آموزش و آزمون
ریاضیات نهم ۹
برای دانش آموزان تیزهوش

خواهی بشوی قبول آسان
با رتبهٔ عالی و درخشان
برخیز و کنون ریاضی آموز
از دست مده فرصتِ امروز
همراه توایم با رشــادت
تا باز کــنی در ســعادت

از مجموعه رشادت
رمز شکوفایی استعدادهای دانش‌آموزان تیزهوش

محمد بُرجی اصفهانی - هادی عزیززاده
مریم بُرجی اصفهانی

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «ریاضیات نهم برای دانش‌آموزان تیزهوش» از مجموعهٔ «رشادت» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب ریاضی پایهٔ سوم دورهٔ اوّل متوسطه را در سطح پیشرفته ارائه می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با خلاصهٔ مباحث و نکته‌های مهمّ هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌هایی بر حل آنها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای و تعدادی مسئلهٔ تشریحی را حل می‌کند تا بر موضوع تسلط یابد. سؤالات چهارگزینه‌ای و مسائل تشریحی این کتاب به سه گروه آغازین (ساده)، میانی (متوسط) و پایانی (دشوار) تقسیم شده‌اند که ترتیب مطالعه و حل آنها باید رعایت شود. انتظار می‌رود کتاب حاضر، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان نهم مدارس خاص و تیزهوش را پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از جناب آقای یحیی دهقانی مدیرعامل محترم شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران که شرایط و امکانات لازم را برای چاپ این کتاب فراهم آوردند، تشکر کنیم. از خانم‌ها آذر حسین‌زاده و شبنم کیان‌پیشه و آقایان سید فرید حسینیان، امیررضا مزیدآبادی و اشکان رزاقی هم که با مطالعه و ویرایش بخش‌هایی از کتاب، مؤلفان را در آماده کردن به موقع کتاب یاری کرده‌اند، سپاسگزاریم.

همچنین از خانم‌ها ناهید صبائی (حروفچین و صفحه‌آرا)، ملیحه محمدی، بهاره خُدامی و مینا هرمزی (گرافیست‌ها) و مدیران و همکاران واحدهای حروفچینی، تولید و فروش سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آنها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

محمد بُرجی اصفهانی
هادی عزیززاده
مریم بُرجی اصفهانی

فهرست مطالب

راهنمای استفاده از کتاب

دانش آموز گرامی

قبل از آغاز مطالعهٔ این کتاب به توصیه‌ها و موارد زیر توجه فرمایید:

۱ـ ابتدا خلاصهٔ درس و مثال‌های فصل موردنظر را مطالعه کنید.

۲ـ سؤالات چهارگزینه‌ای و تشریحی هر فصل را پاسخ دهید. سؤالات از ساده به سخت تنظیم و به سه گروه آغازین (ساده)، میانی (متوسط) و پایانی (مشکل) تقسیم شده‌اند. پس از آنکه به همهٔ سؤالات چهارگزینه‌ای و تشریحی یک گروه پاسخ دادید، به کتاب پاسخ‌نامه مراجعه کنید و پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های درست سؤالات مقایسه کنید. حتماً پاسخ‌نامه را دقیق بخوانید حتی اگر پاسخ شما به سؤالی درست باشد. ممکن است ما راه حل ساده‌تری را پیشنهاد کرده باشیم.

۳ـ تا زمانی که به سؤالات یک گروه پاسخ نداده‌اید، سراغ سؤالات گروه بالاتر نروید. سؤالات گروه پایانی باید در آخرین مرحله پاسخ داده شوند.

۴ـ برای آنکه بدانید سطح علمی شما در درس ریاضی چیست، پس از پاسخ دادن به سؤالات چهارگزینه‌ای پایانی، تعداد انتخاب‌های درست و تعداد انتخاب‌های غلط خود را بشمارید و نمرهٔ خودتان را با رابطهٔ زیر محاسبه کنید:

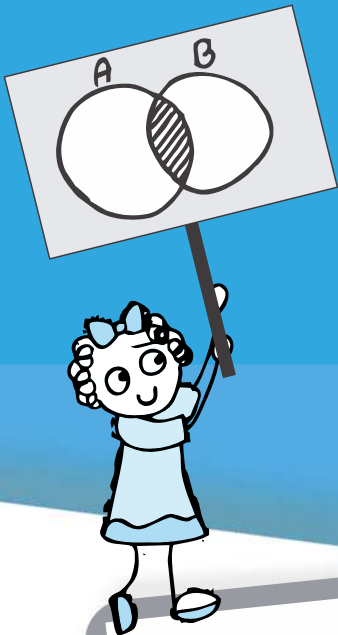
$$\text{نمره} = \text{تعداد پاسخ‌های درست} - \frac{\text{تعداد پاسخ‌های غلط}}{۳}$$

