به ازای تغییرات  $n$ ، شیب خط، یعنی عدد  $a$  است.

**نتیجه:** وقتی یک الگو خطی است که میزان تغییر جملات متوالی، مقدار ثابتی باشد این مقدار ثابت برابر با ضریب  $n$ ، یعنی عدد  $a$  (شیب خط) است.

**مثال:** آیا اعداد  $۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \dots$  یک الگوی خطی را نمایش می‌دهند؟  
**حل:** اختلاف هر دو جمله متوالی، مقدار ثابت ۵ است، پس الگوی داده شده خطی است.  
 $۷ - ۲ = ۱۲ - ۷ = ۱۷ - ۱۲ = ۵$



**مثال:** مطابق الگوی زیر، چند مربع کوچک در مرحله‌ی دهم خواهیم داشت؟

حل: ابتدا داده‌ها را سازماندهی می‌کنیم.

| مرحله                            | ۱ | ۲ | ۳  | ۴  | ... |
|----------------------------------|---|---|----|----|-----|
| مقدار جمله (تعداد مربع‌های کوچک) | ۴ | ۷ | ۱۰ | ۱۳ | ... |
| اختلاف جملات                     |   | ۳ | ۳  | ۳  | ... |

اختلاف جملات متوالی، مقدار ثابت ۳ است، الگو خطی است، شیب خط  $a = ۳$  و جمله اول ۴ است، پس  $b = ۱$  و جمله عمومی به صورت  $t_n = 3n + 1$  است. در مرحله‌ی دهم  $t_{10} = 3 \times 10 + 1 = ۳۱$  مربع داریم.

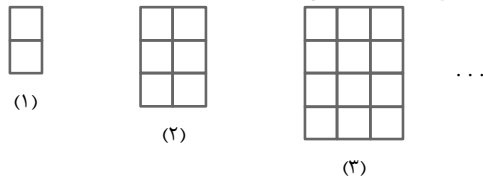
**مثال:** اگر جملات چهارم و نهم یک الگوی خطی به ترتیب ۱۴ و ۲۹ باشند، جمله عمومی این الگو را بیابید.

حل: جمله عمومی الگوی خطی را  $t_n = an + b$  فرض می‌کنیم، بنابراین طبق فرض داریم:

$$t_4 = 14 \Rightarrow \begin{cases} 14 = 4a + b \\ 29 = 9a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} 29 - 14 = 5a \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a=3} 14 = 4 \times 3 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 3n + 2$$

**الگوهای غیر خطی** هرگاه در یک الگو، اختلاف هر دو جمله متوالی مقدار ثابتی نباشد، الگو، غیر خطی است. به مثال‌های زیر توجه کنید.

**مثال:** در شکل زیر، تعداد مربع‌های کوچک، از الگوی منظمی پیروی می‌کند. فرمولی برای تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله بیابید.

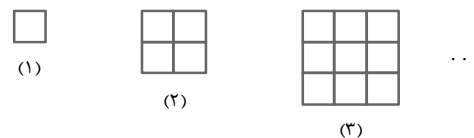


حل: با کمی دقت می‌بینیم که مقدار هر جمله (تعداد مربع‌های کوچک)، مربع شماره‌ی همان جمله به اضافه‌ی شماره‌ی همان جمله است، به جدول زیر توجه کنید:

| مرحله      | ۱         | ۲         | ۳         | ... | $n$       |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|
| مقدار جمله | $۱^۲ + ۱$ | $۲^۲ + ۲$ | $۳^۲ + ۳$ | ... | $n^۲ + n$ |

بنابراین  $a_n = n^2 + n$ . این الگو را یک الگوی درجه‌ی دوم می‌نامیم.

**مثال:** در شکل زیر، تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله، از الگوی منظمی پیروی می‌کند. فرمولی برای تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله بیابید.



حل: با کمی دقت می‌بینیم که مقدار هر جمله (تعداد مربع‌های کوچک)، مربع شماره‌ی همان جمله است، به جدول زیر توجه کنید:

| مرحله                            | ۱     | ۲     | ۳     | ... | $n$   |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| مقدار جمله (تعداد مربع‌های کوچک) | $۱^۲$ | $۲^۲$ | $۳^۲$ | ... | $n^۲$ |

بنابراین  $a_n = n^2$ . این الگو را الگوی مربعی می‌نامیم.

مثال: برای الگوی زیر، یک مدل ریاضی ارائه دهید. شکل هفتم از چند دایره تشکیل شده است؟  
 حل: جملات این الگو را به صورت زیر تنظیم می‌کنیم.



|                |   |     |       |         |     |             |
|----------------|---|-----|-------|---------|-----|-------------|
| مرحله          | ۱ | ۲   | ۳     | ۴       | ... | n           |
| تعداد دایره‌ها | ۱ | ۱+۲ | ۱+۲+۳ | ۱+۲+۳+۴ | ... | ۱+۲+۳+...+n |

$\Rightarrow a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  (الگوی مثلثی)

بنابراین:

پس در شکل هفتم  $a_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ ، بنابراین  $a_7 = 28$ .

نتیجه: هر الگویی که هر جمله‌ی آن، مساوی مجموع اعداد طبیعی، از ۱ تا شماره‌ی همان جمله باشد را یک الگوی مثلثی می‌نامیم و جمله‌ی عمومی آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

جملات الگوی مثلثی به صورت زیر هستند:

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ...

۱) (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۶- مرتبط با پاراگراف ۲)

۱-۸۱ کدام یک از الگوهای زیر خطی است؟

- (۱)  $1, -2, 1, -2, \dots$  (۲)  $7, 11, 17, 25, \dots$  (۳)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$  (۴)  $2, 4, 8, 16, \dots$

۲) ۱-۸۲ در یک الگوی خطی جمله‌ی سوم برابر با ۷ و جمله‌ی هفتم برابر با ۱۵ است. جمله‌ی عمومی این الگو کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۶- مشابه مثال) و (آزمون کانون- ۱۹ آذر ۹۵)

- (۱)  $t_n = n + 8$  (۲)  $t_n = 3n - 2$  (۳)  $t_n = n + 4$  (۴)  $t_n = 2n + 1$

۳) ۱-۸۳ در یک الگوی خطی با جملات متمایز، حاصل کدام عبارت برابر جمله‌ی سیزدهم نیست؟

- (۱)  $5a_5 - 4a_3$  (۲)  $\frac{a_8 + a_{18}}{2}$  (۳)  $\frac{5a_{20} - a_{24}}{4}$  (۴)  $\frac{5a_8 + a_{28}}{6}$

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه ۱)

۴) ۱-۸۴ در شکل مقابل، تعداد قطعه‌ها در طرح دهم برابر است با:

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۷ (۳) ۴۱ (۴) ۴۷
- 

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۷- کار در کلاس- مشابه ۱)

۵) ۱-۸۵ برای ساختن حرف X الگوی زیر را داریم. با توجه به این الگو، دهمین شکل، دارای چند مربع است؟

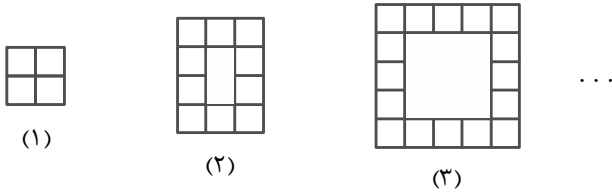
- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴) ۴۲
- 

