

# اعمال بر روی توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)

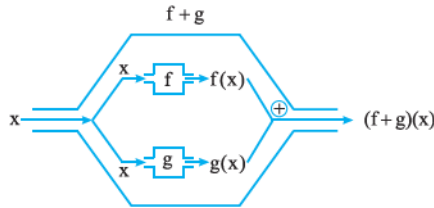
## جمع دو تابع

همان طور که ما اعداد را با هم جمع و تفریق می‌کنیم و یا در هم ضرب و تقسیم می‌کنیم، این اعمال (یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را بر روی توابع هم می‌توانیم انجام دهیم، البته با اندکی ریزه‌کاری که توضیح خواهیم داد.

جمع دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را با  $(f+g)(x)$  نمایش می‌دهیم:

به عنوان مثال اگر  $f(x) = x$  و  $g(x) = 2x$  باشد، داریم:  $(f+g)(x) = 3x$

در حقیقت، تابع  $f+g$  دستگاهی است که ورودی  $(x)$  را می‌گیرد،  $f(x)$  و  $g(x)$  را حساب می‌کند و  $f(x) + g(x)$  را به عنوان خروجی برمی‌گرداند.

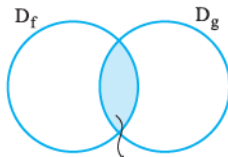


اما تکلیف دامنه تابع  $f+g$  چه می‌شود؟ یعنی این تابع چه  $x$ هایی را می‌تواند به عنوان ورودی بگیرد؟

گفتیم که تابع  $f+g$ ،  $x$  را می‌گیرد و  $f(x)$  و  $g(x)$  را حساب می‌کند و با هم جمع می‌کند؛ پس  $x$  باید عددی باشد که هم  $f$  و هم  $g$  بتوانند آن را به عنوان ورودی بگیرند.

یعنی  $x$  هم باید در دامنه  $f$  باشد و هم در دامنه  $g$ :  $x \in D_f, x \in D_g$

$x$ هایی که هم در مجموعه  $D_f$  و هم در مجموعه  $D_g$  باشند، اشتراک دو مجموعه  $D_f$  و  $D_g$  هستند:



$D_f \cap D_g$ :  $x$ هایی که هم در  $D_f$  و هم در  $D_g$  هستند

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

پس دامنه تابع  $f+g$  برابر است با:

**مثال** اگر  $f = \{(-1, 2), (0, 5), (2, 1), (3, 2)\}$  و  $g = \{(0, 1), (3, -1), (4, 3)\}$  باشد. تابع  $f+g$  را بنویسید.

**پاسخ** اول باید دامنه تابع  $f+g$  را پیدا کنیم. برای به دست آوردن دامنه  $f+g$ ، باید دامنه  $f$  و  $g$  را نوشته و بین آن‌ها اشتراک بگیریم.

$$\left. \begin{aligned} D_f &= \{ \text{همه مؤلفه‌های اول } f \} = \{-1, 0, 2, 3\} \\ D_g &= \{ \text{همه مؤلفه‌های اول } g \} = \{0, 3, 4\} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f \cap D_g = \{0, 3\}$$

پس دامنه تابع  $f+g$  برابر است با:

پس مؤلفه‌های اول تابع  $f+g$  برابر  $0$  و  $3$  هستند و تابع  $f+g$  به صورت  $f+g = \{(0, \quad), (3, \quad)\}$  است.

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج‌مرتبه‌های بالا، باید به ازای  $x=0$  و  $x=3$ ، مقدار  $f+g$  را به دست آوریم.

مثلاً برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب  $(0, \quad)$  در تابع  $f+g$  باید مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتبه‌هایی از  $f$  و  $g$  که مؤلفه اولشان

$x=0$  است را با هم جمع کنیم. مشابه این کار را برای  $x=3$  هم انجام می‌دهیم.

•  $x=0$ :

$$\begin{cases} f(0) = 5 & \Rightarrow f \text{ عضو } (0, 5) \text{ است} \\ g(0) = 1 & \Rightarrow g \text{ عضو } (0, 1) \text{ است} \end{cases}$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow (f+g)(0) = 6 \Rightarrow (0, 6) \text{ عضو } f+g \text{ است.}$$

•  $x=3$ :

$$\begin{cases} f(3) = 2 & \Rightarrow f \text{ عضو } (3, 2) \text{ است} \\ g(3) = -1 & \Rightarrow g \text{ عضو } (3, -1) \text{ است} \end{cases}$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 2 + (-1) = 1 \Rightarrow (f+g)(3) = 1 \Rightarrow (3, 1) \text{ عضو } f+g \text{ است.}$$

$$f+g = \{(0, 6), (3, 1)\}$$

پس  $f+g$  شامل دو زوج مرتب  $(0, 6)$  و  $(3, 1)$  است:

## تفریق و ضرب دو تابع

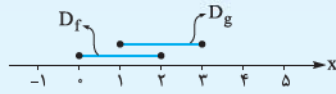
مشابه جمع دو تابع، «تفریق و ضرب دو تابع» هم به صورت زیر تعریف می‌شوند و دامنه آن‌ها اشتراک دامنه  $f$  و دامنه  $g$  است:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad , \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

**مثال** اگر  $f(x) = x + 1$  با دامنه  $0 \leq x \leq 2$  و  $g(x) = x - 1$  با دامنه  $1 \leq x \leq 3$  باشد، دامنه و ضابطه  $f + g$ ،  $f - g$  و  $f \times g$  را تعیین کنید.

**پاسخ** گفتیم دامنه هر سه تابع  $f + g$ ،  $f - g$  و  $f \times g$  برابر  $D_f \cap D_g$  است، پس باید اشتراک دو محدوده  $0 \leq x \leq 2$  و  $1 \leq x \leq 3$  را پیدا کنیم:



$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g = 1 \leq x \leq 2$$

پس:

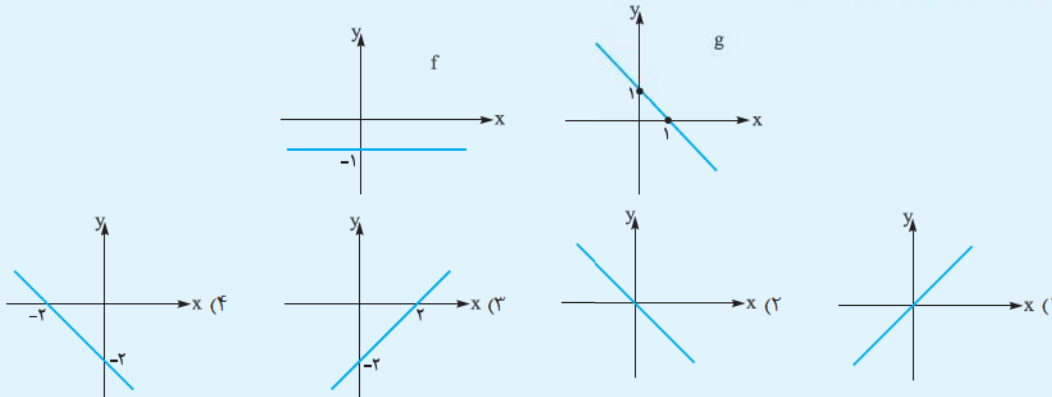
حالا ضابطه هر سه تابع را به دست می‌آوریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 1) + (x - 1) = x + x = 2x \Rightarrow (f + g)(x) = 2x$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 1) - (x - 1) = x + 1 - x + 1 = 2 \Rightarrow (f - g)(x) = 2$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x + 1) \times (x - 1) = x^2 - 1 \Rightarrow (f \times g)(x) = x^2 - 1$$

**تست** اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $f - g$  کدام است؟



**پاسخ گزینه ۳** نمودار  $f$ ، یک خط افقی  $(y = -1)$  است، پس ضابطه آن به صورت  $f(x) = -1$  است.

نمودار  $g$  هم یک خط است که از دو نقطه  $A(1, 0)$  و  $B(0, 1)$  می‌گذرد. ابتدا شیب آن را به دست می‌آوریم و سپس معادله آن را

می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

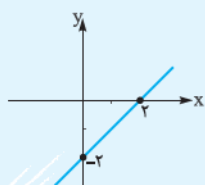
$$y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

پس ضابطه  $g$  به صورت  $g(x) = -x + 1$  است.

حالا با داشتن ضابطه  $f$  و  $g$ ، ضابطه  $f - g$  را به دست می‌آوریم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = -1 - (-x + 1) = -1 + x - 1 = x - 2 \Rightarrow (f - g)(x) = x - 2$$

پس ضابطه تابع  $f - g$  به صورت  $y = x - 2$  است که نمودار آن با دادن دو نقطه از آن قابل رسم است:



$x$	$2$	$0$
$y = x - 2$	$0$	$-2$
$(x, y)$	$(2, 0)$	$(0, -2)$

## تقسیم دو تابع

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

تقسیم دو تابع  $f$  و  $g$  هم مثل سه عمل قبلی (یعنی جمع، تفریق و ضرب) تعریف می‌شود:

اما تابع  $\frac{f}{g}$ ،  $X$ هایی را که به ازای آن‌ها خروجی  $g$ ، صفر است (یعنی  $g(x) = 0$ ) را نمی‌تواند به عنوان ورودی بگیرد، زیرا در آن صورت مخرج

برابر صفر می‌شود که امکان‌پذیر نیست.

پس دامنه  $\frac{f}{g}$  برابر با  $X$ هایی است که هم در  $D_f$  و هم در  $D_g$  هستند (یعنی  $D_f \cap D_g$ )، به جز  $X$ هایی که به ازای آن‌ها  $g(x) = 0$  می‌شود:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مجموعه  $X$ هایی که به ازای آن‌ها  $g(x) = 0$  است.

**مثال** اگر  $f = \{(-1, 0), (2, 1), (5, 3)\}$  و  $g = \{(-1, 4), (1, 0), (4, 1), (2, 0)\}$  باشد، آن‌گاه  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{g}{f}$  را به دست آورید.