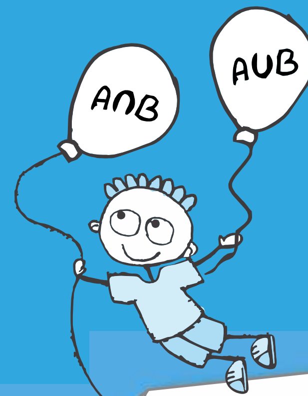
(یعنی هر سه انتخاب غلط، یک انتخاب درست را خنثی می‌کند.) سپس نمرهٔ خود را از ۲۰ محاسبه کرده و با مراجعه به جدول زیر، سطح علمی خود را مشخص کنید.

نمره	سطح علمی
۱ ـ ۵	متوسط
۶ ـ ۱۰	خوب
۱۱ ـ ۱۵	خیلی خوب
۱۶ ـ ۱۹	عالی
۲۰	نابغه

۵ـ برای آنکه با روش درست مطالعه و روش درست تست زدن آشنا شوید و از خدمات مشاوره‌ای آموزشی بهره‌مند گردید، به شما توصیه می‌شود که با آرمان و آیدا در سفر مطالعهٔ این کتاب همراه شوید و نکات مهمّی را که همراه با تصویر آنها، در قالب شعر یا نثر بیان شده است به دقت مطالعه و به آنها عمل کنید.

موفق باشید.





مجموعه‌ها

فصل ۱

بر شما ای اهل علم از ما سلام   بشنوید از ما یکی دو سه کلام

این پسر که دست او باشد کتاب   می کند هی ورجه وورجه بی حساب

نام او آرمان و آرمانش چنین: در کلاسم می شوم من برترین

خواهرش آیدا بوَد هم سنّ او   چون که باشد با برادر دوقلو

خواهرش با پشتکار است و قوی   او نباشد در کلاسش منزوی

با رشادت هر دو هستند آشنا   آیدا اوّل می شود یا ناقلا!؟

مجموعه‌ها

خلاصهٔ درس

مجموعه

به دستهٔ مشخصی از اعداد، اشیاء، موجودات یا... که حداقل در یک ویژگی مشترک باشند، «مجموعه» گفته می‌شود.

مثال: کدام‌یک از دسته‌های زیر، یک مجموعه است؟

الف) اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۵۰۰

ب) پنج عدد زوج

ج) دانش‌آموزان قدبلند

د) دانش‌آموزان کلاس نهم دبیرستان علامه حلّی

هـ) اعداد فرد کوچک‌تر از ۱۰۰

حل: موارد «ب» و «ج» مجموعه نیستند؛ چون اعضای آنها مشخص نیستند اما بقیهٔ موارد مجموعه هستند.

عضو مجموعه

به هر عدد، شیء، موجود یا... که در یک مجموعه قرار می‌گیرد، «عضو مجموعه» گفته می‌شود. نماد عضویت (عضو بودن) $\in$ است و اعضای یک مجموعه داخل آکولاد قرار می‌گیرند.

مثال:

$A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۵\}$

$۱ \in A \rightarrow$ ۱ عضو A است.

$۴ \notin A \rightarrow$ ۴ عضو A نیست.

مجموعه‌های عددی مهم در ریاضیات

$N = \{۱ , ۲ , ۳ , ...\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی

$W = \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$ یا I مجموعهٔ اعداد حسابی

$Z = \{... , -۱ , ۰ , ۱ , ...\}$ مجموعهٔ اعداد صحیح

Q = {همهٔ اعداد کسری که صورت و مخرجشان اعداد صحیح و مخرجشان غیرصفر است.} مجموعهٔ اعداد گویا

Q′ = {همهٔ اعداد غیرگویا} مجموعهٔ اعداد گنگ (اَصَم)

R = {همهٔ اعداد} مجموعهٔ اعداد حقیقی

مثال ۲: درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $۱۲۵ \in N$　　ب) $-۲ \in W$　　ج) $-\frac{۸}{۲} \in Z$

د) $۷ \in Q$　　هـ) $۰ \notin N$　　و) $\sqrt{۲} \in Q$

حل:

الف) درست　　ب) نادرست　　ج) درست $(-\frac{۸}{۲} = -۴ \in Z)$

د) درست (همهٔ اعداد صحیح را می‌توان به‌صورت کسری نوشت که مخرجشان عدد یک است.)