۶) ۱-۸۶ شکل زیر، چوب‌کبریت‌های استفاده شده در هر مرحله‌ی طرح را نمایش می‌دهد. در کدام مرحله‌ی طرح، تعداد چوب‌کبریت‌های استفاده شده ۲۴۵ خواهد بود؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۵- فعالیت- مشابه ۱)

- (۱) ۳۸ (۲) ۴۸ (۳) ۳۴ (۴) ۴۴
-

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۷- کار در کلاس- مشابه ۱)



۸۷- با توجه به شکل زیر، در مرحله‌ی هفتم چند مربع کوچک خواهیم داشت؟

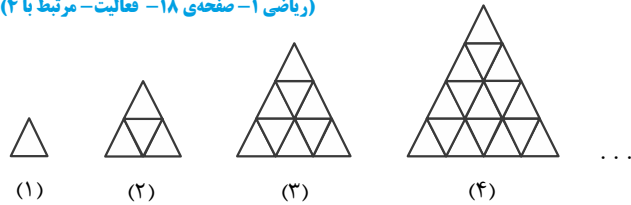
- (۱) ۴۰  
(۲) ۳۶  
(۳) ۶۴  
(۴) ۵۰

صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰ ریاضی ۱

تیپ ۱۰

الگوهای غیرخطی

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۴)

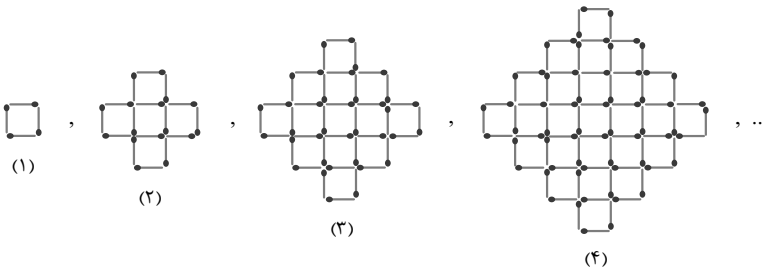


۸۸- مطابق شکل زیر، در طرح هفتم، چند مثلث کوچک داریم؟

- (۱) ۲۷  
(۲) ۳۵  
(۳) ۴۹  
(۴) ۳۶

۸۹- با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تعداد چوب‌کبریت‌ها برابر ۱۹۶ است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۴) و (آزمون کانون- ۱۸ فروردین ۹۶)



- (۱) ۶  
(۲) ۷  
(۳) ۱۴  
(۴) ۱۶

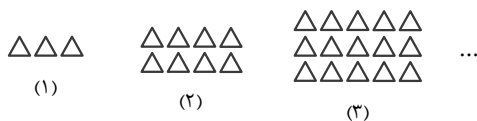
۹۰- درخت نسبت‌های خویشاوندی (شجره‌نامه) برای یک خانواده به صورت زیر است. مرحله‌ی دوازدهم چند نفرند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۴)



- (۱) ۱۰۲۴  
(۲) ۵۷۶  
(۳) ۴۰۹۶  
(۴) ۵۱۲

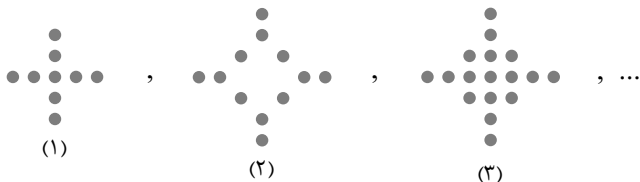
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۰- مرتبط با تمرین ۲) و (آزمون کانون- ۱۷ آذر ۹۶)



۹۱- در الگوی زیر، شکل دهم از چند مثلث تشکیل شده است؟

- (۱) ۸۶  
(۲) ۹۸  
(۳) ۱۱۲  
(۴) ۱۲۰

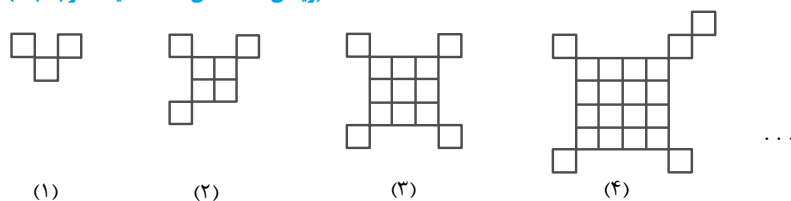
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۰- مشابه تمرین ۲) و (آزمون کانون- ۳ آذر ۹۶)



۹۲- در چندمین شکل از الگوی غیرخطی زیر، تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱۲۹ می‌شود؟

- (۱) ۷  
(۲) ۱۱  
(۳) ۱۹  
(۴) ۱۰

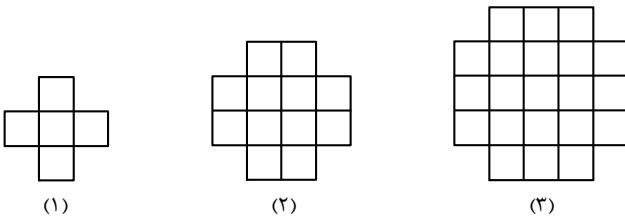
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۸- فعالیت- مرتبط با ۳)



۹۳- در الگوی زیر، شکل شماره‌ی ۹ چند مربع کوچک دارد؟

- (۱) ۹۱  
(۲) ۸۷  
(۳) ۸۳  
(۴) ۷۹

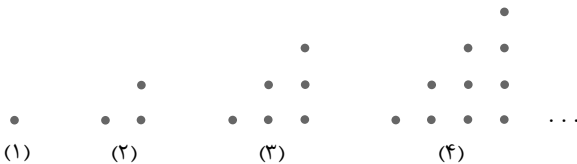
(ریاضی ۱ - صفحه ۱۸ - فعالیت - مشابه ۴)



۱۴) ۹۴- در الگوی زیر، شکل ششم از چند مربع کوچک تشکیل شده است؟

- ۶۴ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۵۶ (۳)
- ۵۴ (۴)

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۴)



۱۵) ۹۵- در طرح زیر، تعداد نقطه‌ها در مرحله هشتم، چند تا است؟

- ۳۶ (۱)
- ۴۴ (۲)
- ۵۸ (۳)
- ۲۹ (۴)

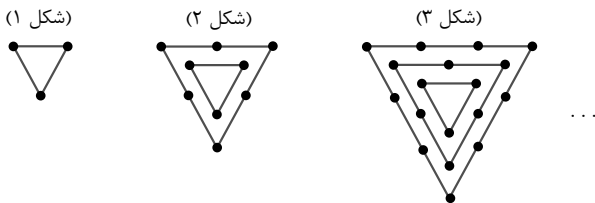
(ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۴) و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۸۶)



۱۶) ۹۶- در آرایه‌ی مثلثی مقابل، مجموع دایره‌ها در دو شکل یازدهم و دوازدهم کدام است؟

- ۱۲۱ (۱)
- ۱۴۴ (۲)
- ۱۴۵ (۳)
- ۱۴۸ (۴)

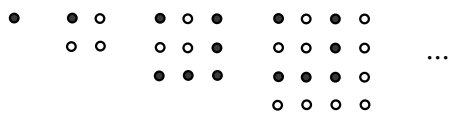
(ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مشابه ۴)



۱۷) ۹۷- با توجه به الگوی زیر، شکل ششم از چند نقطه‌ی توپر تشکیل شده است؟

- ۳۲ (۱)
- ۴۳ (۲)
- ۵۳ (۳)
- ۶۳ (۴)