**پاسخ** برای به دست آوردن دامنه‌های  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{g}{f}$  باید اول دامنه  $f$  و  $g$  را به دست آوریم:  $D_f = \{f \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{-1, 2, 5\}$

$$D_g = \{g \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{-1, 1, 4, 2\}$$

$$D_f \cap D_g = \{-1, 2\}$$

اشتراک این دو مجموعه را به دست می‌آوریم:

• دامنه تابع  $\frac{f}{g}$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است، به جز  $X$ هایی که مخرج  $\frac{f}{g}$  یعنی  $g$  را صفر می‌کنند. باید در  $g$  دنبال زوج مرتبی باشیم

که مؤلفه دوم آن صفر است:  $(1, 0)$  و  $(2, 0)$ . مؤلفه اول این زوج مرتب‌ها یعنی  $X = 1$  و  $X = 2$ ، همان  $X$ هایی است که باید از اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  حذف شود.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \underbrace{\{x \mid g(x) = 0\}}_{1, 2} = \{-1, 2\} - \{1, 2\} = \{-1\}$$

دامنه  $\frac{f}{g}$  فقط شامل عدد  $-1$  و در نتیجه مؤلفه اول  $\frac{f}{g}$  همان  $-1$  است و تابع  $\frac{f}{g}$  به صورت  $\{(-1, \quad)\}$  در می‌آید. برای به دست آوردن

مؤلفه دوم زوج مرتب بالا، باید به ازای  $X = -1$  مقدار  $\frac{f}{g}$  را به دست آوریم:

$$\begin{cases} (-1, 0) \in f \Rightarrow f(-1) = 0 \\ (-1, 4) \in g \Rightarrow g(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = 0 \Rightarrow (-1, 0) \text{ عضو } \frac{f}{g} \text{ است}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-1, 0)\}$$

پس تابع  $\frac{f}{g}$  فقط شامل زوج مرتب  $(-1, 0)$  است:

• دامنه تابع  $\frac{g}{f}$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است، به جز  $X$ هایی که مخرج  $\frac{g}{f}$  یعنی  $f$  را صفر می‌کنند. باید در  $f$  دنبال زوج مرتبی باشیم

که مؤلفه دوم آن صفر است:  $(-1, 0)$ .

مؤلفه اول این زوج مرتب یعنی  $X = -1$  همان  $X$ ای است که باید از اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  حذف شود.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \underbrace{\{x \mid f(x) = 0\}}_{-1} = \{-1, 2\} - \{-1\} = \{2\}$$

دامنه  $\frac{g}{f}$  فقط شامل عدد  $2$  و در نتیجه مؤلفه اول  $\frac{g}{f}$  همان  $2$  است و تابع  $\frac{g}{f}$  به صورت  $\{(2, \quad)\}$  در می‌آید. برای به دست آوردن

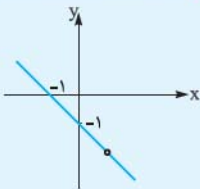
مؤلفه دوم زوج مرتب بالا، باید به ازای  $X = 2$  مقدار  $\frac{g}{f}$  را به دست آوریم:

$$\begin{cases} (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1 \\ (2, 0) \in g \Rightarrow g(2) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(2) = 0 \Rightarrow (2, 0) \text{ عضو } \frac{g}{f} \text{ است}$$

$$\frac{g}{f} = \{(2, 0)\}$$

پس تابع  $\frac{g}{f}$  فقط شامل زوج مرتب  $(2, 0)$  است:



**تست** اگر  $f(x) = x^2 - 1$  و نمودار تابع  $(\frac{f}{g})(x)$  به صورت زیر باشد، ضابطه تابع  $g(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x + 1$       (۲)  $x - 1$   
 (۳)  $1 - x$       (۴)  $-x - 1$

**پاسخ گزینه ۳** تابع  $\frac{f}{g}$  یک خط است. معادله آن را باید به دست آوریم. این خط از دو نقطه  $(-1, 0)$  و  $(0, -1)$  می‌گذرد.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = -1$$

ابتدا شیب را محاسبه می‌کنیم:

حالا با داشتن شیب  $(m = -1)$  و یک نقطه از خط مثلاً  $(-1, 0)$ ، معادله خط را می‌نویسیم:  
 $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x - (-1)) \Rightarrow y = -x - 1$

پس ضابطه  $\frac{f}{g}$  به صورت  $(\frac{f}{g})(x) = -x - 1$  است. حالا با داشتن ضابطه  $f$  و  $\frac{f}{g}$ ، ضابطه  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow -x - 1 = \frac{x^2 - 1}{g(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 1}{-x - 1}$$

صورت کسر بالا را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم و در مخرج آن از یک منفی فاکتور می‌گیریم. بعد صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{-x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x + 1)} = \frac{(x - 1)}{-1} = -x + 1 \Rightarrow g(x) = -x + 1 = 1 - x$$

**نقطه توخالی** که در نمودار  $\frac{f}{g}$  می‌بینیم به خاطر آن است که  $g(x) = 1 - x$  در  $x = 1$  برابر صفر می‌شود و این نقطه از دامنه  $\frac{f}{g}$  حذف می‌شود.

### ضرب عدد ثابت در تابع (af)

هر جا توابعی مثل  $2f$ ،  $3f$ ،  $-2f$  و ... را دیدید، یعنی یک عدد ثابت در تابع ضرب شده است؛ مثلاً تابع  $2f$  یعنی  $f + f$  که با استفاده از تعریف دامنه تابع  $f + g$ ، می‌توانیم دامنه آن را حساب کنیم:

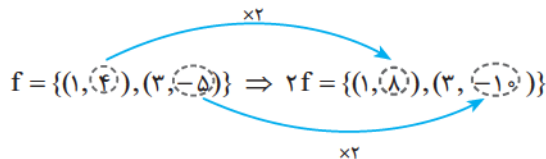
$$D_{2f} = D_{f+f} = D_f \cap D_f = D_f$$

$$D_{af} = D_f \quad (a \in \mathbb{R})$$

پس ضرب یک عدد ثابت در تابع، دامنه آن را تغییر نمی‌دهد:

مثلاً دامنه توابع  $2f$ ،  $3f$ ،  $4f$ ،  $5f$  و ... همان  $D_f$  است؛ اما به ازای  $x$  یکسان، خروجی تابع  $af$  (که  $a$  یک عدد ثابت است) برابر است با خروجی  $f$  ضرب در  $a$  (یعنی  $a \times f(x)$ )؛ پس برای به دست آوردن  $af$  از روی  $f$ ، به مؤلفه‌های اول  $f$  دست نمی‌زنیم و فقط مؤلفه‌های دوم  $f$  را ضرب در  $a$  می‌کنیم.

مثلاً اگر  $f = \{(1, 4), (3, -5)\}$  باشد، برای به دست آوردن تابع  $2f$ ، به مؤلفه‌های اول  $f$  دست نمی‌زنیم و تمام مؤلفه‌های دومش را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:



**مثال** اگر  $f = \{(1, 2), (3, 4), (-1, 3)\}$  و  $g = \{(1, 5), (-3, -2)\}$  باشد، تابع  $2f + 3g$  را به دست آورید.

$$D_{2f+3g} = D_{2f} \cap D_{3g}$$

**پاسخ** تابع  $2f + 3g$  حاصل جمع دو تابع  $2f$  و  $3g$  است، پس دامنه آن برابر است با:

$$D_{2f+3g} = D_{2f} \cap D_{3g} = D_f \cap D_g$$

گفتیم که دامنه  $2f$  با دامنه  $f$  و دامنه  $3g$  با دامنه  $g$  برابر است، پس:

$$D_f = \{\text{همه مؤلفه‌های اول } f\} = \{1, 3, -1\}$$

پس اول دامنه  $f$  و  $g$  را حساب می‌کنیم:

$$D_g = \{\text{همه مؤلفه‌های اول } g\} = \{1, -3\}$$

$$D_{2f+3g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, -1\} \cap \{1, -3\} = \{1\}$$

حالا دامنه  $2f + 3g$  را به دست می‌آوریم:

•  $x = 1$ :

حالا به ازای  $x = 1$  باید مقدار  $2f + 3g$  را حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f \text{ عضو } f \text{ است.} & \Rightarrow f(1) = 2 \\ g \text{ عضو } g \text{ است.} & \Rightarrow g(1) = 5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f \text{ عضو } f \text{ است.} & \Rightarrow f(1) = 2 \\ g \text{ عضو } g \text{ است.} & \Rightarrow g(1) = 5 \end{aligned} \right\}$$

$$(2f + 3g)(1) = 2f(1) + 3g(1) = 2(2) + 3(5) = 4 + 15 = 19 \Rightarrow (1, 19) \text{ عضو } 2f + 3g \text{ است.}$$

$$2f + 3g = \{(1, 19)\}$$

پس تابع  $2f + 3g$  فقط شامل زوج مرتب  $(1, 19)$  است:

دامنه تابعی که از جمع مضربی از تابع  $f$  و مضربی از تابع  $g$  به دست می‌آید، همان اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  است.

$$(af + bg)(x) = a \times f(x) + b \times g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$D_{af+bg} = D_f \cap D_g$$

$$\{(2f - g)(x) = 2f(x) - g(x)\}$$

$$D_{2f-g} = D_f \cap D_g$$

به عنوان مثال داریم:

**تست** اگر  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = 1 - x$  باشد، مقدار  $(2f - g)(2)$  کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

**پاسخ** گزینه ۲: طبق نکته بالا داریم:

$$(2f - g)(2) = 2 \times f(2) - g(2)$$

برای محاسبه  $f(2)$  و  $g(2)$  کافی است در ضابطه  $f$  و  $g$ ، به جای  $x$ ، عدد ۲ را قرار دهیم:

$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$g(x) = 1 - x \Rightarrow g(2) = 1 - 2 = -1$$

$$(2f - g)(2) = 2 \times f(2) - g(2) = 2 \times 5 - (-1) = 10 + 1 = 11$$

مقادیر به دست آمده را جای گذاری می‌کنیم:

**توان‌های تابع** ( $f^2, f^3, f^4, \dots$ ): فرض کنید تابع  $f$  به صورت  $f = \{(2, 3), (-4, 5)\}$  است و می‌خواهیم تابع  $f^2$  را حساب کنیم.

برای محاسبه  $f^2$ ، ابتدا دامنه این تابع را مثل دامنه  $f \times g$  حساب می‌کنیم. از آنجایی که دامنه  $f \times g$  برابر با اشتراک  $D_f$  و  $D_g$  بود، پس:

$$D_{f^2} = D_{f \times f} = D_f \cap D_f = D_f$$

$$D_{f^2} = D_f = \{f \text{ مؤلفه‌های اول}\} = \{2, -4\}$$

پس دامنه  $f^2$  با دامنه  $f$  برابر است.

برای محاسبه مؤلفه دوم زوج مرتب‌های  $f^2$ ، کافی است مؤلفه‌های دوم  $f$

(یعنی خروجی‌ها) را به توان ۲ برسانیم.

$$f = \{(2, 3), (-4, 5)\} \Rightarrow f^2 = \{(2, 9), (-4, 25)\}$$

توان ۲

بد نیست این را هم بدانید که اگر از ما  $f^3$  را می‌خواستند، کافی بود مؤلفه‌های اول  $f$  را بدون تغییر بنویسیم و مؤلفه‌های دومشان را به توان ۳ برسانیم.