هـ) درست　　و) نادرست

مجموعهٔ تهی

به مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، «مجموعهٔ تهی» گفته می‌شود. مجموعهٔ تهی با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

مثال: مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از صفر، یک مجموعهٔ تهی است؛ زیرا هیچ عضوی ندارد.

مجموعهٔ متناهی

به مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن محدود و قابل شمارش باشد، «مجموعهٔ متناهی» گفته می‌شود.

مثال: مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ و مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۶ و ۷− دو مجموعهٔ متناهی هستند.

مجموعهٔ نامتناهی

به مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن نامحدود و غیرقابل شمارش باشد، «مجموعهٔ نامتناهی» گفته می‌شود.

مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح و مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۶ و ۷ دو مجموعهٔ نامتناهی هستند.

صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه

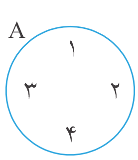
هر مجموعه را به سه صورت می‌توان نشان داد:

۱) **نمایش تفصیلی (نشان دادن عضوها):** عضوهای یک مجموعه را داخل آکولاد می‌نویسیم.

مثال: $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

۲) **نمایش هندسی (نمودار وِن):** عضوهای یک مجموعه را داخل یک شکل هندسی (معمولاً دایره) می‌نویسیم.

مثال:



۳) **نمایش توصیفی (استفاده از علائم ریاضی):** در این روش با استفاده از یک متغیر (مانند x) و نماد «|» (به معنی: به‌طوری که) و یک خاصیت ریاضی، همهٔ اعضاء مجموعه را مشخص می‌کنیم.

مثال: $A = \{x \mid x \in N , x < ۵\}$

تذکر: گاهی اوقات یک مجموعه را می‌توان به صورت‌های مختلف ریاضی نشان داد. مثلاً مجموعهٔ A در مثال قبل را به صورت‌های زیر هم می‌توانیم نشان دهیم:

$A = \{x \mid x \in W , ۱ \leq x \leq ۴\}$ یا $A = \{x \mid x \in Z , ۰ < x < ۵\}$

برای آشنایی بیشتر با صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه، به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

$A = \{x \mid x \in N , x > ۷\}$

$B = \{۲x \mid x \in Z , x < -۲\}$

$C = \{x^۲ \mid x \in W , ۳ \leq x < ۵\}$

$D = \{۲K + ۱ \mid K \in N , K < ۴\}$

$E = \left\{\frac{x}{y} \mid x , y \in N , x + y = ۵\right\}$

$F = \left\{x \mid \frac{x}{۳} \in N\right\}$

حل:

$A = \{۸ , ۹ , ۱۰ , \ldots\}$

$B = \{-۶ , -۸ , -۱۰ , \ldots\}$

$C = \{۹ , ۱۶\}$

$D = \{۳ , ۵ , ۷\}$

$E = \left\{\frac{۱}{۴} , ۴ , \frac{۲}{۳} , \frac{۳}{۲}\right\}$

$F = \{۳ , ۶ , ۹ , \ldots\}$

مثال ۲: هر یک از مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی نشان دهید.

$A = \{\ldots , -۸ , -۴ , ۰ , ۴ , \ldots\}$

$B = \{۱ , ۲ , ۴ , ۸ , \ldots\}$

$C = \{۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۵ , \ldots\}$

$D = \{۹ , ۹۹ , ۹۹۹ , \ldots\}$

$E = \{۱ , ۲ , ۳ , ۶ , ۹ , ۱۸\}$

$F = \left\{۰ , \frac{۱}{۳} , \frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۵} , \ldots\right\}$

حل:

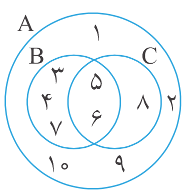
$$A=\{۴x \mid x\in Z\}$$
$$B=\{۲^{x} \mid x\in W\}$$
$$C=\{۴x-۱ \mid x\in N\}$$
$$D=\{۱۰^{x}-۱ \mid x\in N\}$$
$$E=\left\{x \;\middle|\; x\in N\,,\ \frac{۱۸}{x}\in N\right\}$$
$$F=\left\{\frac{x}{x+۲} \;\middle|\; x\in W\right\}$$

دقت داشته باشید که $\frac{۱}{۲}$ سادهٔ شدهٔ $\frac{۲}{۴}$ است.