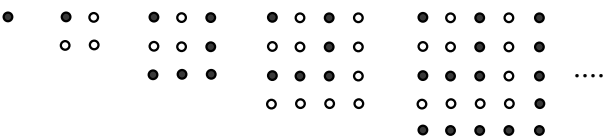
(ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۴) و (سراسری انسانی - ۸۳)



۱۸) ۹۸- در الگوی شکل زیر، شکل دهم چند عضو سفید دارد؟

- ۵۵ (۱)
- ۷۲ (۲)
- ۶۵ (۳)
- ۵۶ (۴)

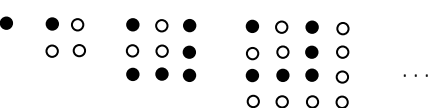
(ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۴) و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۸۸)



۱۹) ۹۹- در الگوی مقابل، تعداد صفرهای توخالی در شکل دوازدهم کدام است؟

- ۵۵ (۱)
- ۶۶ (۲)
- ۷۲ (۳)
- ۷۸ (۴)

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - کار در کلاس - مرتبط با ۴) و (سراسری انسانی - ۸۶)



۲۰) ۱۰۰- در آرایه زیر، تفاضل تعداد صفرهای توپر در دو شکل دهم و یازدهم کدام است؟

- صفر (۱)
- ۱۷ (۲)
- ۱۹ (۳)
- ۲۱ (۴)

## ۳. الگو و دنباله

## دنباله‌ها

## صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ ریاضی ۱

## دنباله‌ها

هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. دنباله‌ها را به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

که در آن  $a_1$  جمله‌ی اول،  $a_2$  جمله‌ی دوم و به همین ترتیب  $a_n$ ، جمله‌ی  $n$ ام یا جمله‌ی عمومی نامیده می‌شود.

[۱] معلوم بودن جمله‌ی عمومی: وقتی جمله‌ی عمومی معلوم است، می‌توان مقدار هر جمله، رابطه‌ای بین جملات، تعداد جملات منفی یا مثبت و ... دنباله را به دست آورد. توجه کنید که در تمامی این حالت‌ها، مقادیر  $n$  (شماره‌ی جملات) متعلق به اعداد طبیعی هستند.

■ مثال: اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = n^2 - 5n$  باشد، چهار جمله‌ی اول دنباله را یافته و آنها را بنویسید.

$$a_1 = 1^2 - 5 \times 1 = -4, \quad a_2 = 2^2 - 5 \times 2 = -6, \quad a_3 = 3^2 - 5 \times 3 = -6, \quad a_4 = 4^2 - 5 \times 4 = -4$$

◀ حل:

بنابراین جملات دنباله به صورت  $\dots, n^2 - 5n, \dots, -4, -6, -6, -4$  خواهند بود.

■ مثال: چند جمله از دنباله با جمله‌ی عمومی  $a_n = (-1)^{2n+1}(3n-19)$ ، مثبت است؟

◀ حل: باید تعدادی جمله‌هایی را بیابیم که  $a_n > 0$ ، از آن جایی که  $2n^2$  به ازای هر مقدار طبیعی  $n$ ، عددی زوج است، پس  $2n^2 + 1$  همواره عددی فرد است، در نتیجه  $(-1)^{2n^2+1} = -1$ :

$$a_n = (-1)^{2n+1}(3n-19) > 0 \Rightarrow -(3n-19) > 0 \Rightarrow 3n-19 < 0 \Rightarrow n < \frac{19}{3}$$

بنابراین مجموعه مقادیر قابل قبول  $n$ ، برابر  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  است و شش جمله مثبت است.

[۲] معلوم بودن جملات دنباله: با در اختیار داشتن جملات یک دنباله، در اغلب موارد می‌توانیم با یافتن رابطه‌ای بین هر دو جمله‌ی متوالی، جمله‌ی عمومی دنباله و جملات دیگر دنباله را بیابیم.

■ مثال: یک جمله‌ی عمومی برای دنباله‌ی  $\dots, -25, -16, -9, -4, -1$  بیابید.

◀ حل: با کمی دقت می‌بینیم که جملات ردیف فرد همگی منفی و جملات ردیف زوج همگی مثبت‌اند و از نظر قدر مطلق، مقدار هر جمله برابر مربع شماره‌ی آن جمله‌ی است، پس جمله‌ی عمومی به صورت  $a_n = (-1)^n n^2$  می‌تواند باشد.

[۳] دنباله‌های معروف: در جدول زیر معروفترین دنباله‌هایی که به آن‌ها در تست‌ها برخورد می‌کنیم، آورده شده است. در هر یک از آن‌ها  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی‌اند.

| نام دنباله          | جمله‌ی عمومی                    | ویژگی جملات دنباله  |
|---------------------|---------------------------------|---|
| دنباله‌ی ثابت       | $t_n = c$                       | اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، صفر است.  |
| دنباله‌ی خطی        | $t_n = an + b$                  | اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، مقداری ثابت است.  |
| دنباله‌ی درجه‌ی دوم | $t_n = an^2 + bn + c, a \neq 0$ | اختلاف جملات متوالی، خود یک دنباله‌ی خطی تشکیل می‌دهند. در این حالت اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی خطی برابر $2a$ است. |
| دنباله‌ی مربعی      | $t_n = n^2$                     | هر جمله‌ی آن، مربع شماره‌ی آن جمله است.   |
| دنباله‌ی مثلثی      | $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$        | هر جمله‌ی آن، برابر مجموع اعداد طبیعی، از ۱ تا شماره‌ی همان جمله است.   |

■ مثال: آیا دنباله‌ی  $\dots, 20, 12, 6, 2, 0$ ، می‌تواند یک دنباله‌ی درجه‌ی دوم را نمایش دهد؟ جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \\ 2 & 2 & 2 & & & & \end{array}$$

◀ حل: چون اختلاف جملات متوالی، خود یک دنباله‌ی خطی تشکیل می‌دهند، پس دنباله‌ی داده شده،

مربوط به یک دنباله‌ی درجه‌ی دوم است. جمله‌ی عمومی را  $t_n = an^2 + bn + c$  در نظر می‌گیریم.

چون اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی خطی ۲ است، پس  $2a = 2$  در نتیجه  $a = 1$ . برای یافتن  $b$  و  $c$

کافی است دو جمله از دنباله را در نظر بگیریم.  $t_1 = 0$  و  $t_2 = 2$  داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \\ t_2 = 2 \Rightarrow 4 + 2b + c = 2 \Rightarrow 2b + c = -2 \end{cases}$$

با حل دستگاه  $b = -1$  و  $c = 0$  به دست می‌آید و در نتیجه جمله‌ی عمومی دنباله به صورت  $t_n = n^2 - n$  است.



نکته: از دنباله‌ی مثلثی نتیجه می‌گیریم که مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا  $n$  برابر است با:

$$(۱) \quad ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$

و با استفاده از آن خواهیم داشت:

$$(۲) \quad ۲ + ۴ + ۶ + \dots + 2n = n(n+1) \quad \text{مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی از ۲ تا } 2n$$

$$(۳) \quad ۱ + ۳ + ۵ + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \text{مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی از ۱ تا } 2n-1$$

[ ۴ ] دنباله‌های بازگشتی: هر گاه در یک دنباله، بین دو جمله متوالی یا دو یا چند جمله قبل از آن رابطه‌ی معینی برقرار باشد، دنباله را بازگشتی می‌نامیم.

مثال: در دنباله‌ی  $\dots, ۱۳, ۸, ۳, ۲, ۱, ۱$ ، جملات هشتم و نهم را بیابید.