**تست** اگر  $f = \{(2, -1), (-6, 3)\}$  باشد،  $f^2$  کدام است؟

$\{(4, -1), (36, 3)\}$  (۴)

$\{(4, 1), (36, 9)\}$  (۳)

$\{(2, 1), (-6, 9)\}$  (۲)

$\{(2, 1), (6, 9)\}$  (۱)

**پاسخ** گزینه ۲: برای محاسبه  $f^2$  از روی  $f$ ، باید مؤلفه‌های اول را بدون تغییر بنویسیم و مؤلفه‌های دوم را به توان ۲ برسانیم:

$$f = \{(2, -1), (-6, 3)\} \Rightarrow f^2 = \{(2, 1), (-6, 9)\}$$

توان ۲

توان ۲

**تست** اگر  $f(x) = 2x$  و  $g(x) = \frac{1}{x}$  باشد، ضابطه  $(f^2 \times g)(x)$  کدام است؟ ( $x \neq 0$ )

۴ (۴)

۲ (۳)

$4x$  (۲)

$2x$  (۱)

**پاسخ** گزینه ۲: یعنی تابع  $f$  را ۲ بار در خودش ضرب کنیم و تابع حاصل را در تابع  $g$  ضرب کنیم.

$$f^2(x) = f(x) \times f(x) = (2x) \times (2x) = 4x^2$$

پس ابتدا  $f^2$  را حساب می‌کنیم:

$$(f^2 \times g)(x) = f^2(x) \times g(x) = (4x^2) \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4x^2}{x} = 4x$$

حالا  $f^2$  را در  $g$  ضرب می‌کنیم:

## اعمال پر روی توابع چندضابطه‌ای



برای انجام اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بر روی دو تابع چندضابطه‌ای با ۳ حالت مواجه هستیم:

حالت ۱: تعداد ضابطه‌ها و هم‌چنین حدود ضابطه‌های دو تابع عیناً مثل هم باشند، مثل زیر:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$$

در دو تابع بالا،  $f$  و  $g$  هر دو دارای ۲ ضابطه هستند، هم‌چنین حدود ضابطه‌ها عیناً مثل هم هستند. (برای هر دو تابع، حدود ضابطه اول  $x \geq 1$  و حدود ضابطه دوم  $x < 1$  است.)

در این حالت، برای هر محدوده، عمل موردنظر را روی ضابطه آن انجام می‌دهیم.

مثلاً برای  $f+g$ ، باید ضابطه‌های  $f$  و  $g$  در محدوده  $x \geq 1$  را با هم و در محدوده  $x < 1$  نیز با هم جمع کنیم.

$$(f+g)(x) = \begin{cases} (x-1) + 2 & x \geq 1 \\ (x^2) + (x^2+1) & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ساده‌تر می‌کنیم}} (f+g)(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 2x^2+1 & x < 1 \end{cases}$$

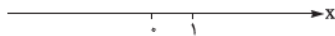
ضابطه  $g$  در  $x \geq 1$     ضابطه  $f$  در  $x \geq 1$     ضابطه  $f$  در  $x < 1$     ضابطه  $g$  در  $x < 1$

حالت ۲ (مخصوص علاقه‌مندان): حدود ضابطه‌های دو تابع متفاوت باشد، مثل زیر:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

فرض کنید می‌خواهیم تابع  $f+g$  را به دست آوریم:

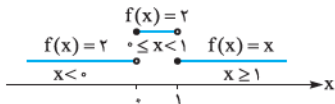
تابع  $f$  در  $x=1$  و تابع  $g$  در  $x=0$  تغییر ضابطه می‌دهند. این دو نقطه را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



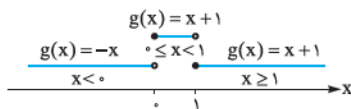
این دو نقطه محور اعداد را به ۳ قسمت  $x \geq 1$ ،  $0 \leq x < 1$  و  $x < 0$  تقسیم می‌کند.



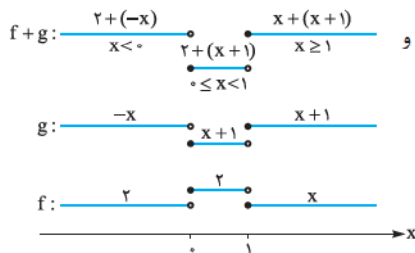
ضابطه  $f$  را در این سه قسمت روی محور می‌نویسیم. چون  $f$  به ازای  $x < 1$  از ضابطه  $y=2$  پیروی می‌کند، پس در هر دو محدوده  $0 \leq x < 1$  و  $x < 0$ ، ضابطه  $f$  را  $y=2$  قرار می‌دهیم:



برای  $g$  هم همین کار را انجام می‌دهیم، فقط چون  $g$  به ازای  $x \geq 0$ ، از ضابطه  $y=x+1$  پیروی می‌کند، پس در هر دو محدوده  $x \geq 1$  و  $0 \leq x < 1$ ، ضابطه  $g$  را  $y=x+1$  قرار می‌دهیم:



حالا با توجه به دو محور رسم‌شده، محدوده‌ها و ضابطه‌های  $f$  و  $g$  را روی یک محور می‌نویسیم و در محدوده‌های مشترک، ضابطه‌هایشان را جمع می‌کنیم تا  $f+g$  به دست آید:



ضابطه  $f+g$  در سه محدوده  $x \geq 1$ ،  $0 \leq x < 1$  و  $x < 0$  به دست آمد:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x+(x+1) & x \geq 1 \\ 2+(x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 2+(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x+3 & 0 \leq x < 1 \\ -x+2 & x < 0 \end{cases}$$

حالت ۳: تعداد ضابطه‌های دو تابع برابر نباشد، مثل توابع زیر که  $f$  یک ضابطه و  $g$  دو ضابطه دارد.

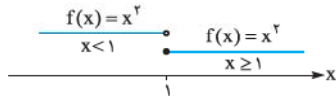
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

فرض کنید می‌خواهیم ضابطه  $f - g$  را به دست آوریم:

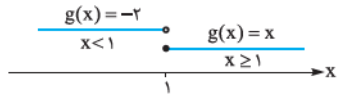
تابع  $f$  در نقطه‌ای تغییر ضابطه نمی‌دهد؛ ولی تابع  $g$  در  $X = 1$  تغییر ضابطه می‌دهد، این نقطه را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



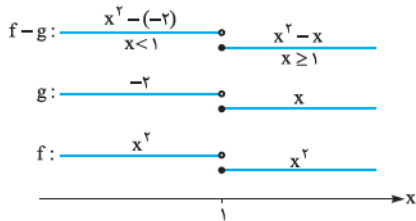
چون  $f$  تغییر ضابطه نمی‌دهد، در هر دو قسمت روی محور، ضابطه‌اش همان  $y = x^2$  است:



$g$  هم برای  $X \geq 1$  از ضابطه  $y = x$  و برای  $X < 1$  از ضابطه  $y = -2$  پیروی می‌کند.



حالا با توجه به دو محور رسم‌شده، محدوده‌ها و ضابطه‌های  $f$  و  $g$  را روی یک محور می‌نویسیم و در محدوده‌های مشترک، ضابطه  $f - g$  را به دست می‌آوریم:



ضابطه  $f - g$  در دو محدوده  $X \geq 1$  و  $X < 1$  به دست آمد:

$$(f-g)(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ x^2 - (-2) & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ x^2 + 2 & x < 1 \end{cases}$$

فصل سوم تابع

**تست** اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = -x$  باشد، نمودار تابع  $\frac{f}{g}$  به کدام صورت است؟



**پاسخ گزینه ۲** دامنه  $f$  و  $g$  هر دو برابر  $\mathbb{R}$  است ولی  $g(x)$  به ازای  $X = 0$  برابر صفر می‌شود، پس:

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \Rightarrow (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

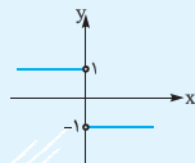
$$x > 0: \frac{f}{g} = \frac{|x|}{-x} = \frac{x}{-x} = -1$$

به ازای  $X > 0$  و  $X < 0$ ، ضابطه  $\frac{f}{g}$  را به دست می‌آوریم:

$$x < 0: \frac{f}{g} = \frac{|x|}{-x} = \frac{-x}{-x} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

پس  $\frac{f}{g}$  برابر است با:



نمودار  $\frac{f}{g}$  به ازای  $X > 0$ ، خط  $y = -1$  و به ازای  $X < 0$ ، خط  $y = 1$  است:

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای



### اعمال بر روی توابع

- ۵۳۲- اگر دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  برابر با  $D_f = \{-1, 2, 3\}$  و  $D_g = \{2, 1, -1\}$  باشد. دامنه تابع  $f + g$  کدام است؟  
 (۱)  $\{1, 3, 2\}$  (۲)  $\{-1, 3, 1, 2\}$  (۳)  $\{-1, 2\}$  (۴)  $\{-1, 2, 1\}$
- ۵۳۳- اگر دامنه تابع  $f$ ، محدوده  $2 < x < 3$  و دامنه تابع  $g$ ، محدوده  $1 < x \leq 6$  باشد. دامنه تابع  $f \times g$  کدام است؟  
 (۱)  $3 < x < 12$  (۲)  $-1 < x < 2$  (۳)  $-3 \leq x \leq 6$  (۴)  $-1 < x \leq 2$
- ۵۳۴- اگر  $f = \{(1, 3), (-2, 4), (5, -1)\}$  و  $f + g = \{(-2, 1), (1, -4)\}$  باشد. دامنه تابع  $g$  کدام می‌تواند باشد؟  
 (۱)  $\{2, 5, -2\}$  (۲)  $\{5, -2, 1\}$  (۳)  $\{1, -2, 3\}$  (۴)  $\{-2, 2, 3\}$
- ۵۳۵- اگر  $f = \{(1, 5), (-2, 2)\}$  و  $g = \{(1, -2), (3, 0)\}$  باشد. تابع  $f - g$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(1, 3)\}$  (۲)  $\{(1, 7), (3, 0), (-2, 3)\}$  (۳)  $\{(1, 5), (1, -2)\}$  (۴)  $\{(1, 7)\}$
- ۵۳۶- اگر  $f = \{(2, 4), (-1, 5), (1, -3)\}$  و  $g = \{(-1, -2), (0, 3), (2, 1)\}$  باشد. تابع  $f \times g$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(-1, -10)\}$  (۲)  $\{(2, 4)\}$  (۳)  $\{(-1, -10), (2, 4)\}$  (۴)  $\{(1, -10), (4, 4)\}$
- ۵۳۷- اگر  $f = \{(1, -2), (-2, 6)\}$  باشد. تابع  $2f$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(2, -4), (-4, 12)\}$  (۲)  $\{(2, -2), (-4, 6)\}$  (۳)  $\{(1, -4), (-2, -12)\}$  (۴)  $\{(1, -4), (-2, 12)\}$
- ۵۳۸- اگر  $f = \{(1, -3), (-2, 6)\}$  باشد. تابع  $f^2$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(1, 9), (-2, 36)\}$  (۲)  $\{(1, 3), (4, 6)\}$  (۳)  $\{(1, 9), (4, 36)\}$  (۴)  $\{(1, -9), (-2, 36)\}$
- ۵۳۹- اگر  $f$  تابعی همانی با دامنه  $\{2, -1\}$  و  $g$  تابعی ثابت با دامنه  $\{1, 2, 3\}$  و برد  $\{4\}$  باشد. تابع  $f - g$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(2, 1)\}$  (۲)  $\{(2, 2)\}$  (۳)  $\{(2, -2)\}$  (۴)  $\{(2, -1)\}$
- ۵۴۰- اگر  $f = \{(2, -3), (-1, 4), (0, -10)\}$  و  $g = \{(0, 5), (1, 4), (2, 6)\}$  باشد. تابع  $\frac{f}{g}$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(2, -2), (0, 2)\}$  (۲)  $\{(2, -2)\}$  (۳)  $\{(2, -\frac{1}{2}), (0, -2)\}$  (۴)  $\{(2, -\frac{1}{2})\}$
- ۵۴۱- اگر  $f = \{(4, 0), (1, 2), (-2, -1), (3, 4)\}$  و  $g = \{(-2, 3), (4, -1), (0, 4)\}$  باشد.  $\frac{g}{f}$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(-2, -3), (4, 0)\}$  (۲)  $\{(-2, -3)\}$  (۳)  $\{(-2, -\frac{1}{3}), (4, 0)\}$  (۴)  $\{(-2, -\frac{1}{3}), (4, 0)\}$
- ۵۴۲- اگر  $f = \{(3, 7), (-2, -5), (-4, 0)\}$  باشد. تابع  $\frac{f}{f}$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(1, 1)\}$  (۲)  $\{(3, 1), (-2, 1), (-4, 1)\}$  (۳)  $\{(1, 7), (1, -5), (1, 0)\}$  (۴)  $\{(3, 1), (-2, 1)\}$
- ۵۴۳- اگر  $f = \{(3, \frac{1}{2}), (0, -1), (1, 4), (-2, -3)\}$  و  $g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, -3)\}$  باشد. برد تابع  $f - g$  کدام مجموعه است؟  
 (۱)  $\{-2, 0\}$  (۲)  $\{-2, -4\}$  (۳)  $\{2, -4\}$  (۴)  $\{2, 4\}$
- ۵۴۴- اگر  $f = \{(2, -1), (-3, a), (4, -9)\}$  و  $g = \{(-3, 4), (2, b), (1, -6)\}$  و  $f + g = \{(-3, 3), (2, 4)\}$  باشد. حاصل  $a - b$  کدام است؟  
 (۱)  $4$  (۲)  $-4$  (۳)  $6$  (۴)  $-6$
- ۵۴۵- اگر  $f = \{(2, -1), (1, 4), (-2, 5)\}$  و  $g = \{(3, 1), (-2, 0), (2, -4)\}$  باشد. دامنه تابع  $f - 2g$  کدام است؟  
 (۱)  $\{2, -2\}$  (۲)  $\{1, 2\}$  (۳)  $\{2, 1, -2\}$  (۴)  $\{3, -2, 2\}$
- ۵۴۶- اگر  $f = \{(2, -1), (1, 4), (-2, 5)\}$  و  $g = \{(3, 1), (-2, 0), (2, -4)\}$  باشد. تابع  $f - 2g$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(1, 5), (2, 6)\}$  (۲)  $\{(2, 7), (-2, 9)\}$  (۳)  $\{(-2, 5), (2, 7)\}$  (۴)  $\{(3, -7), (-2, -13)\}$
- ۵۴۷- اگر  $f(x) = x(x-1)$  و  $g(x) = x(2-x)$  باشد. ضابطه  $f + g$  کدام است؟  
 (۱) تابع ثابت (۲) تابع همانی (۳) تابع علامت (۴) نیمساز ناحیه دوم و چهارم
- ۵۴۸- اگر  $f(x) = (x-2)(x+3)$  و  $g(x) = (x+1)(x-5)$  باشد. ضابطه تابع  $f - g$  کدام است؟  
 (۱)  $-3x - 11$  (۲)  $5x - 1$  (۳)  $5x + 1$  (۴)  $-3x + 11$
- ۵۴۹- اگر  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = x + 2$  باشد. دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  کدام است؟  
 (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{2\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{-2\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$



۵۵۰- اگر  $f(x) = 3x - 1$  و  $g = \{(2, -3), (-1, 4), (0, 7)\}$  باشد، حاصل  $(f - g)(2)$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۸ (۴) -۸

۵۵۱- اگر  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  و  $g(x) = -3x+2$  باشد، حاصل  $(g - f)(4)$  کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) -۱۳ (۳) ۷ (۴) -۷

۵۵۲- اگر  $f = \{(-2, -3), (4, \frac{1}{4}), (0, -7), (3, 5)\}$  و  $g = \{(-1, 4), (0, 2), (-2, 1)\}$  باشد، حاصل  $(f + g)(0)$  و  $(f \times g)(-2)$  به ترتیب از

راست به چپ کدام است؟

- (۱) -۵ و ۳ (۲) -۵ و -۳ (۳) ۳ و ۵ (۴) ۳ و ۵

۵۵۳- اگر  $f(x) = x^2 - 4$  و  $g(x) = 2 - x$  باشد، تابع  $h = \frac{f}{g}$  کدام است؟

- (۱)  $\{h: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\{h(x) = x + 2\}$  (۲)  $\{h: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\{h(x) = -x - 2\}$  (۳)  $\{h: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\{h(x) = -x - 2\}$  (۴)  $\{h: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\{h(x) = x + 2\}$

۵۵۴- اگر  $f(x) = x + 3$  و  $(f \times g)(x) = x^2 - 2x - 15$  باشد، ضابطه تابع  $(f - g)(x)$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳)  $2x - 2$  (۴)  $-2x + 2$

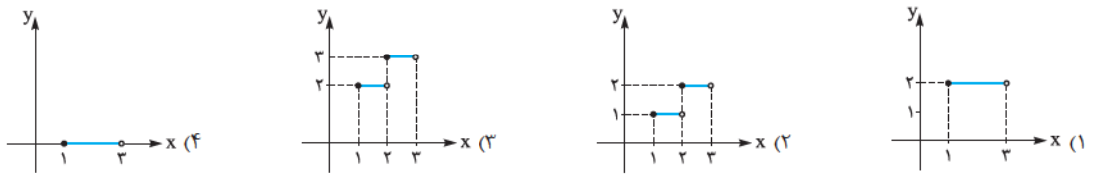
۵۵۵- اگر  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  و  $g(x) = x^2 + ax + 6$ ،  $D_f = \mathbb{R}$  و  $D_h = \mathbb{R} - \{2, b\}$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟ ( $b \neq 2$ )

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۵۵۶- اگر  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = |x|$  باشد، آن گاه  $f + g$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ x^2 - x & x < 1 \end{cases}$  (۲)  $\begin{cases} x^2 + x & x \geq 0 \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases}$  (۳)  $\begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ x^2 + x & x < 0 \end{cases}$  (۴)  $\begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ x^2 + x & x < 1 \end{cases}$

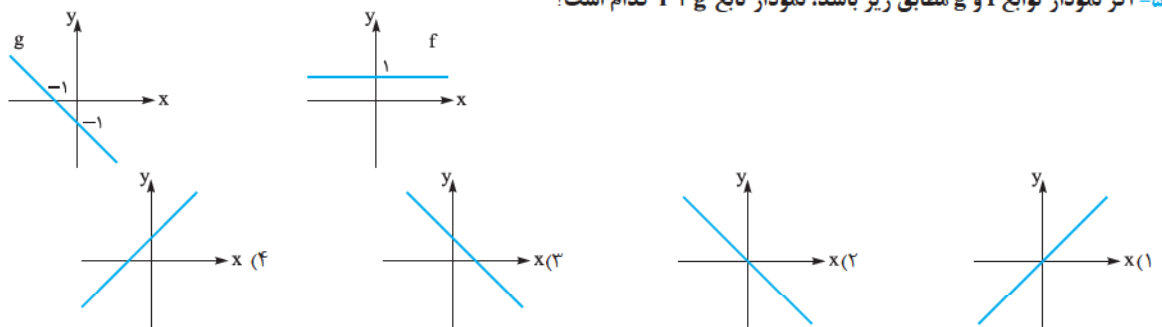
۵۵۷- اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \text{sign}(x)$  باشد، نمودار تابع  $f + g$  در بازه  $1 \leq x < 3$  کدام است؟



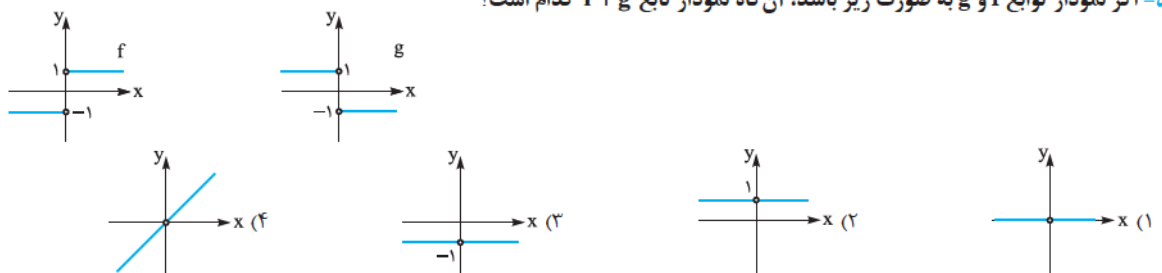
۵۵۸- اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = [x]$  باشد، تابع  $(f + g)(x)$  با دامنه  $-2 \leq x < -1$  با کدام گزینه برابر است؟

- (۱)  $y = x - 2$  (۲)  $y = x - 1$  (۳)  $y = -x - 2$  (۴)  $y = -x - 1$

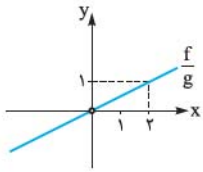
۵۵۹- اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  مطابق زیر باشد، نمودار تابع  $f + g$  کدام است؟