زیرمجموعه

اگر تمام اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B هم باشند، می‌گوییم مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B است و آن را به‌صورت $A\subset B$ نشان می‌دهیم (علامت زیرمجموعه را به‌صورت $\subseteq$ هم نشان می‌دهند).

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ ، $B=\{۳,۴,\dots,۷\}$ و $C=\{۵,۶,۸\}$ باشد، داریم:



$$B\subset A\,,\ C\subset A\,,\ B\not\subset C\,,\ C\not\subset B\,,\ A\not\subset B$$

تذکر ۱: هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است.

تذکر ۲: مجموعهٔ تهی $(\varnothing)$، زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: ۲^{n}

مثال: یک مجموعهٔ ۵ عضوی، ۳۲ زیرمجموعه دارد $(۲^{۵}=۳۲)$.

برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه، کافی است ابتدا زیرمجموعهٔ بدون عضو (تهی) و سپس به ترتیب مجموعه‌های یک عضوی، دو عضوی، سه عضوی و... را بنویسیم تا به مجموعهٔ اصلی برسیم.

مثال ۱: مجموعهٔ $A=\{۱,۴,۷\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را بنویسید.

حل: از آنجا که مجموعهٔ A، ۳ عضوی است، ۸ زیرمجموعه دارد $(۲^{۳}=۸)$ و این زیرمجموعه‌ها عبارت‌اند از:

$$\varnothing\,,\ \{۱\}\,,\ \{۴\}\,,\ \{۷\}\,,\ \{۱,۴\}\,,\ \{۱,۷\}\,,\ \{۴,۷\}\,,\ \{۱,۴,۷\}$$

مثال ۲: همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B = \{۱ , \{۱\} , \varnothing\}$ را بنویسید.

حل: $\varnothing , \{۱\} , \{\{۱\}\} , \{\varnothing\} , \{۱ , \{۱\}\} , \{۱ , \varnothing\} , \{\{۱\} , \varnothing\} , \{۱ , \{۱\} , \varnothing\}$

عدد اصلی مجموعه

به تعداد اعضای یک مجموعه، عدد اصلی آن مجموعه گفته می‌شود. عدد اصلی مجموعهٔ A را به‌صورت $n(A)$ نشان می‌دهند.

مثال: $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۷\} \to n(A) = ۴$

تذکر مهم: در شمارش اعضای یک مجموعه، عضوهای تکراری فقط یک‌بار شمرده می‌شوند.

مثال: عدد اصلی مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$A = \left\{۷ , \{۷\} , \frac{۱۴}{۲} , \sqrt{۴۹}\right\}$$

$$B = \left\{۱ , \frac{۶}{۳} , \{۱ , ۲\} , ۵^{\circ} , ۲\right\}$$

حل:

$$A = \{۷ , \{۷\}\} \to n(A) = ۲$$

$$B = \{۱ , ۲ , \{۱ , ۲\}\} \to n(B) = ۳$$

زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه

به همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه به‌جز خودش، «زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه» گفته می‌شود. درواقع تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه از تعداد زیرمجموعه‌های آن یکی کمتر است و برابر است با: $۲^n - ۱$.

مثال ۱: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه ۶۳ تا است. این مجموعه چند عضو دارد؟

حل: این مجموعه ۶ عضو دارد؛ زیرا: $۲^n - ۱ = ۶۳ \to ۲^n = ۶۴ \to ۲^n = ۲^۶ \to n = ۶$

مثال ۲: اگر به عدد اصلی یک مجموعه پنج تا اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

حل: تعداد زیرمجموعه‌ها ۳۲ برابر می‌شود؛ زیرا: $۲^{n+۵} \div ۲^n = ۲^۵ = ۳۲$

مثال ۳: اگر $A = \{۱ , \{۱\} , \varnothing\}$ و $B = \{\{\varnothing\} , \{۱ , ۲\}\}$ باشد، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{۱\} \in A$ ب) $\{۱\} \subset A$ ج) $\varnothing \in A$ د) $\{\varnothing\} \subset A$

هـ) $\varnothing \subset B$ و) $۱ \in B$ ز) $\{۱ , ۲\} \subset B$ ح) $n(B) = ۳$

حل:

الف) درست	ب) درست	ج) درست	د) درست
هـ) درست	و) نادرست	ز) نادرست	ح) نادرست

مجموعهٔ توان یک مجموعه

به مجموعه‌ای که اعضای آن، همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد، مجموعهٔ توان آن مجموعه گفته می‌شود. مجموعهٔ توان مجموعهٔ A را به‌صورت $P(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱: اگر $A=\{۳\,,\,۴\}$ باشد، $P(A)$ را مشخص کنید.

$$P(A)=\{\{۳\}\,,\{۴\}\,,\{۳\,,\,۴\}\,,\varnothing\}$$

مثال ۲: اگر $B=\{۵\}$ باشد، $P(P(B))$ را مشخص کنید.

$$P(B)=\{\varnothing\,,\{۵\}\}$$

$$P(P(B))=\{\varnothing\,,\{\varnothing\}\,,\{\{۵\}\}\,,\{\varnothing\,,\{۵\}\}\}$$

مثال ۳: اگر مجموعهٔ $A=\{۳\,,\,۷\}$ باشد، $P(A)$ چند زیرمجموعه دارد؟

حل: از آنجا که مجموعهٔ A دوعضوی است، ۴ زیرمجموعه دارد $(۲^۲=۴)$؛ پس $P(A)$ چهارعضوی است و ۱۶ زیرمجموعه دارد $(۲^۴=۱۶)$.

تذکر: تعداد اعضای مجموعهٔ توان یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های آن مجموعه برابر است.

دو مجموعهٔ مساوی

اگر عضوهای دو مجموعه دقیقاً مثل هم باشند، دو مجموعه مساوی هستند.

مثال ۱: دو مجموعهٔ $A=\{۱\,,۲\}$ و $B=\{۲\,,۱\}$ مساوی هستند.

تذکر: اگر دو مجموعه مساوی باشند، هر کدام از آنها زیرمجموعهٔ دیگری است و برعکس.

$$(A\subset B\,,\,B\subset A)\rightarrow A=B$$

$$A=B\rightarrow(A\subset B\,,\,B\subset A)$$

مثال ۲: دو مجموعهٔ $\{x-۱\,,۴\}$ و $\{۵\,,\,x+۲y\}$ مساوی هستند. مقادیر x و y را به دست آورید.

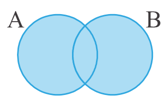
حل:

$$x-۱=۵\rightarrow x=۶$$

$$x+۲y=۴\rightarrow ۶+۲y=۴\rightarrow ۲y=-۲\rightarrow y=-۱$$

اجتماع دو مجموعه

به مجموعه‌ای که متشکل از تمام عضوهای دو مجموعهٔ دلخواه باشد، «اجتماع» آن دو مجموعه گفته می‌شود. اجتماع دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت $A \cup B$ نشان می‌دهند.



$A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$$

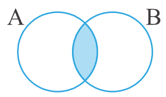
مثال: اگر $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۵\}$ و $B = \{۲ , ۵ , ۷\}$ باشد، $A \cup B$ را به دست آورید.

حل:

$$A \cup B = \{۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۷\}$$

اشتراک دو مجموعه

به مجموعه‌ای که متشکل از عضوهای مشترک دو مجموعهٔ دلخواه باشد، اشتراک آن دو مجموعه گفته می‌شود. اشتراک دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت $A \cap B$ نشان می‌دهند.



$A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A , x \in B\}$$

مثال: اگر $A = \{۲ , ۴ , ۵\}$ و $B = \{۴ , ۵ , ۷ , ۹\}$ باشد، $A \cap B$ را به دست آورید.

حل:

$$A \cap B = \{۴ , ۵\}$$

دو مجموعهٔ جدا از هم

به دو مجموعه‌ای که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم گفته می‌شود.

مثال: دو مجموعهٔ $A = \{۱ , ۳ , ۵\}$ و $B = \{۲ , ۴ , ۶\}$ جدا از هم هستند: $A \cap B = \varnothing$

مجموعهٔ مرجع

به مجموعه‌ای که شامل همهٔ مجموعه‌های موردنظر باشد، مجموعهٔ مرجع گفته می‌شود و آن را با M نشان می‌دهند.