حل: با کمی دقت می‌بینیم که از جمله سوم به بعد، هر جمله برابر مجموع دو جمله قبل از خود است، پس جمله هشتم  $۸ + ۱۳ = ۲۱$  و جمله نهم  $۲۱ + ۱۳ = ۳۴$  است.

مثال: در دنباله‌ی اعداد  $a_1 = ۳, a_{n+1} = a_n - ۱$ ، جمله چهارم این دنباله را بیابید.

$$n=1 \Rightarrow a_{1+1} = a_1 - 1 \Rightarrow a_2 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a_2 = 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_{2+1} = a_2 - 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$n=3 \Rightarrow a_{3+1} = a_3 - 1 \Rightarrow a_4 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$$

صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ ریاضی ۱

تیپ ۱۱

دنباله‌ها

۱۰۱- اگر جمله عمومی یک دنباله، به صورت  $a_n = 2(-2)^{n+1}$  باشد، جمله چندم این دنباله برابر ۱۲۸ است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (آزمون کانون- ۹۳ آبان ۹۳)

(۱) چهارم (۲) پنجم (۳) هفتم (۴) هشتم

۱۰۲- چند جمله از دنباله با جمله عمومی  $a_n = 3n - 13$ ، منفی است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مشابه ۲) و (آزمون کانون- ۲۵ آبان ۹۳)

(۱) سه جمله (۲) چهار جمله (۳) دو جمله (۴) بی‌شمار

۱۰۳- در دنباله با جمله عمومی  $a_n = \frac{n}{81} + (-\frac{1}{3})^n$ ، چند جمله منفی وجود دارد؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

(۱) دو جمله (۲) یک جمله (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۱۰۴- جمله عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = bn^2 + cn$  است. اگر جملات اول و دوم این دنباله به ترتیب برابر ۳ و ۸ باشند، جمله دهم آن کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (آزمون کانون- ۲۲ آذر ۹۲)

(۱) ۴۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۶۰

۱۰۵- حاصلضرب شش جمله اول دنباله با جمله عمومی  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

(۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $-\frac{1}{7}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $-\frac{1}{8}$

۱۰۶- در دنباله با جمله عمومی  $a_n = (-1)^{n+1} \times n$ ، مجموع ۲۰۰ جمله اول این دنباله کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

(۱) -۱ (۲) -۱۰۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱

۱۰۷- اگر چند جمله اول یک دنباله به صورت  $\dots, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$  باشد، جمله عمومی آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مشابه ۳)

(۱)  $a_n = \frac{2n-1}{n}$  (۲)  $a_n = \frac{2n+1}{n}$  (۳)  $a_n = \frac{2n+1}{2n}$  (۴)  $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

۸-۱۰۸ از بین گزینه‌های زیر، کدام جمله‌ی عمومی نمی‌تواند مربوط به جملات نوشته شده از دنباله‌ی داده شده باشد؟

(ریاضی ۱- صفحه ۱۹- کار در کلاس- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون- ۱۰ آبان ۹۲)

$$\begin{aligned} (1) & \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 1 \\ (2) & \dots, n, \dots, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \\ (3) & \dots, (-3)^n, \dots, 9, -27, 1, -3 \\ (4) & \dots, n^2 - 2^n, \dots, 1, 0, -1 \end{aligned}$$

۹-۱۰۹ جمله‌ی هفتم از دنباله‌ی اعداد  $\dots, \frac{4}{17}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$  کدام است؟

$$(1) \frac{0}{12} \quad (2) \frac{0}{14} \quad (3) \frac{0}{15} \quad (4) \frac{0}{17}$$

۱۰-۱۱۰ در دنباله‌ی درجه‌ی دوم  $\dots, 35, 22, 12, 5, 1$ ، جمله‌ی سی‌ام چه عددی است؟

$$(1) 1335 \quad (2) 1334 \quad (3) 1336 \quad (4) 1337$$

۱۱-۱۱۱ در دنباله‌ی درجه‌ی دوم  $\dots, 10, 6, 3, 1$ ، مجموع جملات هفتم و هشتم، برابر کدام است؟

$$(1) 49 \quad (2) 56 \quad (3) 64 \quad (4) 81$$

۱۲-۱۱۲ در دنباله‌ی درجه‌ی دوم  $\dots, 10, 6, 3, 1$ ، اگر هر جمله را با جمله‌ی قبل از خودش جمع کنیم جمله‌ی بیست و پنجم دنباله‌ی جدید کدام است؟

$$(1) 676 \quad (2) 625 \quad (3) 576 \quad (4) 400$$

صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ ریاضی ۱

تیپ ۱۲

دنباله‌های بازگشتی

۱۳-۱۱۳ در دنباله‌ی  $\dots, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0$ ، مجموع جملات هشتم و نهم کدام است؟

$$(1) 47 \quad (2) 55 \quad (3) 34 \quad (4) 70$$

۱۴-۱۱۴ رابطه‌ی  $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$  بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر  $U_1 = U_7 = 1$  باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟

$$(1) 35 \quad (2) 34 \quad (3) 33 \quad (4) 32$$

۱۵-۱۱۵ در دنباله‌ی  $\dots, 375, 75, 15, 3$ ، مجموع جملات  $n$ ام و  $(n+1)$ ام، چند برابر جمله‌ی  $(n-1)$ ام می‌تواند باشد؟

$$(1) 50 \quad (2) 45 \quad (3) 30 \quad (4) 25$$

۱۶-۱۱۶ در دنباله‌ای با جمله‌ی  $n$ ام  $a_n$  داریم  $a_{n+1} = a_n + (n+1)$  و  $a_1 = 1$ ، جمله‌ی هشتم کدام است؟

$$(1) 36 \quad (2) 35 \quad (3) 32 \quad (4) 28$$

۱۷-۱۱۷ در دنباله‌ی اعداد  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، جمله‌ی دهم، کدام است؟

$$(1) 979 \quad (2) 987 \quad (3) 1015 \quad (4) 1023$$

۱۸-۱۱۸ در دنباله‌ی اعداد  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ، جمله‌ی بیست و سوم کدام است؟

$$(1) 484 \quad (2) 517 \quad (3) 529 \quad (4) 576$$

۱۹-۱۱۹ در یک دنباله‌ی اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

$$(1) 127 \quad (2) 159 \quad (3) 247 \quad (4) 255$$

۲۰-۱۲۰ در یک دنباله‌ی اعداد  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل  $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

$$(1) 32 \quad (2) 48 \quad (3) 56 \quad (4) 64$$

صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ ریاضی ۱

## دنباله‌ی حسابی

دنباله‌ی حسابی: یک دنباله‌ی حسابی، دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن (به غیر از جمله‌ی اول)، از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید، این مقدار ثابت (تفاضل مشترک) را قدر نسبت دنباله‌ی حسابی می‌نامیم.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با  $t_1$  و قدر نسبت آن را با  $d$  نمایش دهیم، آنگاه:

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 & , & t_2 & , & t_3 & , & t_4 & , & \dots & , & t_n & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ t_1 & & t_1+d & & t_1+2d & & t_1+3d & & & & t_1+(n-1)d & & \end{array}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

از آنجایی که  $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \dots = d$  در نتیجه:

$$t_{n+1} - t_n = d \quad \text{یا} \quad t_{n+1} = t_n + d$$

مثال: نشان دهید دنباله‌ی  $3, 9, 15, 21, \dots$  یک دنباله‌ی حسابی است. سه جمله‌ی بعدی دنباله را بیابید و جمله‌ی عمومی آن را پیدا کنید.