۵۶۰- اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد، آن گاه نمودار تابع  $f + g$  کدام است؟



۵۶۱- اگر  $f(x) = x^2$  و نمودار تابع  $(\frac{f}{g})(x)$  به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع  $g(x)$  کدام است؟



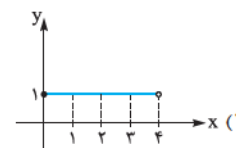
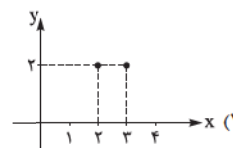
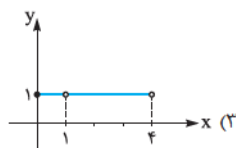
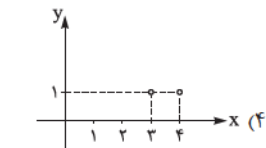
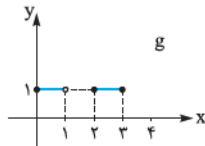
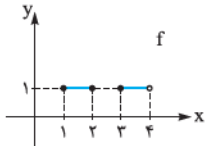
(۱)  $2x$

(۲)  $\frac{x}{2}$

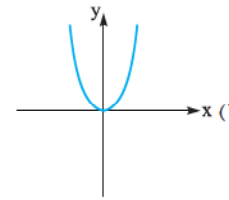
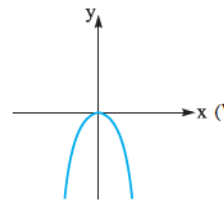
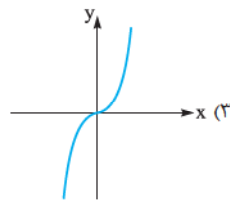
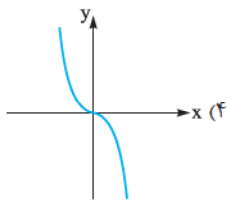
(۳)  $\frac{1}{2x}$

(۴)  $\frac{2}{x}$

۵۶۲- اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  مطابق زیر باشد، تابع  $f + g$  کدام است؟



۵۶۳- اگر  $f(x) = \text{sign}(x)$  و  $g(x) = x^2$  باشد، نمودار تابع  $fg$  کدام است؟



۵۶۴- اگر  $g(x) = \begin{cases} -2 & x \geq -1 \\ 1-x & x < -1 \end{cases}$  باشد، تابع  $g^2$  کدام است؟

(۴)  $\begin{cases} 4 & x \geq 1 \\ (1-x)^2 & x < 1 \end{cases}$

(۳)  $\begin{cases} 4 & x \geq -1 \\ 1-x^2 & x < -1 \end{cases}$

(۲)  $\begin{cases} 4 & x \geq -1 \\ (1-x)^2 & x < -1 \end{cases}$

(۱)  $\begin{cases} 4 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x < 1 \end{cases}$

● با توجه به متن زیر به سوالات ۵۶۵ تا ۵۶۷ پاسخ دهید.

«یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه A و B است. توابع درآمد و هزینه برای تولید  $x$  تن کاشی در کارخانه A به ترتیب  $16x - 2x^2$  و  $8x + 6$  و در کارخانه B به ترتیب  $12x - x^2$  و  $2x + 9$  واحد است. (هر واحد معادل یک میلیون تومان)»

۵۶۵- تابع سود این شرکت کدام است؟

(۴)  $-x^2 + 2x + 3$

(۳)  $-3x^2 + 18x - 15$

(۲)  $-x^2 + 2x - 3$

(۱)  $-3x^2 + 18x + 15$

۵۶۶- این شرکت با چه میزان تولید کاشی به سود ماکسیمم می‌رسد؟ (برحسب کیلوگرم)

(۴) ۴۰۰۰

(۳) ۳۰۰۰

(۲) ۲۰۰۰

(۱) ۱۰۰۰

۵۶۷- ماکسیمم سود این شرکت هولدینگ چه قدر است؟ (برحسب میلیون تومان)

(۴) ۲۰

(۳) ۱۸

(۲) ۱۵

(۱) ۱۲

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (-3 \leq x < 2) \cap (-1 < x \leq 6)$$

$$= -1 < x < 2$$

۵۳۴- گزینه ۳ دامنه  $f + g$  و  $f$  را به دست می آوریم:

$$D_f = \{f \text{ تمام مؤلفه‌های اول } f\} = \{1, -2, 5\}$$

$$D_{f+g} = \{f+g \text{ تمام مؤلفه‌های اول } f+g\} = \{-2, 1\}$$

می‌دانیم دامنه  $f + g$  از اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  به دست می‌آید. چون اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  برابر با  $\{-2, 1\}$  شده است، پس  $-2$  و  $1$  باید در  $D_g$  هم باشند، (۱) و (۲) به دلیل آن که شامل هر دو عدد  $1$  و  $-2$  نیستند، حذف می‌شوند. از طرفی اگر (۲) یعنی  $\{5, -2, 1\}$  دامنه  $g$  باشد، چون دامنه  $f$  هم همین مجموعه است؛ پس دامنه  $f + g$  هم باید  $\{5, -2, 1\}$  باشد که امکان‌پذیر نیست، پس فقط (۳) می‌ماند. در واقع دامنه  $g$  باید شامل  $1$  و  $-2$  باشد، ولی شامل  $5$  نباشد و هر عدد دیگری هم می‌تواند در  $D_g$  باشد:  $D_g = \{1, -2, 5, \dots\}$  «هر عددی به غیر از  $5$ »

۵۳۵- گزینه ۴ اول دامنه  $f - g$  را پیدا می‌کنیم. برای به دست آوردن دامنه  $f - g$ ، باید دامنه  $f$  و  $g$  را نوشته و بین آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$D_f = \{f \text{ همه مؤلفه‌های اول } f\} = \{1, -2\}$$

$$D_g = \{g \text{ همه مؤلفه‌های اول } g\} = \{1, 3\}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f \cap D_g = \{1\}$$

پس دامنه تابع  $f - g$  برابر است با:  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1\}$   
پس مؤلفه اول تابع  $f - g$  برابر با  $1$  و تابع  $f - g$  به صورت  $\{(1, \dots)\}$  است.

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب بالا، باید به ازای  $x = 1$ ، مقدار  $f - g$  را به دست آوریم:

$$\bullet x = 1: \quad f(1) = 5 \Rightarrow (1, 5) \text{ عضو } f \text{ است.}$$

$$g(1) = -2 \Rightarrow (1, -2) \text{ عضو } g \text{ است.}$$

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 5 - (-2) = 7$$

$$\Rightarrow (f - g)(1) = 7 \Rightarrow (1, 7) \text{ عضو } f - g \text{ است.}$$

پس  $f - g$  به صورت  $\{(1, 7)\}$  است.

۵۳۶- گزینه ۳ اول دامنه  $f$  و  $g$  را می‌نویسیم:

$$D_f = \{f \text{ همه مؤلفه‌های اول } f\} = \{2, -1, 1\}$$

$$D_g = \{g \text{ همه مؤلفه‌های اول } g\} = \{-1, 0, 2\}$$

دامنه  $f \times g$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است:

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{2, -1, 1\} \cap \{-1, 0, 2\} = \{-1, 2\}$$

پس مؤلفه‌های اول تابع  $f \times g$  برابر  $-1$  و  $2$  هستند و تابع  $f \times g$  به صورت  $\{(-1, \dots), (2, \dots)\}$  است.

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب‌های بالا، باید به ازای  $x = -1$  و  $x = 2$ ،  $f \times g$  را به دست آوریم:

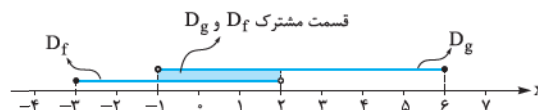
$$\bullet x = -1: \quad f(-1) = 5 \Rightarrow (-1, 5) \text{ عضو } f \text{ است.}$$

$$g(-1) = -2 \Rightarrow (-1, -2) \text{ عضو } g \text{ است.}$$

۵۳۲- گزینه ۳ دامنه تابع  $f + g$  برابر با اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است؛ پس باید بین  $D_f$  و  $D_g$  اشتراک بگیریم.  $D_f$  و  $D_g$  دارای دو عضو مشترک  $-1$  و  $2$  هستند، پس:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-1, 2, 3\} \cap \{2, 1, -1\} = \{-1, 2\}$$

۵۳۳- گزینه ۲ دامنه تابع  $f \times g$  برابر با اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است. محدوده دامنه  $f$  و  $g$  را روی محور نشان می‌دهیم و قسمت مشترکشان را مشخص می‌کنیم:



ازای آن‌ها  $g(x) = 0$  است. در این جا  $g(x)$  برابر با صفر نمی‌شود:

$$g = \{(0, 5), (1, 4), (2, 6)\}$$

خروجی  $g(x)$  برابر صفر نمی‌شود.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \underbrace{\{x \mid g(x) = 0\}}_{\text{تهی!}} = \{0, 2\} - \{0\} = \{0, 2\}$$

پس مؤلفه‌های اول تابع  $\frac{f}{g}$  برابر 0 و 2 هستند و تابع  $\frac{f}{g}$  به صورت  $\{(0, \quad), (2, \quad)\}$  است.

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب‌های بالا، باید به ازای

$$X = 0 \text{ و } X = 2, \text{ مقدار } \frac{f}{g} \text{ را به دست آوریم:}$$

•  $X = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f(0) = -1 &\Rightarrow f(0) = -1 \text{ عضو } f \text{ است.} \\ g(0) = 5 &\Rightarrow g(0) = 5 \text{ عضو } g \text{ است.} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(0) = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \text{عضو } (0, -\frac{1}{5}) \text{ است.}$$

•  $X = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} f(2) = -3 &\Rightarrow f(2) = -3 \text{ عضو } f \text{ است.} \\ g(2) = 6 &\Rightarrow g(2) = 6 \text{ عضو } g \text{ است.} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{عضو } (2, -\frac{1}{2}) \text{ است.}$$

پس تابع  $\frac{f}{g}$  شامل دو زوج مرتب  $(0, -\frac{1}{5})$  و  $(2, -\frac{1}{2})$  است:

$$\frac{f}{g} = \{(0, -\frac{1}{5}), (2, -\frac{1}{2})\}$$

۵۴۱- کزینة ۲ دامنه توابع  $f$  و  $g$  را می‌نویسیم:

$$D_f = \{4, 1, -2, 3\}$$

$$D_g = \{-2, 4, 0\}$$

دامنه تابع  $\frac{g}{f}$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است، بدجز  $X$ هایی

که مخرج  $\frac{g}{f}$  یعنی  $f$  را صفر می‌کنند. در این جا  $f$  در  $X = 4$  صفر

می‌شود.  $f = \{(4, 0), (1, 2), (-2, -1), (3, 4)\}$ ، پس باید از خروجی  $f$  در  $X = 4$  برابر صفر است.

