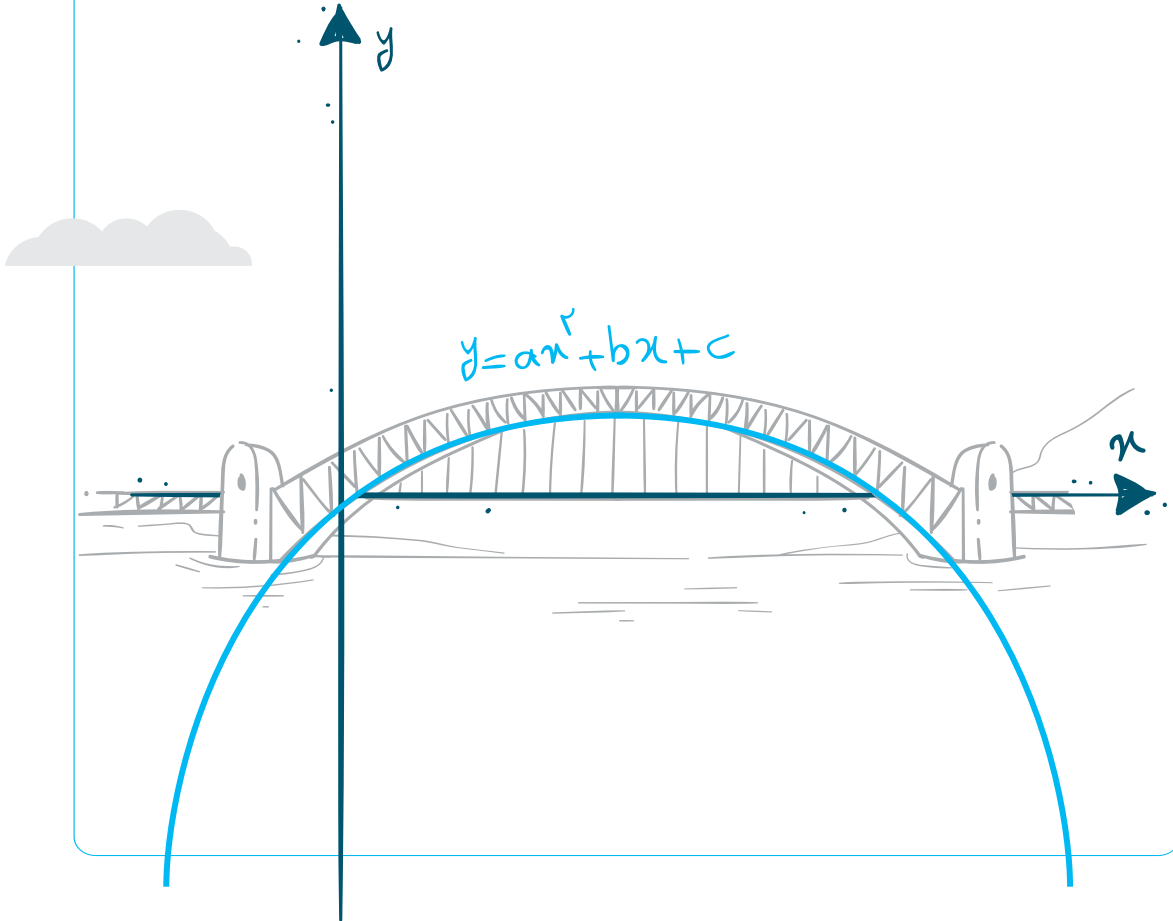


فصل دوم

معادله درجه دوم

پایه نهم



معادله درجه دوم

فصل دوم

درستانه

معادله درجه اول

فرض کنید از ما بپرسند کدام عدد است که چهار برابر آن منهای عدد پنج، مساوی دو برابر همان عدد به علاوه عدد سه می باشد؟ به نظر شما چه طور می توان این عدد را پیدا کرد؟

برای پیدا کردن این عدد و به طور کلی برای حل این گونه مسائل از معادله کمک می گیریم. فرض می کنیم عدد مورد نظر x باشد، معادل ریاضی جمله ای که گفته شده را می نویسیم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{منهای پنج}} 4x - 5 & \xrightarrow{\text{با هم مساوی}} 4x - 5 = 2x + 3 \\ \xrightarrow{\text{برای 4}} 4x & \xrightarrow{\text{به علاوه سه}} 2x + 3 \\ \xrightarrow{\text{برای 2}} 2x & \end{cases}$$

حال برای پیدا کردن x ، جملات شامل x را به یک طرف تساوی و اعداد ثابت را به طرف دیگر تساوی می بریم و هر طرف را ساده می کنیم:

$$4x - 2x = 3 + 5 \Rightarrow 2x = 8$$

اکنون اگر طرفین تساوی را بر ۲ تقسیم کنیم، x به دست می آید:

$$x = 4$$

پس عددی که مورد نظر سؤال بود، عدد ۴ است.

در این مسأله، چند مفهوم و تعریف وجود داشت. اولاً معادله ای که نوشتیم یک معادله درجه اول است (چون توان متغیر آن ۱ می باشد). ثانیاً مراحل حل که برای حل آن به کار بردیم، به اعمال جبری ساده معروف است. ثالثاً به $x = 4$ جواب یا ریشه معادله می گویند (زیرا به ازای آن معادله به یک تساوی عددی درست تبدیل می شود). در حالت کلی می توانیم بگوییم:

← معادله درجه اول

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. جواب این معادله از

$$\text{رابطه } x = -\frac{b}{a} \text{ به دست می آید (زیرا } ax = -b \text{ و در نتیجه } x = -\frac{b}{a} \text{).}$$

← اعمال جبری ساده

اعمالی که برای حل یک معادله، مجاز به انجام آن ها هستیم، عبارتند از:

- ① جمع کردن طرفین معادله با مقادیر مساوی
- ② کم کردن مقادیر مساوی از طرفین معادله
- ③ ضرب کردن طرفین معادله در مقادیر مساوی و مخالف صفر
- ④ تقسیم کردن طرفین معادله بر مقادیر مساوی و مخالف صفر

تذکره اجابت! ما دو تا سؤال داریم. اول این که چرا تو تعریف معادله، گفتین a مخالف صفر باشه؟ دوم این که تو اعمال جبری ساده برای ضرب و

تقسیم چرا شرط مخالف صفر رو آوردین؟ خوب اگه صفر باشه چی میشه؟

✓ **پاسخ** وای بچه پون! باز تو عیله کردی. فیلی سؤال های فوبی پرسیدی ولی اگه کمی صبر می کردی، فوراً همه رو می گفتم که چرا! جواب سؤال اولت رو بزار بعداً مفصل توضیح می دم ولی سؤال دوم رو همین الان می گم چرا. ببین مثلاً ما به معادله $\frac{5}{3}x = 3$ داریم. اگه بخوایم این رو حل کنیم، باید طرفین تساوی رو در $\frac{3}{5}$ ضرب کنیم تا جواب به دست بیاد که جواب هم $\frac{9}{5}$ می شه. اما اگه من طرفین تساوی رو در صفر ضرب می کردم، چی می شد؟ هیپی! می شد $0 = 0$. به چه دردی می خورد؟ هیپی، کمکی تو به دست آوردن جواب نمی کرد و الکی به یک تساوی بی فودی می رسیدیم. برای تقسیم هم همین طور. تو تقسیم که بدتر، پون اصلاً نمی شه طرفین رو به صفر تقسیم کرد! یه کار کاملاً بی معنیه. حالا به توضیحات زیر در مورد سؤال اولت دقت کن.

← جواب معادله

هر مقداری که معادله به ازای آن، به یک تساوی عددی درست تبدیل شود، جواب معادله است، پس می توانیم بگوییم جواب معادله همواره در خود معادله صدق می کند.

حالت‌های مختلف در معادله $ax + b = 0$:

$a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0 + b = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{b}{\neq 0}$	معادله به‌ازای هیچ x ی درست نیست.
$a = 0, b = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$	معادله به‌ازای هر x ی درست است.
$a \neq 0, b = 0 \Rightarrow ax + 0 = 0 \Rightarrow ax = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x = 0$	معادله فقط جواب صفر دارد.
$a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \xrightarrow{a \neq 0} x = -\frac{b}{a}$	معادله دارای یک جواب مخالف صفر است.

پس برای این‌که معادله $ax + b = 0$ یک معادله درجه اول و دارای جواب باشد، شرط $a \neq 0$ لازم است.

همیشه یادم بگونه

یک معادله درجه اول باید به شکل $ax + b = 0$ باشد و حتماً a مخالف صفر است، جواب آن هم $x = -\frac{b}{a}$ می‌شود. برای حل یک معادله درجه اول باید:

- اگر در معادله جمله‌هایی وجود دارد که شامل اعمال ضرب و تقسیم یا توان‌رسانی است، اول آن‌ها را انجام دهیم. مثلاً شامل جمله‌هایی مثل $2(x-1)$ یا $(x+2)^2$ باشد.
- اگر در معادله جمله‌های کسری است، طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم (تا مخرج‌ها از بین بروند). مثلاً در معادله $\frac{3x}{2} + 1 = \frac{x-1}{3}$ طرفین را در ۶ ضرب کنیم تا معادله به شکل $9x + 6 = 2x - 2$ در بیاید.
- جمله‌های دارای مجهول را به یک طرف و جمله‌های معلوم را به طرف دیگر تساوی معادله ببریم. مثلاً در معادله قبل آن را به شکل $9x - 2x = -2 - 6$ بنویسیم. البته این را فراموش نکنیم که وقتی جمله‌ای را از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی می‌بریم، علامتش قرینه می‌شود.
- در دو طرف تساوی، جمله‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم تا ساده شوند. مثلاً معادله قبل به شکل $7x = -8$ درمی‌آید.
- در مرحله آخر، طرفین معادله را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم تا مقدار مجهول به‌دست بیاید. مثلاً جواب معادله بالا می‌شود:

$$\frac{7x}{7} = -\frac{8}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

مثال جواب‌های معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $5(x-4) = \frac{3(2x+1)}{2}$ (ب) $(x-1)^2 = 4 + (x+2)^2$

پاسخ الف) طبق مراحل‌ی که در بالا گفتیم حل معادله را پیش می‌بریم تا مطلب کاملاً برایتان جا بیفتد.

۱) در سمت راست و چپ معادله، یک عمل ضرب باید انجام دهیم:

$$5(x-4) = \frac{3(2x+1)}{2} \Rightarrow 5x - 20 = \frac{6x+3}{2}$$

۲) در سمت راست، یک جمله کسری با مخرج ۲ داریم. پس طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2(5x-20) = 6x+3 \Rightarrow 10x-40 = 6x+3$$

۳) جمله‌های دارای مجهول را به طرف چپ و جمله‌های معلوم را به طرف راست می‌بریم:

$$10x - 6x = 3 + 40$$

$$4x = 43$$

۴) طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

$$x = \frac{43}{4}$$

۵) طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم تا جواب به‌دست آید:

ب) ۱) سمت راست و چپ، یک پرانتز با توان ۲ داریم. حاصل آن‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 = 4 + (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 + x^2 + 4x + 4$$

۲) جمله کسری نداریم.

۳) معلوم‌ها را به طرف راست و مجهول‌ها را به طرف چپ می‌بریم:

$$x^2 - 2x - x^2 - 4x = 4 + 4 - 1$$

$$-6x = 7$$

۴) طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

۵) طرفین معادله را بر -۶ تقسیم می‌کنیم تا جواب به‌دست آید:

$$x = -\frac{7}{6}$$

۱- جواب معادله $\frac{2-3x}{3} - \frac{x-4}{5} = 2x+1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{37}{45}$ (۲) $\frac{7}{45}$ (۳) $\frac{37}{48}$ (۴) $\frac{7}{48}$

۲- اگر $a \neq 2b$ ، جواب معادله $a(x-1) - 2bx + 2b = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) a (۳) b (۴) ۱

۳- به ازای کدام مقدار m، معادله $m(x-2) = 5x-1$ به یک تساوی نادرست (غیرممکن) تبدیل می شود؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{5}$

۴- اگر $(mx+2)^2 = (3m-x)^2$ یک معادله درجه اول باشد، آن گاه جواب آن کدام است؟ ($m > 0$)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۵- اگر معادله $(ax+2)^2 = (3x-1)^2$ یک معادله درجه اول باشد که جواب آن $x = \frac{1}{3}$ است، a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) -۳

۶- مجموع ثلث و خمس عددی ۳۴ واحد بیشتر از ربع آن عدد است. نصف نصف این عدد کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۳۰

۷- اگر به سه برابر عددی، ۴ واحد اضافه گردد و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی مانده ۵ می شود. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۴ (۳) ۸ (۴) ۶

۸- علی، رضا و مهدی با هم در پولی شریک هستند. اگر سهم علی و رضا به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ از پول باشد و مهدی ۱۰۰ هزار تومان پول گذاشته باشد، پول علی چند هزار تومان بوده است؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۲۲۵

۹- عددی ۲ برابر عدد دیگر و مربع آن برابر مکعب عدد دیگر است. میانگین این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۰- محیط یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین $(1+\sqrt{2})$ سانتی متر است. مساحت آن کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{12}$ (۳) ۹ (۴) $9\sqrt{2}$

۱۱- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی ۶۵۷ است. رقم دهگان عدد کوچک تر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) ۲

۱۲- حاصل جمع چهار عدد طبیعی زوج متوالی ۳۶ شده است. حاصل ضرب دو عدد وسطی کدام است؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۲۰

۱۳- ۵ سال دیگر مجموع سن رضا و مجید، برابر ۳۰ خواهد شد. اگر سال گذشته سن رضا دو برابر سن مجید بوده باشد، اختلاف سن آنها کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۴- امسال پدری در ۳۰ سالگی فرزندش ۵۶ سال دارد. چند سال قبل، سن پدر، سه برابر سن پسرش بوده است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۲۶ (۳) ۱۷ (۴) ۳۹

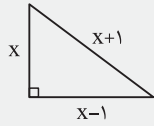
۱۵- مینا تعدادی شکلات داشت. نیمی را به برادرش و نیمه بقیه اش را به دوستش و نیمه باقی مانده را به مادرش داد و ۵ شکلات برای خودش باقی ماند. او در ابتدا چند شکلات داشته است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۱۶- در یک شرکت ۳ مدیر، ۲ معاون، ۱۵۰ کارمند و ۵ خدمات چپی وجود دارد. اگر حقوق یک کارمند ۲ برابر یک خدمات چپی، نصف یک معاون و $\frac{1}{5}$ یک مدیر باشد و این شرکت ماهیانه ۳۴۳۰۰۰۰۰ تومان حقوق پرداخت کند، یک معاون، ماهی چند میلیون تومان حقوق می گیرد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

معادله درجه دوم و مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)



$$x^2 + (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \xrightarrow{\text{فکتوراز } x} x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

فرض کنید می‌خواهیم طول وتر مثلث قائم‌الزاویه زیر را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه فیثاغورث داریم:

اگر $x = 0$ باشد، طول یکی از اضلاع، صفر و یکی دیگر از اضلاع، منفی می‌شود که قابل قبول نیست، پس فقط $x = 4$ قابل قبول است و طول اضلاع ۳ و ۴ و طول وتر ۵ می‌شود.

معادله‌ای که برای حل این مسأله نوشتیم، درجه اول نبود. به این معادله، درجه دوم گفته می‌شود (چون بیشترین توان متغیر ۲ است). در حالت کلی داریم:

← معادله درجه دوم

هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $a \neq 0$ است، یک معادله درجه دوم می‌نامند. در این معادله، a ضریب x^2 ، b ضریب x و c ، عدد ثابت است و به این شکل از معادله، صورت استاندارد آن گفته می‌شود.

👉 **توجه** معادله درجه دوم را هم با اعمال جبری ساده حل می‌کنیم.

👉 **تذکره** همیشه تو این معادله هم بگید اگر a صفر باشه یا حتی b و c ، چه حالت‌هایی پیش میاد؟

👉 **پاسخ** بله که همیشه، ولی پون تو این معادله، حالت‌ها خیلی زیاده و مهمه، بگذار یک کم همین حالت معمولی معادله رو تمرین کنیم، بعد تو درسامه‌های بعدی مفصل برات توضیح می‌دم.

همیشه یادم بمونه

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم است، بزرگ‌ترین توان x باید ۲ باشد. جواب معادله هم در خود معادله صدق می‌کند و یا هر عددی که در معادله صدق کند، جواب معادله است.

👉 **مثال** اگر معادله $mx^2 - (n-1)x^3 - 2x + 1 = x^2 + 3m + x$ یک معادله درجه دوم با جواب $x = 1$ باشد، مقدار m و n را پیدا کنید و عدد ثابت را بیابید.

👉 **پاسخ** اولاً چون معادله درجه دوم است، باید بزرگ‌ترین توان متغیر ۲ باشد. بنابراین ضریب x^3 باید صفر شود تا یک معادله درجه دوم داشته باشیم:

$$n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

حالا معادله را مرتب می‌کنیم و به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$mx^2 - 2x + 1 = x^2 + 3m + x \Rightarrow mx^2 - x^2 - 2x - x + 1 - 3m = 0 \Rightarrow (m-1)x^2 - 3x + 1 - 3m = 0 \quad (*)$$

البته برای پیدا کردن مقدار m نیازی به استاندارد کردن نبود ولی برای پیدا کردن جمله ثابت در مرحله بعد به آن احتیاج داشتیم که می‌توانستیم بعداً این کار را انجام دهیم.

چون $x = 1$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$(m-1)(1)^2 - 3(1) + 1 - 3m = 0 \Rightarrow m - 3 - 3m = 0 \Rightarrow -2m - 3 = 0 \Rightarrow -2m = 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

$$\text{عدد ثابت} = 1 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

عدد ثابت معادله، طبق رابطه (*) برابر $1 - 3m$ است. در نتیجه:

← رمزنگاری

می‌توانیم حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده و از آن برای رمزگذاری کلمات فارسی استفاده کنیم. قانون رمزگذاری را این‌طور قرارداد می‌کنیم که:

① هر حرف بدون نقطه با شماره آن از ۱ تا ۳۲ مشخص شود.

② حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شوند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف موردنظر باشد. مثلاً حرف «ط» با عدد ۱۹ (چون ۱۹ امین حرف الفبا است.) و حرف «ث» با $5x^3$ (چون ۵ امین حرف الفبا است و تعداد نقطه‌هایش ۳ است.) مشخص می‌شوند.

③ برای نوشتن کلمات از علامت جمع بین رمزهای هر حرف استفاده می‌کنیم. مثلاً معادل رمزی کلمه «ریاضی» به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{array}{cccccc} \text{ی} & + & \text{ض} & + & \text{ا} & + & \text{ی} & + & \text{ر} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۳۲ & & ۱۸x & & ۱ & & ۳۲x^2 & & ۱۲ \end{array} \Rightarrow ۱۲ + ۳۲x^2 + ۱ + ۱۸x + ۳۲$$

همیشه یادم بمونه

برای رمزنگاری، حواسمان به حروف نقطه‌دار باشد و حتماً آن‌ها را به صورت ax^n بنویسیم. وقتی حرفی مثل «ی» وسط کلمه می‌آید، ۲ تا نقطه دارد و در آخر کلمه، بدون نقطه است، پس باید آن را در وسط به صورت $۳۲x^۲$ و در آخر به صورت ۳۲ بنویسیم.

مثال الگوی ریاضی معادل کلمه «دانش آموز» را بنویسید.

$$\begin{matrix} \text{ز} & + & \text{و} & + & \text{م} & + & \text{آ} & + & \text{ش} & + & \text{ن} & + & \text{ا} & + & \text{د} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۱۳x & & ۳۰ & & ۲۸ & & ۱ & & ۱۶x^۳ & & ۲۹x & & ۱ & & ۱۰ \end{matrix} \Rightarrow ۱۰ + ۱ + ۲۹x + ۱۶x^۳ + ۱ + ۲۸ + ۳۰ + ۱۳x$$

پاسخ

۱۷- با کدام شرط، معادله $(a-3)x^2 + (b-2)x + 1 = 0$ همواره یک معادله درجه دوم است؟

$b \neq 3$ (۴) $b = 2$ (۳) $a \neq 3$ (۲) $a = 3$ (۱)

۱۸- کدام معادله درجه دوم است؟

$(3x-1)^2 = (x+1)^2$ (۴) $2x^2 + 5x - 8 - x^2 = x^2 + 1$ (۳) $(2x-1)^2 = (3+2x)^2$ (۲) $(x-1)^2 = x^2 - 5x + 6$ (۱)

۱۹- اگر در شکل استاندارد معادله $(x-2)(2x+1) = 3x+6$ ضریب جمله درجه دوم برابر ۱ باشد، ضریب جمله درجه اول کدام است؟

-3 (۴) 6 (۳) 3 (۲) -6 (۱)

۲۰- ضریب جمله درجه ۲ در معادله $(3x+1)^2 = (x-4)^2$ در صورتی که عدد ثابت معادله ۶۰ باشد، کدام است؟

-32 (۴) -8 (۳) 32 (۲) 8 (۱)

۲۱- اگر $ax^3 + bx^2 + cx - dx^2 + d = 0$ یک معادله درجه دوم باشد که ضریب جمله درجه دوم آن برابر ۳، ضریب جمله درجه اول آن

برابر ۲- و جمله ثابت آن برابر ۱- است، مقدار $a-b-c+d$ کدام است؟

-2 (۴) -1 (۳) -3 (۲) -5 (۱)

۲۲- اگر $x=2$ جواب معادله درجه دوم $(m-2n)x^3 + nx^2 + 2mx - 12 = 0$ باشد، حاصل $m^2 + n^2$ کدام است؟

10 (۴) 1 (۳) 5 (۲) 8 (۱)

۲۳- اگر α جواب معادله $3x^2 - 5x + \alpha = 0$ باشد، مقدار عبارت $3\alpha^2 - 4\alpha + 3$ کدام است؟

2 (۴) 5 (۳) 4 (۲) 3 (۱)

۲۴- اگر a جواب معادله درجه دوم $3x^2 - 8x - 4 = 0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{a^2}{8} - \frac{a}{3}$ کدام است؟

1 (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۱)

۲۵- معادل ریاضی کلمه «شیرین» کدام است؟

$16x^3 + 7x + 29x$ (۲) $16x^3 + 32 + 12 + 32 + 29x$ (۱)

$16x^3 + 32x^2 + 12 + 32x^2 + 29x$ (۴) $16x^3 + 64x^2 + 29x + 12$ (۳)

۲۶- معادل ریاضی کلمه «درخت سبز» شامل چند عدد زوج است؟

6 (۴) 7 (۳) 5 (۲) 4 (۱)

۲۷- کلمه معادل رمز « $2x + 29x + 23x + 16x^3$ » کدام است؟

پوزش (۱) بنفش (۲) مثلث (۳) بلوچ (۴)

۲۸- معادل فارسی رمز « $32x^2 + 25 + 15 + 1 + 29x$ » کدام است؟

ناسوز (۱) یکتا (۲) یکرو (۳) یکسان (۴)

۲۹- در نوشتن معادل ریاضی کلمه «روزهای شنبه» مجموع ضرایب جملات درجه اول کدام است؟

36 (۴) 44 (۳) 82 (۲) 137 (۱)

۳۰- حروف رمز یک کلمه به صورت درهم ریخته، ۳۰، ۲۶، ۱، $13x$ ، ۱۲ و ۱۲ است. این کلمه کدام است؟

سوزدار (۱) رازدار (۲) روزگار (۳) دادمان (۴)

پایه تشریحی

ابتدا طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها، یعنی ۱۵ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند: ۴ ۱

$$\begin{aligned} \Delta(2-3x) - 2(x-4) &= 15(2x+1) \Rightarrow 10 - 15x - 2x + 8 = 30x + 15 \\ \Rightarrow 30x + 15x + 2x &= 10 + 8 - 15 \Rightarrow 48x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

ابتدا معادله داده شده را ساده می‌کنیم: ۴ ۲

$$a(x-1) - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow ax - a - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow (a-2b)x - a + 2b = 0$$

حالا یک معادله درجه اول داریم و چون طبق فرض $a \neq 2b$ است، پس ضریب x مخالف صفر می‌باشد و معادله جواب دارد:

$$(a-2b)x = a - 2b \xrightarrow{\div(a-2b)} x = \frac{a-2b}{a-2b} \Rightarrow x = 1$$

$$m(x-2) = 5x - 1 \Rightarrow mx - 2m = 5x - 1 \Rightarrow mx - 5x = -1 + 2m \Rightarrow (m-5)x = 2m - 1$$

برای این‌که به یک تساوی نادرست برسیم، باید معادله فوق را به شکل $0 \times x = A \neq 0$ تبدیل کنیم، در نتیجه اگر $m - 5 = 0$ و بنابراین $m = 5$ باشد، داریم:

$$0 \times x = 2(5) - 1 \Rightarrow 0 \times x = 9 \text{ غیرممکن}$$

بهازای سایر مقادیر m ، معادله درجه اول حاصل، یک جواب خواهد داشت.

معادله را ساده می‌کنیم: ۲ ۴

$$m^2x^2 + 4mx + 4 = 9m^2 - 6mx + x^2 \Rightarrow m^2x^2 + 4mx + 4 - 9m^2 + 6mx - x^2 = 0 \Rightarrow (m^2-1)x^2 + 10mx = 9m^2 - 4$$

چون معادله درجه اول است، پس باید ضریب x^2 صفر باشد:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \xrightarrow{m > 0} m = 1$$

$$(3x-1)^2 = (ax+2)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = a^2x^2 + 4ax + 4 \Rightarrow 9x^2 - 6x - a^2x^2 - 4ax = 4 - 1 \Rightarrow (9-a^2)x^2 - (6+4a)x = 3$$

اولاً چون معادله درجه اول است، ضریب x^2 در آن صفر می‌باشد:

$$9 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

ثانیاً چون $x = \frac{1}{3}$ جواب معادله است، در آن صدق می‌کند:

$$-(6+4a)x = 3 \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} (-6-4a)\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \Rightarrow -3-2a = 3 \Rightarrow -2a = 3+3 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow a = -3$$

عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم. داریم: ۴ ۶

$$\begin{array}{l} \text{مخرج مشترک کسرها} \\ \text{ربع} \quad \text{خمس} \quad \text{ثلث} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{4} + 34 \xrightarrow{\times 60} 20x + 12x - 15x = 2040 \Rightarrow 17x = 2040 \Rightarrow x = \frac{2040}{17} = 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{نصف نصف} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{x}{2} = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{60}{2} = 30 \end{array}$$

اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم، ابتدا معادل ریاضی تک‌تک جملات را نوشته، سپس معادله آن را برای محاسبه x می‌نویسیم: ۴ ۷

$$3x + 4 - x = 5 \xrightarrow{\text{باقی مانده}} \frac{3x+4}{2} - x = 5 \xrightarrow{\text{همان عدد کم شود}} \frac{3x+4}{2} - \frac{2x}{2} = 5 \xrightarrow{\text{نصف حاصل}} \frac{3x+4}{2} = 5 \xrightarrow{\text{به سه برابر عددی، ۴ واحد اضافه گردد.}}$$

همان‌طور که دیدید وقتی مرحله به مرحله پیش می‌رویم، سرانجام خیلی راحت به معادله موردنظر می‌رسیم. حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{3x+4}{2} - x = 5 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در ۲}} 3x+4-2x=10 \Rightarrow 3x-2x=10-4 \Rightarrow x=6$$

اگر کل پول را x در نظر بگیریم، داریم: ۳ ۸

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 100 = x \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x - x = -100 \Rightarrow \frac{5x+6x-15x}{15} = -100 \Rightarrow -\frac{4}{15}x = -100$$

$$\Rightarrow x = \frac{15 \times 100}{4} = 15 \times 25 = 375 \text{ هزار تومان}$$

پس پول علی برابر است با:

$$\frac{1}{3} \times 375 = 125 \text{ هزار تومان}$$

اعداد مورد نظر را x و y فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

۳ ۹



$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 = y^3 \end{cases} \Rightarrow (2y)^2 = y^3 \Rightarrow 4y^2 = y^3 \xrightarrow{\div y^2} 4 = y \Rightarrow x = 2y = 2(4) = 8$$

$$\Rightarrow \text{میانگین دو عدد} = \frac{x+y}{2} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم. پس داریم:

۳ ۱۰



$$\begin{aligned} \text{محیط} &= x + x + y \Rightarrow 6(1 + \sqrt{2}) = 2x + y \\ \text{فیثاغورث: } x^2 + x^2 &= y^2 \Rightarrow 2x^2 = y^2 \xrightarrow{x > y} y = \sqrt{2}x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x + \sqrt{2}x = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{36}{2} = \frac{36}{4} = 9$$

می‌توانیم اعداد زوج را به صورت $2x$ و اعداد فرد را به صورت $2x-1$ نشان دهیم. وقتی سه عدد زوج متوالی داریم، سه عدد را به صورت

۲ ۱۱



$2x-3, 2x-1, 2x+1$ یا $2x, 2x+2, 2x+4$ یا $2x-2, 2x, 2x+2$ یا $2x+2, 2x+4, 2x+6$... و وقتی سه عدد فرد متوالی داریم، سه عدد را به صورت $2x-3, 2x-1, 2x+1$ یا $2x+3, 2x+5, 2x+7$ یا $2x-1, 2x+1, 2x+3$ معمولاً حالت اولی که برای هر کدام نوشتیم ما را راحت‌تر و سریع‌تر به جواب می‌رساند. در این تست داریم:

$$2x-3 + 2x-1 + 2x+1 = 657 \Rightarrow 6x-3 = 657 \Rightarrow 6x = 660 \Rightarrow x = \frac{660}{6} \Rightarrow x = 110$$

\Rightarrow رقم دهگان عدد کوچک‌تر $\Rightarrow 211, 219, 217, 211$: اعداد $\Rightarrow 2(110)+1, 2(110)-1, 2(110)-3$: اعداد فرد متوالی

اعداد طبیعی زوج متوالی را $4+2x, 2x+2x, 2x-2x$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

۱ ۱۲



$$2x-2 + 2x + 2x+4 + 2x = 36 \Rightarrow 8x = 36 - 4 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{8} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب دو عدد وسطی} = 8 \times 10 = 80$$

پایان اجازه! ما چهار تا عدد رو به شکل $2x, 2x+2, 2x+4, 2x+6$ گرفتیم، جوابمون هم درست در اومد!

پاسخ فب کار اشتباهی نکردی که به جواب غلط برسی. اینم درسته، حتی اگه چهار عدد رو به صورت $2x, 2x+2, 2x, 2x-2, 2x-4$ و یا کلی فرض دیگره (و البته درست) هم در نظر بگیری، باز به جواب درست می‌رسی! ولی همیشه بهتره این‌ها رو طوری بگیری که تناسبت کم‌تر بشه. مثلاً اون طوری که ما گرفتیم، همون اول در سمت چپ ۲ و ۲- با هم حذف شدن و تناسبت کم‌تری داشتیم ولی تو باید ۲ و ۴ و ۶ رو با هم جمع می‌کردی.

اگر سن رضا را x و سن مجید را y فرض کنیم، با توجه به توضیحات سؤال می‌توانیم معادله‌های زیر را بنویسیم:

۳ ۱۳



سن ۵ سال بعد
سن ۵ سال بعد

$$(\downarrow 5 + x) + (\downarrow 5 + y) = 30 \Rightarrow 10 + x + y = 30 \Rightarrow x + y = 20 \quad (*)$$

$$(\uparrow x - 1) = 2(\uparrow y - 1) \Rightarrow x - 1 = 2y - 2 \Rightarrow x - 2y = -1 \quad (**)$$

سن سال
سن سال

گذشته مجید گذشته رضا

اگر معادله $(**)$ را از معادله $(*)$ کم کنیم، داریم:

$$x + y - (x - 2y) = 20 - (-1) \Rightarrow x + y - x + 2y = 20 + 1 \Rightarrow 3y = 21 \Rightarrow y = 7$$

$$\xrightarrow{x+y=20} x + 7 = 20 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow x - y = 13 - 7 = 6$$

اختلاف سن پدر و پسر ۲۶ سال $(26 = 30 - 4)$ است، یعنی وقتی پسر به دنیا آمده، پدر ۲۶ سال داشته است. اگر فرض کنیم x سال بعد از

۳ ۱۴



تولد پسر، سن پدر، سه برابر سن پسر شود، آن‌گاه می‌توانیم معادله آن را به صورت $3x = 26 + x$ بنویسیم و با حل آن داریم:

$$26 = 3x - x \Rightarrow 26 = 2x \Rightarrow x = 13$$

یعنی ۱۳ سال بعد از تولد پسر (وقتی پسر ۱۳ سال دارد)، پدر $26 + 13 = 39$ سال داشته که ۳ برابر سن پسرش بوده است. اما در سؤال از ما خواسته که پیدا کنیم چند سال قبل از امسال این اتفاق افتاده است، در نتیجه داریم:

$$\text{سال قبل} = 39 - 56 = 17$$



۳ ۱۵

فرض کنیم تعداد شکلات‌های مینا در ابتدا X تا بوده است. مرحله به مرحله پیش می‌رویم و تعداد شکلات‌های برادر، دوست و مادر مینا را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} \text{برادرش} \\ \downarrow \\ \frac{X}{2} \Rightarrow X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2} \Rightarrow \frac{X}{2} \\ \text{باقی مانده} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{دوستش} \\ \downarrow \\ \frac{X}{2} \Rightarrow \frac{X}{2} - \frac{X}{2} = 0 \\ \text{باقی مانده} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{مادرش} \\ \downarrow \\ \frac{X}{4} \Rightarrow \frac{X}{4} - \frac{X}{4} = 0 \\ \text{باقی مانده} \end{array}$$

تذکره! همیشه بگید چی شد؟ خیلی پیچیده شد!!

پاسخ: بین اولش که نصف شکلات‌ها رو به برادرش می‌ده، یعنی $\frac{X}{2}$ رو، بعد گفته نیمه بقیه‌اش رو به دوستش می‌ده، یعنی $X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2}$ که باقی مونده، نصف‌اش رو که همیشه $\frac{X}{4}$ به دوستش می‌ده. دوباره از نصف باقی مانده به مادرش می‌ده. چون از X تا شکلات، $\frac{X}{2}$ رو به برادرش و $\frac{X}{4}$ رو به دوستش داده بود، پس $X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4} = \frac{X}{4}$ شکلات باقی می‌مونه که نصف اون به مادرش می‌رسه، یعنی $\frac{X}{8}$. در نهایت گفته ۵ تا برای خودش باقی می‌مونه، یعنی آگه سهوم همه رو از X تا کم کنی ۵ تا می‌مونه. به ادامه حل دقت کن:

$$X - \left(\frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{8} \right) = 5 \Rightarrow X - \left(\frac{4X + 2X + X}{8} \right) = 5 \Rightarrow X - \frac{7X}{8} = 5 \Rightarrow \frac{X}{8} = 5 \Rightarrow X = 40$$

اگر حقوق یک کارمند را X در نظر بگیریم و حقوق خدمات‌چی، معاون و مدیر را به ترتیب Y ، Z و T فرض کنیم، داریم:

$$X = 2Y \Rightarrow Y = \frac{X}{2}, \quad X = \frac{1}{2}Z \Rightarrow Z = 2X, \quad X = \frac{1}{5}T \Rightarrow T = 5X$$

حال با توجه به تعداد افراد در هر پُست، مجموع حقوق‌ها را برحسب X به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3T + 2Z + 15X + 5Y = 3(5X) + 2(2X) + 15X + 5\left(\frac{X}{2}\right) = 15X + 4X + 15X + \frac{5}{2}X = \left(\frac{30 + 8 + 30 + 5}{2}\right)X = \frac{343}{2}X$$

$$\Rightarrow \frac{343}{2}X = 343000000 \Rightarrow X = 2000000 \text{ تومان}$$

پس حقوق معاون برابر است با:

$$Z = 2X = 2(2000000) = 4000000 \text{ تومان}$$

باید ضرب X^2 مخالف صفر باشد:

$$a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$$

بررسی گزینه‌ها:

$$1) (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$2) (2x-1)^2 = (3+2x)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 9 + 12x + 4x^2 \Rightarrow 16x = -8 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$3) 2x^2 + 5x - 8 - x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 5x - 8 = x^2 + 1 \Rightarrow 5x = 9 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$4) (3x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 8x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \text{معادله درجه دوم}$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$(x-2)(2x+1) = 3x+6 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

ضرب جمله درجه اول

$$(3x+1)^2 = (x-4)^2 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 8x^2 + 14x - 15 = 0$$

باید عدد ثابت معادله ۶۰ باشد، پس ابتدا طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$32x^2 + 56x - 60 = 0$$

حال باید معادله را در یک منفی ضرب کنیم:

$$-32x^2 - 56x + 60 = 0 \Rightarrow \text{ضرب جمله درجه ۲} = -32$$

اولاً چون معادله درجه دوم است، باید ضرب X^3 صفر باشد:

$$a = 0$$

ثانیاً اگر معادله را به صورت استاندارد بنویسیم، داریم:

$$\begin{array}{l} \text{ضرب جمله} \\ \text{درجه دوم} \\ (b-d)x^2 + cx + d = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} b-d=3 \quad (*) \\ c=-2 \\ d=-1 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow a-b-c+d = 0-2+2-1 = -1$$

عدد ثابت

ضرب جمله درجه اول

اولاً چون معادله درجه دوم است، ضریب x^3 باید صفر باشد: ۲ ۲۲

$$m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2n \quad (*)$$

ثانیاً چون $x = 2$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$n(2)^2 + 2m(2) - 12 = 0 \Rightarrow 4n + 4m - 12 = 0 \xrightarrow{(*)} 4n + 4(2n) - 12 = 0 \Rightarrow 4n + 8n - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 12n = 12 \Rightarrow n = 1 \xrightarrow{(*)} m = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

چون α جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند: ۱ ۲۳

$$3\alpha^2 - 5\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$$

حال چون مقدار $3\alpha^2 - 4\alpha + 3$ از ما خواسته شده، کافی است طرفین تساوی فوق را به اضافه ۳ کنیم:

$$3\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 3$$

a جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند: ۱ ۲۴

$$3a^2 - 4a - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 - 4a = 4$$

اگر طرفین تساوی فوق را بر ۲۴ تقسیم کنیم، به عبارت خواسته شده در صورت سؤال می‌رسیم:

$$\frac{a^2}{8} - \frac{a}{3} = \frac{1}{6}$$

در این کلمه داریم: ۴ ۲۵

ش + ی + ر + ی + ن

پس معادل ریاضی آن برابر است با:

$$16x^3 + 32x^2 + 12 + 32x^2 + 29x$$

پایان اجازه! ما گزینه (۳) رو جواب زدیم، خب دوتا $32x^2$ داشتیم، با هم جمع کردیم دیگه، شد $64x^2$ ، بعد هم جملات رو به ترتیب از

توان بزرگ به کوچک نوشتیم. چیش غلطه؟

پاسخ همه پیش! اومری پروفیسور بازی در بیاری، زدی همه پی رو فراب کردی! فوراً کلمه معادل عبارت گزینه (۳) رو بنویس، ببین پی

میشه؟ اصلاً میشه؟ برای جمله $64x^2$ باید حرف ۶۴م که دو تا نقطه هم داشته باشه رو بنویسی، داریم همپین حرفی رو؟ بعرض هم هیچ وقت

ترتیب جمله‌ها رو عوض نکن، چون عبارت حاصل، دیگه مال اون کلمه نیست. آکه به فرض، همپین مشکل عدری (مثل ۶۴) هم پیش نیار، به

کلمه دیگه‌ای که به احتمال زیار بی معنی سافته میشه!

د + ر + خ + ت + س + ب + ز

۱ ۲۶

$$10 + 12 + 9x + 4x^2 + 15 + 2x + 13x$$

در این رمز ۴ عدد زوج «۱۰، ۱۲، ۴ و ۲» وجود دارد.

بدون پیدا کردن حروف هم می‌توان جواب را پیدا کرد. چون در رمز داده شده تمام جملات x دارند، پس عدد ثابت و در نتیجه حرف بدون نقطه

۲ ۲۷

در کلمه نداریم. تنها گزینه‌ای که تمام حروف آن نقطه‌دار است، کلمه «بنفش» می‌باشد.

$$32x^2 + 25 + 15 + 1 + 29x$$

۴ ۲۸

یکسان \Rightarrow ن ا س ک ی

جملات درجه اول، یعنی جملات شامل x . در رمزنگاری جملاتی که یک نقطه دارند شامل x هستند. پس لازم نیست رمز همه حروف را

۳ ۲۹

بنویسیم. فقط رمز حروف یک نقطه‌ای را پیدا کرده و بعد ضرایب (شماره آن حروف) آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. حروف «ز»، «ن» و «ب» در

این کلمه یک نقطه‌ای هستند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} z \rightarrow 13x \\ n \rightarrow 29x \\ b \rightarrow 2x \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ضرایب } x = 13 + 29 + 2 = 44$$

معادل فارسی هر رمز را پیدا می‌کنیم و بعد با کنار هم قرار دادن حرف‌ها، کلمه مناسب را پیدا می‌کنیم: ۳ ۳۰

$$12 \rightarrow \text{ر} , 12 \rightarrow \text{ر} , 13x \rightarrow \text{ز} , 1 \rightarrow \text{ا} , 26 \rightarrow \text{گ} , 30 \rightarrow \text{و}$$

پس حروف «ر، ز، ا، گ، و» را داریم که با آن می‌توان کلمه «روزگار» را درست کرد.

۴ ۳۱

$$(1-x+x^2)(x+1) = x(x^2-1)+x \Rightarrow x^3+1 = x^3-x+x \Rightarrow 1 = -1$$

اتحاد چاق و لاغر

به یک تساوی نادرست رسیدیم، پس این معادله، جواب ندارد.

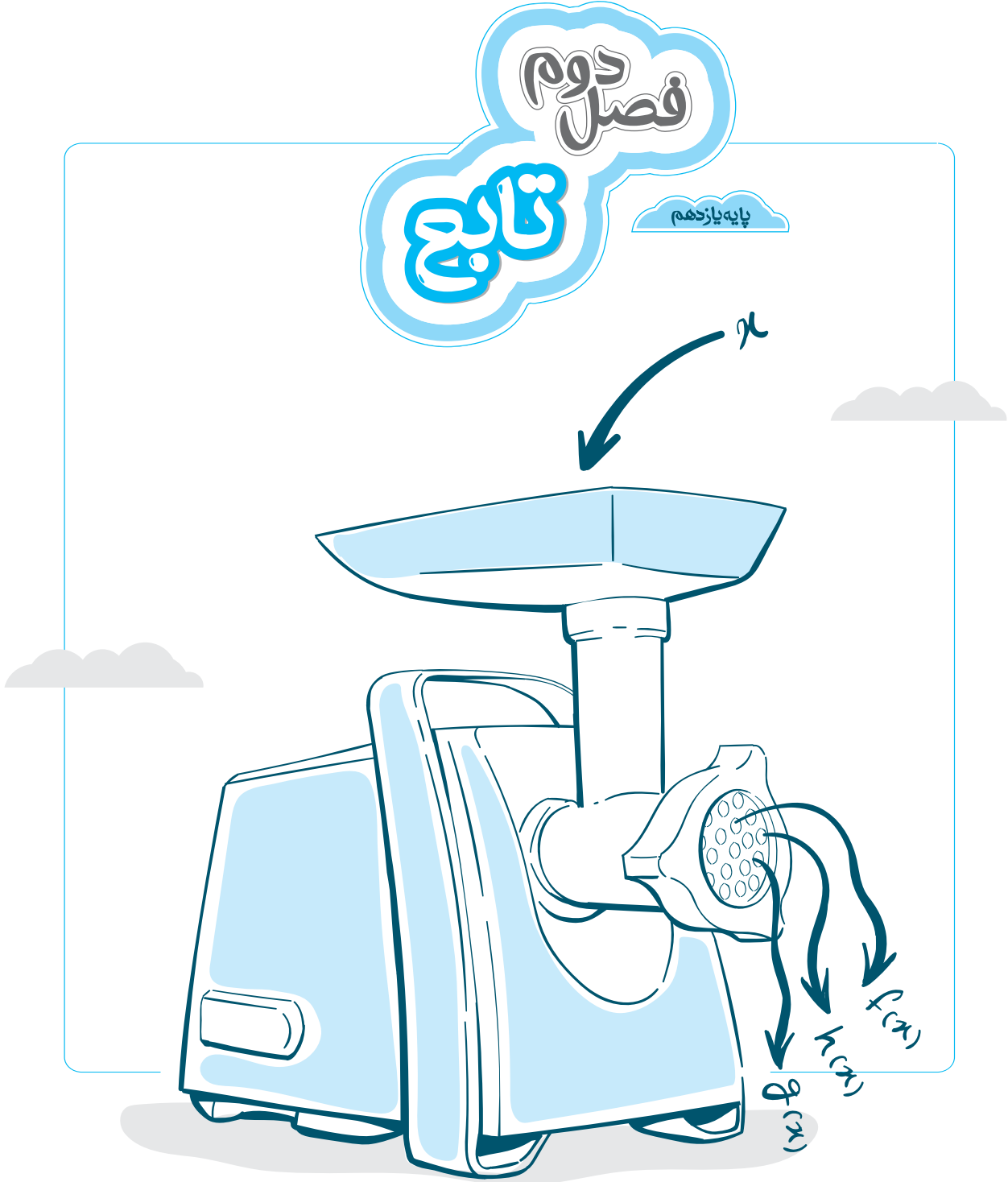
۴ ۳۲

$$x^2 + 6x + 4 + 3x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

فصل دوم

تابع

پایه یازدهم



تابع

فصل دوم

درستانه

یادآوری تابع، دامنه و برد

با شرط تابع بودن یک رابطه در نمایش‌های مختلف و هم‌چنین پیدا کردن دامنه و برد آن در سال گذشته به طور کامل آشنا شدید. در این درسنامه، مروری بر این مطالب می‌کنیم تا در ادامه به معرفی چند تابع خاص بپردازیم.

همیشه یادم بگونه

شرط تابع بودن یک رابطه در چهار نمایش مختلف و مهم:

۱. **نمایش پیکانی یک رابطه:** وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول تنها یک پیکان به هر عضو مجموعه دوم خارج شده باشد.
۲. **نمایش زوج مرتبی یک رابطه:** وقتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.
۳. **نمایش مختصاتی یک رابطه:** وقتی تابع است که اگر هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
۴. **نمایش ضابطه‌ای یک رابطه:** وقتی تابع است که به ازای هر x ، تنها یک مقدار برای y به دست آید.

دامنه و برد یک رابطه یا تابع در چهار نمایش مختلف و مهم:

۱. **نمایش پیکانی:** $R_f = \{\text{عضوهایی که پیکان به آن‌ها وارد شده}\}$ ، $D_f = \{\text{عضوهایی که پیکان از آن‌ها خارج شده}\}$
۲. **نمایش زوج مرتبی:** $R_f = \{\text{همه مؤلفه‌های دوم}\}$ ، $D_f = \{\text{همه مؤلفه‌های اول}\}$
۳. **نمایش مختصاتی:** $R_f = \{\text{تصویر نقاط بر روی محور } y\text{ها}\}$ ، $D_f = \{\text{تصویر نقاط بر روی محور } x\text{ها}\}$
۴. **نمایش ضابطه‌ای:** $R_f = \{\text{همه مقادیر } y\}$ ، $D_f = \{\text{همه مقادیر } x\}$

* وقتی ضابطه و دامنه یک تابع را داریم، مقادیر برد با قرار دادن مقادیر دامنه در ضابطه تابع به دست می‌آید.

مثال تابع $f: A \rightarrow B$ و $f(x) = -x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید. این تابع را در سه نمایش پیکانی، زوج مرتبی و مختصاتی نشان دهید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

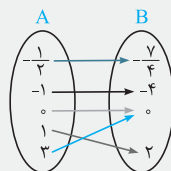
پاسخ ابتدا مقادیر برد تابع را پیدا می‌کنیم:

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16} - \frac{3}{4} = -\frac{13}{16}$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) = -1 - 3 = -4 \quad \text{و} \quad x = 0 \Rightarrow f(0) = -(0)^2 + 3(0) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = -(1)^2 + 3(1) = -1 + 3 = 2 \quad \text{و} \quad x = 3 \Rightarrow f(3) = -(3)^2 + 3(3) = -9 + 9 = 0$$

$$D_f = \left\{-\frac{1}{4}, -1, 0, 1, 3\right\} \quad , \quad R_f = \left\{-\frac{13}{16}, -4, 0, 2\right\}$$



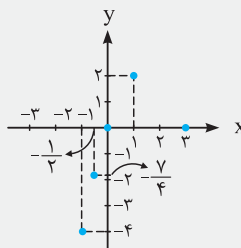
بنابراین دامنه و برد این تابع برابر است با:

نمایش پیکانی:

$$f = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{13}{16}\right), (-1, -4), (0, 0), (1, 2), (3, 0)\right\}$$

نمایش زوج مرتبی:

نمایش مختصاتی:



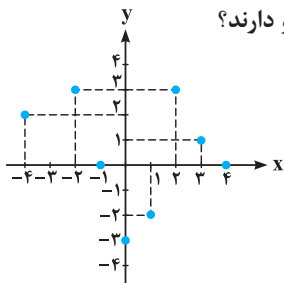
۱- چند تا از گزاره‌های زیر، همواره درست هستند؟

- (الف) نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که به هر عضو مجموعه دوم، تنها یک پیکان وارد شده باشد.
 (ب) نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشیم.
 (ج) نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هر خط موازی محور y ها نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند.

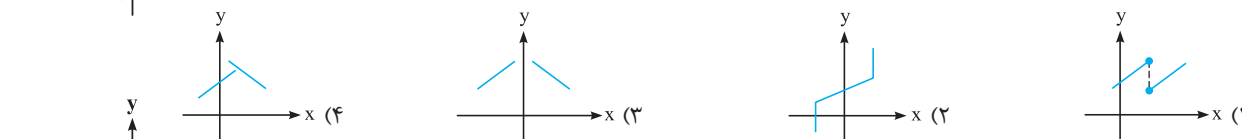
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- اگر نمودار تابع g به صورت مقابل باشد، مجموعه‌های دامنه و برد تابع به ترتیب از راست به چپ، چند عضو دارند؟

- (۱) ۸ و ۸
 (۲) ۸ و ۶
 (۳) ۶ و ۸
 (۴) ۶ و ۶

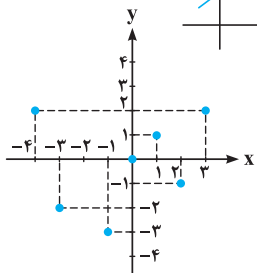


۳- کدام شکل، نمودار یک تابع است؟



۴- برد تابع f در شکل مقابل، شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۵
 (۳) ۳
 (۴) ۶



۵- اگر نمودار روبه‌رو رابطه‌ای را نشان دهد که به هر استان، مرکز آن استان را نسبت می‌دهد، با اضافه کردن کدام شهر به مجموعه دوم به یک تابع خواهیم رسید؟

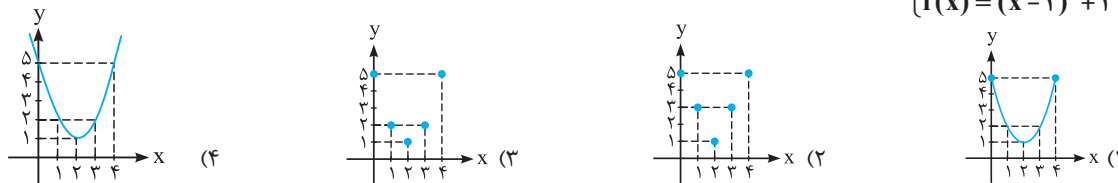
- (۱) ساری (۲) بجنورد
 (۳) رشت (۴) گرگان

- خرم‌آباد
 اراک
 تبریز
 اهواز
- خوزستان
 لرستان
 مرکزی
 گیلان
 آذربایجان
 شرقی

۶- اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ و برد تابع، مجموعه $\{0, 1, \frac{1}{3}, -2\}$ باشد، دامنه آن کدام است؟

- (۱) $\{0, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 2\}$ (۲) $\{-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ (۳) $\{-1, 1, 2, \frac{4}{3}\}$ (۴) $\{0, \frac{3}{4}, 1, 2\}$

۷- اگر $f: A \rightarrow B$ و $f(x) = (x-2)^2 + 1$ ، $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، آن‌گاه نمودار تابع f کدام است؟



۸- نمودار تابع $f = \{(3, 5), (a, 2), (5, a-1), (a-1, b), (5, 3)\}$ از چند نقطه تشکیل شده است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹- به‌ازای کدام مقدار m ، رابطه $R = \{(m, -2), (2m, -1), (m, 2m), (-2, 1)\}$ یک تابع است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) هیچ مقدار m

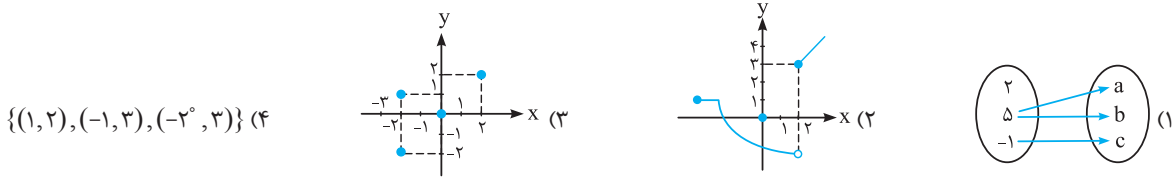
۱۰- کدام یک از روابط زیر به‌ازای $m = -1$ یک تابع است؟

- (۱) $\{(m, 2m), (2m, m), (-1, 3m)\}$ (۲) $\{(m, 2m), (3m, -1), (-1, 3m)\}$
 (۳) $\{(m, 2m), (2m, m), (2m, -2)\}$ (۴) $\{(m, 2m), (2m, m), (3, m)\}$

۱۱- به‌ازای کدام مقدار k ، مجموعه $A = \{(-1, 2), (-1, m+1), (m, k+2), (1, 2k), (2, k-1)\}$ یک تابع است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲- کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟



۱۳- به ازای کدام مقدار m ، رابطه $f = \{(2, m^2 - 3m), (2, -2), (-1, 5), (m, 2)\}$ یک تابع است؟

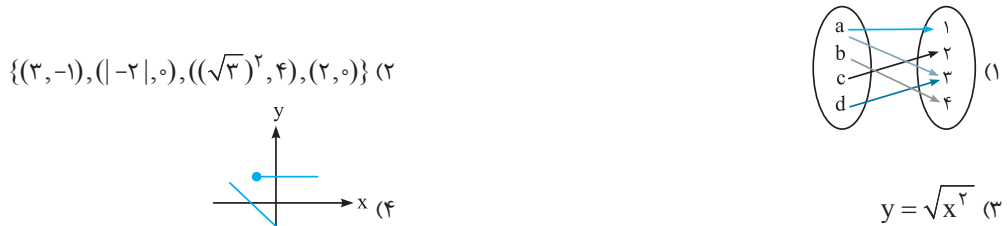
- (۱) $\{-2, -1\}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\{2, 1\}$

۱۴- رابطه $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

تجربی خارج ۸۵

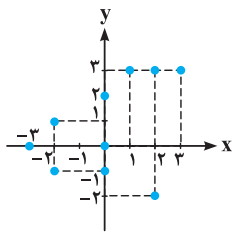
۱۵- کدام یک از رابطه‌های زیر، یک تابع می‌باشد؟



۱۶- اگر رابطه $f = \{(0, m+2), (-1, 5), (0, 1-n), (m+n, n-m)\}$ مربوط به یک تابع باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۷- حداقل چند نقطه از نمودار مقابل را حذف کنیم تا نمودار حاصل، مربوط به یک تابع شود؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۵

۱۸- اگر رابطه «کوچک تر بودن» در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را این طور تعریف کنیم: (a, b) عضو رابطه است اگر $a < b$ ، آن گاه با حذف

حداقل چند عضو از این رابطه، تبدیل به یک تابع می‌شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۵

۱۹- اگر دامنه یک تابع ۵ عضو داشته باشد، تعداد اعضای برد آن کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۰- با حذف حداقل چند عضو از رابطه $f = \{(2, (-1)^2), (3, 6), (\sqrt{4}, 1), (1, 3), (|-2|, 1), (3, 5)\}$ یک تابع حاصل می‌شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

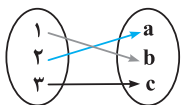
۲۱- اگر f تابعی خطی با دامنه $D_f = \{-2, 0, 5\}$ و برد $R_f = \{-3, 1, 11\}$ باشد، ضابطه آن کدام است؟

- (۱) $f(x) = -2x + 1$ (۲) $f(x) = 2x + 1$ (۳) $f(x) = 2x - 1$ (۴) $f(x) = -x - 5$

۲۲- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{-3, -2, -1, 2, 3\}$ ، آن گاه کدام گزینه تابعی از A به B را نشان می‌دهد؟

- (۱) $f: A \rightarrow B$ $f(x) = x + 1$ (۲) $f: A \rightarrow B$ $f(x) = 2x - 1$ (۳) $f: A \rightarrow B$ $f(x) = 2x - 3$ (۴) $f: A \rightarrow B$ $f(x) = -x + 5$

۲۳- حداکثر چند پیکان به تابع مقابل، اضافه کنیم تا دیگر تابع نباشد؟



- (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱

۲۴- اگر دامنه و برد یک تابع به ترتیب به صورت $\{0, 1, 2\}$ و $\{1, 2, 5\}$ باشد، ضابطه تابع کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $y = x + 1$ (۲) $y = 2x + 1$ (۳) $y = (x + 1)^2$ (۴) $y = x^2 + 1$

۲۵- با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ ، اگر $f(x) = 2x - 1$ ، آن گاه $g(0)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانه

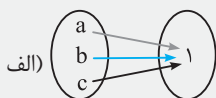
تابع ثابت (Constant Function)

تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ را که در آن $R = \{c\}$ مجموعه برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. دامنه این تابع A و برد آن تنها شامل یک عضو است.

نتیجه: دامنه تابع ثابت هرچه باشد، مجموعه اعداد حقیقی، صحیح، طبیعی و ...، برد این تابع همواره تنها یک عضو دارد. در واقع همه اعضای دامنه به یک عضو در برد نظیر می‌شوند.

شکل نمودار تابع ثابت: یک خط موازی محور x ها یا نقاطی روی خطی موازی محور x ها است.

مثال: تابع‌های زیر همگی، ثابت هستند:



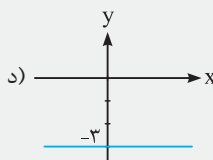
$$D = \{a, b, c\}, R = \{1\}$$

ب)
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B} \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = \{2\}$$

ج) $g = \{(-1, 0), (0, 0), (6, 0), (10, 0)\}$

$$D_g = \{-1, 0, 6, 10\}, R_g = \{0\}$$



$$D = \mathbb{R}, R = \{-3\}$$

تابع چندضابطه‌ای (Piecewise Function)

تعریف: تابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارد، تابع چندضابطه‌ای نامیده می‌شود. اگر تابعی از دو ضابطه پیروی کند، تابع دوضابطه‌ای، اگر از سه ضابطه پیروی کند، تابع سه‌ضابطه‌ای و ... نامیده می‌شود.

نقشه: برای پیدا کردن برد این تابع، باید مقادیر هر بخش از دامنه را در ضابطه متناظر خود قرار دهیم و مقادیر برد را برای آن ضابطه پیدا کنیم. در نهایت، اجتماع بردهای ضابطه‌ها، برد تابع چندضابطه‌ای را به دست می‌دهد.

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x \leq -4 \\ -2 & -4 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{f(\sqrt{2}) - 3f(-1)}{f(-4)}$ را به دست آورید.

پاسخ: باید ببینیم هر کدام از مقادیر x که $f(x)$ آن‌ها خواسته شده، در کدام قسمت از دامنه قرار دارند. بعد از پیدا کردن بازه دامنه مربوط به هر x ، آن x را در ضابطه آن قسمت از دامنه قرار می‌دهیم و مقدار آن را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم $\sqrt{2} \approx 1/4$ ، پس $\sqrt{2}$ عددی بزرگ‌تر از ۱ است، یعنی $\sqrt{2}$ در قسمت سوم دامنه قرار دارد که ضابطه آن به صورت $f(x) = x^2 - 1$ می‌باشد. بنابراین $f(\sqrt{2})$ برابر است با:

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

عدد (-۱) در فاصله $-4 < x \leq 1$ ، یعنی قسمت دوم دامنه قرار دارد، پس برای پیدا کردن $f(-1)$ از ضابطه دوم، یعنی $f(x) = -2$ استفاده می‌کنیم. چون این ضابطه، تابعی ثابت است، پس به‌ازای هر x در این بازه، مقدار $f(x)$ برابر -۲ می‌شود. در نتیجه:

$$f(-1) = -2$$

عدد (-۴) در دامنه قسمت اول، یعنی $x \leq -4$ قرار دارد. پس از ضابطه اول، یعنی $f(x) = -x + 3$ برای پیدا کردن $f(-4)$ کمک می‌گیریم:

$$f(-4) = -(-4) + 3 = 4 + 3 = 7$$

حال مقادیر به دست آمده را در عبارت خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{f(\sqrt{2}) - 3f(-1)}{f(-4)} = \frac{1 - 3(-2)}{7} = \frac{1 + 6}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

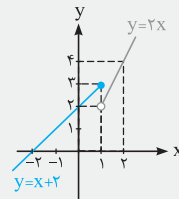
شکل نمودار تابع چندضابطه‌ای: با توجه به ضابطه هر بخش از دامنه و با توجه به تعداد ضابطه‌ها نمودار تابع چندضابطه‌ای را رسم می‌کنیم. مثلاً اگر دو ضابطه داشته باشیم که هر دو تابع خطی باشند، شکل نمودار، قسمتی از دو خط است، اگر یکی از ضابطه‌ها تابع خطی و یکی تابع درجه دوم باشد، شکل نمودار، قسمتی از یک خط و یک سهمی است. اگر سه ضابطه داشته باشیم، نمودار از سه شکل که می‌توانند قسمتی از خط یا سهمی باشند، تشکیل می‌شود و به همین ترتیب در تابع n ضابطه‌ای، n تا شکل (شامل خط یا سهمی) داریم.

نوجه شکل قسمت‌های تابع می‌تواند نمودارهای دیگری هم باشد ولی برای شما که فقط خط و سهمی را خوانده‌اید، همین دو مورد در ضابطه‌ها آورده می‌شود.

مثال تابع‌های زیر، چندضابطه‌ای هستند:

الف) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$

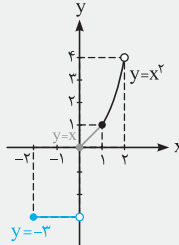
دو ضابطه‌ای



از قسمتی از ۲ خط تشکیل شده است.

ب) $g(x) = \begin{cases} -3 & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

سه ضابطه‌ای



از قسمتی از ۲ خط و ۱ سهمی تشکیل شده است.

تذکره اجاره! اگر $x = 1$ باشد، چون تو دامنه ضابطه دوم نیست، پس باید نقطه $(1, 1)$ تو خالی باشه، اما از طرفی چون تو دامنه ضابطه سوم

هست، نقطه $(1, 1)$ باید توپر باشه، تکلیف، این وسط چیه؟ چرا شما توپر کشیدید؟

پاسخ به نکته فوبی اشاره کردی. اصل شکل نمودار تو این نقطه، بایه که $x = 1$ به اون تعلق داره. چون در دامنه ضابطه سوم هست، پس باید نقطه $(1, 1)$ رو که عضوی از تابع هست، توپر بکشیم. البته چون این‌ها، به ازای $x = 1$ ، مقدار دو ضابطه دو و سوم یکسان شد، این مطلب پیش اومد وگرنه اگر مقدار برابر نداشتی باشن، باید تو شکل ضابطه دو، نقطه متناظرش رو تو خالی و تو شکل ضابطه سوم، نقطه متناظرش رو توپر می‌کشیدین.

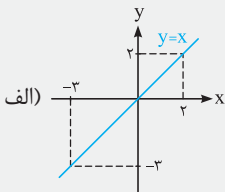
تابع همانی (Identity Function)

تعریف: تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. در این تابع، دامنه و برد با هم برابرند.

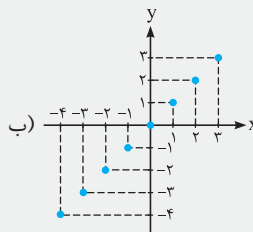
نتیجه در این تابع، دامنه هرچه باشد، مجموعه اعداد حقیقی، صحیح، طبیعی و ...، برد هم، برابر همان مجموعه دامنه است.

شکل نمودار تابع همانی: خط $y = x$ یا همان نیمساز ناحیه اول و سوم یا نقاط روی خط $y = x$ است.

مثال تابع‌های زیر، همگی همانی هستند:



$D = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{R}$



$D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

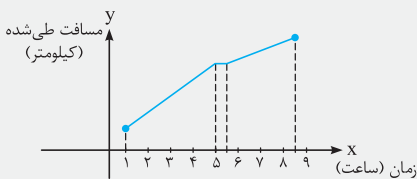
$R = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

نکته اگر نمودار مکان - زمان را داشته باشیم، شیب هر قسمت از نمودار برابر سرعت حرکت در آن بازه زمانی است.

مثال اگر قطاری بعد از ۱ ساعت از شروع حرکت، با سرعت ثابت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت، مسافتی را ۴ ساعت طی کند، بعد نیم ساعت برای نماز توقف کرده و سپس با سرعت ثابت ۸۰ کیلومتر بر ساعت به مسیر خود ادامه دهد تا بعد از ۳ ساعت به مقصد برسد، نمودار فاصله از مبدأ را بر حسب زمان (بعد از ۱ ساعت از شروع حرکت) برای این قطار رسم کنید.

پاسخ بعد از ۱ ساعت از شروع حرکت، قطار از مبدأ فاصله گرفته، پس از صفر محور y‌ها

بالتر می‌رویم و نقطه شروع را قرار می‌دهیم. بعد تا ۴ ساعت، یعنی تا ساعت ۵ با سرعت ثابت حرکت می‌کند، بنابراین خطی (با شیب ثابت) رسم می‌کنیم. بین ۵ تا ۵:۳۰، ۵، نیم ساعت برای نماز توقف کرده، پس فاصله تغییری نمی‌کند، در نتیجه یک خط راست (موازی محور x‌ها) می‌کشیم. بعد از نیم ساعت، به مدت ۳ ساعت یعنی تا ساعت ۸:۳۰ با سرعت ثابت ۸۰ کیلومتر بر ساعت به سمت مقصد حرکت می‌کند، چون سرعت ثابت است، پس یک خط (با شیب ثابت) می‌کشیم و هم‌چنین چون سرعت قطار نسبت به قبل از توقف، کم‌تر می‌باشد، بنابراین باید خطی بکشیم که شیب آن از خط قبلی کم‌تر باشد.

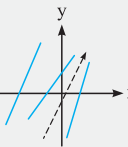


خانم اجازه! خط با شیب کم تر مثل سر بالایی می مونه که شیب کم تری داره و بنابراین بالا رفتن از اون راحت تره، مثل این  که بالا

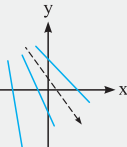
رفتن ازش خیلی راحت تر از بالا رفتن از این  هست. درسته؟

پاسخ بله، آخرین فیلی فیلی عالی گفتی. معلومه حسابی به درس گوش کردی و خوب هم درس رو فهمیدی. برای برگشتن از یه مسیر هم، همین طوری یه مثال بزن، اما این بار بر سر پایینی، اون وقت راحت می تونی خط مورد نظرت رو بکشی.

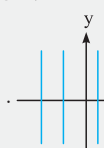
یادآوری وقتی می گوییم شیب یک خط، مثبت است، نمودار آن به یکی از صورتهای x می باشد و وقتی شیب خط، منفی است، نمودار آن به



یکی از صورتهای x می باشد. در واقع یک خط با شیب مثبت را از پایین به بالا و از چپ به راست می کشیم و یک خط با شیب منفی را از بالا به پایین



و از چپ به راست رسم می کنیم. شیب خطهای موازی محور x ها برابر صفر x و شیب خطهای موازی محور y ها تعریف نشده است x .



همیشه یادم بمونه

دامنه آن هر مجموعه دلخواهی می تواند باشد.

تابع ثابت
برد آن مجموعه تک عضوی $\{c\}$ است.
نمودار آن، خطی موازی محور x ها یا نقاطی روی این خط است.
 $f(x) = c$

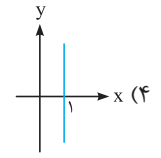
تابع چند ضابطه ای
دامنه آن به بخش های مختلف تقسیم شده و هر بخشی از دامنه، یک ضابطه دارد.
اگر n ضابطه داشته باشد، نمودار آن از n قسمت تشکیل شده است که هر کدام می تواند قسمتی از نمودار خط یا سهمی باشد.
مانند
 $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq a \\ f_2(x) & a < x \leq b \\ f_3(x) & b < x < c \\ \vdots \end{cases}$

تابع همانی
دامنه و برد با هم برابرند.
نمودار آن، خط $y = x$ یا همان نیمساز ناحیه اول و سوم یا نقاطی روی این خط است.
 $f(x) = x$

۲۶- کدام یک از گزینه های زیر، نمایش یک تابع ثابت نیست؟

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳	۳	۳	۳	۳

(۱) تابع بیانگر رابطه بین زمان و دمای آب پس از به جوش آمدن



$f = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ (۳)

۲۷- اگر $f = \{(2,-1), (3, a^2 - 5), (0, a+1)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ± 2 (۳) ۴ (۴) -۲

۲۸- اگر f تابعی ثابت و g تابع همانی با دامنه \mathbb{R} باشند، در چند نقطه، مقدار این دو تابع با هم برابر است؟

- (۱) حداقل یک نقطه (۲) حداکثر یک نقطه (۳) دقیقاً یک نقطه (۴) بستگی به ضابطه f دارد.

۲۹- در تابع ثابت $f = \{(2, x - 2y), (-1, 5), (y, -x + y)\}$ مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۰- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ x+1 & x \leq 0 \end{cases}$ از کدام ناحیه نمی گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۱- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $y > 0$ (۳) $y \geq 0$ (۴) $0 < y < 2$
- (۱) $\{-3, 2\}$ (۲) $\{-3\}$ (۳) $\{-3, 4\}$ (۴) 2

۳۲- اگر نقاط نمودار تابع $f = \{(1, m+n), (4, m^2+m-2), (1, n-3)\}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\{-1, 1\}$ (۲) $\{1, 0\}$ (۳) $\{-1, 0, 1\}$ (۴) $\{-1, 0\}$

تمرین کتاب درسی

۳۳- اگر در تابع ثابت $f(x) = k$ ، داشته باشیم $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ ، آن گاه مجموعه مقادیر k کدام است؟

۳۴- اگر $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس اعضای مجموعه برد تابع، به ترتیب کدام است؟

- (۱) y_3 ، صفر، صفر (۲) صفر، y_1 ، صفر (۳) y_2 ، y_2 ، صفر (۴) y_1 ، y_1 ، y_1

۳۵- اگر رابطه $f = \{(0, 0), (-1, b+1), (b, a-1)\}$ مربوط به یک تابع همانی باشد، کدام گزینه در مورد تابع $g = \{(0, 0), (a, b), (b-1, a+1)\}$ درست است؟

- (۱) خطی است. (۲) تابعی ثابت است. (۳) دارای برد ۳ عضوی است. (۴) دارای دامنه ۳ عضوی است.

۳۶- برد تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ -x + 1 & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $x \geq 2$ (۲) $x > -1$ (۳) \mathbb{R} (۴) $x \geq -1$

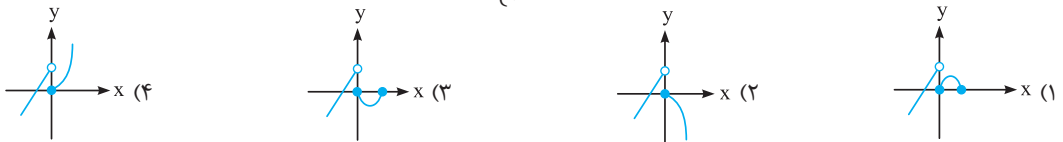
۳۷- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$ ، $f(2) = 2$ و $f(-2) = 0$ ، آن گاه $a + b$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) -1 (۴) صفر

۳۸- اگر $f = \{(-4, 2a), (a^2+1, 4), (\Delta, b-3c), (-b^2, c-d)\}$ یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی باشد، مقدار d کدام است؟ ($b < 0, a > 0$)

- (۱) -2 (۲) 4 (۳) 7 (۴) -6

۳۹- کدام شکل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2+x & x < 0 \\ 2x-x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ است؟



تمرین کتاب درسی

۴۰- کدام یک از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟

- (۱) اگر دامنه و برد یک تابع، برابر باشد، آن تابع همانی است.
 (۲) اگر دامنه یک تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.
 (۳) اگر f یک تابع ثابت باشد، آن گاه $f(kx) = kf(x)$.
 (۴) در تابع ثابت، دامنه و برد برابر هستند.

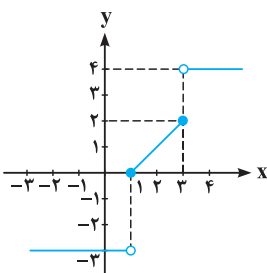
۴۱- اگر $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < -2 \\ 3x & -2 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 2 \\ -x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$ باشد، آن گاه مقدار $f(-\sqrt{5}) + f(0) + f(3)$ برابر کدام است؟

- (۱) -8 (۲) -6 (۳) 2 (۴) صفر

۴۲- اگر f تابعی همانی با دامنه \mathbb{R} و g تابعی ثابت با دامنه \mathbb{R} باشد و داشته باشیم $g(1) = 3f(-2)$ ، آن گاه حاصل $g(-3) - 2f(3)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -5 (۳) -12 (۴) 6

۴۳- با توجه به نمودار f در شکل مقابل، مقدار $\frac{f(-2) + f(2)}{f(3) - f(5)}$ برابر کدام است؟



- (۱) 2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) -2

۴۴- کدام یک از روابط زیر از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معادله یک تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq 0 \\ 3+x & x < 0 \end{cases} \quad (۳) \quad f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \quad (۲) \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

۴۵- دامنه و برد تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) $\{1, 2\}, 0 \leq x \leq 1$ (۲) $0 \leq y \leq 2, \mathbb{R}$ (۳) $1 \leq y \leq 2, \mathbb{R}$ (۴) $\{0, 1, 2\}, 0 \leq x \leq 1$

تجربیه داخلی ۹۰

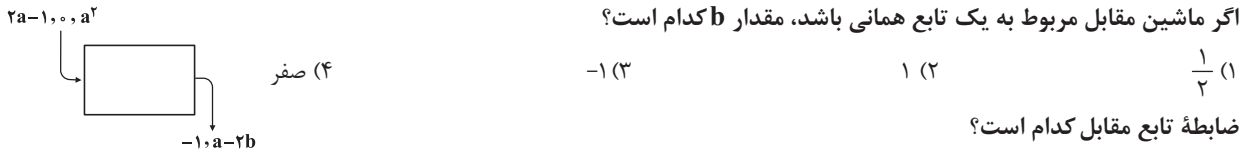
۴۶- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

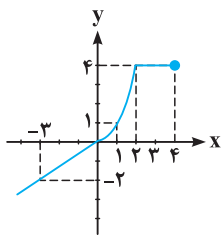
۴۷- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-f(x))$ برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $-x^2-1$ (۳) x^2+1 (۴) $(x^2+1)^2+1$

۴۸- اگر ماشین مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار b کدام است؟



۴۹- ضابطه تابع مقابل کدام است؟



$$y = \begin{cases} \frac{2}{3}x & x < 1 \\ 3x-2 & 1 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (۲)$$

$$y = \begin{cases} \frac{3}{2}x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (۱)$$

$$y = \begin{cases} \frac{2}{3}x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (۴)$$

$$y = \begin{cases} \frac{3}{2}x & x < 0 \\ 3x-2 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \end{cases} \quad (۳)$$

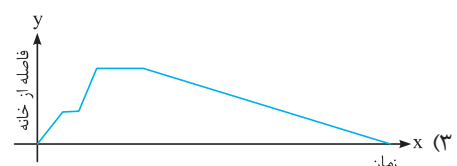
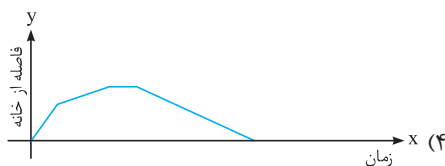
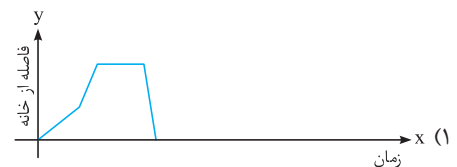
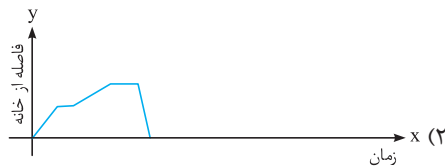
۵۰- اگر نمودار مربوط به توضیحات (الف) و (ب) را رسم کنیم، هر کدام به ترتیب مربوط به چه تابعی است؟

(الف) ظرفیت یک شهر بازی ۱۰۰ نفر است. هر نفر برای ورود ۲۰۰۰ تومان پرداخت می‌کند. (نمودار مبلغ ورودی هر نفر بر حسب n آیین نفر)
 (ب) به مناسبت روز دانش آموز، به هر کدام از ۵۰۰ دانش آموز در یک دبستان، یک گل هدیه دادند. (نمودار تعداد گل‌ها بر حسب تعداد دانش آموزان)

(۱) همانی - همانی (۲) ثابت - همانی (۳) همانی - ثابت (۴) ثابت - ثابت

۵۱- نمودار مربوط به داستان زیر کدام است؟ (سرعت حرکت در هر قسمت از مسیر، ثابت است.)

«علی می‌خواست با دوستش سعید به مدرسه برود. او از خانه خارج شد و به سمت خانه سعید حرکت کرد. بعد از رسیدن به خانه سعید، چند دقیقه منتظر او ماند تا سعید حاضر شد، سپس با هم با سرعت بیشتری (نسبت به سرعت قبلی علی) به سمت مدرسه حرکت کردند، بعد از پایان ساعت مدرسه، علی با سرعت کمی (به آهستگی) به خانه برگشت.»



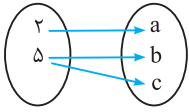
۵۲- اگر اتومبیلی با سرعت ثابت از نقطه A به نقطه B حرکت کند و با سرعت ثابت از B به A برگردد،

نمودار مربوط به فاصله از نقطه A بر حسب زمان چه تابعی است؟

(۱) همانی (۲) سهمی (۳) ثابت (۴) دوضابطه‌ای

پاسخ تشریحی

بررسی گزاره‌ها: ۱ ۱



الف) در نمایش پیکانی باید از هر عضو مجموعه اول، تنها یک پیکان خارج شده باشد. مثلاً در رابطه مقابل، به هر عضو مجموعه دوم تنها یک پیکان وارد شده ولی تابع نیست:

ب) در نمایش زوج مرتبی، دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول یکسان نباید داشته باشیم. مثلاً در رابطه $\{(1,1), (2,3), (1,1)\}$ دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان داریم ولی تابع است (چون عضو تکراری داریم).

ج) در نمایش مختصاتی، هر خط موازی محور OX ، مجموعه دامنه و مجموعه عرض نقاط یا تصویر نقاط روی محور OY ، مجموعه برد تابع را

۳ ۲



تشکیل می‌دهند. برای این که اشتباه نکنیم، بهتر است ابتدا تابع را به صورت نمایش زوج مرتبی بنویسیم، بعد به راحتی می‌توانیم دامنه و برد تابع را بنویسیم:

$$g = \{(-4, 2), (-2, 3), (-1, 0), (0, -3), (1, -2), (2, 3), (3, 1), (4, 0)\}$$

$$\Rightarrow D_g = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \quad R_g = \{2, 3, 0, -3, -2, 1\}$$

پس دامنه دارای ۸ عضو و برد دارای ۶ عضو است.

۳ ۳



هر خطی که موازی محور OY رسم کنیم، نمودار تابع گزینه (۳) را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع است. اما در بقیه گزینه‌ها خطی موازی محور OY وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

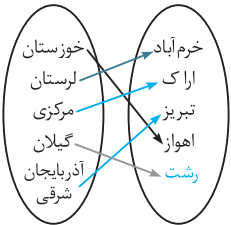
بهرتر است تابع f را به صورت زوج مرتبی بنویسیم، بعد برد تابع را مشخص کنیم:

۱ ۴



$$f = \{(-4, 2), (-3, -2), (-1, -3), (0, 0), (1, 1), (2, -1), (3, 2)\}$$

$$\Rightarrow R_f = \{2, -2, -3, 0, 1, -1\} \Rightarrow \text{شامل ۲ عدد طبیعی است.}$$



اگر از هر استان به مرکز آن یک پیکان رسم کنیم، تنها مرکز استان گیلان وجود ندارد. پس باید شهر رشت را به مجموعه دوم اضافه کنیم تا به یک تابع برسیم:

۳ ۵



این بار اعضای برد را داریم و می‌خواهیم اعضای دامنه را پیدا کنیم. با قراردادن اعضای مجموعه برد به جای y در ضابطه تابع، مقادیر x های دامنه را به دست می‌آوریم:

۲ ۶



$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1 \\ y=1 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=1 \Rightarrow \frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x}-1=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{3}{4} \\ y=-2 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=-2 \Rightarrow \frac{1}{x}=-1 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

ابتدا مقادیر برد تابع را به دست می‌آوریم:

۳ ۷

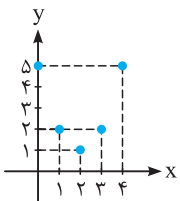


$$x=0 \Rightarrow f(0) = (0-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5, \quad x=1 \Rightarrow f(1) = (1-2)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x=2 \Rightarrow f(2) = (2-2)^2 + 1 = 0 + 1 = 1, \quad x=3 \Rightarrow f(3) = (3-2)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x=4 \Rightarrow f(4) = (4-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

در نتیجه تابع f به صورت $f = \{(0, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 5)\}$ است و نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد:





$$(5, a-1), (5, 3) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f} a-1=3 \Rightarrow a=4 \Rightarrow f = \{(3, 5), (4, 2), (5, 3), (3, b)\}$$

$$(3, 5), (3, b) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f} b=5 \Rightarrow f = \{(3, 5), (4, 2), (5, 3)\} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ از } 3 \text{ نقطه تشکیل شده است.}$$



$$(m, -2), (m, 2m) \in R \Rightarrow -2 = 2m \Rightarrow m = -1$$

به خاطر وجود دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول یکسان، R تابع نیست. $\Rightarrow R = \{(-1, -2), (-2, -1), (-2, 1)\}$

بررسی گزینه‌ها:



$$1) m = -1 \Rightarrow \{(-1, -2), (-2, -1), (-1, -3)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$2) m = -1 \Rightarrow \{(-1, -2), (-3, -1), (-1, -3)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$3) m = -1 \Rightarrow \{(-1, -2), (-2, -1), (-2, -2)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$4) m = -1 \Rightarrow \{(-1, -2), (-2, -1), (3, -1)\} \Rightarrow \text{تابع است.}$$



$$(-1, 2), (-1, m+1) \in A \xrightarrow{\text{تابع } A} m+1=2 \Rightarrow m=1 \Rightarrow A = \{(-1, 2), (1, k+2), (1, 2k), (2, k-1)\}$$

$$(1, k+2), (1, 2k) \in A \Rightarrow k+2=2k \Rightarrow k=2$$

بررسی گزینه‌ها:



۱) از عضو ۲ در مجموعه اول، هیچ بیکنی خارج نشده، پس تابع نیست.

۲) خط $x=0$ که همان معادله محور y ها است، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.

۳) خط $x=-2$ موازی محور y ها، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.

۴) چون $-2=1$ ، پس زوج مرتب $(-2, 3)$ برابر $(-1, 3)$ است. در واقع این زوج مرتب، ۲ بار تکرار شده، پس این رابطه به صورت $\{(1, 2), (-1, 3)\}$ می‌باشد که تابع است.



$$(2, m^2-3m), (2, -2) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f} m^2-3m=-2 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow m=1 \text{ یا } m=2$$

حال رابطه را با هر کدام از مقادیر m می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow f = \{(2, -2), (-1, 5), (1, 2)\} \Rightarrow \text{تابع است.} \\ m=2 \Rightarrow f = \{(2, -2), (-1, 5), (2, 2)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow f = \{(2, -2), (-1, 5), (1, 2)\} \Rightarrow \text{تابع است.} \\ m=2 \Rightarrow f = \{(2, -2), (-1, 5), (2, 2)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.} \end{cases}$$

باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشیم:



$$(3, m^2), (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m=2 \text{ یا } m=-1$$

حال با هر کدام از m ها رابطه را مجدداً می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m=2 \Rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.} \\ m=-1 \Rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=2 \Rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.} \\ m=-1 \Rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است.} \end{cases}$$

بررسی گزینه‌ها:



۱) از عضو a در مجموعه اول، دو بیکن خارج شده است، پس تابع نیست.

۲) چون $|-2|=2$ و $(\sqrt{3})^2=3$ ، پس رابطه داده‌شده به صورت $\{(3, -1), (2, 0), (3, 4)\}$ می‌باشد که به خاطر

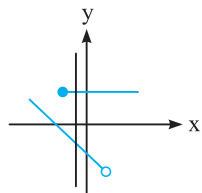
دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول ۳، این رابطه هم تابع نیست.

$$3) y = \sqrt{x^2} = |x| \text{ که تابع است.}$$

۴) خطی موازی محور y ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.

تذکره: دو تا سؤال اول این که رابطه گزینه (۲)، ۴ تا عضو داشت، چی شد؟ چرا تا شد؟ دوم هم این که تو گزینه (۳) چه طوری

$$y = \sqrt{x^2} = |x| \text{ شد؟}$$



پاسخ سؤال اولت رو که نباید برم، چون بعد این همه تکرار و تمرین، یادت رفته باشه که عضو تکراری تو یه مجموعه رو دو بار نمی‌نویسیم، واقعاً فیلتی زشته! اما در مورد سؤال دوم! حاصل رادیکال با فرجه زوج، همیشه به عدد مثبت. پس نوشتن $\sqrt{x^2} = x$ غلطه، چون اگه x به عدد منفی باشه، به تساوی کاملاً غلط داریم. بنابراین از قلم‌مطلق استفاده می‌کنیم تا همیشه مقدار مثبت x رو داشته باشیم.

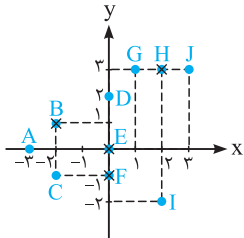


$$(0, m+2), (0, 1-n) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f} m+2=1-n \Rightarrow m+n=-1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (m+n, n-m) = (-1, n-m)$$

$$(-1, 5), (-1, n-m) \in f \Rightarrow n-m=5 \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ n-m=5 \end{cases} \Rightarrow 2n=4 \Rightarrow n=2 \Rightarrow m=-3$$



باید هیچ دو نقطه‌ای روی خط‌هایی موازی محور y ‌ها قرار نداشته باشند. در نتیجه با حذف یکی از نقاط B یا C و همچنین دو نقطه از بین سه نقطه E, D, F و یک نقطه از بین نقاط H و I به یک تابع خواهیم رسید. بنابراین با حذف حداقل ۴ نقطه، نمودار به تابع تبدیل می‌شود.



ابتدا رابطه گفته‌شده را می‌نویسیم:



$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

باید زوج مرتب‌هایی با مؤلفه‌های اول یکسان و دوم متمایز نداشته باشیم. پس با حذف حداقل سه عضو مانند $(1, 3)$ ، $(1, 4)$ و $(2, 4)$ به یک تابع خواهیم رسید:

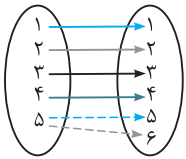
$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

نکته تعداد اعضای دامنه، همواره بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد است.

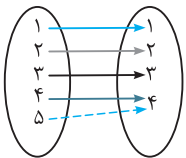


طبق نکته فوق، برد این تابع نمی‌تواند ۶ عضو داشته باشد.

تذکره جازها! چرا این طوریه! خب اگه برد ۶ تا عضو داشته باشه مگه چی میشه، چرا با ۴ تا میشه؟



پاسخ هییی! یه وقت به فودرت زحمت ندی، ببینی چرا! همه چی رو که من نباید توضیح برم، بر نیست یه وقتایی فودرتون هم فکر کنین. خیلی ساده است که چرا با ۶ تا عضو نمی‌شه و با ۴ تا عضو میشه. یه مثال می‌زنم ببین چرا؟ اگه هر عضو دامنه رو به یک عضو برد نظیر کنیم، آخر سر چون برد ۶ تا عضو داره، مجبور میشیم از یکی از عضوهای دامنه ۲ تا پیکان خارج کنیم تا به ۶ عضو بشیم (عضو ششم) نظیر بشه و همین کار، تابع بودن رابطه رو بهم می‌زنه. پس همیشه تعداد اعضای برد باید کوچک‌تر یا مساوی تعداد اعضای دامنه باشه.



حالا اگه برای برد ۴ تا عضو در نظر بگیریم، داریم:

ببین فقط دو تا عضو دامنه به یه عضو برد نظیر میشن که این مشکلی برای تابع بودن ایجاد نمی‌کنه. حتی وقتی برد یک عضو داره، از همه اعضای دامنه به همون عضو برد یک پیکان خارج میشه و همه به اون نظیر میشن. حالا متوجه شدی چرا!

ابتدا رابطه داده‌شده را با ساده کردن اعضای زوج مرتب‌ها، مجدداً می‌نویسیم:



$$\{(2, 1), (3, 6), (2, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 5)\} = \{(2, 1), (3, 6), (1, 3), (3, 5)\}$$

حالا تنها دو عضو $(3, 6)$ و $(3, 5)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم متمایز هستند که تابع بودن رابطه را خراب می‌کنند، پس با حذف یکی از آن‌ها به یک تابع خواهیم رسید. بنابراین حذف حداقل یک عضو کافی است.



روش اول: با دقت در مقادیر دامنه و برد، می‌بینیم که هر x در دامنه، ابتدا ۲ برابر شده و بعد با ۱ جمع شده تا مقدار متناظر آن در برد به دست آمده است. پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2x + 1$ می‌باشد.

روش دوم: مقادیر دامنه را در ضابطه داده‌شده در هر گزینه قرار می‌دهیم، هر گزینه‌ای که مقادیر برد آن با برد داده‌شده، برابر بود، جواب است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) در برد نیست، دیگر ادامه نمی‌دهیم. $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 5$ ✗

۲) می‌تواند ضابطه تابع f باشد. $x = 5 \Rightarrow f(5) = 11$ ✓ ، $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ ✓ ، $x = -2 \Rightarrow f(-2) = -3$ ✓

۳) دیگر ادامه نمی‌دهیم. $f(-2) = -5$ ✗

۴) دیگر ادامه نمی‌دهیم. $f(0) = -5$ ✗ ، $f(-2) = -3$ ✓

تذکره جازها! از کجا بفهمیم که کدام مقدار برد مال کدام مقدار دامنه هست؟

پاسخ آخرین! سؤال فوبی پرسیری! معمولاً مثلاً $f(a) = b$ یا $f(c) = d$ رو می‌دن که اون وقت کاملاً مشخصه چی مال بیه. اما وقتی این طوری داره می‌شه، باید به یکی از دو روشی که ما حل کردیم، جواب رو پیدا کنی.



۳ ۲۲

طبق تعریف تابع، A دامنه تابع است و برد تابع باید زیرمجموعه‌ای از B باشد. پس مقادیر مجموعه A را در ضابطه تابع‌ها قرار می‌دهیم تا ببینیم مقادیر برد کدام تابع، زیرمجموعه‌ای از B است:

بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 1 = 3$, $f(3) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow R_f = \{2, 3, 4\} \subset B$
 ۲) $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5 \Rightarrow R_f = \{1, 3, 5\} \not\subset B$
 ۳) $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3 \Rightarrow R_f = \{-1, 1, 3\} \subset B$
 ۴) $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2 \Rightarrow R_f = \{2, 3, 4\} \subset B$



۳ ۲۳

برای این‌که آن را از تابع بودن خارج کنیم، باید از عضوهای مجموعه اول، بیشتر از یک پیکان خارج شود. از هر عضو مجموعه اول، حداکثر ۳ پیکان می‌توان رسم کرد. پس حداکثر ۲ پیکان دیگر از هر عضو مجموعه اول خارج کنیم تا به یک رابطه غیر تابع برسیم. در نتیجه می‌توانیم حداکثر ۶ پیکان دیگر اضافه کنیم.



۴ ۲۴

روش اول: با دقت در اعضای دامنه و برد، می‌توان دید که هر عضو در دامنه به توان ۲ رسیده و سپس با ۱ جمع شده است، پس ضابطه تابع را می‌توان به صورت $y = x^2 + 1$ نوشت.

روش دوم: بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1$ ✓ , $x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2$ ✓ , $x = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$ ✗
 ۲) $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 = 1$ ✓ , $x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 3$ ✗ → دیگر ادامه نمی‌دهیم.
 ۳) $x = 0 \Rightarrow y = (0 + 1)^2 = 1$ ✓ , $x = 1 \Rightarrow y = (1 + 1)^2 = 4$ ✗ → دیگر ادامه نمی‌دهیم.
 ۴) $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 1 = 1$ ✓ , $x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 = 2$ ✓ , $x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 1 = 5$ ✓

پس ضابطه گزینه (۴) می‌تواند تابع باشد.



۳ ۲۵

طبق ماشین نشان داده شده اگر $f(x)$ را به جای x های $g(x)$ قرار دهیم، حاصل برابر x می‌شود، یعنی $g(f(x)) = x$ است. حال $g(0)$ را می‌خواهیم، یعنی در واقع باید $f(x) = 0$ باشد. پس x هایی را پیدا می‌کنیم که به ازای آن‌ها $f(x) = 0$ شود:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس می‌توان گفت:

$$g(0) = g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

بررسی گزینه‌ها:



۴ ۲۶

۱) دمای آب پس از به جوش آمدن، تغییر نمی‌کند و همواره برابر 100° سانتی‌گراد است. پس با گذشت زمان یعنی مثلاً به ازای $t = 10, 11, 12$ و ... همواره $y = 100$ است. بنابراین یک تابع ثابت داریم.

۲) به ازای $x = 1, \dots, 5$ همواره $y = 3$ است، پس تابع ثابت داریم.

۳) $D_f = \{1, 2, 3\}$ و $R_f = \{1\}$ است، پس تابع ثابت $y = 1$ را داریم.

۴) نمودار داده شده مربوط به خط $x = 1$ است که البته این نمودار اصلاً مربوط به یک تابع نیست، چه برسد به تابع ثابت. در واقع $y = a$ یک تابع ثابت است نه $x = a$.



۴ ۲۷

چون f تابع ثابت است، پس برد آن تک‌عضوی می‌باشد. از طرفی از زوج مرتب $(2, -1)$ می‌توان نتیجه گرفت که -1 همان تک‌عضو برد تابع است. بنابراین باید مؤلفه دوم سایر زوج مرتب‌ها هم برابر -1 باشد:

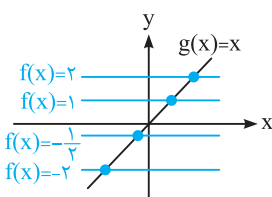
$$\begin{cases} a^2 - 5 = -1 \Rightarrow a^2 = -1 + 5 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ a + 1 = -1 \Rightarrow a = -1 - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -2$$



۳ ۲۸

فرض کنیم $f(x) = c$ و $g(x) = x$ با دامنه \mathbb{R} باشند. نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات

رسم می‌کنیم:



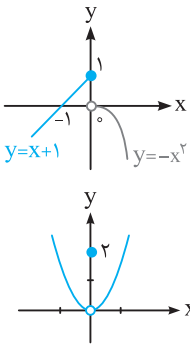
همان‌طور که می‌بینید ضابطه f هرچه باشد، نمودار g را دقیقاً در یک نقطه $(x = c)$ قطع می‌کند.



۱ ۲۹

چون f تابع ثابت است، پس برد آن تک‌عضوی است. بنابراین مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتب‌ها باید برابر باشند:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین تساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم.}} -y = 10 \Rightarrow y = -10 \xrightarrow{x - 2y = 5} x - 2(-10) = 5 \Rightarrow x + 20 = 5 \Rightarrow x = -15 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-15}{-10} = \frac{3}{2}$$



نمودار f را رسم می‌کنیم:

۱ ۳۰

همان‌طور که می‌بینید نمودار تابع از ناحیه اول نمی‌گذرد.

بهترین کار، رسم نمودار تابع است:

۲ ۳۱

پس برد تابع، برابر $y > 0$ می‌باشد.

معادله نیمساز ناحیه اول و سوم به صورت $y = x$ است که همان تابع همانی می‌باشد. پس در تابع f باید مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتبها با هم برابر باشند:

۲ ۳۲

$$\begin{cases} 1 = n - 3 \Rightarrow n = 1 + 3 = 4 \quad (*) \\ 1 = m + n \xrightarrow{(*)} 1 = m + 4 \Rightarrow m = -3 \\ 4 = m^2 + m - 2 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 3) = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = -3 \end{cases}$$

پس فقط $m = -3$ قابل قبول است.

در تابع ثابت f به ازای هر x داریم $f(x) = k$. در نتیجه:

۲ ۳۳

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \Rightarrow k = k \times k \Rightarrow k = k^2 \Rightarrow k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ یا } k = 1$$

A تابع ثابت است، پس باید تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتبها با هم برابر باشند. یعنی:

۳ ۳۴

$$y_1 = y_2 = y_3$$

در واقع مجموعه برد تابع، می‌تواند مجموعه تک‌عضوی $\{y_1\}$ ، $\{y_2\}$ یا $\{y_3\}$ باشد. فرض کنیم $R_A = \{y_1\}$ باشد. پس میانگین و میانه اعضای مجموعه برد، برابر y_1 هستند و واریانس هم برابر صفر است، زیرا:

$$\sigma^2 = \frac{(y_1 - y_1)^2}{1} = 0$$

چون $y_1 = y_2$ است، بنابراین گزینه (۳) درست می‌باشد.

۴ ۳۵

چون f همانی است، پس هر x در دامنه به همان x در برد نظیر می‌شود. در نتیجه باید مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتبها با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} -1 = b + 1 \Rightarrow b = -2 \\ b = a - 1 \end{cases} \Rightarrow -2 = a - 1 \Rightarrow a = -1$$

در نتیجه تابع g به صورت $g = \{(0, 0), (-1, -2), (-3, 0)\}$ می‌باشد که تابعی خطی و ثابت نیست. دامنه آن مجموعه $\{0, -1, -3\}$ و برد آن مجموعه $\{0, -2\}$ است. پس گزینه (۴) درست می‌باشد.

ظنم جازه! چرا g خطی نیست؟ از کجا فهمیدید؟

پاسخ سؤال فوبی پرسیری، آفرین!

به دو روش می‌تونی فطی بودن یا نبودن رو ثابت کنی. روش اول این‌که با استفاده از دو تا نقطه، معادله فط رو بنویسی، آنگه نقطه سوم تو این معادله، صدق کرد، می‌تونی بگی یه تابع فطی با ضابطه‌ای است که به دست آوردی. روش دوم این‌که از نکته زیر استفاده کنی:

نکته اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط واقع باشند، آنگاه داریم:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

حالا به دو روش، فطی نبودن g رو نشون می‌دیم:

در تابع g فرض کنیم $A(0, 0)$ ، $B(-1, -2)$ و $C(-3, 0)$.

روش اول: معادله خط گذرا از A و B را می‌نویسیم:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{-2 - 0}{-1 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$

حال اگر نقطه C در این معادله خط، صدق کرد، تابع g خطی است و اگر صدق نکرد، g خطی نیست:

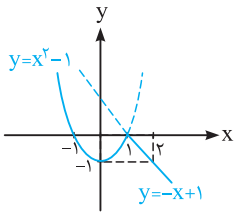
$$y = 2x \xrightarrow{C(-3, 0)} 0 = 2(-3) \Rightarrow 0 = -6 \quad \times \Rightarrow \text{خطی نیست.}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{-1 - 0} = 2 \\ m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0 - (-2)}{-3 - (-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow m_{AB} \neq m_{BC} \Rightarrow g \text{ خطی نیست.}$$



نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



۳ ۳۶

واضح است که مقادیر y تمام \mathbb{R} را شامل می‌شوند.

۱ ۳۷



$$\begin{cases} 2 > 1 \Rightarrow f(2) \stackrel{\text{ضابطه اول}}{=} 2^2 + a(2) = 4 + 2a \Rightarrow 4 + 2a = 2 \\ -2 < 1 \Rightarrow f(-2) \stackrel{\text{ضابطه دوم}}{=} -2a + b \Rightarrow -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2a = 2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \\ b - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - 2(-1) = 0 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a + b = -1 - 2 = -3$$

چون دامنه تابع، دارای ۲ عضو است و -۴ و ۵ دو مؤلفه اول زوج مرتبها هستند، یعنی دو عضو دامنه می‌باشند، پس مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب دیگر هم، باید برابر -۴ یا ۵ باشند تا دامنه دو عضوی باقی بماند. حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

۴ ۳۸

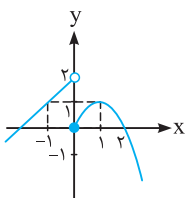


$$\begin{cases} a^2 + 1 = -4 \Rightarrow a^2 = -5 \text{ غق ق} \\ a^2 + 1 = 5 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \\ -b^2 = -4 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2 \\ -b^2 = 5 \Rightarrow b^2 = -5 \text{ غق ق} \end{cases}$$

از طرفی چون تابع ثابت است، پس مجموعه برد، تک‌عضوی است. عدد ۴ عضو برد است، پس مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتبها باید ۴ باشد:

$$\begin{cases} 2a = 4 \xrightarrow{a=2} 4 = 4 \quad \checkmark \\ b - 3c = 4 \xrightarrow{b=-2} -2 - 3c = 4 \Rightarrow -3c = 6 \Rightarrow c = -2 \\ c - d = 4 \xrightarrow{c=-2} -2 - d = 4 \Rightarrow d = -6 \end{cases}$$

۱ ۳۹



$$y = 2 + x \Rightarrow \begin{matrix} x & | & 0 & -1 \\ y & | & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$y = 2x - x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1 \Rightarrow S(1, 1) \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2 \end{cases}$$

پس گزینه (۱) قسمتی از نمودار این تابع را نشان می‌دهد.

تذکره! صفر که تو دامنه ضابطه اول نیست، چرا برای رسم خط $y = x + 2$ از نقطه (۰، ۲) استفاده کردید!

پاسخ: بله، صدمت کاملاً درسته. ولی اگه دقت کنی، می‌بینی که ما هم تو رسم نمودار، اون نقطه رو تو قالی گذاشتیم که یعنی عضو نمودار نیست. فقط چون می‌فواستیم مشخص باشه که اون خط، کجا تموم میشه، نقطه (۰، ۲) رو نوشتیم.

۲ ۴۰



بررسی گزینه‌ها:

(۱) اگر تابعی همانی باشد، دامنه و برد آن برابر هستند ولی عکس این مطلب درست نیست. مثلاً $f = \{(1, 2), (2, 1)\}$ یک تابع غیرهمانی با دامنه و برد مساوی $\{1, 2\}$ می‌باشد.

(۲) می‌دانیم در تابع همانی، $f(x) = x$ است. پس داریم:

$$f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0$$

پس این گزینه همواره درست است.

(۳) چون f تابع ثابت است، بنابراین به ازای هر x ، $f(x) = c$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$f(kx) = c, f(x) = c \Rightarrow f(kx) = c \neq kf(x) = kc$$

پس این گزینه هم درست نیست.

(۴) در تابع ثابت، دامنه هر مجموعه دلخواهی می‌تواند باشد ولی برد، مجموعه‌ای تک‌عضوی است. پس تنها در حالتی که دامنه، مجموعه تک‌عضوی $\{c\}$ باشد، دامنه و برد تابع ثابت $y = c$ با هم برابر می‌باشند.

تایم جازه! چرا تو گزینه (۲) گفته که دامنه مجموعه اعداد حقیقیه؟ اگر نمی گفت چی می شد؟

پاسخ: آخرین به دقت! بله آگه نمی گفت، اون وقت این گزاره همواره درست نمی شد. چون مثلاً آگه دامنه، مجموعه $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ بود اون وقت از x ها که $0, -1, -2, -3, -4$ می شن، فقط 0 تو دامنه وجود داشت و بقیه $(-x)$ ها در دامنه تعریف نمی شدن و بنابراین $f(-x)$ ها هم تعریف نشده بودن و گزاره بی معنی می شد. ولی وقتی دامنه، مجموعه \mathbb{R} باشه، هر x ای که تو دامنه در نظر بگیریم، $(-x)$ اون هم تو دامنه وجود داره و بنابراین $f(x) + f(-x)$ با معنی و تعریف شده است. مثلاً برای $x = 4$ داریم $4 + (-4) = 0$ و این جمع برای همه x های عضو \mathbb{R} درسته.

۱ ۴۱



$$\begin{cases} \text{ضابطه اول} \\ -\sqrt{5} \approx -2.23 < -2 \implies f(-\sqrt{5}) = -(-\sqrt{5})^2 + 5 = -5 + 5 = 0 \\ \text{ضابطه سوم} \\ 0 \leq 0 < 2 \implies f(0) = 2 \\ \text{ضابطه چهارم} \\ 3 \geq 2 \implies f(3) = -3 - 1 = -4 \end{cases} \implies f(-\sqrt{5}) + f(0) + f(3) = 0 + 2 + (-4) = -8$$

f تابع همانی است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = x$ می باشد. در نتیجه داریم: ۳ ۴۲



$$3f(-2) = g(1) \xrightarrow{f(x)=x} 3(-2) = g(1) \implies g(1) = -6 \quad (*)$$

g تابع ثابت است، پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، طبق رابطه (*) نتیجه می شود که $g(x) = -6$.

$$g(-3) - 2f(3) = -6 - 2(3) = -6 - 6 = -12$$

بنابراین داریم:

نقطه ای به طول -2 روی خط $y = -3$ قرار دارد، پس $f(-2) = -3$. ۳ ۴۳



نقطه ای به طول 2 روی خطی است که از نقاط $(1, 0)$ و $(3, 2)$ می گذرد. پس برای به دست آوردن $f(2)$ کافی است، معادله این خط را بنویسیم:

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{3 - 1}(x - 1) \implies y = x - 1 \implies f(2) = 2 - 1 = 1$$

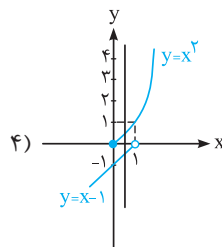
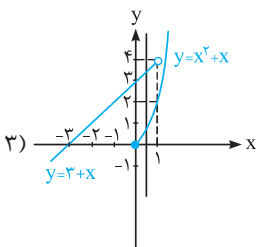
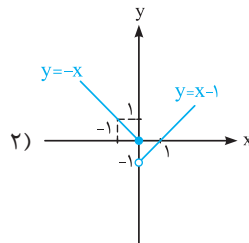
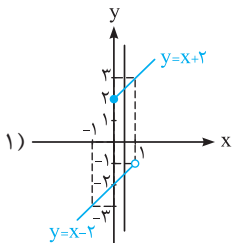
مقدار $f(3)$ هم که از روی نمودار واضح است:

$$f(3) = 2$$

نقطه ای به طول 5 هم روی خط $y = 4$ قرار دارد، پس $f(5) = 4$. در نتیجه داریم:

$$\frac{f(-2) + f(2)}{f(3) - f(5)} = \frac{-3 + 1}{2 - 4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

روش اول: بهترین راه تشخیص، رسم نمودار رابطه ها است: ۲ ۴۴



همان طور که می بینید در تمام گزینه ها به جز گزینه (۲)، خطی موازی محور y ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می کند.

روش دوم: می دانیم f در صورتی تابع است که به ازای هر x تنها یک مقدار برای y وجود داشته باشد. در یک رابطه دو ضابطه ای (یا چند ضابطه ای) اگر دامنه ضابطه ها با هم اشتراک داشته باشند، آن رابطه، تابع نیست، مگر این که ضابطه ها به ازای تمام مقادیر آن دامنه مشترک، مقدار مساوی داشته باشند. البته باید حواستان باشد که هر کدام از ضابطه ها به تنهایی در دامنه خود معادله یک تابع باشند.

بررسی گزینه ها:

(۱) دامنه ضابطه ها در فاصله $0 \leq x < 1$ با هم اشتراک دارند و واضح است که ضابطه ها با هم مساوی نیستند $(x + 2 \neq x - 2)$ ، پس تابع نیست.

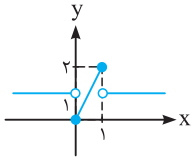
(۲) دامنه ضابطه ها هیچ اشتراکی با هم ندارند و از طرفی هر ضابطه در دامنه خود تابع است. پس این رابطه، تابع می باشد.

(۳ و ۴) دامنه ضابطه ها با هم اشتراک دارند و ضابطه ها هم به ازای هیچ مقداری در دامنه مشترک با هم مساوی نیستند، پس تابع نمی باشند.



واضح است که دامنه تابع IR می باشد:

$$(x < 0) \cup (0 \leq x < 1) \cup (x > 1) = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$



$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 2$$

بهترین راه پیدا کردن برد، رسم نمودار تابع است:

تذکره! چه طوری برد رو این طوری نوشتید؟

پاسخ آگه فوب به نمودار نگاه کنی، می بینی که به ازای $x < 0$ و $x > 1$ همیشه y برابر ۱ هست. بین ۰ و ۱ هم، y ها روی قطعی قرار دارند که y اون از صفر شروع شده و تا ۲ ادامه داره، یعنی $0 \leq y \leq 2$ که تو این بازه $y = 1$ هم قرار داره.

۴ ۴۶



$$\begin{cases} f(\Delta) \stackrel{\Delta > 3}{=} \Delta - \sqrt{\Delta + 4} = \Delta - \sqrt{9} = \Delta - 3 = 2 \Rightarrow f(f(\Delta)) = f(2) \stackrel{2 < 3}{=} 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7 \\ f(1) \stackrel{1 < 3}{=} 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) \stackrel{\Delta > 3}{=} 5 - \sqrt{5 + 4} = 5 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(f(\Delta)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

طبق ضابطه f به ازای $x > 0$ ، $f(x) = x^2 + 1$ است که عبارتی همواره مثبت می باشد. به ازای $x \leq 0$ ، $f(x) = 1$ است. پس همواره به ازای $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) > 0$ می باشد. در نتیجه $-f(x) < 0$ است و بنابراین وقتی می خواهیم $f(-f(x))$ را پیدا کنیم، باید از ضابطه ای از f استفاده کنیم که در آن $x < 0$ است (در واقع این جا $-f(x)$ نقش x را برای f دارد). پس:

$$f(-f(x)) \stackrel{-f(x) < 0}{=} 1$$

چون تابع همانی است، پس دامنه و برد آن برابرند. ۳ تا ورودی و ۲ تا خروجی داریم. بنابراین ۲ تا از ورودی ها باید با هم برابر باشند تا تعداد اعضای دامنه و برد مساوی شوند، بعد می رویم سراغ تساوی مقدار آن ها:

۴ ۴۸



$$x \cdot \left\{ -1, \frac{1}{4} - 2b \right\}, D = \left\{ 0, \frac{1}{4} \right\}, R = \left\{ -1, \frac{1}{4} - 2b \right\} \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

تساوی این دو مجموعه امکان ندارد.

$$D = R \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow D = \{0, -1\}, R = \{-1, -2b\}$$

$$D = R \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow D = \{0, 1\}, R = \{-1, 1 - 2b\}$$

تساوی این دو مجموعه امکان ندارد.

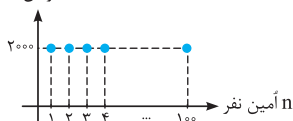
برای $x < 0$ خطی داریم که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(-3, -2)$ می گذرد، پس معادله آن را به صورت زیر می نویسیم:

۴ ۴۹

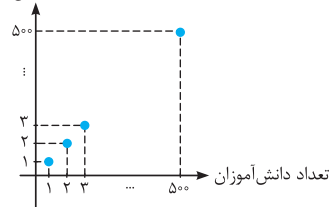
$$y - 0 = \frac{-2 - 0}{-3 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

برای $0 \leq x < 2$ ، با توجه به نقاط $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(2, 4)$ و گزینه ها، نمودار سهمی $y = x^2$ را داریم. هم چنین چون در نمودار تابع، نقطه $(4, 4)$ توپر است و نمودار ادامه ندارد، یعنی انتهای محدوده دامنه تابع در $x = 4$ است و آخرین بخش دامنه، $x \geq 2$ نمی باشد. برای $2 \leq x \leq 4$ تابع ثابت $y = 4$ را داریم. بنابراین تنها در گزینه (4) ، سه تا دامنه و سه تا ضابطه ها درست هستند.

مبلغ ورودی هر نفر (تومان)



تعداد گل ها



الف) هر کدام از ۱۰۰ نفری که وارد شهر بازی می شوند، مبلغ ۲۰۰۰ تومان پرداخت می کنند. پس به ازای $x = 1, 2, \dots, 100$ ، مقدار ثابت $y = 2000$ است، بنابراین تابع ثابت $y = 2000$ با دامنه $\{1, 2, \dots, 100\}$ را داریم.

ب) هر کدام از ۵۰۰ دانش آموز، یک گل دارد. پس به تعداد ۵۰۰ دانش آموز، ۵۰۰ گل داریم. یعنی دامنه تابع $\{1, 2, \dots, 500\}$ و برد آن نیز $\{1, 2, \dots, 500\}$ می باشد. پس با تابع همانی $y = x$ سروکار داریم.

در نتیجه گزینه (2) درست است.

۳ ۵۱



وقتی علی از خانه خودش به سمت خانه دوستش حرکت می کند، فاصله او از خانه اش زیاد می شود، پس باید خطی رسم کنیم که براساس آن فاصله از خانه زیاد شود. چون در مدت چند دقیقه ای که منتظر سعید است، زمان زیاد می شود ولی فاصله او از خانه اش تغییری نمی کند، پس یک خط راست (موازی محور x ها) رسم می کنیم. بعد از حرکت دوباره با سعید، سرعتش نسبت به قبل بیشتر شده، پس باید خطی که رسم می کنیم، شیب بیشتری نسبت به خط اولیه داشته باشد. در مدت حضور در مدرسه هم فاصله تغییری نمی کند، پس مجدداً یک خط راست داریم. موقع برگشتن از مدرسه به خانه، فاصله علی تا خانه کم و کم تر می شود تا به صفر می رسد، در ضمن سرعت او هم خیلی کم است، پس یک خط با شیب کم داریم. در نتیجه طبق توضیحاتی که دادیم، گزینه (3) نمودار داستان تعریف شده است.