فصل اول — آشنایی با نظریه اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

مثال نقض : مثالی که نشان می‌دهد یک حکم در حالت کلی درست نیست.

مثال : آیا حکم « مجموع هر دو عدد گنگ ، عددی گنگ است » درست است؟

حل : با یک مثال نقض به نادرستی حکم بالا می‌رسیم :

$a=1-\sqrt{2}$

$b=1+\sqrt{2}$

$a+b=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2\in Q$

پس مجموع هر دو عدد گنگ، همیشه عددی گنگ نیست.

اثبات مستقیم : روشی است که به کمک حقایقی که قبلاً درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم جدیدی را به اثبات می‌رسانیم.

مثال : تمام مسائل و قضایایی که در هندسه (۱) و (۲) ثابت شده تقریباً از این روش استفاده گردیده است.

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف) : در این روش برای اثبات درستی یک حکم ، ثابت می‌کنیم با نادرست بودن حکم به یک تناقض دچار می‌شویم.

مثال : اگر a^3 عدد گنگ باشدثابت کنید a نیز گنگ است.

برهان خلف : فرض می‌کنیم a گنگ نباشد (نقض حکم کردیم) اگر a گنگ نباشد پس گویا است.

$a\in Q \Rightarrow a^3\in Q$

$a^3\in Q$ و این خلاف فرض است (به یک تناقض رسیدیم) پس a باید گنگ باشد.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها : گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن مسئله را در نظر بگیریم.

اثبات‌های بازگشتی : گاهی برای ثابت کردن درستی یک حکم ، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم و این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به یک حکم بدیهی و واضح برسیم به شرطی که بتوانیم از آن حکم بدیهی مجدداً بازگشت کرده و به اثبات حکم اولیه دست یابیم.

مثال : اگر $a>0$ ثابت کنید : $a+\frac{1}{a}\geq 2$

$a+\frac{1}{a}\geq 2 \quad a>0$

$\times a: a^2+1\geq 2a$

$a^2-2a+1\geq 0$

$(a-1)^2\geq 0$

به حکم بدیهی رسیدیم که عبارت فوق همواره بزرگ‌تر یا برابر صفر است.

برگشت : $(a-1)^2\geq 0$

$a^2-2a+1\geq 0$

$a^2+1\geq 2a$

$a+\frac{1}{a}\geq 2$

و حکم ثابت است.

باسمه تعالی	سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم دبیرستان نمونه دولتی شهید صدر (دی ماه ۹۷)	درس: **ریاضیات گسسته** رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان: ۹۷/۱۰/۱ مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	آزمون شماره **۱**

سؤال	بارم
۱- کدام گزینه درست و کدام نادرست است : الف) اگر K حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $۴k+۱$ مربع کامل است. ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ عددی گنگ است. پ) برای هر دو عدد حقیقی b و a اگر $a<b$ آنگاه $a^۲<b^۲$. ت) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.	۱
۲- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید : الف) گراف ۴- منتظم گرافی است که .... ب) اندازه یک گراف ساده برابر ۴۳ است، این گراف حداقل .... رأس دارد. پ) تعداد یال‌های گراف کامل $K_۴$ برابر با .... است. ت) عدد (۲۱۰) به کلاس هم‌ارزی .... در هم‌نهشتی به پیمانه ۸ تعلق دارد.	۱
۳- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.	۱/۵
۴- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.	۱/۵
۵- به روش بازگشتی ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی z و y و x داریم : $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$	۱/۵
۶- اگر عدد طبیعی a، دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید : $a=۱$ یا $a=۵$	۱/۵
۷- اگر p عددی اول و $a\in z$, $p\nmid a$ ثابت کنید : $(p\ ,\ a)=۱$	۱/۵
۸- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\mid a+۲$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ را بیابید.	۱/۵
۹- باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.	۱/۵
۱۰- اگر اول آبان در یک سال روز جمعه باشد، هفتم اسفند چند شنبه است؟	۱
۱۱- به چند طریق می‌توان ۳۹۰۰۰ تومان را با اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟	۱/۵
۱۲- اصطلاحات زیر را تعریف کنید : الف) مرتبه گراف ب) زیرگراف پ) گراف همبند ت) گراف K- منتظم	۲
۱۳- نشان دهید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۴- گراف G با مجموعه رأس‌ها و یال‌های آن به صورت زیر مفروض است : $E(G)=\{v_۱v_۲\ ,\ v_۱v_۶\ ,\ v_۲v_۳\ ,\ v_۶v_۴\ ,\ v_۴v_۵\ ,\ v_۵v_۶\ ,\ v_۳v_۴\}$ $v(G)=\{v_۱\ ,\ v_۲\ ,\ v_۳\ ,\ v_۴\ ,\ v_۵\ ,\ v_۶\}$ الف) نمودار آن را رسم کنید. ب) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید. پ) مقدار $\Delta(G)$ چقدر است؟ ت) یک مسیر به طول ۴ در این گراف بنویسید. ث) یک دور به طول ۵ بنویسید. ج) مجموعه همسایگی‌های رأس $v_۵$ را بنویسید.	۲
جمع	۲۰