حل: چون تفاضل هر جمله از جمله‌ی قبلی مقدار ثابتی است، دنباله حسابی است.

$$9 - 3 = 15 - 9 = 21 - 15 = \dots = 6 \Rightarrow d = 6 \quad (\text{دنباله حسابی است})$$

برای یافتن جملات بعدی، کافی است به هر جمله، قدر نسبت را بیفزاییم.

$$3, 9, 15, 21, \boxed{27}, \boxed{33}, \boxed{39}$$

$\begin{array}{ccccccc} & & +6 & & +6 & & +6 \\ \hline & & \boxed{27} & & \boxed{33} & & \boxed{39} \end{array}$

$$\Rightarrow t_n = 3 + (n-1) \times 6 = 6n - 3$$

[۱] واسطه‌ی حسابی بین دو عدد: اگر  $a, b, c$ ، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{یا} \quad 2b = a+c$$

مثال: به ازای چه مقدار  $a$ ، سه عدد  $a-6, a+1, 3a+1$  و  $9-a$ ، به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند؟

$$2(3a+1) = (9-a) + (a-6) \Rightarrow 6a+2 = 3 \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

حل:

نکته: سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$a-d, a, a+d$$

به طریق مشابه، پنج جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی را می‌توانیم به صورت  $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$  در نظر بگیریم.

مثال: زوایای داخلی یک مثلث، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. مجموع بزرگترین و کوچکترین زاویه را بیابید.

حل: مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر  $180^\circ$  است، اگر زوایا را  $a-d$  و  $a$  و  $a+d$  در نظر بگیریم، آنگاه:

$$(a-d) + a + (a+d) = 180^\circ \Rightarrow 3a = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$$

بزرگترین زاویه  $a+d$  و کوچکترین زاویه  $a-d$  است، بنابراین مجموع آنها:

$$(a+d) + (a-d) = 2a = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \quad \rightarrow \quad t_n = dn + t_1 - d$$

با مرتب کردن این رابطه بر حسب  $n$ ، دیده می‌شود که جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی یک دو جمله‌ای درجه‌ی اول بر حسب  $n$  است. بنابراین

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی یک دنباله‌ی خطی است.

نکته: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت کلی  $t_n = an + b$  است که در آن ضریب  $n$ ، یعنی عدد  $a$ ، قدر نسبت دنباله است. با قرار دادن  $n=1$  در عبارت، جمله‌ی اول به دست می‌آید.

مثال: بررسی کنید دنباله با جمله‌ی عمومی  $t_n = -3n + 11$  یک دنباله‌ی حسابی را مشخص می‌کند. قدر نسبت و جمله‌ی اول آن را بیابید.

حل: جمله‌ی عمومی داده شده، یک دنباله‌ی خطی است، پس دنباله‌ی فوق حسابی است. قدر نسبت ضریب  $n$  یا  $d = -3$  و جمله‌ی اول با قرار دادن

$$n=1, \text{ برابر } t_1 = -3 + 11 = 8 \text{ است.}$$

[۲] رابطه‌ی بین جملات دنباله‌ی حسابی: اگر دو جمله یا رابطه‌ای بین جملات یک دنباله‌ی حسابی در اختیار باشد، آنگاه می‌توانیم با یافتن قدر نسبت و جمله‌ی اول، آن دنباله را مشخص کنیم. در این حالت معمولاً با حل دستگاه، قدر نسبت و جمله‌ی اول را می‌یابیم.

**نکته:** اگر دو جمله‌ی  $t_n$  و  $t_m$  از یک دنباله‌ی حسابی موجود باشند، آنگاه قدر نسبت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$t_m - t_n = (m - n)d$$

**مثال:** اگر جمله‌های دوازدهم و هشتم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۳۲ و ۲۰ باشند، قدر نسبت و جمله‌ی اول آن را بیابید.

$$\begin{cases} t_{12} = t_1 + 11d \\ t_8 = t_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 = t_1 + 11d \\ 20 = t_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow (t_1 + 11d) - (t_1 + 7d) = 32 - 20$$

$$\Rightarrow 4d = 12 \Rightarrow d = 3 \xrightarrow{t_{12}=32} 32 = t_1 + 11 \times 3 \Rightarrow t_1 = -1$$

قدر نسبت را می‌توانیم با استفاده از فرمول نکته‌ی بالا، سریعتر محاسبه کنیم:

$$t_{12} - t_8 = (12 - 8)d \Rightarrow 32 - 20 = 4d \Rightarrow d = 3$$

**تعیین تعداد جمله‌های دنباله‌ی حسابی** برای تعیین تعداد جمله‌های (یا شماره‌ی جمله‌ی مجهول) یک دنباله‌ی حسابی، قدر نسبت و جمله‌ی اول (در صورت نیاز جمله‌ی آخر) را با توجه به معلومات مسئله یافته و سپس از جمله‌ی عمومی ( $t_n = t_1 + (n-1)d$ ) استفاده کرده و تعداد جملات (شماره‌ی جمله) یعنی  $n$  را می‌یابیم.

**مثال:** دنباله‌ی حسابی  $\dots, -149, -154, -159, \dots$  چند جمله‌ی منفی دارد؟

**حل:** در این دنباله،  $t_1 = -159$  و  $d = 5$  باید  $n$  را در نامعادله  $t_n < 0$  بیابیم:

$$t_n < 0 \Rightarrow -159 + (n-1)5 < 0 \Rightarrow (n-1)5 < 159$$

$$\Rightarrow n-1 < 31/\dots \Rightarrow n < 32/\dots \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \leq 32$$

**مثال:** چند عدد سه رقمی مضرب ۱۱ وجود دارد؟

**حل:** اولین عدد سه رقمی مضرب ۱۱، ۱۱۰ و آخرین آن ۹۹۰ است، با استفاده از جمله‌ی عمومی تعداد را می‌یابیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 990 = 110 + (n-1)(11) \\ \Rightarrow \frac{990 - 110}{11} = 11(n-1) \Rightarrow n-1 = 80 \Rightarrow n = 81$$

**نکته:** اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$  و  $n$  واسطه قرار دهیم، آنگاه قدر نسبت دنباله‌ی حسابی حاصل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$a, \underbrace{\square, \dots, \square}_{n}, b$$

**درج چند واسطه‌ی حسابی بین دو عدد** اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  و  $n$  جمله قرار دهیم که با آنها تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، آنگاه این دنباله  $n+2$  جمله داشته و جمله‌ی اول آن  $t_1 = a$  و جمله‌ی آخر آن  $t_{n+2} = b$  است.

برای یافتن این واسطه‌ها (جمله‌ها)، ابتدا با استفاده از جمله‌ی عمومی قدر نسبت دنباله را یافته و سپس جملات را می‌یابیم.