اشتراک  $D_f$  و  $D_g$  عدد 4 را حذف کنیم.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \underbrace{\{x \mid f(x) = 0\}}_4 = \{-2, 4\} - \{4\} = \{-2\}$$

پس دامنه تابع  $\frac{g}{f}$  فقط عدد  $X = -2$  و مؤلفه اول  $\frac{g}{f}$  همان  $-2$

است؛ در نتیجه تابع  $\frac{g}{f}$  به صورت  $\{(-2, \quad)\}$  است.

$$(f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = (5) \times (-2) = -10$$

$$\Rightarrow (f \times g)(-1) = -10 \Rightarrow \text{عضو } (-1, -10) \text{ است.}$$

•  $X = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} f(2) = 4 &\Rightarrow f(2) = 4 \text{ عضو } f \text{ است.} \\ g(2) = 1 &\Rightarrow g(2) = 1 \text{ عضو } g \text{ است.} \end{aligned} \right\}$$

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 4 \times 1 = 4 \Rightarrow (f \times g)(2) = 4$$

$$\Rightarrow \text{عضو } (2, 4) \text{ است.}$$

تابع  $f \times g$ ، شامل دو زوج مرتب  $(-1, -10)$  و  $(2, 4)$  است، پس:

$$f \times g = \{(-1, -10), (2, 4)\}$$

۵۳۷- کزینة ۴ برای نوشتن تابع  $k.f$ ، کافی است مؤلفه‌های

اول  $f$  را تغییر ندهیم و تمام مؤلفه‌های دومش را در عدد  $k$  ضرب کنیم؛ پس در این جا مؤلفه‌های اول  $f$  را دست نمی‌زنیم و مؤلفه‌های دومش را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$f = \{(1, -2), (-2, 6)\}$$

$$\xrightarrow{\text{مؤلفه‌های اول بدون تغییر}} 2f = \{(1, 2 \times (-2)), (-2, 2 \times 6)\}$$

$$= \{(1, -4), (-2, 12)\}$$

۵۳۸- کزینة ۱ برای نوشتن تابع  $f^2$ ، به مؤلفه‌های اول  $f$  دست

نمی‌زنیم و مؤلفه‌های دومش را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$f = \{(1, -3), (-2, 6)\}$$

$$\xrightarrow{\text{مؤلفه‌های اول بدون تغییر}} f^2 = \{(1, (-3)^2), (-2, 6^2)\}$$

$$= \{(1, 9), (-2, 36)\}$$

۵۳۹- کزینة ۳ اول توابع  $f$  و  $g$  را به صورت مجموعه‌ای از

زوج مرتب‌ها می‌نویسیم:

$f$  تابعی همانی با دامنه  $\{2, -1\}$  است، پس به صورت  $f = \{(2, 2), (-1, -1)\}$  است.

$g$  تابعی ثابت با دامنه  $\{1, 2, 3\}$  و برد  $\{4\}$  است، پس به صورت  $g = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$  است.

دامنه تابع  $f - g$ ، اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  است:

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{2, -1\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}$$

پس دامنه تابع  $f - g$ ، فقط شامل ۲ است و خود تابع به صورت  $\{(2, \quad)\}$  است.

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب فوق باید مقدار  $f - g$  را

در  $X = 2$  به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} f(2) = 2 &\Rightarrow f(2) = 2 \text{ عضو } f \text{ است.} \\ g(2) = 4 &\Rightarrow g(2) = 4 \text{ عضو } g \text{ است.} \end{aligned} \right\}$$

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2 - 4 = -2$$

$$\Rightarrow (f - g)(2) = -2 \Rightarrow \text{عضو } (2, -2) \text{ است.}$$

پس  $f - g$  فقط شامل زوج مرتب  $(2, -2)$  است:

$$f - g = \{(2, -2)\}$$

۵۴۰- کزینة ۳ دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{2, -1, 0\}$$

$$D_g = \{0, 1, 2\}$$

دامنه تابع  $\frac{f}{g}$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است؛ بدجز  $X$ هایی که به

$$(f-g)(-2) = f(-2) - g(-2) = -3 - 1 = -4 \Rightarrow (-2, -4) \text{ عضو } f-g \text{ است.}$$

•  $x=0$ :

$$\begin{cases} (0, -1) \text{ عضو } f \text{ است.} \Rightarrow f(0) = -1 \\ (0, -3) \text{ عضو } g \text{ است.} \Rightarrow g(0) = -3 \end{cases}$$

$$(f-g)(0) = f(0) - g(0)$$

$$= -1 - (-3) = 2 \Rightarrow (0, 2) \text{ عضو } f-g \text{ است.}$$

پس تابع  $f-g$  شامل دو زوج مرتب بالا است:

$$f-g = \{(-2, -4), (0, 2)\}$$

مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های  $f-g$  برد این تابع است:

$$R_{f-g} = \{-4, 2\}$$

۵۴۴- کزینة ۱ دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{f \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{2, -3, 4\}$$

$$D_g = \{g \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{-3, 2, 1\}$$

دامنه تابع  $f+g$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2, -3, 4\} \cap \{-3, 2, 1\} = \{2, -3\}$$

پس مؤلفه‌های اول تابع  $f+g$  برابر ۲ و -۳ هستند و تابع  $f+g$  به صورت  $\{(2, \quad), (-3, \quad)\}$  است.

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب‌های بالا، باید به ازای  $x=2$  و  $x=-3$ ، مقدار  $f+g$  را به دست آوریم:

•  $x=2$ :

$$(2, -1) \text{ عضو } f \text{ است.} \Rightarrow f(2) = -1$$

$$(2, b) \text{ عضو } g \text{ است.} \Rightarrow g(2) = b$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = -1 + b$$

$$\Rightarrow (f+g)(2) = b-1 \text{ عضو } f+g \text{ است.}$$

•  $x=-3$ :

$$(-3, a) \text{ عضو } f \text{ است.} \Rightarrow f(-3) = a$$

$$(-3, 4) \text{ عضو } g \text{ است.} \Rightarrow g(-3) = 4$$

$$(f+g)(-3) = f(-3) + g(-3) = a + 4$$

$$\Rightarrow (f+g)(-3) = a+4 \text{ عضو } f+g \text{ است.}$$

پس تابع  $f+g$  شامل دو زوج مرتب  $(2, b-1)$  و  $(-3, a+4)$  است:

$$f+g = \{(-3, a+4), (2, b-1)\}$$

حالا تابع  $f+g$  داده شده در سؤال را با  $f+g$  به دست آمده برابر قرار می‌دهیم و  $a$  و  $b$  را به دست می‌آوریم:

$$\{(-3, a+4), (2, b-1)\} = \{(-3, 2), (2, 4)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+4=2 & \Rightarrow a=-2 \\ b-1=4 & \Rightarrow b=5 \end{cases}$$

پس  $a-b$  برابر است با:

$$a-b = -2-5 = -7$$

۵۴۵- کزینة ۱ گفتیم که دامنه تابع  $af+bg$ ، مثل دامنه تابع

$f+g$  یعنی  $D_f \cap D_g$  است؛ پس دامنه تابع  $f-2g$  هم همان

$D_f \cap D_g$  است؛ پس باید دامنه  $f$  و  $g$  را حساب کنیم و ببینان

اشتراک بگیریم:  $D_f = \{f \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{2, 1, -2\}$

برای به دست آوردن مؤلفه دوم زوج مرتب بالا، باید به ازای  $x=-2$ ،

مقدار  $\frac{g}{f}$  را به دست آوریم:

$$\bullet x=-2: \begin{cases} (-2, 3) \text{ عضو } g \text{ است.} \Rightarrow g(-2) = 3 \\ (-2, -1) \text{ عضو } f \text{ است.} \Rightarrow f(-2) = -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{g(-2)}{f(-2)} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(-2) = -3 \Rightarrow (-2, -3) \text{ عضو } \frac{g}{f} \text{ است.}$$

پس تابع  $\frac{g}{f}$  فقط شامل زوج مرتب  $(-2, -3)$  است:

$$\frac{g}{f} = \{(-2, -3)\}$$

۵۴۲- کزینة ۱ دامنه تابع  $f$  برابر با مجموعه تمام مؤلفه‌های اول

$$D_f = \{3, -2, -4\}$$

زوج مرتب‌های  $f$  است:

می‌دانیم دامنه تابع  $\frac{f}{f}$  به صورت زیر است:

$$D_{\frac{f}{f}} = \underbrace{D_f \cap D_f}_{D_f} - \{x \mid f(x) = 0\}$$

پس باید  $x$ هایی که به ازای آن‌ها  $f$  برابر صفر می‌شود را حذف کنیم. فقط به ازای  $x=-4$  خروجی صفر می‌دهد، پس باید عدد  $-4$  را از دامنه آن حذف کنیم:

$$D_{\frac{f}{f}} = D_f - \underbrace{\{x \mid f(x) = 0\}}_{-4} = \{3, -2, -4\} - \{-4\} = \{3, -2\}$$

پس مؤلفه‌های اول  $\frac{f}{f}$ ، اعداد ۳ و -۲ هستند و تابع  $\frac{f}{f}$  به شکل  $\{(3, \quad), (-2, \quad)\}$  است.

حالا کافی است با جای‌گذاری  $x=3$  و  $x=-2$  در  $\frac{f}{f}$ ، مؤلفه‌های

دوم زوج مرتب‌های بالا را هم به دست آوریم:

$$\bullet x=-2: \left(\frac{f}{f}\right)(-2) = \frac{f(-2)}{f(-2)} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{f}\right)(-2) = 1 \Rightarrow (-2, 1) \text{ عضو } \frac{f}{f} \text{ است}$$

•  $x=3$ :

$$\left(\frac{f}{f}\right)(3) = \frac{f(3)}{f(3)} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{f}\right)(3) = 1 \Rightarrow (3, 1) \text{ عضو } \frac{f}{f} \text{ است}$$

پس تابع  $\frac{f}{f}$  از دو زوج مرتب  $(-2, 1)$  و  $(3, 1)$  تشکیل شده است:

$$\frac{f}{f} = \{(-2, 1), (3, 1)\}$$

۵۴۳- کزینة ۳ دامنه  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{f \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{3, 0, 1, -2\}$$

$$D_g = \{g \text{ همه مؤلفه‌های اول}\} = \{-2, -1, 0\}$$

از دو مجموعه بالا اشتراک می‌گیریم تا دامنه تابع  $f-g$  به دست آید:

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{-2, 0\}$$

حالا باید مقدار تابع  $f-g$  را به ازای  $x=-2$  و  $x=0$  به دست آوریم:

•  $x=-2$ :

$$\begin{cases} (-2, -3) \text{ عضو } f \text{ است.} \Rightarrow f(-2) = -3 \\ (-2, 1) \text{ عضو } g \text{ است.} \Rightarrow g(-2) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-2) = -3$$

$$\Rightarrow g(-2) = 1$$

پس دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  شامل تمام اعداد حقیقی به جز عدد  $-2$  است.