۱- الف) درست   ب) نادرست   پ) نادرست   ت) درست

۲- الف) درجه هر رأس آن ۴ باشد.

ب) ۱۰، $q \le \binom{p}{۲} \Rightarrow ۴۳ \le \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p(p-۱) \ge ۸۶ \Rightarrow p = ۱۰$

پ) ۶، $q_{k_p} = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow q_{k_۴} = \frac{۴\times۳}{۲} = ۶$

ت) ۲

۳- $n = ۲k \Rightarrow n^۲ - ۵n + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(۲k^۲ - ۵k + ۳) + ۱ = ۲k' + ۱$ فرد

$n = ۲k + ۱ \Rightarrow ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱۰k - ۵ + ۷ = ۴k^۲ + ۴k - ۱۰k + ۳ = ۴k^۲ - ۶k + ۲ + ۱$

$= ۲(۲k^۲ - ۳k + ۱) + ۱ = ۲k'' + ۱$ فرد

۴- برهان خلف : فرض کنید $\alpha - \beta$ عددی گویا باشد.

$\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{گویا}} + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}} = ۲\alpha$ گنگ

مجموع دو عدد گویا همواره عددی گویاست و این تناقض دارد پس $\alpha - \beta$ گنگ است.

برهان خلف : فرض کنید $\alpha + ۲\beta$ عددی گویاست.

با فرض تناقض دارد پس $\alpha + ۲\beta$ عددی گنگ است.

$\underbrace{(\alpha+۲\beta)}_{\text{گویا}} - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}} \xrightarrow[\text{عددی گویاست}]{\text{تفاضل دو عدد گویا}} \underbrace{\beta}_{\text{گویا}} \Rightarrow$

۵- $x^۲ + y^۲ + z^۲ \ge xy + yz + xz \xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \ge ۲xy + ۲yz + ۲xz$

$\longleftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲xy) + (x^۲ + z^۲ - ۲xz) + (y^۲ + z^۲ - ۲yz) \ge ۰$

$\longleftrightarrow (x-y)^۲ + (x-z)^۲ + (y-z)^۲ \ge ۰$ همواره برقرار است.

۶-
$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۹k+۷ \xrightarrow{\times ۷} a \mid ۶۳k + ۴۹ \\ a \mid ۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} a \mid ۶۳k + ۵۴ \end{array}\right. \xrightarrow{-} a \mid ۵ \Rightarrow a = ۱ \text{ یا } a = ۵$$

۷-
$$(p\ ,\ a) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid p \xrightarrow{p \text{ اول}} d = p\ ,\ d = ۱ \\ d \mid a \xrightarrow{d=p} p \mid a \text{ با فرض تناقض دارد} \end{cases}$$

پس $d = ۱$

۸- فرد $a = ۲n + ۱ \xrightarrow{b \mid a+۲} b \mid ۲n + ۳ \Rightarrow$ فرد است $b \Rightarrow b = ۲m + ۱\ ,\ m \in \mathbb{Z}$

$a^۲ + b^۲ + ۳ = (۲n+۱)^۲ + (۲m+۱)^۲ + ۳ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ + ۴m^۲ + ۴m + ۱ + ۳$

$= ۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k} + ۴\underbrace{m(m+۱)}_{۲k'} + ۵$

$= ۸k + ۸k' + ۵ = ۸(k + k') + ۵ = ۸q + ۵ \Rightarrow r = ۵$

ادامه دارد ...