**مثال:** بین دو عدد ۳ و ۲۷، پنج واسطه‌ی حسابی قرار داده‌ایم، این اعداد را بیابید.

$$t_6 = t_1 + 5d \Rightarrow 27 = 3 + 5d \Rightarrow d = 4$$

**حل:** به دنباله‌ی روبه‌رو توجه کنید:

بنابراین هر جمله (غیر از جمله‌ی اول)، با افزودن عدد ۴ به جمله‌ی قبل به دست می‌آید.

$$3, \square, \square, \square, \square, \square, 27$$

① ۱۲۱- اعداد  $3P+4$ ،  $2P+3$  و  $5P-1$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (سراسری ریاضی - ۸۴)

$$4 (1) \quad 5 (2) \quad 6 (3) \quad 7 (4)$$

② ۱۲۲- اگر جملات دنباله‌ی حسابی،  $\dots, 1+2x, 2+x, 1-x$  را در عدد حقیقی  $m$  ضرب کنیم، قدر نسبت دنباله‌ی جدید ۴۸ می‌شود. مقدار  $m$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

$$-14 (1) \quad -12 (2) \quad -18 (3) \quad -16 (4)$$

③ ۱۲۳- اگر  $x$ ،  $y$  و  $z$  سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی و حاصل جمع آن‌ها  $-10$  باشد، در این صورت حاصل  $yx+zy$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (آزمون کانون- ۲۱ آبان ۹۵)

$$\frac{-20}{9} (1) \quad \frac{9}{200} (2) \quad \frac{-200}{3} (3) \quad \frac{200}{9} (4)$$

۴-۱۲۴ اگر اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، وتر مثلث چند برابر کوچک‌ترین ضلع مثلث است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (آزمون کانون- ۸ بهمن ۹۵)

$$\frac{5}{3} \quad (۴) \quad \frac{4}{3} \quad (۳) \quad \frac{7}{5} \quad (۲) \quad \frac{5}{4} \quad (۱)$$

۵-۱۲۵ اگر مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۱ و مجموع مربعات این سه جمله، برابر ۱۶۵ باشد، عدد کوچک‌تر برابر کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۲) و (آزمون کانون- ۸۹)

$$4 \quad (۴) \quad 14 \quad (۳) \quad 10 \quad (۲) \quad 7 \quad (۱)$$

۶-۱۲۶ زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب به ترتیب از کوچک به بزرگ تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع آن‌ها ۵۴۰ درجه و بزرگ‌ترین

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با ۳) و (آزمون کانون- ۲۶ مهر ۹۲)

آن‌ها ۱۳۶ درجه باشد، قدر نسبت این دنباله چند درجه است؟

$$20 \quad (۴) \quad 16 \quad (۳) \quad 12 \quad (۲) \quad 14 \quad (۱)$$

صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ ریاضی ۱

تیپ ۱۴

جمله‌ی عمومی و رابطه‌ی بین جملات

۷-۱۲۷ در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی  $t_n = (k-2)n^2 + (k+1)n + k^2$ ، جمله‌ی دهم و قدرنسبت دنباله به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۲- مرتبط با پاراگراف ۱) و (آزمون کانون- ۲۴ آبان ۹۲)

$$3 \text{ و } 34 \quad (۴) \quad 2 \text{ و } 34 \quad (۳) \quad 3 \text{ و } 31 \quad (۲) \quad 2 \text{ و } 31 \quad (۱)$$

۸-۱۲۸ اگر  $a, b, a-4, 2a-b, \dots$  جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۲- کار در کلاس- مرتبط با ۱) و (آزمون کانون- ۲۵ مهر ۹۳)

$$\frac{-21}{2} \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad -6 \quad (۲) \quad \frac{-13}{2} \quad (۱)$$

۹-۱۲۹ نوزدهمین جمله از آخر دنباله‌ی حسابی ۱۷۶،  $a, 8, \dots, 2$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۲)

$$116 \quad (۴) \quad 125 \quad (۳) \quad 119 \quad (۲) \quad 122 \quad (۱)$$

۱۰-۱۳۰ اگر از قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی دو واحد کم کنیم، جمله‌ی پنجم دنباله‌ی حسابی جدید نسبت به حالت قبل چه تغییری می‌کند؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۲- مرتبط با پاراگراف ۱) و (آزمون کانون- ۱۰ آبان ۹۲)

(۱) ده واحد کم می‌شود. (۲) شش واحد کم می‌شود. (۳) هشت واحد کم می‌شود. (۴) تغییری نمی‌کند.

۱۱-۱۳۱ در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی چهارم از جمله‌ی دهم، ۲۴ واحد کمتر است. جمله‌ی سی‌ام از جمله‌ی هجدهم چقدر بیش‌تر است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۲) و (آزمون کانون- ۲۰ مرداد ۹۶)

$$44 \quad (۴) \quad 48 \quad (۳) \quad 52 \quad (۲) \quad 42 \quad (۱)$$

۱۲-۱۳۲ تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم، ۲۵ است. جمله‌ی بیست و یکم این دنباله

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

$$28/5 \quad (۴) \quad 37/5 \quad (۳) \quad 36 \quad (۲) \quad 25 \quad (۱)$$

۱۳-۱۳۳ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مشابه تمرین ۳) و (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

$$9 \quad (۴) \quad 8/5 \quad (۳) \quad 8 \quad (۲) \quad 7/5 \quad (۱)$$

۱۴-۱۳۴ در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی  $t_n$ ، مجموع جملات دهم و بیستم برابر ۱۸۰ است. در این دنباله حاصل  $t_{13} + t_{17}$  کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۳) و (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

$$200 \quad (۴) \quad 360 \quad (۳) \quad 180 \quad (۲) \quad 90 \quad (۱)$$

۱۵-۱۳۵ در یک دنباله‌ی حسابی با جملات مثبت، حاصلضرب جمله‌ی اول و پنجم برابر ۵۷ و حاصلضرب جمله‌ی دوم و چهارم برابر ۱۰۵ است. سومین جمله‌ی

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۳) و (آزمون کانون- ۳ آذر ۹۶)

دنباله کدام است؟

$$15 \quad (۴) \quad 13 \quad (۳) \quad 11 \quad (۲) \quad 9 \quad (۱)$$

۱۶-۱۳۶ در یک دنباله‌ی حسابی،  $t_7 + t_8 = 16$  و  $t_7 - t_8 = -160$  است، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۲- مرتبط با پاراگراف ۱) و (آزمون کانون- ۷ آبان ۹۵)

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۵ (۴) -۵

۱۷-۱۳۷ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی است و در آن  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 100$  و  $a_1 + a_2 + \dots + a_{200} = 200$ ، حاصل  $a_2 - a_1$  برابر

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۳)

است با:

(۱) ۰/۰۰۰۱ (۲) ۰/۰۰۱ (۳) ۰/۰۱ (۴) ۰/۱

۱۸-۱۳۸ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد. ... (۱، ۳، ۵)، (۷، ۹، ۱۱)، ...

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟

(۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۲۱ (۴) ۴۲۳

۱۹-۱۳۹ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد، ... (۱)، (۳، ۵)، (۷، ۹، ۱۱)، ...

(ریاضی ۱- صفحه ۲۴- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری تجربی- ۹۴)

مجموع دو جمله‌ی اول و آخر دسته‌ی سی‌ام، کدام است؟

(۱) ۱۷۰۰ (۲) ۱۷۵۰ (۳) ۱۸۰۰ (۴) ۱۸۵۰

۲۰-۱۴۰ در یک جلسه، تعدادی دانش‌آموز و معلم شرکت دارند. معلمین با دانش‌آموزان به این صورت مصاحبه می‌کنند: یکی از معلم‌ها با ۵ دانش‌آموز

مصاحبه می‌کند، معلم دوم با ۷ دانش‌آموز و معلم سوم با ۹ دانش‌آموز و به همین ترتیب معلم آخر با تمام دانش‌آموزان مصاحبه می‌کند. اگر تعداد

(ریاضی ۱- صفحه ۲۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

معلم‌ها، ۱۲ باشد، تعداد دانش‌آموزان کدام است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۳۰ (۳) ۲۵ (۴) ۲۷

صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ ریاضی ۱

تیپ ۱۵

تعیین تعداد جملات

۱-۱۴۱ کدام دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی زیر، تنها سه جمله‌ی مثبت دارد؟

(۱)  $t_n = 2n - 15$  (۲)  $t_n = 39 - 5n$  (۳)  $t_n = 15 - 4n$  (۴)  $t_n = 21 - 7n$

۲-۱۴۲ در دنباله‌ی حسابی ۷، ۱۴، ۲۱، ...، ۱۰۵، چند جمله وجود دارد؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۳-۱۴۳ جمله‌ی چندم از دنباله‌ی حسابی ...، ۷، ۱،  $2k - 3$ ، برابر ۳۲ است؟

(۱) هفتم (۲) هشتم (۳) نهم (۴) دهم

۴-۱۴۴ تعداد عددهای سه رقمی مضرب ۳ که کوچکتر از ۲۰۰ باشند، کدام است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۷ (۳) ۳۱ (۴) ۳۳

۵-۱۴۵ چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۱ باشد؟

(۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲

۶-۱۴۶ اگر جمله‌ی سوم و پنجم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر ۳۳ و ۱۹ باشد، چند جمله‌ی این دنباله، مثبت است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۱) و (آزمون کانون- ۷ آبان ۹۵)

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۱۳

۷-۱۴۷ چند جمله از دنباله‌ی حسابی ...، ۸۴، ۸۹، مثبت است؟

(۱) ۳۷ (۲) ۳۶ (۳) ۳۵ (۴) ۳۸

۸-۱۴۸ اگر در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی  $t_n$  داشته باشیم  $t_3 = 166$  و  $t_5 = 150$ ، آنگاه اولین جمله‌ی منفی این دنباله کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۱) و (آزمون کانون- ۱۰ آبان ۹۲)

(۱) -۸ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) -۲

۹-۱۴۹ چهارمین، پنجمین و ششمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی به صورت  $x$ ،  $5x$  و  $x + 8$  است. شماره‌ی اولین جمله‌ی از این دنباله که بزرگ‌تر از ۱۰۰

(ریاضی ۱- صفحه ۲۳- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

است، کدام است؟

(۱) ۳۷ (۲) ۳۸ (۳) ۲۹ (۴) ۲۶

۱۰- ۱۵۰ در یک دنباله‌ی حسابی که قدر نسبت آن با جمله‌ی اول برابر است و جمله‌ی بیستم آن ۱۲۰ است، چند جمله‌ی کوچکتر از ۹۹ دارد؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - کار در کلاس - مرتبط با ۱) و (آزمون کانون - ۹۳ - آبان ۹۳)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۱۱- ۱۵۱ در دو دنباله‌ی حسابی به صورت‌های  $2, 7, 12, \dots$  و  $8, 11, 14, \dots$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۴ - مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴) ۶۱

۱۲- ۱۵۲ در دنباله‌های حسابی « $2, 9, 16, 23, \dots$ » و « $12, 17, 22, 27, \dots$ » چند عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از ۳۰۰ موجود است؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۴ - مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۵)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۳- ۱۵۳ کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در هفته‌ی اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد. متعهد می‌شود که در صورت رضایت کاری در پایان هر هفته، ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰ واحد پول برسد. با رضایت کاری پس از چند هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۲) و (سراسری انسانی - ۹۵)

- (۱) ۴۸ (۲) ۴۹ (۳) ۵۰ (۴) ۵۱

۱۴- ۱۵۴ قطار سریع‌السیر به طور آزمایشی، فاصله‌ی دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه‌ی تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود تا مدت زمان پیمودن این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی (با احتساب بار اول) کدام است؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۲ - کار در کلاس - مرتبط با ۲) و (سراسری انسانی - ۸۶)

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۵- ۱۵۵ سیم‌کارت‌های دو شرکت A و B، مطابق جدول زیر ارائه شده‌اند. با چند دقیقه مکالمه، هزینه‌ی یکسانی برای هر دو سیم‌کارت پرداخت می‌شود؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۲ - کار در کلاس - مشابه ۲)

|        | هزینه‌ی ثابت ماهانه (تومان) | هزینه‌ی هر دقیقه مکالمه (تومان) |
|--------|-----------------------------|---------------------------------|
| شرکت A | ۲۰۰۰                        | ۳۰                              |
| شرکت B | ۳۰۰۰                        | ۲۰                              |

- (۱) ۴۵ دقیقه  
(۲) ۱۰۰ دقیقه  
(۳) ۱۵۰ دقیقه  
(۴) ۷۵ دقیقه

درج چند واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

تیپ ۱۶

صفحه‌های ۲۳ و ۲۴ ریاضی ۱

۱۶- ۱۵۶ بین دو عدد ۱۵ و ۷۵، چهار واسطه‌ی حسابی قرار داده‌ایم. مجموع این چهار عدد کدام است؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - کار در کلاس - مشابه ۲ - ب)

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۷۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۱۵۰

۱۷- ۱۵۷ بین دو عدد ۷ و ۷۷، نه واسطه‌ی حسابی قرار داده‌ایم. عدد وسط کدام است؟  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - کار در کلاس - مشابه ۲ - ب)

- (۱) ۴۴ (۲) ۴۲ (۳) ۴۰ (۴) ۴۶

۱۸- ۱۵۸ بین دو عدد ۱۸ و ۶۲، ده واسطه‌ی حسابی درج می‌کنیم تا یک دنباله‌ی حسابی با ۱۲ جمله حاصل شود. مجموع سه جمله‌ی سوم این دنباله چند برابر مجموع سه جمله‌ی دوم آن است؟ (جمله‌ی اول ۱۸ است.)  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - کار در کلاس - مرتبط با ۲ - ب) و (آزمون کانون - ۱۹ آذر ۹۵)

- (۱)  $\frac{69}{20}$  (۲)  $\frac{23}{17}$  (۳)  $\frac{29}{23}$  (۴)  $\frac{29}{17}$

۱۹- ۱۵۹ بین دو عدد حقیقی و متمایز  $k + \sqrt{k}$  و  $k - \sqrt{k}$ ، چند عدد برحسب k باید قرار دهیم تا اعداد حاصل، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۱ بدهند؟ ( $k \in \mathbb{N}$ )  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - کار در کلاس - مرتبط با ۲ - ب) و (آزمون کانون - ۹۳ - آبان ۹۳)

- (۱)  $2k$  (۲)  $2k+1$  (۳)  $2k-1$  (۴)  $2k-2$

۲۰- ۱۶۰ جمله‌ی اول و هفتم یک دنباله‌ی حسابی ۱۱ و ۳۵ است. در دنباله‌ی حسابی دیگری بین اعداد ۳۸ و ۱۲ چند واسطه‌ی حسابی می‌توان قرار داد تا جمله‌ی چهارم دو دنباله، برابر شوند؟ (جمله‌ی اول دنباله‌ی دوم ۳۸ است.)  
(ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - کار در کلاس - مرتبط با ۲ - ب)

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

صفحه‌های ۲۵ تا ۳۷ ریاضی ۱

## دنباله‌ی هندسی

دنباله‌ی هندسی: یک دنباله‌ی هندسی، دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن (به غیر از جمله‌ی اول غیر صفر)، از ضرب یک عدد ثابت غیر صفر در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله‌ی هندسی می‌نامیم.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی را با  $t_1 \neq 0$  و قدر نسبت آن را با  $r$  نمایش دهیم، آنگاه:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n, \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$t_1 \quad t_1 r \quad t_1 r^2 \quad t_1 r^3 \quad t_1 r^{n-1}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله‌ی هندسی برابر است با:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

از آنجایی که  $t_2 = t_3 = t_4 = \dots = r$  در نتیجه:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r \quad \text{یا} \quad t_{n+1} = t_n r$$

مثال: نشان دهید دنباله‌ی  $2, 6, 18, 54, \dots$  یک دنباله‌ی هندسی است و سپس سه جمله‌ی بعدی آن را یافته و جمله‌ی عمومی آن را پیدا کنید.

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \dots = 3$$

حل: حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی را می‌یابیم:

حاصل تقسیم، مقدار ثابتی است، بنابراین دنباله، هندسی است. برای یافتن سه جمله‌ی بعدی، کافی است هر جمله را در ۳ ضرب کنیم:

$$2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \boxed{1458}$$

$$\quad \quad \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$$

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = 2 \times 3^{n-1}$$

از آنجایی که  $t_1 = 2$  و  $r = 3$ ، پس:

واسطه‌ی هندسی بین دو عدد: اگر  $a, b, c$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه:

$$b^2 = ac$$

مثال: اگر  $8^{x-2y}$  و  $4^{x+y}$  و  $2^{3x-y}$  به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، رابطه‌ی بین  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$(4^{x+y})^2 = 2^{3x-y} \times 8^{x-2y} \Rightarrow (2^2)^{2x+2y} = 2^{3x-y} \times (2^3)^{x-2y} \Rightarrow 2^{4x+4y} = 2^{3x-y} \times 2^{3x-6y}$$

حل: باید:

$$\Rightarrow 2^{4x+4y} = 2^{6x-7y} \Rightarrow 4x + 4y = 6x - 7y \Rightarrow x = 5/2y$$

نکته: سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت  $a, ar, a^2$  در نظر بگیریم.

به طریق مشابه، پنج جمله‌ی متوالی را می‌توانیم به صورت  $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4$  در نظر بگیریم.

مثال: اگر حاصل ضرب پنج جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی  $243$  باشد، جمله‌ی وسط را بیابید.

$$a^5 = 243 \Rightarrow a = 3$$

حل: اگر جملات را به صورت  $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4$  در نظر بگیریم، آنگاه:

جمله‌ی عمومی: جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله‌ی هندسی برابر  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است.

نکته: یک جمله‌ی عمومی، زمانی یک دنباله‌ی هندسی را نمایش می‌دهد که شکل کلی آن به صورت  $t_n = A(B)^n$  باشد. در این حالت قدر نسبت،  $B$  (پایه‌ی توان  $n$ ) است و جمله‌ی اول را با قرار دادن  $n = 1$  به دست می‌آوریم.

مثال: آیا  $t_n = 2^{3n-1}$ ، جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی است؟ قدر نسبت را بیابید.

راه حل اول: با توجه به نکته‌ی گفته شده، عبارت را به صورت  $t_n = A(B)^n$  تبدیل می‌کنیم:

$$t_n = (2^3)^n \times 2^{-1} \Rightarrow t_n = 8^n \times 2^{-1} \Rightarrow r = 8$$



رابطه‌ی بین جملات دنباله‌ی هندسی: اگر دو جمله یا رابطه‌ای بین جملات یک دنباله‌ی هندسی در اختیار باشد، آنگاه می‌توانیم با یافتن قدر نسبت و جمله‌ی اول، آن دنباله را مشخص کنیم. در این حالت معمولاً با تقسیم دو جمله بر هم، قدر نسبت و سپس جمله‌ی اول را می‌یابیم.

**نکته:** اگر دو جمله‌ی  $t_m$  و  $t_n$  از یک دنباله‌ی هندسی موجود باشند، آنگاه قدر نسبت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$$

■ **مثال:** اگر جمله‌های سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶- باشند، جمله‌ی چهارم آن را بیابید.

$$\text{حل:} \quad t_3 = 12, t_6 = -96 \Rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{-96}{12} = -8$$

$$\Rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = -8 \Rightarrow r^3 = -8 \Rightarrow r = -2$$

جمله‌ی چهارم را با ضرب جمله‌ی سوم در قدر نسبت می‌یابیم:

$$t_4 = t_3 r = 12(-2) = -24$$

■ **مثال:** در دنباله‌ی هندسی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  بررسی کنید که  $a_4 a_{13} = a_7 a_8$ .

$$\text{حل:} \quad a_4 a_{13} = (a_1 r^3)(a_1 r^{12}) = a_1^2 r^{15} = a_1^2 r^{13} \quad , \quad a_7 a_8 = (a_1 r^6)(a_1 r^7) = a_1^2 r^{13}$$

نتیجه: در دنباله‌ی هندسی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  اگر  $m+n=p+k$ ، آنگاه  $a_m a_n = a_p a_k$ .

**نکته:** اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  واسطه‌ی هندسی قرار دهیم، آنگاه قدر نسبت دنباله‌ی هندسی حاصل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

■ **درج چند واسطه‌ی هندسی بین دو عدد** اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  جمله قرار دهیم که با آنها تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، آنگاه این دنباله  $n+2$  جمله داشته و جمله‌ی اول آن  $t_1 = a$  و جمله‌ی آخر آن  $t_{n+2} = b$  است.

$$a, \underbrace{\square, \dots, \square}_{n}, b$$

برای یافتن این واسطه‌ها (جمله‌ها) با استفاده از جمله‌ی عمومی، قدر نسبت دنباله را یافته و سپس جملات را می‌یابیم.

■ **مثال:** اگر بین دو عدد ۱۲ و ۳۸۴، چهار عدد قرار دهیم که با آنها تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند (جمله‌ی اول ۱۲ است)، قدر نسبت دنباله‌ی حاصل را بیابید، سپس جملات را بنویسید.

حل: در واقع یک دنباله‌ی هندسی داریم که جمله‌ی اول آن  $t_1 = 12$  و جمله‌ی آخر آن  $t_6 = 384$  است، پس:

$$12, \square, \square, \square, \square, 384 \Rightarrow t_6 = t_1 r^5 \Rightarrow 384 = 12 \times r^5 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$12, \underbrace{24}_{\times 2}, \underbrace{48}_{\times 2}, \underbrace{96}_{\times 2}, \underbrace{192}_{\times 2}, 384$$

تعریف و واسطه‌ی هندسی بین دو عدد      تیپ ۱۷      صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ ریاضی ۱

① ۱۶۱- کدام دسته‌ی اعداد، ۴ جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی‌اند؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۵- مرتبط با فعالیت) و (سراسری انسانی- ۷۸)

$$۸ \text{ و } ۱۲ \text{ و } ۱۸ \text{ و } ۲۴ \text{ (۴)} \quad ۴ \text{ و } ۶ \text{ و } ۹ \text{ و } ۱۳ \text{ (۳)} \quad ۴ \text{ و } ۶ \text{ و } ۹ \text{ و } ۱۲ \text{ (۲)} \quad ۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۹ \text{ و } \frac{۲}{۳}$$

② ۱۶۲- اگر  $A, 1, 2p+1, \delta p, 4-12p$ ، دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند، آنگاه  $A$  کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

$$\frac{5}{2} \text{ (۴)} \quad 20 \text{ (۳)} \quad 10 \text{ (۲)} \quad \sqrt{5} \text{ (۱)}$$

③ ۱۶۳- اگر  $a-b, a-2, a-6, a+6$  جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه  $a+b$  کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

$$22 \text{ (۴)} \quad 16 \text{ (۳)} \quad 6 \text{ (۲)} \quad 10 \text{ (۱)}$$