۵۵۰- گزینه ۲ از آن جایی که  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$   
 $(f-g)(2) = f(2) - g(2)$  پس:

پس کافی است  $f(2)$  و  $g(2)$  را حساب کنیم:

● برای محاسبه  $f(2)$  باید در  $f(x) = 3x - 1$  جای  $x$ ، عدد ۲ را قرار دهیم:  $f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$   
 ● نقطه  $(2, -3)$  عضو  $g$  است، پس:  $g(2) = -3$   
 پس داریم:  $(f-g)(2) = f(2) - g(2) = 5 - (-3) = 8$

۵۵۱- گزینه ۲  $(g-f)(x) = g(x) - f(x)$   
 $\Rightarrow (g-f)(4) = g(4) - f(4)$

پس باید  $f(4)$  و  $g(4)$  را حساب کنیم. کافی است در ضابطه  $f$  و  $g$  جای  $x$ ، عدد ۴ را قرار دهیم:

$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f(4) = \sqrt{2(4)+1} = \sqrt{9} = 3$   
 $g(x) = -3x+2 \Rightarrow g(4) = -3(4)+2 = -12+2 = -10$   
 پس:  $(g-f)(4) = g(4) - f(4) = -10 - 3 = -13$

۵۵۲- گزینه ۲ می دانیم  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ . پس با جای گذاری  $x=0$  داریم:

$(f+g)(0) = f(0) + g(0)$   
 ● باید  $f(0)$  و  $g(0)$  را حساب کنیم:

نقطه  $(0, -7)$  عضو  $f$  است، پس  $f(0) = -7$ . نقطه  $(0, 2)$  عضو  $g$  است، پس  $g(0) = 2$ ؛ در نتیجه حاصل  $(f+g)(0)$  برابر است با:  
 $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = -7 + 2 = -5$

همچنین می دانیم  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ . پس با جای گذاری  $x = -2$  داریم:  $(f \times g)(-2) = f(-2) \times g(-2)$

● پس باید  $f(-2)$  و  $g(-2)$  را حساب کنیم:

نقطه  $(-2, -3)$  عضو  $f$  است، پس:  $f(-2) = -3$ .

نقطه  $(-2, 1)$  عضو  $g$  است، پس:  $g(-2) = 1$ ؛ در نتیجه حاصل  $(f \times g)(-2)$  برابر است با:

$(f \times g)(-2) = f(-2) \times g(-2) = -3 \times 1 = -3$

۵۵۳- گزینه ۳ ابتدا ضابطه  $h = \frac{f}{g}$  را به دست می آوریم:

$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{2 - x} = \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)}$

$= \frac{x+2}{-1} = -x-2$

حالا دامنه تابع  $h = \frac{f}{g}$  را حساب می کنیم. دامنه دو تابع  $f$  و  $g$ ،

اعداد حقیقی  $(\mathbb{R})$  است. دامنه  $\frac{f}{g}$ ، اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$

است به جز  $x$  هایی که مخرج  $\frac{f}{g}$  یعنی  $g$  را صفر می کنند. معادله

$g(x) = 0$  را حل می کنیم و جواب های آن را از اشتراک  $D_f$  و  $D_g$

حذف می کنیم:  $g(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$D_g = \{g \text{ مؤلفه های اول } g\} = \{3, -2, 2\}$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{2, 1, -2\} \cap \{3, -2, 2\} = \{-2, 2\}$

۵۴۶- گزینه ۳ در سؤال قبل دامنه این تابع را به دست آوردیم:

$D_{f-2g} = D_f \cap D_g = \{-2, 2\}$

حالا باید مقدار  $f-2g$  را به ازای  $x=2$  و  $x=-2$  حساب کنیم:

●  $x=2$ :

$\left. \begin{aligned} \text{عضو } f \text{ است.} \\ (2, -1) \Rightarrow f(2) = -1 \end{aligned} \right\}$

$\left. \begin{aligned} \text{عضو } g \text{ است.} \\ (2, -4) \Rightarrow g(2) = -4 \end{aligned} \right\}$

$(f-2g)(2) = f(2) - 2g(2) = -1 - 2(-4)$

$= -1 + 8 = 7 \Rightarrow (2, 7)$  عضو  $f-2g$  است.

●  $x=-2$ :

$\left. \begin{aligned} \text{عضو } f \text{ است.} \\ (-2, 5) \Rightarrow f(-2) = 5 \end{aligned} \right\}$

$\left. \begin{aligned} \text{عضو } g \text{ است.} \\ (-2, 0) \Rightarrow g(-2) = 0 \end{aligned} \right\}$

$(f-2g)(-2) = f(-2) - 2g(-2)$

$= 5 - 2(0) = 5 - 0 = 5 \Rightarrow (-2, 5)$  عضو  $f-2g$  است.

پس  $f-2g$  شامل دو زوج مرتب بالا است:

$f-2g = \{(2, 7), (-2, 5)\}$

۵۴۷- گزینه ۲ ابتدا  $f$  و  $g$  را ساده می کنیم:

$f(x) = x(x-1) = x^2 - x$

$g(x) = x(2-x) = 2x - x^2$

حالا ضابطه  $f+g$  را به دست می آوریم:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - x) + (2x - x^2)$

$= x^2 - x + 2x - x^2 = x \Rightarrow (f+g)(x) = x$

ضابطه  $y = x$  همان نیمساز ناحیه اول و سوم یا ضابطه تابع همانی است، پس  $f+g$  یک تابع همانی است.

۵۴۸- گزینه ۲ ابتدا  $f$  و  $g$  را با استفاده از اتحاد جمله مشترک

ساده تر می نویسیم:  $f(x) = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$

$g(x) = (x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5$

حالا ضابطه تابع  $f-g$  را به دست می آوریم:

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + x - 6) - (x^2 - 4x - 5)$

$= x^2 + x - 6 - x^2 + 4x + 5 = 5x - 1$

$\Rightarrow (f-g)(x) = 5x - 1$

۵۴۹- گزینه ۳ دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  برابر با اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$

است، به جز  $x$  هایی که به ازای آن ها  $g(x) = 0$  است.

پس اول معادله  $g(x) = 0$  را حل می کنیم تا ببینیم چه عددی باید از اشتراک  $D_f$  و  $D_g$  حذف شود.

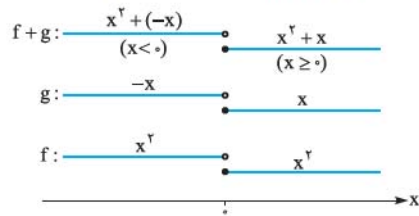
$g(x) = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

حالا دامنه  $\frac{f}{g}$  را حساب می کنیم:

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \underbrace{(\mathbb{R} \cap \mathbb{R})}_{\mathbb{R}} - \{-2\}$

$= \mathbb{R} - \{-2\}$

$x < 0$  ضابطه‌های  $f$  و  $g$  را روی محور می‌نویسیم و در محدوده‌های مشترک ضابطه‌ها را جمع می‌کنیم تا  $f + g$  به دست آید:



پس ضابطه  $f + g$  به صورت زیر در می‌آید:

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 0 \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases}$$

**۵۵۷- گزینة ۳** خب تکلیف  $\text{sign}$  که در بازه  $1 \leq x < 3$  معلوم است. چون تمام اعداد محدوده  $1 \leq x < 3$  مثبت‌اند، پس خروجی تابع  $\text{sign}$ ، عدد ۱ است. برای تابع  $f(x) = [x]$  باید محدوده را به دو قسمت تقسیم کنیم:

$$1 \leq x < 2: [x] = 1$$

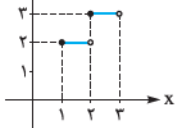
$$2 \leq x < 3: [x] = 2$$

حالا  $f$  و  $g$  را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1 \leq x < 2: [x] + \text{sign}(x) = 2 \\ 2 \leq x < 3: [x] + \text{sign}(x) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f + g)(x) = \begin{cases} 2 & 1 \leq x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

تابع دوضابطه‌ای بالا که در هر دو محدوده تابعی ثابت است را رسم می‌کنیم:



**۵۵۸- گزینة ۳** تابع  $f(x) = |x|$  را به صورت دوضابطه‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

ضابطه این تابع به ازای  $x < 0$  به صورت  $y = -x$  است، پس به ازای  $-2 \leq x < -1$  هم که زیرمجموعه‌ای از  $x < 0$  حساب می‌شوند، به همین صورت است:

$$-2 \leq x < -1: |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x$$

• تابع  $g(x) = [x]$  هم یک تابع بی‌نهایت ضابطه‌ای است! ضابطه آن به ازای  $-2 \leq x < -1$  به صورت  $y = -2$  در می‌آید، پس:

$$-2 \leq x < -1: [x] = -2 \Rightarrow g(x) = -2$$

پس برای  $-2 \leq x < -1$ ، ضابطه  $f + g$  برابر است با:

$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \Rightarrow |x| = -x \\ -2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \end{cases}$$

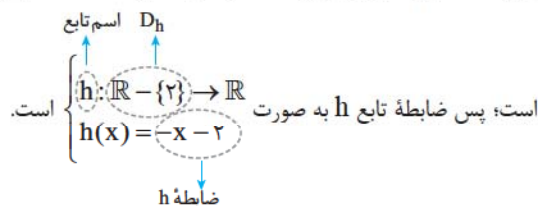
$$\Rightarrow |x| + [x] = -x + (-2) = -x - 2$$

$$(f + g)(x) = -x - 2, \quad -2 \leq x < -1$$

پس عدد ۲ را باید از  $D_f \cap D_g$  حذف کنیم تا  $D_{\frac{f}{g}}$  به دست آید:

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \\ &= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{2\} = \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

پس دامنه تابع  $h$  برابر با  $\mathbb{R} - \{2\}$  و ضابطه آن  $h(x) = -x - 2$



**۵۵۴- گزینة ۱** با داشتن  $f \times g$  و  $f$ ، ضابطه  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = (x + 3) \times g(x)$$

$$\xrightarrow{\text{سمت چپ را تجزیه می‌کنیم}} (x - 5)(x + 3) = (x + 3) \times g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = x - 5$$

حالا با داشتن  $g(x)$  و  $f(x)$ ، ضابطه  $(f - g)(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 3) - (x - 5)$$

$$= x + 3 - x + 5 = 8 \Rightarrow (f - g)(x) = 8$$

**۵۵۵- گزینة ۱** دامنه تابع  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، برابر با اشتراک دامنه دو تابع  $f$  و  $g$  است (که هر دو  $\mathbb{R}$  هستند) منهای  $x$ هایی که به ازای

آن‌ها منحنی  $\frac{f}{g}$  یعنی  $g$  برابر صفر شود:

$$D_h = D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid g(x) = 0\}$$

از مقایسه مجموعه بالا با دامنه  $h$  که خود سؤال داده یعنی

$$D_h = \mathbb{R} - \{2, b\}, \quad g(x) = 0$$

برابر ۲ و  $b$  هستند.