تذکر: همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع هستند و درمورد هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم:

$$A \subset M$$

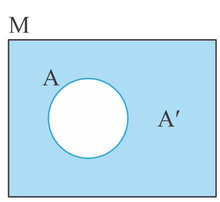
$$A \cup M = M$$

$$A \cap M = A$$

متمم یک مجموعه

متمم مجموعهٔ A، مجموعه‌ای است شامل تمام عضوهایی که در مجموعهٔ مرجع هستند ولی در مجموعهٔ A نیستند و آن را با A' نشان می‌دهند.

$$A' = \{x \mid x \in M , x \notin A\}$$



نکاتی درمورد متمم

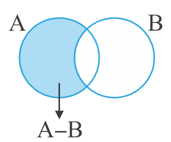
۱) متمم متمم یک مجموعه، با خود آن مجموعه برابر است: $(A')' = A$

۲) $A \cup A' = M$ و $A \cap A' = \varnothing$

۳) $\varnothing' = M$ و $M' = \varnothing$

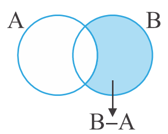
تفاضل دو مجموعه

تفاضل دو مجموعهٔ A و B که آن را به‌صورت $A - B$ نشان می‌دهند، مجموعه‌ای است که هر عضو آن در A باشد اما در B نباشد.



$$A - B = \{x \mid x \in A \, , \, x \notin B\}$$

تذکر مهم: دو مجموعهٔ $A - B$ و $B - A$ برابر نیستند.



$$B - A = \{x \mid x \in B \, , \, x \notin A\}$$

مثال: اگر $A = \{۱ , ۳ , ۵ , ۶\}$ و $B = \{۳ , ۴ , ۵ , ۷\}$ باشد، حاصل $A - B$ و $B - A$ را به دست آورید.

حل:

$A - B = \{۱ , ۶\}$

$B - A = \{۴ , ۷\}$

نکاتی درمورد تفاضل دو مجموعه

۱) $M - A = A'$

۲) $A - B = A \cap B'$

تذکر: درستی این نکات را می‌توان با استفاده از نمودار وِن ثابت کرد.

خواص و قوانین اجتماع و اشتراک دو مجموعه

۱) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری)

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی)

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

۳) خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری)

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

۴) قوانین جذب

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

۵) قوانین دِمورگان

$$\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\(A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$$

۶) قوانین شبه‌جذب

$$\begin{cases}A\cap(B\cup A')=A\cap B\\A\cup(B\cap A')=A\cup B\end{cases}$$

تذکر: درستی همهٔ خواص و قوانین بالا را می‌توان با استفاده از نمودار وِن ثابت کرد.

نکاتی درمورد اجتماع و اشتراک

۱) $A\cup A=A$ و $A\cap A=A$

۲) $A\cup\varnothing=A$ و $A\cap\varnothing=\varnothing$

۳) $(A\cap B)\subset A$ و $(A\cap B)\subset B$

۴) $A\subset(A\cup B)$ و $B\subset(A\cup B)$

۵) اگر $A\subset B$ باشد، داریم: $\begin{cases}A\cup B=B\\A\cap B=A\end{cases}$

۶) $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

۷) اگر $(A\subset B)$ و $(B\subset C)$ باشد، داریم: $A\subset C$ (خاصیت تعدی یا تراگذری)

۸) $(A-B)\subset A$

تذکر: درستی این نکات را می‌توان با استفاده از نمودار وِن ثابت کرد.

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل

اگر حاصل یک عملیات ریاضی روی هر دو عضو دلخواه از یک مجموعه، باز هم در آن مجموعه قرار گیرد، می‌گوییم مجموعه نسبت به آن عمل ریاضی، بسته است.

مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است؛ زیرا مجموع و حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی دلخواه باز هم یک عدد طبیعی خواهد بود. اما مجموعهٔ اعداد طبیعی نسبت به اعمال تفریق و تقسیم، بسته نیست؛ زیرا حاصل عبارت می‌تواند عددی غیرطبیعی باشد. مانند:

$$۵\div۲=۲/۵\notin N \quad و \quad ۶-۱۰=-۴\notin N$$

مثال: آیا مجموعهٔ $A=\{۳^x \mid x\in Z\}$ نسبت به عمل جمع بسته است؟ نسبت به عمل ضرب چطور؟

حل: این مجموعه نسبت به عمل جمع، بسته نیست؛ زیرا مثلاً:

$$۳^۱+۳^۲=۳+۹=۱۲\notin A$$

اما مجموعهٔ A نسبت به عمل ضرب، بسته است؛ زیرا:

$$\left.\begin{matrix}۳^x\in A\\۳^y\in A\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۳^x\times۳^y=۳^{x+y}\in A$$

(از آنجا که x و y دو عدد صحیح هستند، مجموع آنها هم یک عدد صحیح است.)

مجموعه‌ها و احتمال

در کتاب هشتم، مفهوم احتمال را بیان کردیم. اکنون با توجه به یادگیری مبحث مجموعه‌ها، تعریف کامل‌تری از احتمال را بیان می‌کنیم.

A : مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های مطلوب

S : مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$ ← احتمال رخ دادن پیشامد A

دقت داشته باشید که $n(A)$ و $n(S)$ تعداد عضوهای این دو مجموعه را نشان می‌دهند.

مثال ۱: یک عدد طبیعی یک رقمی انتخاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد انتخاب شده، مضرب ۴ باشد.

ب) عدد انتخاب شده، اوّل باشد؟

حل:

الف) پیشامد مطلوب یعنی مضرب ۴ بودن عدد انتخاب شده را A می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$A=\{۴\,,\,۸\}\to n(A)=۲$$

$$S=\{۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,\dots\,,\,۹\}\to n(S)=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۹}$$

ب) پیشامد مطلوب یعنی اوّل بودن عدد انتخاب شده را B می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$B=\{۲\,,\,۳\,,\,۵\,,\,۷\}\to n(B)=۴$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۹}$$

مثال ۲: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) مجموع دو عدد آمده، ۸ باشد؟

ب) حاصل‌ضرب دو عدد آمده، اوّل باشد؟

ج) حاصل‌جمع دو عدد آمده، ۱۳ باشد؟

د) حاصل‌ضرب دو عدد آمده، یک عدد طبیعی باشد؟

حل:

الف) پیشامد مطلوب را A در نظر می‌گیریم و داریم:

$$A=\{(۲\,,\,۶)\,,\,(۶\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۵)\,,\,(۵\,,\,۳)\,,\,(۴\,,\,۴)\}\to n(A)=۵$$

$$S=\{(۱\,,\,۱)\,,\,(۱\,,\,۲)\,,\,(۱\,,\,۳)\,,\,\dots\,,\,(۶\,,\,۶)\}\to n(S)=۳۶ \qquad (۶\times ۶=۳۶)$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

ب) پیشامد مطلوب را B در نظر می‌گیریم و داریم:

$$B=\{(۱\,,\,۲)\,,\,(۲\,,\,۱)\,,\,(۱\,,\,۳)\,,\,(۳\,,\,۱)\,,\,(۱\,,\,۵)\,,\,(۵\,,\,۱)\}\to n(B)=۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج) پیشامد مطلوب را C در نظر می‌گیریم و داریم:

$$C = \{\ \} \rightarrow n(C) = ۰$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۰}{۳۶} = ۰$$

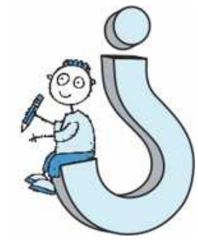
د) پیشامد مطلوب را D در نظر می‌گیریم و داریم:
(حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی، طبیعی است.)

$$D = S \rightarrow n(D) = n(S) = ۳۶$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = ۱$$

نکته: عدد احتمال، همواره عددی بین صفر تا ۱ است (اگر تعداد حالت‌های مساعد با تعداد کل حالت‌های ممکن برابر باشد، عدد احتمال مساوی با یک و اگر هیچ حالت مساعدی وجود نداشته باشد، عدد احتمال برابر با صفر است).

یادداشت‌های من



سؤالات چهارگزینه‌ای

مجموعه‌ها

★ آغازین

۱- مجموعهٔ اعداد اوّل کوچک‌تر از ۳۰ و بزرگ‌تر از ۲۰، چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- مجموعهٔ $\{x \mid x \in Z \ ,\ ۱ < x^۲ + ۱ < ۹\}$ برابر با کدام مجموعه است؟

۱) $\{-۲ , -۱ , ۱ , ۲\}$ ۲) $\{-۲ , ۱ , ۰ , ۱ , ۲\}$

۳) $\{۰ , ۱ , ۲\}$ ۴) $\{-۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳\}$

۳- اگر $M = \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ باشد، در این صورت $N = \left\{x \,\middle|\, x , \frac{x}{x-۲} \in M\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵- کدام عبارت صحیح است؟

۱) $\{\varnothing\}$ زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواهی است.

۲) اعداد صحیح زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی و اعداد حسابی، زیرمجموعهٔ اعداد صحیح هستند.

۳) تفاضل دو مجموعه برابر با مجموعه‌ای است که تعداد اعضای کمتری دارد.

۴) هر سه گزینه صحیح است.

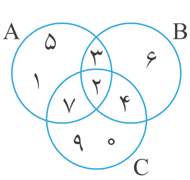
۶- با توجه به مجموعهٔ $B = \{۳ , ۵ , \{\varnothing , ۴ , ۳\}\}$، کدام درست است؟

۱) $n(B) = ۴$ ۲) $\varnothing \in B$ ۳) $\{\varnothing , ۴ , ۳\} \in B$ ۴) $\{\varnothing\} \subseteq B$

۷- با توجه به شکل مقابل، حاصل $(A \cap B) - C$ کدام است؟

۱) $\{۲ , ۳\}$ ۲) $\{۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۶\}$

۳) ۳ ۴) هیچ کدام



۸- مجموعهٔ $A=\{x \mid x-۴\in \mathbb{Z}\}$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{۵,۶,۷,...\}$
۲) N
۳) $Z-\{۰,۱,۲,۳\}$
۴) $\mathbb{Z}$

۹- مجموعهٔ A اعداد طبیعی مضرب ۶ و مجموعهٔ B اعداد صحیح مضرب ۴ می‌باشد. $(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\{-۴۸,-۲۴,۰,۲۴,۴۸,...\}$
۲) $\{۰,-۱۲,۰,۱۲,...\}$
۳) $\{۱۲,۲۴,۳۶,...\}$
۴) $\{۲۴,۴۸,۷۲,...\}$

۱۰- مجموعهٔ $\{-x \mid x\in Q\,,-۲<x<۳\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) بی‌شمار

۱۱- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، درست نیست؟

۱) $۲\frac{۹}{۳}\in R$
۲) $\left\{\dfrac{\sqrt{۲۵}}{\frac{۳}{۲}}\right\}\in Q$
۳) $\{Q\}\not\subseteq N$
۴) $W\not\subseteq Q'$

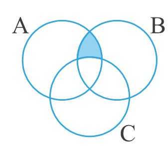
۱۲- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، درمورد $E=\{۲,\{۳\},\{۲,۳\}\}$ درست نیست؟

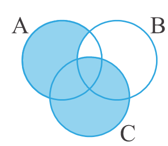
۱) $\{۳\}\in E$
۲) $\{۲,۳\}\subseteq E$
۳) $\{۲\}\notin E$
۴) $۲\in E$

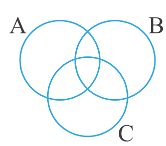
۱۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، شامل مجموعهٔ اعداد بین ۵- و ۱۱ می‌شود؟

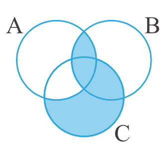
۱) $\{x \mid x\in Z\,,-۵\le x\le ۱۱\}$
۲) $\{x+۱ \mid x\in Z\,,-۶<x<۱۰\}$
۳) $\{x+۱ \mid x\in Z\,,-۶\le x\le ۱۰\}$
۴) $\{۲x+۱ \mid x\in R\,,-۹<x<۲۳\}$

۱۴- کدام شکل، $(A\cap B)-(A\cup C)$ را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۵- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، نسبت به عمل تفریق، بسته نیست؟

۱) O (مجموعهٔ اعداد فرد)
۲) Z
۳) N
۴) O و N

۱۶- نمایش ریاضی $\left\{\frac{۴}{۵},\frac{۸}{۷},\frac{۱۲}{۹},...\right\}$ کدام است؟

۱) $\left\{\frac{a}{b} \mid a\,,b\in N\,,a=b-۱\right\}$
۲) $\left\{\frac{۲x}{۲x+۱} \mid x\in N\,,x>۱\right\}$
۳) $\left\{\frac{۴x}{۲x+۳} \mid x\in Z\,,x-۲\ge -۱\right\}$
۴) $\left\{\frac{۳x+۱}{۲x+۳} \mid x\in N\right\}$