$g(x)$  به ازای  $x = 2$  صفر می‌شود:

$$g(x) = x^2 + ax + 6 \xrightarrow{g(2)=0} 2^2 + a(2) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$$

حالا  $a = -5$  را در  $g$  جای‌گذاری می‌کنیم تا  $b$  را هم به دست آوریم:

$$g(x) = x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{g(b)=0} b^2 - 5b + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (b - 2)(b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \quad \times \quad (\text{سؤال گفته}) \\ b = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

پس حاصل  $a + b$  برابر است با:

$$a + b = -5 + 3 = -2$$

**۵۵۶- گزینة ۲** تابع  $g(x) = |x|$  را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع  $f$  که تغییر ضابطه نمی‌دهد و همواره ضابطه‌اش  $f(x) = x^2$  است ولی تابع  $g$  در  $x = 0$  تغییر ضابطه می‌دهد، به ازای  $x \geq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x^2}{g(x)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(2)(x^2)}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x$$

پس ضابطه  $g$  به صورت  $g(x) = 2x$  است.

۵۶۲- گزینه ۲ برای به دست آوردن تابع  $f+g$  باید در دامنه‌های

مشترک دو تابع  $f$  و  $g$ ، مقادیر خروجی‌شان (یعنی  $Y$ ‌شان) را با هم جمع کنیم. دامنه  $f$  و  $g$  و اشتراک این دو را به دست می‌آوریم:

$$D_f = (1 \leq x \leq 2) \cup (3 \leq x < 4) \\ D_g = (0 \leq x < 1) \cup (2 \leq x \leq 3)$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2, 3\}$$

پس دامنه تابع  $f+g$  دارای دو عضو است: یکی  $x=2$  و دیگری  $x=3$ .

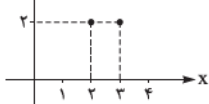
مقدار تابع  $f+g$  را در هر نقطه به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 1 = 2$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 1 + 1 = 2$$

پس تابع  $f+g$  شامل دو نقطه  $(2, 2)$  و  $(3, 2)$  است که نمودار آن

به صورت زیر است:



۵۶۳- گزینه ۳ تابع  $f$  یک تابع سدضابطه‌ای است:

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

تابع  $g$  یک تابع تک‌ضابطه‌ای است که همواره ضابطه آن به صورت  $g(x) = x^2$  است.

ضابطه این دو تابع را در محدوده‌های  $x > 0$ ،  $x = 0$  و  $x < 0$  در هم

ضرب می‌کنیم:  $x > 0: f(x) \times g(x) = (1) \times (x^2) = x^2$

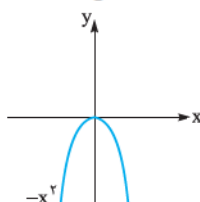
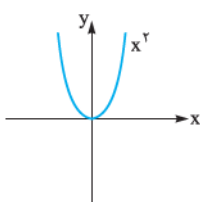
$x = 0: f(x) \times g(x) = (0) \times (x^2) = 0$

$x < 0: f(x) \times g(x) = (-1) \times (x^2) = -x^2$

پس ضابطه  $fg$  به صورت زیر است:

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار دو تابع  $y = x^2$  و  $y = -x^2$  به صورت زیر است:



۵۵۹- گزینه ۲ نمودار  $f$  یک خط افقی ( $y=1$ ) است، پس ضابطه

آن به صورت  $f(x) = 1$  است.

نمودار  $g$  هم یک خط راست است که از دو نقطه  $A(-1, 0)$  و

$B(0, -1)$  می‌گذرد. ابتدا شیب آن را به دست می‌آوریم و سپس

معادله‌اش را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - (-1)) \Rightarrow y = -x - 1$$

پس ضابطه  $g$  هم به صورت  $g(x) = -x - 1$  است.

حالا با داشتن ضابطه  $f$  و  $g$ ، ضابطه  $f+g$  را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + (-x - 1) = -x$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = -x$$

پس ضابطه تابع  $f+g$  برابر  $y = -x$  (نیمساز ناحیه دوم و چهارم)

است که نمودار آن در (۲) آمده است.

۵۶۰- گزینه ۱ تابع  $f$  یک تابع دوضابطه‌ای است که برای  $x > 0$  از

ضابطه  $y = 1$  و برای  $x < 0$  از ضابطه  $y = -1$  پیروی می‌کند:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

تابع  $g$  یک تابع دوضابطه‌ای است که برای  $x > 0$  از ضابطه  $y = -1$

و برای  $x < 0$  از ضابطه  $y = 1$  پیروی می‌کند:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

می‌خواهیم دو تابع  $f$  و  $g$  که هر دو دارای دو ضابطه و حدود

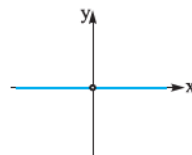
ضابطه‌های عیناً شبیه هم هستند را با هم جمع کنیم:

ضابطه‌های دو تابع را در محدوده‌های مشترک با هم جمع می‌کنیم

تا  $f+g$  به دست آید:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 1 + (-1) & x > 0 \\ -1 + 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

پس باید در دو محدوده  $x > 0$  و  $x < 0$ ، تابع  $y = 0$  را رسم کنیم:



۵۶۱- گزینه ۱ تابع  $\frac{f}{g}$  یک خط است. معادله آن را باید به دست

آوریم. این خط از دو نقطه  $A(0, 0)$  و  $B(2, 1)$  می‌گذرد (با این که

نقطه  $(0, 0)$  توخالی است ولی برای نوشتن معادله خط می‌توانیم از

آن استفاده کنیم)

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

پس ضابطه  $\frac{f}{g}$  به صورت  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{2}$  است. حالا با داشتن

ضابطه  $f$  و  $\frac{f}{g}$ ، ضابطه  $g$  را به دست می‌آوریم:

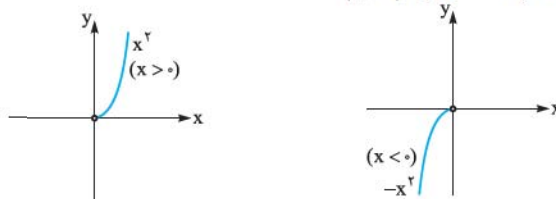


$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} = 3$$

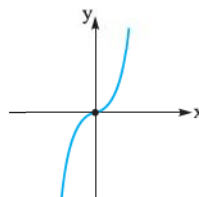
چون  $x$  برحسب تن بود، پس با تولید ۳ تن معادل با ۳۰۰۰ کیلوگرم کاشی به سود ماکسیمم می‌رسیم.

**۵۶۷- گزینه ۱** کافی است مقدار تابع  $P(x)$  را به ازای  $x = 3$  به دست آوریم:  $P(3) = -3(3)^2 + 18(3) - 15 = -27 + 54 - 15 = 12$

باید نمودار  $y = x^2$  را در محدوده  $x > 0$  و نمودار  $y = -x^2$  را در محدوده  $x < 0$  رسم کنیم:



با اضافه کردن نقطه  $(0, 0)$ ، نمودار تابع  $f \cdot g$  تشکیل می‌شود که به صورت مقابل است:



**۵۶۴- گزینه ۲** تابع  $g^2$  یعنی  $g \times g$  واضح است که دو تابع  $g$  و  $g$  تعداد ضابطه و محدوده دامنه یکسانی دارند، پس خیلی راحت می‌توانیم آن‌ها را ضرب کنیم. در محدوده‌های مشترک، ضابطه‌هایشان را ضرب می‌کنیم، در واقع کافی است در هر محدوده، ضابطه را به توان ۲ برسانیم (بدون آن که تغییری در محدوده دامنه‌ها بدهیم):

$$g(x) = \begin{cases} -2 & x \geq -1 \\ 1-x & x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{هر ضابطه را به توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{به محدوده‌ها دست نمی‌زنیم}} g^2(x) &= \begin{cases} (-2)^2 & x \geq -1 \\ (1-x)^2 & x < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4 & x \geq -1 \\ (1-x)^2 & x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

**۵۶۵- گزینه ۳** تابع درآمد دو کارخانه را با هم جمع می‌کنیم تا تابع درآمد شرکت به دست آید:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} A \text{ کارخانه: } R_A(x) &= -2x^2 + 16x \\ B \text{ کارخانه: } R_B(x) &= -x^2 + 12x \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow R_A(x) + R_B(x) &= (-2x^2 + 16x) + (-x^2 + 12x) \\ \Rightarrow R_{A+B}(x) &= -3x^2 + 28x \end{aligned}$$

تابع هزینه دو کارخانه را نیز با هم جمع می‌کنیم تا هزینه شرکت به دست آید:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} A \text{ کارخانه: } C_A(x) &= 8x + 6 \\ B \text{ کارخانه: } C_B(x) &= 2x + 9 \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow C_A(x) + C_B(x) &= (8x + 6) + (2x + 9) \\ \Rightarrow C_{A+B}(x) &= 10x + 15 \end{aligned}$$

حال تابع سود شرکت را به دست می‌آوریم: هزینه - درآمد = سود

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ \Rightarrow P(x) &= (-3x^2 + 28x) - (10x + 15) \\ \Rightarrow P(x) &= -3x^2 + 18x - 15 \end{aligned}$$

**۵۶۶- گزینه ۳** باید ببینیم تابع درجه دوم تابع زیر به ازای چه مقدار  $x$  ماکسیمم می‌شود.

$$P(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

در واقع باید  $x$  رأس این تابع را به دست آوریم: