مقدمهٔ ناشر

PHOTO

Ensaniha

FOLLOW

لیدیز اند جنتلمن!

«آخر ریاضی خواندن از چه روست و به چه کار ما طالبان انسانی آید؟!»

Liked by sina and 225971 others

kheili sabz

View all 752065 comments

31 MINUTES AGO

دوست عزیز لایک نزن!

چند تا دلیل بگم؟

۱- کنکور آقا! کنکور! توو کنکورتون ریاضی دارید باید درصدشو خوب بزنید!

۲- بالاخره همتون باید یکم حساب کتاب بلد باشید توو زندگیتون. به کارتون میاد مثلاً محاسبه‌ی اینکه اگر درصد سود وامو از اکسترمم نمودار نزولی درآمدتون کم کنید می‌تونید تابع چندمجهولی اجاره‌خونه و قسط و قرض و کلاس کنکور فرزند دلبندتونو حل کنید یا مجبورید از بهانه‌های قبلی مشتق بگیرید و مشتقات بهانه رو بین صابخونه و بانک و سوپری سرکوچه به تساوی تقسیم کنید!

۳- جدای از شوخی، ذهنی که با روش‌های علم ریاضی تربیت شده منطقی‌تر و تحلیلی‌تره. توو سنجش مسایل اطرافش، اجزای پدیده‌ها رو بهتر تفکیک می‌کنه، روابطشونو درست‌تر می‌سنجه، و تصمیمای درست‌تری می‌گیره.

۴- وقتی به زندگی دانشمندای بزرگ نگاه می‌کنی، می‌بینی خیلیاشون آدمای تک‌بعدی‌ای نبودن. از ابن سینای فیلسوف و پزشک، خیام شاعر و ریاضیدان و منجم... تا پروفسور حسابی فیزیکدان عاشق ادبیات و اینشتین فیزیکدان و ویالون‌نواز... البته که نمیشه همه‌ی علومو تخصصی دنبال کرد اما می‌تونیم با کمک گرفتن از هر علمی، یه بخش از وجودمونو پرورش بدیم.

ما آدما همه و همه دنبال «شناخت و معرفت» هستیم؛ شناخت خودمون و شناخت جهان و برای این شناخت کلی ابزار و وسیله لازم داریم. یکی از ابزارهای شناختن جهان الان توو دستای توئه. ریاضی! دریابش.

در انتها یه تشکر هم بکنم از مؤلفای عزیز کتاب، دوستان محترم واحد تولید، مسئول پروژهٔ کتاب خانم مرادی و همهٔ دوستان دیگه‌ای که برای چاپ این کتاب زحمت کشیدن.

تقدیم به پدرم که یادش همیشه با ما‌ست — علی شهرابی

تقدیم به دوست و همکار عزیزم، معلم فرهیخته امیر فرمانی که دیگر در بین ما نیست ... — امیر زراندوز

مقدمهٔ مولف

سلام به همهٔ دوستان

می‌گن اگر خودتون رو برای آینده آماده نکنید، به زودی می‌فهمید که متعلق به گذشته هستید! ما هم تصمیم گرفتیم خودمان را به‌روز کنیم و این به‌روزکردن را ادامه خواهیم داد! کتاب جدید با کتاب قبلی‌مان کلی تفاوت خوب دارد.

توضیحات ساختار کتاب

کتابی که می‌بینید ۳تا فصل دارد.

در ابتدای هر فصل درس‌نامه‌های آن را آوردیم. البته با تیترهای مهم و مرتبط با کتاب درسی، فصل‌ها را به چند درس تقسیم کردیم.

بعد تست‌های آن فصل را می‌بینید. تست‌ها را آن‌قدر با دقت چیدیم که ببینید کیف می‌کنید! تست‌ها هم مثل درس‌نامه، تیتر دارند.

در انتهای کتاب، پاسخ‌نامهٔ تشریحی کل تست‌های کتاب را آورده‌ایم. اگر کتاب‌های ریاضی انسانی دهم و یازدهم ما را خوانده باشید، می‌دانید پاسخ تشریحی ما، چه‌قدر تشریحی است!

جزئیات درس‌نامه، تست‌ها و پاسخنامه

۱- درس‌نامه

- هر موضوعی را به طور کامل توضیح دادیم. هر جا که می‌شد، روش حل را «مرحله به مرحله» و «در قالب یک مثال» توضیح دادیم. بعد از مثال حتماً تست آموزشی در درس‌نامه آورده‌ایم. بعضی وقت‌ها با توجه به اهمیت مطلب، تعداد این تست‌های آموزشی ۳ یا ۴ تا هم شده است.
- فرمول‌ها، نکات، تذکرها همگی داخل کادر مخصوص هستند.
- بعضی جاها که مطالب زیاد بود، آخر کار، کل داستان را در کادر «جمع‌بندی» برایتان آورده‌ایم.
- حتماً درس‌نامه را بخوانید و بعد سراغ حل تست‌ها بروید.

۲- تست‌ها

واقعاً خوب شدن! تعریف الکی نمی‌کنیم!

- تیتر تست‌ها به همان ترتیب تیتر درس‌نامه‌ها است.
- چینش سؤالات از آسان به سخت رعایت شده.
- پیشنهاد ما این است که تمام تست‌ها را حل کنید ولی اگر زمانی سراغ تست‌ها رفتید که وقت کمی داشتید، تست‌های آبی‌رنگ را حل کنید.
- سؤالاتی که سخت‌تر هستند با علامت مشخص کرده‌ایم. اگر دنبال درصد بالا هستید، نباید از آن‌ها رد شوید.
- «شبیه‌ساز تمرینات کتاب درسی»، «سؤالات کنکورهای سراسری» و کلی «تست تألیفی استاندارد» برایتان آورده‌ایم که پوشش نسبتاً کاملی روی تیپ سؤال‌های مهم دارند.

هرچند تو ریاضی، اگر ۱۰ میلیون سؤال از یه مبحث مهم حل کنی، ممکنه سؤال بعدی، ایده‌اش کاملاً جدید باشه!

۳- پاسخ‌ها

- فارسی‌نویسی در پاسخ‌ها به طور کامل انجام شده.
- هر جایی که احساس کردیم ابهامی در ذهنتان به وجود می‌آورد را توضیح داده‌ایم.
- یک سری نکات را در پاسخ‌ها تکرار کرده‌ایم و یک سری نکتهٔ جدید هم آورده‌ایم.
- بعضی سؤالات را به ۲ یا ۳ روش حل کرده‌ایم. معمولاً یکی از روش‌ها از بقیه سریع‌تر است که قابل تشخیص است.

تیمی که پشت کتاب بوده

تشکر از دوستانی که در این مدت کنارمان بودند و دلسوزانه به ما کمک کردند:

ـ دکتر ابوذر نصری و کمیل نصیری مدیران خوش‌فکر و خفن انتشارات

ـ آقای سعید احمدپور که تغییرات خوب کتاب را مدیون سخت‌گیری‌های ایشان هستیم؛ مرسی از شما.

ـ خانم لولاو مرادی عزیز که همیشه با روی باز و با انرژی پیگیر کارهای کتاب بودن.

ـ خانم‌ها نرجس تیمناک، زهرا جالینوسی، هتاو مرادی و آقایان محسن فراهانی، پیام ابراهیم‌نژاد، سپهر متولی، محمدرضا حسین‌زاده، سجاد شهرابی فراهانی، ایوب نعمایی و مهرداد اسپیدکار که زحمت ویراستاری این کتاب را کشیدند. آقای فراهانی، تشکر ویژه که در روزهای شلوغِ کاریتون، کار ما رو رها نکردین.

ـ تشکر بسیار ویژه از دوستان تولید

ـ تشکر از دوستان عزیزم در خیلی‌سبز؛ ایمان سلیمان‌زاده، رسول محسنی‌منش، کوشا نشتایی و نوید شاهی

ـ تشکر ویژه از یه دوست خوب

ـ در آخر تشکر ویژه از مادرم که هیچ وقت نیستم!

حرف آخر

به نظرم هر آن‌چه از ریاضی انسانی برای کنکورتان نیاز داشتید را در این کتاب آورده‌ایم ولی اگر جایی نقصی می‌بینید آن را از طریق سایت خیلی‌سبز با ما در میان بگذارید. ممنون از شما

www.kheilisabz.com

۲۲ تیر ۱۴۰۱

فهرست

		درس‌نامه	تست
فصل اول آنالیز ترکیبی و احتمال	درس ۱: شمارش	۸	۴۰
	درس ۲: احتمال	۲۱	۴۹
	درس ۳: چرخهٔ آمار در حل مسائل	۳۶	۵۹
فصل دوم الگوهای خطی	درس ۱: مدل‌سازی و دنباله	۶۲	۷۹
	درس ۲: دنبالهٔ حسابی	۷۰	۸۴
فصل سوم الگوهای غیرخطی	درس ۱: دنبالهٔ هندسی	۹۴	۱۱۷
	درس ۲: توان‌های گویا	۱۰۲	۱۲۶
	درس ۳: تابع نمایی	۱۱۰	۱۳۰
پاسخ‌نامهٔ تشریحی			۱۳۴
پاسخ‌نامهٔ کلیدی			۲۱۵

درس اول شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

فرض کنید علی به یک کافه رفته که منوی سالاد و نوشیدنی گرم آن به صورت مقابل است:
دو حالت زیر را با دقت بخوانید و حواستان به کلمات «یا» و «و» در آن‌ها باشد.

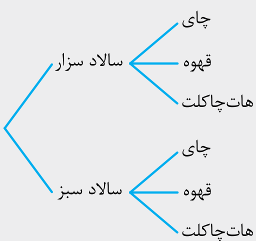
سالاد	سالاد سزار سالاد سبز
نوشیدنی گرم	چای قهوه هات‌چاکلت

(۱) علی می‌خواهد «یک سالاد» یا «یک نوشیدنی گرم» بخورد. در این حالت، علی ۵ انتخاب دارد

۱) سالاد سزار
۲) سالاد سبز
۳) چای
۴) قهوه
۵) هات‌چاکلت

دو انتخاب اول مربوط به سالادها و ۳ انتخاب بعدی مربوط به نوشیدنی‌ها بود.
یعنی او به $۵ = ۳ + ۲$ حالت می‌تواند انتخاب کند.

(۲) علی می‌خواهد «یک سالاد» **و** «یک نوشیدنی گرم» بخورد.
در این حالت علی باید هم از منوی سالاد انتخاب کند و هم از منوی نوشیدنی گرم. علی می‌تواند «سالاد سزار» را با هر یک از نوشیدنی‌های «چای، قهوه و هات‌چاکلت» انتخاب کند. همین‌طور می‌تواند «سالاد سبز» را با هر یک از نوشیدنی‌های «چای، قهوه و هات‌چاکلت» انتخاب کند. پس برای هر سالاد، ۳ انتخاب متمایز از نوشیدنی‌ها دارد؛ یعنی به $۶ = ۳ \times ۲$ حالت می‌تواند یک سالاد و یک نوشیدنی انتخاب کند:



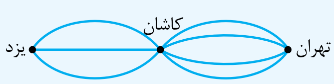
در این درس می‌خواهیم بشماریم *ولی نه با دست و دونه‌دونه!* می‌خواهیم از راه میان‌بر تعداد حالت‌های انجام یک کار را بشماریم.
با توجه به مثال بالا، دو اصل زیر را تعریف می‌کنیم:

- **۱. اصل جمع** • اگر بتوان کاری را به m روش (انتخاب یک سالاد به دو روش یا دو حالت) و کار دیگری را به n روش (انتخاب یک نوشیدنی به ۳ روش یا ۳ حالت) انجام داد و این دو کار را نتوان با هم انجام داد (علی می‌خواهد یک سالاد یا یک نوشیدنی بخورد)، در این صورت به $m+n$ روش می‌توان کار اول **یا** کار دوم را انجام داد.
- **۲. اصل ضرب** • اگر کاری طی دو مرحله انجام شود، به طوری که مرحلهٔ اول به m روش **و** مرحلهٔ دوم به n روش انجام‌پذیر باشد (مثل انتخاب سالاد به ۲ روش و انتخاب نوشیدنی به ۳ روش)، کل آن کار به $m \times n$ روش قابل انجام است.

تذکر هر دو اصل بالا، قابل تعمیم به تعداد بیشتر از ۲ هستند؛ مثلاً اگر کاری در ۳ مرحله انجام شود به طوری که مرحلهٔ اول به m روش و مرحلهٔ دوم به n روش و مرحلهٔ سوم به k روش انجام‌پذیر باشد، در کل، آن کار به $m \times n \times k$ روش قابل انجام است.

تذکر اگر بین جملات از «**یا**» استفاده کردید، سراغ **اصل جمع** و اگر از «**و**» استفاده کردید، سراغ **اصل ضرب** بروید.

تست از شهر یزد به شهر کاشان ۳ مسیر و از شهر کاشان به تهران ۴ مسیر وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از یزد به تهران برویم؟



۱) ۷
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

پاسخ (۳) یک بار کاری که قرار است انجام دهیم را می‌نویسیم:

$\underbrace{\text{« از یزد به کاشان برویم}}_{\text{مرحلهٔ اول}}$ **و** (ضرب) $\underbrace{\text{از کاشان به تهران برویم.»}}_{\text{مرحلهٔ دوم}}$

این یعنی با یک کار دومرحله‌ای روبه‌رو هستیم و باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد کل حالات} = \underset{\text{یزد به کاشان}}{۳} \times \underset{\text{کاشان به تهران}}{۴} = ۱۲$$

تست | **یک معلم برای تدریس کلاس‌های آنلاینش می‌خواهد از بین ۴ مدل لپ‌تاپ، ۲ مدل surface و ۵ مدل تبلت، یک وسیله را بخرد. این معلم به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟**

۱) ۱۱ ۲) ۴۰ ۳) ۱۳ ۴) ۲۸

پاسخ ۱ | یک بار کاری که این معلم می‌خواهد انجام دهد را می‌نویسیم:

«او می‌خواهد یک لپ‌تاپ **یا** یک surface **یا** یک تبلت بخرد.»

جمع جمع

چون این کارها را نمی‌توان با هم انجام داد، پس با اصل جمع روبه‌رو هستیم:

$$\text{تعداد کل حالات} = \underset{\text{لپ‌تاپ}}{۴} + \underset{\text{surface}}{۲} + \underset{\text{تبلت}}{۵} = ۱۱$$

تعداد و تنوع سؤالات «اصل ضرب» نسبت به «اصل جمع» خیلی بیشتر است. در ادامه روی اصل ضرب بحث می‌کنیم.

روش حل سؤالات اصل ضرب

۱) ابتدا به تعداد مراحل کار، خانهٔ خالی قرار می‌دهیم و بین آن‌ها علامت ضرب می‌گذاریم.

۲) از خانه‌ای شروع به پرکردن می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارد. *(منظورم از محدودیت رو تو مثال‌های بعدی براتون توضیح میدم.)*

۳) سپس بقیهٔ خانه‌ها را پر می‌کنیم.

۴) اعداد قرارگرفته در جاهای خالی را ضرب می‌کنیم تا جواب مسئله به دست آید.

چند مثال با هم حل کنیم:

تست | **در یک آزمون چهارگزینه‌ای که ۱۰ سؤال دارد، اگر پاسخ‌دادن به سؤال‌ها الزامی باشد، چند حالت ممکن برای پاسخ‌نامه داریم؟**

۱) ۴۰ ۲) $۱\times۲\times۳\times\cdots\times۱۰$ ۳) $۴^{۱۰}$ ۴) $۱۰^{۴}$

پاسخ ۳ | با یک کار ۱۰مرحله‌ای روبه‌رو هستیم. (هر سؤال، یک مرحله است):

$$\underset{\text{سؤال ۱}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سؤال ۲}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سؤال ۳}}{\underline{\quad}} \times \cdots \times \underset{\text{سؤال ۱۰}}{\underline{\quad}}$$

با هیچ محدودیتی روبه‌رو نیستیم، پس از همان سؤال ۱ شروع به پرکردن می‌کنیم.

هر سؤال، ۴ حالت دارد (۱ تا ۴)، پس:

$$\underset{\text{سؤال ۱}}{۴} \times \underset{\text{سؤال ۲}}{۴} \times \underset{\text{سؤال ۳}}{۴} \times \cdots \times \underset{\text{سؤال ۱۰}}{۴} = \underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۱۰تا}} = ۴^{۱۰}$$

تذکر | اگر پاسخ‌دادن به سؤال‌ها الزامی نبود، هر سؤال ۵ حالت داشت: گزینهٔ (۱)، گزینهٔ (۲)، گزینهٔ (۳)، گزینهٔ (۴) و خالی؛ یعنی جای تمام ۴ها، عدد ۵ قرار می‌گرفت و جواب می‌شد $۵^{۱۰}$.

نکته | در یک آزمون اگر پاسخ‌دادن به تمام سؤالات اجباری باشد، تعداد کل حالات پاسخ‌دادن برابر است با: $(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}}$

و اگر پاسخ‌دادن به سؤال‌ها الزامی نباشد، آن‌گاه تعداد کل حالات پاسخ‌دادن برابر است با: $(\text{تعداد گزینه‌ها} + ۱)^{\text{تعداد سؤالات}}$

یکی از تیپ‌های مهم سؤال‌های این قسمت، سؤالات مربوط به اعداد است. در این سؤال‌ها، حواسمان باید به مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام باشد.

تست | **با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۳رقمی می‌توانیم بنویسیم؟ (تکرار ارقام مجاز است.)**

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

پاسخ ۲ | با یک کار ۳مرحله‌ای روبه‌رو هستیم (نوشتن رقم یکان **و** دهگان **و** صدگان).

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دهگان}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{\quad}}$$

از آن‌جایی که قرار است عدد ۳رقمی بنویسیم، صدگان صفر نمی‌تواند باشد، پس این خانه محدودیت دارد و باید با آن شروع کنیم. صدگان هر کدام از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد (۴ حالت):

$$\underset{\text{صدگان}}{۴} \times \underset{\text{دهگان}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{\quad}}$$

حالا برای بقیهٔ خانه‌ها (یکان و دهگان) محدودیتی نداریم و هر کدام از ۵ رقم ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توانند در آن‌ها قرار گیرند، پس:

$$\underset{\text{صدگان}}{۴} \times \underset{\text{دهگان}}{۵} \times \underset{\text{یکان}}{۵} = ۱۰۰$$

حالا سؤال بالا را با شرط «تکرار ارقام مجاز نیست.» حل می‌کنیم:

تست | **با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۳رقمی با ارقام متمایز می‌توانیم بنویسیم؟**

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

پاسخ ۲ | مشابه تست قبل، با خانه‌ای که محدودیت دارد (یعنی صدگان) شروع می‌کنیم:

$$\underset{\text{صدگان}}{۴} \times \underset{\text{دهگان}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{\quad}}$$

حالا داستان کمی فرق می‌کند. الان حق نداریم رقمی که در صدگان استفاده کردیم را دوباره استفاده کنیم.

برای همین یکی از ارقام ۱ تا ۴ که در صدگان استفاده شده را خط می‌زنیم: $۰, ۱, ۲, ۳, \cancel{۴}$

پس ۴ رقم برای دهگان می‌ماند:

$$\underset{\text{صدگان}}{۴} \times \underset{\text{دهگان}}{۴} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{\quad}}$$

یکی دیگر از این ارقام هم استفاده شده و خط می‌خورد: ۰,۱,۲,~~۳~~,~~۴~~

پس ۳ رقم برای یکان می‌ماند:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}} \times \frac{۴}{\text{دهگان}} \times \frac{۳}{\text{یکان}} = ۴۸$$

تذکر اگر بعد از صدگان، یکان را پر می‌کردیم و بعدش دهگان، اشکالی نداشت:

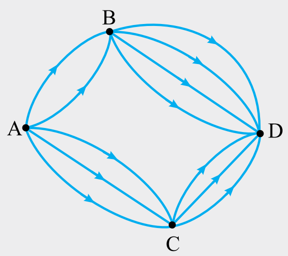
$$\frac{۴}{\text{صدگان}} \times \frac{۳}{\text{دهگان}} \times \frac{۴}{\text{یکان}} = ۴۸$$

تذکر در حل تست‌های آخر فصل، کل این مراحل به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴}{\uparrow}}{۴}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,\cancel{۴}}{\uparrow}}{۴}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{\overset{۰,۱,۲,\cancel{۳},\cancel{۴}}{\uparrow}}{۳}} = ۴۸$$

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانهٔ بعدی رفته‌ایم، یک رقم دلخواه از خانهٔ قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانهٔ دوم از چپ، به دلخواه عدد ۴ را که در خانهٔ اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۴ می‌توانید ۱ یا ۲ یا ۳ را خط بزنید، هیچ فرقی ندارد.

ترکیب اصل ضرب و اصل جمع



فرض کنید نقشهٔ مسیر روبه‌رو را در اختیار داریم:

می‌خواهیم از شهر A به شهر D برویم. چه مسیرهایی وجود دارد؟

جواب: باید از مسیر ABD **یا** مسیر ACD برویم.

جملهٔ بالا را دقیق‌تر می‌نویسیم:

«باید از A به B **و** سپس از B به D برویم.» **یا** «باید از A به C **و** بعدش از C به D برویم.»

$\times$ $\quad$ $+$ $\quad$ $\times$

پس دو حالت را جداگانه حساب می‌کنیم و حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

حالت اول: (ABD) $\quad \frac{۲}{\text{A به B}} \times \frac{۴}{\text{B به D}} = ۸$

حالت دوم: (ACD) $\quad \frac{۳}{\text{A به C}} \times \frac{۳}{\text{C به D}} = ۹$

در نتیجه تعداد کل مسیرها برابر با ۹ + ۸ یعنی ۱۷ است.

پس بعضی وقت‌ها مسئله را به چند قسمت تفکیک می‌کنیم؛ تعداد حالت‌های هر قسمت را حساب می‌کنیم و در نهایت آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. چند مثال ببینید:

نکته اگر در سؤالات شمارش، «تعداد اعداد زوج» یا «تعداد مضارب ۵» از ما خواسته شود، مسئله را به دو قسمت «رقم یکان صفر باشد.» و «رقم یکان صفر نباشد.» تفکیک می‌کنیم و تعداد حالت‌های هر قسمت را جداگانه حساب می‌کنیم، بعد آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

تست با ارقام ۰، ۱، ۲، ۵، ۷ و ۹ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵، با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۳۲ $\quad$ ۲) ۳۶ $\quad$ ۳) ۴۰ $\quad$ ۴) ۴۲

پاسخ ۲ عددی که مضرب ۵ است، یکانش صفر یا ۵ است. طبق نکتهٔ بالا، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) یکان صفر باشد: بعد از یکان، صدگان و سپس دهگان را پر می‌کنیم. (البته اگر جای پرکردن صدگان و دهگان را عوض کنیم، اشکالی ندارد.)

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{۱,۲,۵,۷,۹}{\uparrow}}{۵}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\overset{\overset{\text{(در صدگان استفاده شده)}}{\uparrow}}{۱,۲,۵,۷,\cancel{۹}}}{\uparrow}{۴}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{\overset{۰}{\uparrow}}{۱}} = ۲۰$$

۲) یکان صفر نباشد (۵ باشد): در این‌جا بعد از پرکردن یکان باید سراغ خانهٔ محدودیت‌دار یعنی صدگان برویم (چون صدگان صفر نمی‌تواند باشد) و بعد سراغ دهگان برویم:

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{۱,۲,۷,۹}{\uparrow}}{۴}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\overset{\overset{\text{(در صدگان استفاده شده)}}{\uparrow}}{۰,۱,۲,۷,\cancel{۹}}}{\uparrow}{۴}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{۱}} = ۱۶$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: ۳۶ = ۱۶ + ۲۰

تست با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷ چند عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۲، با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰ $\quad$ ۲) ۶۸ $\quad$ ۳) ۷۲ $\quad$ ۴) ۸۰

پاسخ ۲ یکان عدد بخش‌پذیر بر ۲، عددی زوج است. ارقام زوجمان این‌جا ۰، ۲، ۴ و ۶ هستند.

به دو حالت، تقسیم می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد: اول یکان، بعد صدگان و در آخر دهگان را پر می‌کنیم (البته اگر جای پرکردن دهگان و صدگان را عوض کنیم، اشکالی ندارد).

(در صدگان استفاده شده)

۱,۲,۴,۶,۷ ‏ ‏ ۱,۲,۴,۶,~~۷~~ ‏ ‏ ۰

$\underset{\text{صدگان}}{۵} \times \underset{\text{دهگان}}{۴} \times \underset{\text{یکان}}{۱} = ۲۰$

۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ یا ۶ باشد): این‌جا باید اول یکان (محدودیت زوج‌بودن)، بعد صدگان (محدودیت صفرنبودن) و سپس دهگان (بدون محدودیت) را پر کنیم:

(در یکان استفاده شده) ‏ ‏ (در صدگان استفاده شده)

۱,۲,۴,~~۶~~,۷ ‏ ‏ ۰,۱,۲,۴,~~۶~~,~~۷~~ ‏ ‏ ۲,۴,۶

$\underset{\text{صدگان}}{۴} \times \underset{\text{دهگان}}{۴} \times \underset{\text{یکان}}{۳} = ۴۸$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $۲۰+۴۸=۶۸$

فاکتوریل

حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با $n!$ نشان می‌دهیم و آن را «n فاکتوریل» می‌خوانیم:

$$۱\times۲\times۳\times\cdots\times n=n!$$

معمولاً $۱!$ تا $۶!$ را حفظ می‌کنند:

$۱!=۱$

$۲!=۱\times۲=۲$

$۳!=۱\times۲\times۳=۶$

$۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$

$۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$

$۶!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۷۲۰$

نکات

۱) قرارداد می‌کنیم که «صفر فاکتوریل» برابر «یک» است. $۰!=۱$

۲) $n!=n\times(n-۱)!=n\times(n-۱)\times(n-۲)!=\cdots$

برای نکتهٔ بالا یک مثال هم بزنیم تا بهتر جا بیافتد:

$$۱۴!=۱۴\times۱۳!=۱۴\times۱۳\times۱۲!=۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱!=\cdots$$

تست حاصل عبارت $\dfrac{۱۱!-۱۰!}{۱۱!+۱۰!}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۰}{۱۱}$ ‏ ۲) $\dfrac{۹}{۱۰}$ ‏ ۳) $\dfrac{۹}{۱۱}$ ‏ ۴) $\dfrac{۵}{۶}$

پاسخ ۴ جای $۱۱!$ می‌توانیم $۱۱\times۱۰!$ بنویسیم:

$$\frac{۱۱!-۱۰!}{۱۱!+۱۰!}=\frac{(۱۱\times۱۰!)-۱۰!}{(۱۱\times۱۰!)+۱۰!}$$

در صورت و مخرج از $۱۰!$، فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\cancel{۱۰!}\,(۱۱-۱)}{\cancel{۱۰!}\,(۱۱+۱)}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۵}{۶}$$

تست حاصل عبارت $\dfrac{(n+۱)!}{n!}+\dfrac{n!}{(n-۲)!}$ کدام است؟

۱) $n^۲-۱$ ‏ ۲) $n^۲+۱$ ‏ ۳) $n^۲+n-۱$ ‏ ۴) $n^۲+n+۱$

پاسخ ۲ دوتا کسر را جداگانه ساده می‌کنیم.

ترتیب اعداد از ۱ تا n را ببینید: $۱,۲,۳,\ldots,n-۳,n-۲,n-۱,n$

n و $n-۲$، دو شماره با هم فاصله دارند و $n!$ نسبت به $(n-۲)!$ دو عدد $n-۱$ و n را بیشتر دارد، پس:

$$\frac{n!}{(n-۲)!}=(n-۱)\times n=n^۲-n$$

این بار ترتیب اعداد از ۱ تا $n+۱$ را ببینید: $۱,۲,۳,\ldots,n-۲,n-۱,n,n+۱$

$n+۱$ و n، یک شماره با هم فاصله دارند و $(n+۱)!$ نسبت به $n!$، عدد $n+۱$ را بیشتر دارد، پس:

$$\frac{(n+۱)!}{n!}=n+۱$$

پس حاصل کل عبارت برابر است با: $(n^۲-\cancel{n})+(\cancel{n}+۱)=n^۲+۱$

به عبارت دیگر:

$$\frac{n!}{(n-۲)!}+\frac{(n+۱)!}{n!}=\frac{n\times(n-۱)\times\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}+\frac{(n+۱)\times\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=n(n-۱)+n+۱=n^۲-\cancel{n}+\cancel{n}+۱=n^۲+۱$$

جایگشت

هر یک از راه‌های ممکن قرارگرفتن n شیء متمایز کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا است.
برای مثال یکی از راه‌های ممکن برای کنار هم قرارگرفتن ۴ حرف A، B، C و D، به صورت DBAC است که به آن یک جایگشت از آن ۴ حرف می‌گوییم.
یک مثال دیگر هم ببینید:

علی، ایمان و کوشا می‌خواهند در یک ردیف شامل ۳ صندلی بنشینند. هر یک از راه‌های قرارگرفتن این ۳ نفر کنار هم را یک جایگشت از این ۳ نفر می‌گوییم.
حالا می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های این ۳ نفر را بشماریم؛ یعنی می‌خواهیم بدانیم این ۳ نفر به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند. این کار شامل ۳ مرحله است:

$$\underset{\text{صندلی سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی اول}}{\underline{\quad}}$$

در مرحلهٔ اول باید یکی را در صندلی اول بنشانیم. این کار ۳ حالت دارد (علی یا ایمان یا کوشا):

$$\underset{\text{صندلی سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی اول}}{\underline{۳}}$$

در مرحلهٔ دوم باید یکی از ۲ نفر باقی‌مانده را در صندلی دوم بنشانیم، پس این کار ۲ حالت دارد:

$$\underset{\text{صندلی سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی دوم}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{صندلی اول}}{\underline{۳}}$$

در مرحلهٔ سوم باید تنها فرد باقی‌مانده را در صندلی سوم بنشانیم، پس این کار ۱ حالت دارد:

$$۶ = ۳! = \underset{\text{صندلی سوم}}{\underline{۱}} \times \underset{\text{صندلی دوم}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{صندلی اول}}{\underline{۳}}$$

یک بار این ۶ حالت را ببینید:

صندلی سوم	صندلی دوم	صندلی اول
کوشا	ایمان	علی
ایمان	کوشا	علی
کوشا	علی	ایمان
علی	کوشا	ایمان
ایمان	علی	کوشا
علی	ایمان	کوشا

تعداد جایگشت ۳ نفر برابر با !۳ شد، پس به همین روال می‌توانیم نکتهٔ پایین را نتیجه بگیریم.

نکته تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز کنار هم برابر با !n است.

تست تعداد جایگشت‌های چند شیء متمایز برابر با ۱۲۰ است. اگر یک شیء به آن‌ها اضافه شود، تعداد جایگشت‌های آن‌ها چند واحد افزایش می‌یابد؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۰۰

پاسخ ۳ تعداد اشیای اولیه را n می‌گیریم. تعداد جایگشت این n شیء، !n می‌شود که باید برابر با ۱۲۰ قرار دهیم: $n! = ۱۲۰$
می‌دانیم !۵ برابر با ۱۲۰ است، پس $n = ۵$.
حالا یک شیء به آن‌ها اضافه می‌کنیم و تعداد اشیا ۶تا می‌شود. تعداد جایگشت این ۶ شیء برابر است با: $۶! = ۷۲۰$
پس تعداد جایگشت‌ها در این حالت، $۷۲۰ - ۱۲۰ = ۶۰۰$ تا بیشتر می‌شود.

تذکر تمام سؤال‌های جایگشت را با اصل ضرب نیز می‌توانیم حل کنیم.

تست به چند طریق، با ۵ نفر می‌توان یک صف تشکیل داد؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴

پاسخ ۳ **راه I** می‌خواهیم ۵ نفر را کنار هم قرار دهیم، یعنی تعداد جایگشت‌های ۵ نفر را می‌خواهیم که می‌شود: $۵! = ۱۲۰$

راه II با یک کار ۵مرحله‌ای روبه‌رو هستیم:

$$\underset{\text{نفر پنجم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{نفر سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{نفر دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{نفر اول}}{\underline{\quad}}$$

برای جایگاه نفر اول صف، ۵ انتخاب داریم (۵ نفر). برای جایگاه نفر دوم، ۴ انتخاب داریم و این روال تا جایگاه پنجم ادامه دارد که برای آن، فقط ۱ نفر می‌ماند:

$$۱۲۰ = ۵! = \underset{\text{نفر پنجم}}{\underline{۱}} \times \underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{نفر سوم}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{نفر دوم}}{\underline{۴}} \times \underset{\text{نفر اول}}{\underline{۵}}$$

تبدیل (جایگشت‌های r شیء از بین n شیء متمایز)

یک گروه ۵نفره را در نظر بگیرید: «علی، رضا، محمد، حسین و نیما»

اگر بخواهیم با این ۵ نفر، یک صف ۵نفره تشکیل دهیم، تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{نفراول}}{۵}\times\underset{\text{نفردوم}}{۴}\times\underset{\text{نفرسوم}}{۳}\times\underset{\text{نفرچهارم}}{۲}\times\underset{\text{نفرپنجم}}{۱}=۵!=۱۲۰$

در واقع تعداد جایگشت‌های ۵ نفر را نوشتیم (جایگشت ۵ شیء از بین ۵ شیء).

حالا اگر بخواهیم با این ۵ نفر، یک صف ۳نفره تشکیل دهیم، تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{نفراول}}{۵}\times\underset{\text{نفردوم}}{۴}\times\underset{\text{نفرسوم}}{۳}=۶۰$

در این‌جا ما جایگشت‌های ۳ شیء از بین ۵ شیء را حساب کردیم که به آن **تبدیل** می‌گوییم.

فرق جایگشت با تبدیل: اگر تمام n شیء را بخواهیم کنار هم قرار دهیم، با جایگشت طرفیم و اگر تعدادی از آن‌ها (مثلاً r تا) را بخواهیم کنار هم قرار دهیم، با تبدیل (جایگشت r شیء از n شیء) طرفیم.

نکته تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز را با P(n,r) نشان می‌دهیم و می‌توانیم آن را از رابطهٔ زیر به دست آوریم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

در مثال قبل که قرار بود با ۵ نفر، یک صف ۳نفره تشکیل دهیم، می‌توانستیم از رابطهٔ بالا استفاده کنیم:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{\cancel{۱\times۲}\times۳\times۴\times۵}{\cancel{۱\times۲}}=۶۰$$

تست تعداد جایگشت‌های ۴حرفی از حروف کلمهٔ «gandomi» کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) !۷ ۳) ۸۴۰ ۴) $P(۷,۳)$

پاسخ ۳ **راه I** کلمهٔ «gandomi» از ۷ حرف ساخته شده است.

ما تعداد جایگشت‌های ۴حرفی از ۷ حرف را می‌خواهیم:

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۸۴۰$$

راه II در کل ۷ حرف داریم و می‌خواهیم با آن‌ها یک کلمهٔ ۴حرفی بسازیم:

$$\underset{\text{حرف‌اول}}{\underline{\quad}}\times\underset{\text{حرف‌دوم}}{\underline{\quad}}\times\underset{\text{حرف‌سوم}}{\underline{\quad}}\times\underset{\text{حرف‌چهارم}}{\underline{\quad}}$$

برای حرف اول ۷ انتخاب، برای حرف دوم ۶ انتخاب و برای حرف سوم و چهارم به ترتیب ۵ و ۴ انتخاب داریم:

$$\underset{\text{حرف‌اول}}{۷}\times\underset{\text{حرف‌دوم}}{۶}\times\underset{\text{حرف‌سوم}}{۵}\times\underset{\text{حرف‌چهارم}}{۴}=۸۴۰$$

بعضی وقت‌ها، سؤال‌ها مستقیماً با فرمول $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ کار دارند.

تست مقدار عبارت $\frac{P(۸,۳)}{P(۹,۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

پاسخ ۴ صورت و مخرج را جداگانه ساده می‌کنیم:

صورت: $P(۸,۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}}=۶\times۷\times۸$

مخرج: $P(۹,۲)=\frac{۹!}{(۹-۲)!}=\frac{۹!}{۷!}=\frac{۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۸\times۹$

پس حاصل کل کسر برابر است با:

$$\frac{\overset{۲}{\cancel{۶}}\times۷\times\overset{۱}{\cancel{۸}}}{\underset{۱}{\cancel{۸}}\times\underset{۳}{\cancel{۹}}}=\frac{۱۴}{۳}$$

تست در معادلهٔ $P(n,۲)+P(n+۱,۱)=۵۰$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ ۱ طبق رابطهٔ $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ ، هر دو عبارت را ساده می‌کنیم:

- $P(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n\times(n-۱)\times\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=n\times(n-۱)=n^۲-n$
- $P(n+۱,۱)=\frac{(n+۱)!}{(n+۱-۱)!}=\frac{(n+۱)!}{n!}=\frac{(n+۱)\times\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=n+۱$

دو عبارت به دست آمده را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P(n,۲)+P(n+۱,۱)=۵۰\Rightarrow(n^۲-\cancel{n})+(\cancel{n}+۱)=۵۰\Rightarrow n^۲+۱=۵۰\Rightarrow n^۲=۴۹\Rightarrow n=\pm۷$$

n نمی‌تواند منفی باشد، پس: $n=۷$

جایگشت‌های مشروط

بعضی وقت‌ها از ما تعداد جایگشت‌های چند شیء را می‌خواهند اما شروطی هم می‌گذارند. مثلاً می‌گویند فلان چیز در فلان جا باشد یا فلان چیز در فلان جا نباشد یا فلان چیزها کنار هم باشند یا ...

در این‌جا چند تیپ معروف این سؤال‌ها را با هم بررسی می‌کنیم:

۱. فلان چیز در فلان جا باشد (یا نباشد)!

فرض کنید می‌خواهیم با حروف A، B، C و D یک کلمهٔ ۴حرفی بنویسیم به طوری که حرف B، حرف اول باشد. خُب تکلیف حرف اول معلوم است:

$$\underset{\text{اول}}{\overset{\overset{B}{\uparrow}}{1}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}}$$

سه حرف باقی‌مانده یعنی A، C و D را در سه خانهٔ بعدی می‌چینیم:

$$\underset{\text{اول}}{\overset{\overset{B}{\uparrow}}{1}} \times \underset{\text{دوم}}{\overset{\overset{A,C,D}{\uparrow}}{3}} \times \underset{\text{سوم}}{\overset{\overset{A,C,\cancel{D}}{\uparrow}}{2}} \times \underset{\text{چهارم}}{\overset{\overset{A,\cancel{C},\cancel{D}}{\uparrow}}{1}} = 6$$

در این مدل سؤال‌ها، ترتیب پرکردن خانه‌ها این‌جوری است:

۱) خانه‌هایی که باید فلان شیء یا ... در آن‌ها باشد.

۲) خانه‌هایی که باید فلان شیء یا ... در آن‌ها نباشد.

۳) خانه‌های بدون شرط

تذکر | اگر دقت کنید این همان نکته‌ای است که در اصل ضرب گفتیم؛ اول خانه‌های دارای محدودیت را پر می‌کنیم، بعد می‌رویم سراغ خانه‌های بدون محدودیت.

تست | با ۵ نفر می‌خواهیم یک صف تشکیل دهیم. در چند حالت علی در انتهای صف است و امیر نفر دوم نیست؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ | ۳ ۵ نفر به صورت روبه‌رو داریم: علی، امیر، A، B، C و ۵ جای خالی برای قرارگرفتن آن‌ها در صف:

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{پنجم}}{\underline{\quad}}$$

۱) علی باید در انتهای صف باشد:

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{پنجم}}{\overset{\overset{\text{علی}}{\uparrow}}{1}}$$

۲) امیر نباید نفر دوم باشد:

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دوم}}{\overset{\overset{A,B,C}{\uparrow}}{3}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{پنجم}}{\overset{\overset{\text{علی}}{\uparrow}}{1}}$$

۳) برای ۳ خانهٔ باقی‌مانده، سه نفر مانده‌اند (امیر، A و B):

$$\underset{\text{اول}}{\overset{\overset{A,B,\text{امیر}}{\uparrow}}{3}} \times \underset{\text{دوم}}{\overset{\overset{A,B,C}{\uparrow}}{3}} \times \underset{\text{سوم}}{\overset{\overset{A,B,\cancel{\text{امیر}}}{\uparrow}}{2}} \times \underset{\text{چهارم}}{\overset{\overset{A,\cancel{B}}{\uparrow}}{1}} \times \underset{\text{پنجم}}{\overset{\overset{\text{علی}}{\uparrow}}{1}} = 18$$

۲. فلان چیزها کنار هم باشند (بسته‌بندی)

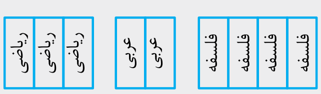
در این سؤال‌ها از ما می‌خواهند بعضی از اشیا کنار هم باشند که خودش دو حالت دارد:

۱) اشیایی که قرار است کنار هم باشند، مثل هم باشند.

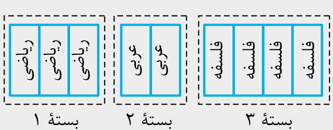
۲) اشیایی که قرار است کنار هم باشند، متمایز باشند.

از هر کدام یک مثال می‌زنیم:

۱) فرض کنید می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی یکسان، ۲ کتاب عربی یکسان و ۴ کتاب فلسفهٔ یکسان را در قفسه، کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند؛ این‌جوری:



چیزهایی که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم:



اول جایگشت بسته‌ها را حساب می‌کنیم: $3!$

حالا به داخل هر بسته می‌رویم و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم. از آن‌جایی که داخل هر بسته، اشیای یکسانی داریم، پس فقط یک جایگشت دارند و جابه‌جاشدنشان حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند. (۳تا کتاب ریاضی یکسان را ۳تا عدد یکسان مثلاً ۴ در نظر بگیرید. با این ۳تا ۴ فقط یک عدد ۳رقمی می‌توانیم بنویسیم که آن هم ۴۴۴ است و جابه‌جاکردن ۴ها، عدد جدیدی به ما نمی‌دهد.)

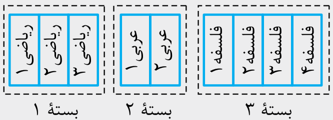
پس جواب نهایی برابر است با:

جایگشت بسته‌ها ، جایگشت داخل بستهٔ ۲

$$\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times \underbrace{۱}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}} \times \underbrace{۱}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۲}} \times \underbrace{۱}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۳}} = ۶$$

جایگشت داخل بستهٔ ۱ ، جایگشت داخل بستهٔ ۳

۲) حالا همان مثال بالا را با کتاب‌های متمایز در نظر بگیریم. برای آن‌که متمایزبودن کتاب‌ها مشخص باشد، برایشان شماره می‌زنیم.



چیزهایی که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم:

اول جایگشت بسته‌ها را حساب می‌کنیم: !۳

حالا به داخل هر بسته می‌رویم و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

- بستهٔ ۱: جایگشت ۳ کتاب ریاضی، !۳ حالت دارد.
- بستهٔ ۲: جایگشت ۲ کتاب عربی، !۲ حالت دارد.
- بستهٔ ۳: جایگشت ۴ کتاب فلسفه، !۴ حالت دارد

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}} \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۲}} \times \underbrace{۴!}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۳}} = ۶ \times ۶ \times ۲ \times ۲۴ = ۱۷۲۸$$

تست ۱ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ BEHZAD، حروف A ،B و D کنار هم قرار دارند؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰

پاسخ ۲ حروف A ،B و D را در یک بسته قرار می‌دهیم و ۳ حرف دیگر را جداگانه می‌نویسیم:

$\boxed{B,A,D}$, $\boxed{E}$, $\boxed{H}$, $\boxed{Z}$

بستهٔ ۱ ، بستهٔ ۲ ، بستهٔ ۳ ، بستهٔ ۴

الان ۴تا شیء داریم و تعداد جایگشت‌های آن‌ها، !۴ است.

سه حرف داخل بستهٔ (۱) نیز می‌توانند جابه‌جا شوند. تعداد جایگشت‌های این ۳ حرف، !۳ است. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{۴!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}} = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

حواستان به فرق تست قبل با این تست باشد!

تست ۱ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ BEHZAD، عبارت «BAD» وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۱۴۴

پاسخ ۲ عبارت BAD را در یک بسته و ۳ حرف دیگر را جداگانه می‌نویسیم:

$\boxed{BAD}$, $\boxed{E}$, $\boxed{H}$, $\boxed{Z}$

بستهٔ ۱ ، بستهٔ ۲ ، بستهٔ ۳ ، بستهٔ ۴

تفاوت این تست با تست قبل این است که چون می‌خواهیم عبارت «BAD» در کلمه‌مان باشد، پس داخل بستهٔ $\boxed{BAD}$ جایگشت نداریم؛ یعنی این ۳ حرف به همین شکل باید کنار هم باشند. در نتیجه فقط جایگشت ۴ بسته را باید حساب کنیم: ۲۴ = !۴

تست ۱ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «shahrab»، حروف مشابه کنار هم قرار دارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۸۰

پاسخ ۲ حروف مشابه را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$\boxed{a,a}$, $\boxed{h,h}$, $\boxed{s}$, $\boxed{r}$, $\boxed{b}$

بستهٔ ۱ ، بستهٔ ۲ ، بستهٔ ۳ ، بستهٔ ۴ ، بستهٔ ۵

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشت‌شان !۵ می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌ها یکسان است، پس جابه‌جایی حروف داخل هر بسته، حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند. در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{۵!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times \underbrace{۱}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}} \times \underbrace{۱}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۲}} = ۱۲۰$$

۳. یکی درمیان قرارگرفتن اعضای ۲ گروه

این سؤال‌ها برای ما در دو قالب پرسیده می‌شوند؛ یا تعداد اعضای دو گروه برابر است یا یکی از آن‌ها یک عضو بیشتر دارد.

(۱) حالتی که تعداد اعضای یکی از گروه‌ها، یک عضو بیشتر از گروه دیگر است.

مثال می‌خواهیم با ۴ دکتر و ۳ مهندس، یک صف ۷نفره بسازیم به طوری که دکترها و مهندس‌ها یکی در میان در صف باشند. چون تعداد دکترها یک نفر بیشتر است، پس شروع صف باید با دکترها باشد.

در کل ۷تا جایگاه داریم و نحوهٔ پرشدن آن‌ها باید این‌شکلی باشد: دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر

جایگاه دکترها ربطی به جایگاه مهندس‌ها ندارد. این جمله رو می‌تونیم حذف کنیم

دکترها در جایگاه مربوط به خودشان، به !۴ حالت و مهندس‌ها در جایگاه مربوط به خودشان به !۳ حالت می‌توانند قرار گیرند:

دکتر ۱ × مهندس ۱ × دکتر ۲ × مهندس ۲ × دکتر ۳ × مهندس ۳ × دکتر ۴

در نتیجه تعداد کل حالات قرارگرفتن آن‌ها برابر است با:

$$\underbrace{4!}_{\text{دکترها}}\times\underbrace{3!}_{\text{مهندس‌ها}}=24\times6=144$$

نکته اگر بخواهیم n نفر از گروه اول و $n+1$ نفر از گروه دوم را در یک صف، یکی در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات برابر با $n!\times(n+1)!$ می‌شود.

(۲) حالتی که تعداد اعضای دو گروه برابر است.

مثال می‌خواهیم ۳ دکتر و ۳ مهندس را یکی‌درمیان، در یک صف کنار هم قرار دهیم.

چون تعداد دکترها و مهندس‌ها برابر است، پس نفر اول صف می‌تواند هم از دکترها باشد و هم از مهندس‌ها.

یعنی یکی از دو حالت روبه‌رو را داریم:

مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر

دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس

در حالت اول ۳ جایگاه برای ۳ دکتر داریم که تعداد جایگشت آن‌ها !۳ است؛ هم‌چنین ۳ جایگاه برای ۳ مهندس داریم که تعداد جایگشت آن‌ها هم !۳ می‌شود، یعنی تعداد کل حالت‌های اولی می‌شود !۳×!۳.

حالت دوم هم مشابه حالت اول است و همان !۳×!۳ می‌شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{2}_{\text{شروع می‌تواند با دکتر یا مهندس باشد}}\times\overbrace{3!}^{\text{جایگشت دکترها}}\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت مهندس‌ها}}$$

نکته اگر بخواهیم n نفر از گروه اول و n نفر از گروه دوم را در یک صف، یکی در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات برابر با $2\times n!\times n!$ می‌شود.

جایگشت با تکرار (خارج از کتاب)

تا الان یاد گرفتیم که با حروف A، B، C و D چند جایگشت ۴حرفی داریم (که می‌شد !۴).

حالا می‌خواهیم ببینیم با حروف A، A، B و C چند جایگشت ۴حرفی داریم.

اول فرض می‌کنیم که ۴تا حرف متمایزند که جایگشتشان می‌شود !۴.

الان باید جایگشت‌های اضافه‌ای که شمردیم را حذف کنیم.

ما جابه‌جایی A و A را در !۴ حساب کرده‌ایم که کار درستی نیست، چون از جابه‌جایی دو حرف یکسان، کلمهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود. برای همین !۴ را باید به !۲ (جایگشت‌های ۲تا A) تقسیم کنیم: $\frac{4!}{2!}$

جواب درست همین است: $\frac{4!}{2!}$

نکته این نکته را با یک مثال بیان می‌کنیم تا رابطه بهتر در ذهنتان بماند. فرض کنید با حروف a، a، a، b، b، c و d می‌خواهیم یک کلمهٔ ۷حرفی بنویسیم. تعداد حالات این‌جوری حساب می‌شود:

$$\frac{\overset{\text{تعداد کل حروف}}{7!}}{\underset{\text{تعداد تکرار a}}{3!}\ \underset{\text{تعداد تکرار b}}{2!}}$$

تست | **ارقام عدد ۲۳۳۴۵۸، چند جایگشت شش‌تایی دارند؟**

۱) $۵!$ ۲) $۵!\times۲!$ ۳) $\frac{۶!}{۲!}$ ۴) $۶!$

پاسخ ۳ | تعداد کل ارقام ۶تا است (۲، ۳، ۳، ۴، ۵ و ۸)، پس صورت کسر $۶!$ است.

از رقم ۳، دوتا داریم، پس در مخرج $۲!$ داریم.

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۶!}{۲!}$

تست | **با حروف کلمهٔ «google» چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت؟**

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

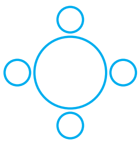
پاسخ ۲ | تعداد کل حروف ۶تا است (g، g، o، o، l و e)، پس صورت کسر $۶!$ است.

۲تا g و ۲تا o داریم، پس در مخرج $۲!\times۲!$ داریم.

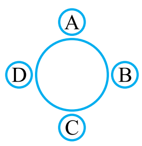
در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۶!}{۲!۲!}=\frac{۷۲۰}{۴}=۱۸۰$

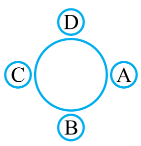
جایگشت دوری (خارج از کتاب)

فرض کنید ۴ نفر را می‌خواهیم دور یک میز گرد بنشانیم:



در مسائل مربوط به میز گرد، دو حالت روبه‌رو فرقی با هم ندارند:





چون در هر کدام اگر از A در جهت ساعتگرد حرکت کنیم به ترتیب A، B، C و D را داریم.

این به این معنی است که جایگاه نفر اول مهم نیست.

پس اگر n نفر داشته باشیم، تعداد حالت قرارگرفتنشان دور یک میز گرد، $(n-۱)!$ می‌شود.

تست | **۷ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند؟**

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۵۰۴۰

پاسخ ۲ | ۷ نفر به $(۷-۱)!$، یعنی $۶!$ دور یک میز گرد قرار می‌گیرند: $۶!=۷۲۰$

ترکیب (انتخاب)

در جایگشت‌ها، ترتیب اشیا یا افراد مهم است. یعنی مهم است که هر فرد یا هر شیء در کدام جایگاه قرار می‌گیرد. برای مثال جایگشت «علی، رضا و حسین» یک جایگشت ۳تایی از بین «رضا، محمد، نیما، علی و حسین» است. در این جایگشت، جاها مهم است؛ یعنی جایگشت «علی، رضا و حسین» با جایگشت «رضا، حسین و علی» متفاوت است، اگرچه نفراتشان با هم یکی است.

اما ترکیب یا انتخاب، داستان دیگری دارد ...

ترکیب، انتخابی از اشیاست که در آن، ترتیب مهم نیست. در واقع تفاوت ترکیب با تبدیل (جایگشت r شیء از n شیء متمایز) در این است که ترتیب در ترکیب مهم نیست ولی در تبدیل مهم است. مثلاً در ترکیب، دو گروه «علی، رضا و حسین» و «رضا، حسین و علی» فرقی با هم ندارند.

تعداد راه‌های ترکیب (انتخاب) r شیء از بین n شیء متمایز که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها برایمان مهم نیست را با $C(n,r)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

چند مثال ببینید:

مثال ۱) تعداد حالت‌های انتخاب ۳ دانش‌آموز از بین ۵ دانش‌آموز:

$$C(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!۳!}=\frac{۵!}{۲!۳!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{۲\times\cancel{۳!}}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

۲) تعداد حالت‌های انتخاب یک گروه ۴نفری از بین ۱۰ نفر:

$$C(۱۰,۴)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!۴!}=\frac{۱۰!}{۶!۴!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times۴!}=\frac{۱۰\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\cancel{۸}\times۷}{\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۲۱۰$$

۳) تعداد حالت‌های انتخاب یک تیم ۶نفره از بین ۷ نفر:

$$C(۷,۶)=\frac{۷!}{(۷-۶)!۶!}=\frac{۷!}{۱!۶!}=\frac{۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}}=۷$$

نکات

۱) وقتی می‌نویسیم $C(n,r)$، n تعداد کل افراد و r تعداد افرادی است که می‌خواهیم انتخابشان کنیم.

تعدادی که می‌خواهیم انتخاب کنیم
$C(n,r)$
تعداد کل

۲) عبارت $C(n,r)$ را جور دیگری هم می‌نویسند:

$C(n,r)=C_r^n=\binom{n}{r}$

یعنی جای $C(۵,۲)$، می‌نویسیم $\binom{۵}{۲}$.

تست از بین ۱۲ نفر می‌خواهیم یک گروه ۳نفری انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۲۲۰

پاسخ ۴ چون جایگاه ۳ نفر مهم نیست، پس با ترکیب یا انتخاب طرفیم.

تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۱۲ نفر برابر است با:

$$\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!۳!}=\frac{۱۲!}{۹!۳!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times\cancel{۹!}}{\cancel{۹!}۳!}=\frac{\cancel{۱۲}^{۲}\times۱۱\times۱۰}{\cancel{۶}_{۱}}=۲۲۰$$

تست به چند طریق می‌توانیم از بین ۹ نفر، یک تیم ۳نفری انتخاب کنیم به طوری که علی حتماً در این تیم باشد ولی رضا در این تیم نباشد؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

پاسخ ۱ قرار است تیم ما ۳نفری باشد. علی که حتماً باید در این تیم باشد، یعنی تیم ما ۲تا جای خالی دارد: ○، ○، علی

از این ۹ نفر، علی که انتخاب شده و رضا هم نباید در تیم باشد، پس می‌ماند ۷ نفر.

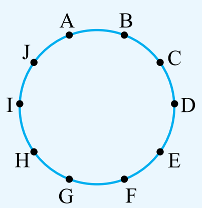
حالا از این ۷ نفر باید ۲ نفر انتخاب کنیم تا تیم تکمیل شود:

$$\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۵!۲!}=\frac{۷\times\cancel{۶}^{۳}\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\,\cancel{۲}_{۱}}=۲۱$$

نکته اگر n نقطه داشته باشیم که هیچ ۳تایی از آن‌ها روی یک خط قرار نداشته باشند (مثلاً همهٔ نقطه‌ها روی محیط یک دایره باشند)، تعداد پاره‌خط‌ها و تعداد مثلث‌هایی که با آن‌ها می‌توانیم بسازیم برابر است با:

تعداد مثلث‌ها $=\binom{n}{۳}$ تعداد پاره‌خط‌ها $=\binom{n}{۲}$

تست با نقاط روی محیط دایرهٔ روبه‌رو، K پاره‌خط و M مثلث می‌توانیم بسازیم. مقدار $M+K$ کدام است؟



۱) ۱۳۵
۲) ۱۴۵
۳) ۱۵۵
۴) ۱۶۵

پاسخ ۴ ۱۰ نقطه روی محیط دایره داریم. طبق نکتهٔ بالا داریم:

تعداد پاره‌خط‌ها: $K=\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۸!۲!}=\frac{\cancel{۱۰}^{۵}\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}\times\cancel{۲}_{۱}}=۴۵$

تعداد مثلث‌ها: $M=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times۳!}=\frac{۱۰\times\cancel{۹}^{۳}\times\cancel{۸}^{۴}}{\cancel{۳}_{۱}\times\cancel{۲}_{۱}}=۱۲۰$

پس: $M+K=۱۲۰+۴۵=۱۶۵$

نکته تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

مثلاً در یک مجموعهٔ ۵عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی برابر با $\binom{۵}{۲}$ است.

تست تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

پاسخ ۳ مجموعهٔ A، دارای ۷ عضو است.

تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی آن را حساب می‌کنیم:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times۳!}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵}{\cancel{۶}}=۳۵$$

نکات

۱) انتخاب ۲ از n یعنی $\binom{n}{۲}$ زیاد در مسائل استفاده می‌شود که بعد از ساده‌کردنش به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}=\frac{\text{عدد قبلی‌اش}\times\text{عدد بالایی}}{۲}$$

مثلاً $\binom{۷}{۲}$ می‌شود ۷ ضرب در ۶ تقسیم بر ۲:

$$\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

۲) $\binom{n}{۱}=n$ و $\binom{n}{n}=۱$.

۳) اگر جمع دو عدد a و b برابر با n باشد، آن‌گاه $\binom{n}{b}=\binom{n}{a}$، مثلاً $\binom{۱۰}{۳}$ با $\binom{۱۰}{۷}$ برابر است.

تست تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی و تعداد زیرمجموعه‌های ۸عضوی یک مجموعه با هم برابر است. این مجموعه چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ ۲ فرض کنید مجموعهٔ مورد نظر n عضو دارد. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ و ۸ عضوی آن به ترتیب $\binom{n}{۴}$ و $\binom{n}{۸}$ می‌شود. سؤال گفته این دو با هم برابرند: $\binom{n}{۴}=\binom{n}{۸}$

طبق نکتهٔ بالا باید جمع ۴ و ۸ برابر با n باشد: $n=۴+۸=۱۲$

سؤال‌هایی با انتخاب‌های چندمرحله‌ای

بعضی وقت‌ها در سؤال باید چند بار انتخاب کنیم. در هر مرحله باید $\binom{n}{r}$ بنویسیم که در آن n، تعداد کل اشیا باقی‌مانده و r، تعداد اشیایی است که در آن مرحله می‌خواهیم انتخاب کنیم.

حالا اگر در جملهٔ مربوط به سؤال از «و» استفاده کردیم، بین انتخاب‌ها «**ضرب**» و اگر از «**یا**» استفاده کردیم، بین انتخاب‌ها «**جمع**» قرار می‌دهیم.

چند مثال با هم حل کنیم:

۱) بین انتخاب‌ها «یا» بیاید.

فرض کنید می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های ۲ یا ۳ عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸\}$ را پیدا کنیم.

مجموعهٔ A، ۸ عضو دارد.

تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی آن برابر است با:

$$\binom{۸}{۲}=\frac{\overset{\text{بالایی}}{۸}\times\overset{\text{قبلی}}{۷}}{۲}=۲۸$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی آن هم برابر است با:

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!۳!}=\frac{۸\times۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times\cancel{۶}}=۵۶$$

چون بین انتخاب‌ها «یا» آمده، پس تعداد حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ یا ۳ عضوی = (تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی) + (تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی) = ۲۸ + ۵۶ = ۸۴

۲) بین انتخاب‌ها «و» باشد.

فرض کنید می‌خواهیم از بین ۱۰ نفر، یک گروه ۳نفره و یک گروه ۴نفره انتخاب کنیم.

کارمان ۲ مرحله دارد:

اول از بین ۱۰ نفر، ۳ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times۳!}=\frac{۱۰\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۲۰$$

حالا از ۷ نفر باقی‌مانده، ۴ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۷}{۴}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times\cancel{۶}}=۳۵$$

چون بین انتخاب‌ها «و» داریم، باید تعداد حالت‌های مرحلهٔ اول را ضرب‌در تعداد حالت‌های مرحلهٔ دوم بکنیم:

$$\underbrace{\binom{۱۰}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر}}\times\overbrace{\binom{۷}{۴}}^{\text{انتخاب ۴ نفر از ۷ نفر}}=۱۲۰\times۳۵=۴۲۰۰$$

۳) انتخاب‌هایی که هم بین آن‌ها «و» باشد و هم «یا».

فرض کنید ۴ ایرانی و ۵ آلمانی در یک سالن هستند و می‌خواهیم از بین آن‌ها یک تیم ۳نفره انتخاب کنیم به طوری که از هر دو کشور در آن باشند.

الان دوتا حالت داریم: «۲ ایرانی و ۱ آلمانی» **یا** «۱ ایرانی و ۲ آلمانی»

به ریاضی می‌نویسیم:

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{انتخاب ۲ آلمانی از بین ۵ آلمانی}}\times\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{انتخاب ۱ ایرانی از بین ۴ ایرانی}}+\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{انتخاب ۱ آلمانی از بین ۵ آلمانی}}\times\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{انتخاب ۲ ایرانی از بین ۴ ایرانی}}$$

تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\left(\frac{5\times4}{2}\times4\right)+\left(5\times\frac{4\times3}{2}\right)=40+30=70$$

تست | از بین ۶ دانش‌آموز دوازدهمی، ۵ دانش‌آموز یازدهمی و ۴ دانش‌آموز دهمی، می‌خواهیم یک گروه ۶نفری انتخاب کنیم به طوری که تعداد دانش‌آموزان هر پایه در آن یکسان باشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۱۸۰۰

پاسخ ۲ | قرار است «۲ دانش‌آموز دوازدهمی» و «۲ دانش‌آموز یازدهمی» و «۲ دانش‌آموز دهمی» انتخاب کنیم. تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{6}{2}\times\binom{5}{2}\times\binom{4}{2}=\frac{6\times5}{2}\times\frac{5\times4}{2}\times\frac{4\times3}{2}=15\times10\times6=900$$

تست | می‌خواهیم از بین ۶ نقاش و ۵ خطاط، یک گروه ۴نفره انتخاب کنیم به طوری که حداقل ۲ نقاش در آن‌ها باشد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۲۶۵ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۳۴۰

پاسخ ۱ | می‌خواهیم در گروه ۴نفره، حداقل ۲ نقاش باشد، پس این حالت‌ها را داریم: «۲ نقاش و ۲ خطاط» **یا** «۳ نقاش و ۱ خطاط» **یا** «۴ نقاش»

$$\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}+\binom{5}{1}\times\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=\left(\frac{5\times4}{2}\times\frac{6\times5}{2}\right)+\left(5\times\frac{6!}{3!\,3!}\right)+\frac{\overset{6\times5}{\cancel{6!}}}{\cancel{4!}\,2!}$$

$$=(10\times15)+(5\times20)+15=150+100+15=265$$

مسئله‌های مربوط به فرمول ترکیب

بعضی وقت‌ها از خود فرمول $C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ به ما سؤال می‌دهند. البته ممکن است جای $C(n,r)$ از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده کنند.

تست | مقدار عددی عبارت $\frac{C(15,11)}{C(16,5)}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{16}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{4}{15}$ ۴) $\frac{8}{15}$

پاسخ ۱ | صورت و مخرج را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$C(15,11)=\frac{15!}{4!\,11!}=\frac{15\times14\times13\times12\times\cancel{11!}}{4!\times\cancel{11!}}=\frac{15\times14\times13\times12}{4!}$$

$$C(16,5)=\frac{16!}{11!\,5!}=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times\cancel{11!}}{\cancel{11!}\times5!}=\frac{16\times15\times14\times13\times12}{5!}$$

حالا دو کسر به دست آمده را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\dfrac{\overset{1}{\cancel{15\times14\times13\times12}}}{4!}}{\dfrac{16\times\cancel{15\times14\times13\times12}}{5!}}=\frac{5!}{4!\times16}=\frac{5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times16}=\frac{5}{16}$$

تست | مقدار n در تساوی $C(n,2)+P(2n,1)=27$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ ۳ | داشتیم $P(n,1)=n$ و $C(n,2)=\frac{n(n-1)}{2}$، پس:

$$C(n,2)+P(2n,1)=27\Rightarrow\frac{n(n-1)}{2}+2n=27$$

طرفین تساوی بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$n(n-1)+4n=54\Rightarrow n^2-n+4n-54=0\Rightarrow n^2+3n-54=0$$

با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$(n+9)(n-6)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-9\ \times\ (\text{n منفی نیست.})\\ n=6\ \checkmark\end{cases}$$

جمع‌بندی جایگشت، تبدیل و ترکیب در یک جدول

	تعریف	مصداق	نماد و رابطه
جایگشت	تعداد حالت‌های قرارگرفتن n شیء کنار هم	تشکیل صف nنفره با n نفر	$n!$
تبدیل	تعداد حالت‌های کنار هم قرارگرفتن r شیء از n شیء	تشکیل صف rنفره با n نفر	$P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
ترکیب	تعداد حالت‌های انتخاب r نفر از بین n نفر	تشکیل یک گروه rنفره از بین n نفر	$C(n,r)=\dbinom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس اول: شمارش

اصل جمع

۱- از بین ۱۰ کشور اروپایی، ۶ کشور آسیایی و ۳ کشور آمریکای شمالی می‌خواهیم یک کشور را برای سفر انتخاب کنیم. چند حالت برای سفر به این کشورها خواهیم داشت؟

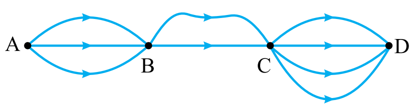
۱) ۱۱۰　۲) ۱۸۰　۳) ۱۹　۴) ۲۰

۲- به چند طریق می‌توانیم فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار آبی، قرمز، سبز، مشکی و نارنجی و ۸ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنیم؟

۱) ۱۲۰　۲) ۱۶　۳) ۱۶۰　۴) ۱۲

اصل ضرب

۳- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟



۱) ۹　۲) ۱۲

۳) ۱۸　۴) ۲۴

۴- فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۳ درس عمومی ارائه‌شده و ۱ درس اختصاصی از بین ۴ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۵　۲) ۷　۳) ۸　۴) ۱۲

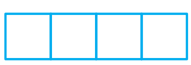
۵- یک کارخانهٔ تولید خودرو، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع داشبورد مختلف تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۴　۲) ۸۴　۳) ۲۸　۴) ۱۲۰

۶- یک تاس و ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد اول آمده کدام است؟

۱) ۴۰　۲) ۴۸　۳) ۲۴　۴) ۸۴

۷- می‌خواهیم شکل زیر که از ۴ مربع به هم چسبیده ساخته شده را با رنگ‌های قرمز، سبز، زرد و صورتی رنگ کنیم، به طوری که رنگ مربع‌های مجاور، مثل هم نباشد. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟



۱) ۲۴　۲) ۴۸　۳) ۷۲　۴) ۱۰۸

۸- یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره، چند بازی انجام شده است؟ (کتاب درسی)

۱) ۴۵　۲) ۹۰　۳) ۱۰۰　۴) ۱۸۰

۹- به چند طریق می‌توان به ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای پاسخ داد؟ (پاسخ به سؤالات الزامی است.)

۱) $۴^{۱۰}$　۲) $۱۰^{۴}$　۳) $۱۰^{۵}$　۴) $۵^{۱۰}$

۱۰- به چند طریق می‌توان به ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای پاسخ داد؟ (پاسخ به سؤالات الزامی نیست.)

۱) $۴^{۱۰}$　۲) $۱۰^{۴}$　۳) $۱۰^{۵}$　۴) $۵^{۱۰}$

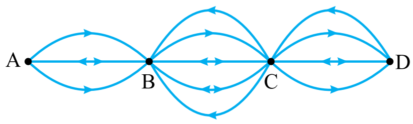
۱۱- در یک آزمون، ۹ سؤال اول چهارگزینه‌ای و ۱۰ سؤال بعدی دوگزینه‌ای هستند. اگر پاسخ‌دادن به تمام سؤالات الزامی باشد، یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به کل سؤالات پاسخ دهد؟

۱) $۲^{۲۴}$　۲) $۲^{۲۶}$　۳) $۲^{۲۸}$　۴) $۲^{۳۰}$

۱۲- تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ‌دادن به تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای برابر $(۱۲۵)^{۶}$ است. تعداد سؤالات، کدام گزینه است؟ (پاسخ‌دادن به سؤالات الزامی نیست.)

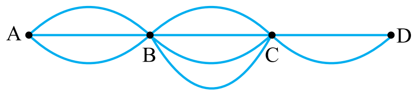
۱) ۱۶　۲) ۱۸　۳) ۲۱　۴) ۲۸

۱۳- بین ۴ شهر A، B، C و D مطابق شکل زیر، راه‌های ارتباطی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم؟ (حواستان به مسیرهای یک‌طرفه و دوطرفه باشد.)



۱) ۳۲۴ ۲) ۴۳۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۱۶

۱۴- با توجه به شکل زیر، به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم، به طوری که از هر جاده حداکثر یک بار بگذریم؟



۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۲

۱۵- علی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و تعدادی جوراب و کفش دارد. اگر علی برای استفاده از آن‌ها (یک پیراهن، یک شلوار، یک جوراب و یک کفش)، ۳۶۰ حالت متفاوت داشته باشد، مجموع تعداد جوراب‌ها و کفش‌های او کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

اصل ضرب (عددساختن)

۱۶- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۱۶

۱۷- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۶

۱۸- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۱۶

۱۹- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۸۰ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

۲۰- چند عدد ۵رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۲۱- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟ (خارج ۸۸)

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۰

۲۲- با ارقام مجموعهٔ {۲,۴,۶,۸,۹} چند عدد چهاررقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۲۳- با ارقام موجود در مجموعهٔ {۱,۲,۴,۶,۷,۸}، چند عدد پنج‌رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۲۴- چند عدد ۳رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟ (خارج ۹۱)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۵- چند عدد ۴رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است.) (کتاب درسی)

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۵۰۴ ۴) ۴۴۸

۲۶- چند عدد ۴رقمی طبیعی فرد وجود دارد که رقم هزارگان آن‌ها فرد نباشد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

۲۷- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که مضرب ۵ نباشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۵۰

۲۸- پلاک اتومبیل سواری در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{**\text{ب}***}$ می‌باشد که هر ستاره، نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

۲۹- چند عدد زوج چهاررقمی با ارقام متمایز داریم که تمام ارقام آن‌ها از ۳ بزرگ‌تر باشند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

۳۰- چند عدد ۳رقمی بدون رقم تکراری داریم که در آن‌ها ارقام ۳ و ۶ به کار نرفته است؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۲۹۴ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۶

۳۱- با ارقام ۰,۱,۴,۵,۸ چند عدد ۳رقمی مضرب ۱۰ و بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۶

۳۲- چند عدد ۳رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۳۶

۳۳- با ارقام ۱,۳,۵,۶,۷,۸ چند عدد ۵رقمی و بزرگ‌تر از ۵۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۰۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۳۸۰ ۴) ۲۸۰

۳۴- با تمام ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی، چند عدد ۵رقمی مضرب ۵ و بزرگ‌تر از ۷۰۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۴۸

۳۵- با ارقام ۰,۳,۴,۵,۶,۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ و کوچک‌تر از ۶۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام غیرمجاز است.)

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۰ ۴) ۸۰

۳۶- چند عدد سه‌رقمی کوچک‌تر از ۵۰۰ داریم که رقم‌هایش تکراری نیست؟

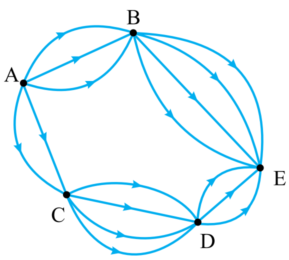
۱) ۲۸۸ ۲) ۲۹۴ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۶

۳۷- چند عدد سه‌رقمی بین ۳۰۰ و ۹۰۰ داریم که مجموع رقم یکان و دهگان آن‌ها، ۸ باشد؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

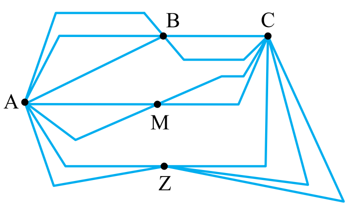
اصل جمع و اصل ضرب

۳۸- با توجه به نقشهٔ روبه‌رو، به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر E برویم؟



۱) ۳۰
۲) ۳۶
۳) ۴۲
۴) ۴۸

۳۹- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر M به شهر Z سفر کرد به طوری که از شهر B عبور نکنیم و به شهر M هم برنگردیم؟ (تمام مسیرها ۲طرفه هستند.)



۱) ۸ ۲) ۱۲
۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۴۰- علی می‌خواهد به مهمانی برود. او عادت دارد شلوار پارچه‌ای را با کت و شلوار جین را با پیراهن بپوشد. با توجه به جدول زیر، علی به چند طریق می‌تواند برای این مهمانی، لباس بپوشد؟

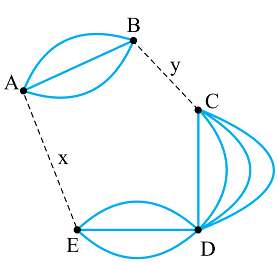
پیراهن	شلوار جین	کت	شلوار پارچه‌ای
۵تا	۶تا	۳تا	۴تا

۱) ۳۶ ۲) ۴۰
۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۴۱- نسترن می‌خواهد با ارقام ۱ تا ۶ و حروف A، B، C و D یک رمز ۳کاراکتری به شکل ☐☐☐ برای موبایلش بگذارد. در چند حالت رمز فقط شامل ارقام یا فقط شامل حروف است؟

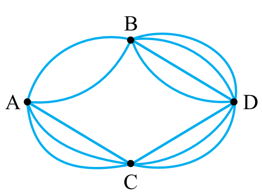
۱) ۲۵۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

۴۲- اگر تعداد راه‌ها از شهر A به E را با x و از شهر B به C را با y نمایش دهیم و فردی به ۲۴ حالت مختلف بتواند از A به D سفر کند، حاصل $x+y$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۴۳- در شکل زیر، به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و دوباره از D به A برگردیم، به طوری که در مسیر برگشت از جاده‌های مسیر رفت، عبور نکنیم؟



۱) ۲۰۰
۲) ۲۰۴
۳) ۲۰۸
۴) ۲۱۲

اصل جمع و اصل ضرب (عددساختن)

۴۴- با ارقام ۱ تا ۷، چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که ارقام آن یکی در میان، زوج و فرد باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۵۶ ۲) ۶۰ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۴۵- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز داریم که تمام ارقام آن زوج یا تمام آن‌ها فرد باشند؟

۱) ۸۴ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۴۶- در چند عدد ۴رقمی، رقم یکان و هزارگان هر دو فرد یا هر دو زوج هستند؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۲۰۰۶ ۲) ۲۰۱۶ ۳) ۲۰۲۶ ۴) ۲۰۳۶

۴۷- با ارقام صفر تا ۵، چند عدد زوج سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۲

۴۸- با ارقام ۰,۱,۳,۵,۶,۸ چند عدد زوج ۴رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۶۵

۴۹- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد مضرب ۵ سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۸ ۴) ۶۰

۵۰- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵، چند عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۵۱- چند عدد چهاررقمی زوج با ارقام متمایز داریم که شامل ۵ و ۹ نیستند؟

۱) ۹۱۰ ۲) ۹۲۰ ۳) ۹۳۰ ۴) ۹۴۰

۵۲- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که دقیقاً یک رقم آن زوج باشد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۰۰

۵۳- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد ۳رقمی بزرگ‌تر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

۵۴- با ارقام {۰,۲,۴,۵,۶,۸}، چند عدد ۴رقمی کوچک‌تر از ۵۵۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۵۴ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۵۰

۵۵- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد زوج سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ با ارقام متمایز می‌توانیم بنویسیم؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۵۶- با ارقام مجموعهٔ {۰,۱,۲,۳,۵,۷,۸}، چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۶۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۵۰

۵۷- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۴، چند عدد ۵رقمی می‌توانیم بنویسیم، به طوری که ارقام یکسان کنار هم باشند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۵۸- چند عدد ۴رقمی بدون ارقام تکراری داریم که دقیقاً ۳ رقم آن فرد باشد؟

۱) ۱۱۱۰ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۱۱۳۰ ۴) ۱۱۴۰

۵۹- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۶، ۷ و ۹، چند عدد زوج بدون تکرار ارقام، بین ۲۶۰۰ تا ۸۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۷۶ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۸۶ ۴) ۱۹۲

متمم

۶۰- با ارقام صفر تا ۶، یک عدد سه‌رقمی می‌نویسیم. در چند حالت در این عدد، رقم تکراری وجود دارد؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۱۴ ۴) ۱۱۶

۶۱- با حروف A، B، C، D، E و F، یک کلمهٔ چهارحرفی می‌نویسیم. در چند حالت حرف A در این کلمه وجود دارد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۶۲- در چند عدد سه‌رقمی، رقم ۸، حداقل یک بار به کار رفته است؟

۱) ۲۲۲ ۲) ۲۳۲ ۳) ۲۴۲ ۴) ۲۵۲

فاکتوریل

۶۳- حاصل عبارت $0! + 5! - 6!$ کدام است؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۰۱ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۸۱

۶۴- حاصل عبارت $\frac{13!}{12!}-\frac{10!}{8!}$ کدام است؟

۱) ۷۴　۲) ۷۵　۳) ۷۶　۴) ۷۷

۶۵- حاصل عبارت $\frac{26!+25!}{26!-25!}$ کدام است؟

۱) ۱/۰۲　۲) ۱/۰۴　۳) ۱/۰۶　۴) ۱/۰۸

۶۶- اگر $a=\underbrace{5!+5!+\cdots+5!}_{\text{۶ تا}}$ و $b=\frac{10!}{90}$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۷　۲) ۸　۳) ۴۲　۴) ۵۶

۶۷- چه تعداد از روابط زیر درست هستند؟ (n عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ است.)

الف) $3\times 4!=12!$　ب) $10!-3!=7!$　پ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n^2+n$

ت) $(0!)^2=(1!)^2$　ث) $\sqrt{9!}=3!$　ج) $n!=n(n-1)(n-2)!$

۱) ۴　۲) ۳　۳) ۲　۴) ۱

۶۸- اختلاف جواب‌های معادلهٔ $(x^2+x-2)!=24$ کدام است؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

۶۹- معادلهٔ $(x^2-4)!=1$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۷۰- حاصل عبارت $\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{n!}$ کدام است؟

۱) $2n$　۲) $2n-1$　۳) $2n+1$　۴) $2n+2$

۷۱- اگر $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=8$ باشد، حاصل $\frac{n!}{4!}$ کدام است؟

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۳۰　۴) ۴۲

۷۲- اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{6}$ باشد، حاصل $(n+2)!$ کدام است؟

۱) ۱۲۰　۲) ۶　۳) ۲۴　۴) ۷۲۰

۷۳- اگر $7!\times 6!=n!$ باشد، حاصل $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$ کدام است؟

۱) ۸　۲) ۹　۳) ۱۰　۴) ۱۱

جایگشت

۷۴- تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز کدام است؟

۱) ۲۵　۲) ۳۲　۳) ۶۰　۴) ۱۲۰

۷۵- تعداد جایگشت‌های $n-1$ شیء متمایز برابر با ۲۴ است. تعداد جایگشت $n+1$ شیء متمایز کدام است؟

۱) ۱۲۰　۲) ۲۴۰　۳) ۳۶۰　۴) ۷۲۰

۷۶- ۴ پزشک و ۲ روان‌شناس قرار است در یک مراسم سخنرانی کنند. این کار به چند طریق انجام‌پذیر است؟

۱) $4!2!$　۲) $6!$　۳) $8!$　۴) $4!+2!$

۷۷- ۱۲ دانش‌آموز به چند حالت می‌توانند در یک صف در حیاط مدرسه قرار گیرند؟

۱) $12\times 11!$　۲) $11!$　۳) $11\times 10!$　۴) $10!$

۷۸- اگر تعداد جایگشت‌های $n+2$ نفر، ۲۱۰ برابر تعداد جایگشت‌های $n-1$ نفر باشد، حاصل $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}$ کدام است؟

۱) ۵۶　۲) ۷۲　۳) ۹۰　۴) ۱۱۰

تبدیل (جایگشت r شیء از n شیء)

۷۹- تعداد جایگشت‌های ۳ شیء از ۵ شیء کدام است؟

۱) 5^3　۲) 3^5　۳) ۶۰　۴) ۳۰

۸۰- به چند طریق می‌توانیم با ۷ نفر، یک صف ۳نفره تشکیل دهیم؟

۱) $P(7,3)$　۲) $P(7,4)$　۳) $4!\times P(7,3)$　۴) $3!\times P(7,4)$

۸۱- ۳ مسافر به چند طریق می‌توانند در ۵ ایستگاه از اتوبوس پیاده شوند؟

۱) $P(۵,۳)$ ۲) $۳^{۵}$ ۳) $۵^{۳}$ ۴) $\frac{۵!}{۳!}$

۸۲- از ۱۲ دانش‌آموز نمونه، به چند روش می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه کار متمایز در مدرسه انتخاب کرد؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۲۲۰

۸۳- حاصل $\frac{۱۲!}{۸!}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $P(۸,۴)$ ۲) $P(۱۲,۸)$ ۳) $P(۱۱,۷)$ ۴) $P(۱۲,۴)$

۸۴- حاصل $\frac{P(۱۰,۲)}{P(۵,۱)}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۸۵- اگر $P(n+۱,n)=۶$ باشد، n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۶- اگر $P(n,۲)=۵۶$ باشد، n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۷- اگر $P(n+۲,۳)=۱۲n(n+۲)$ باشد، n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

جایگشت مشروط

۸۸- با حروف کلمهٔ «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با «ت» شروع و به «ح» ختم شوند؟ (کتاب درسی)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۸۹- با حروف کلمهٔ «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که حرف اول آن «م» نباشد؟ (کتاب درسی)

۱) ۸۰ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۹۰- با حروف کلمهٔ «ASSIST» چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان ساخت به طوری که همگی آن‌ها با «S» شروع و به «S» ختم شوند؟ (به‌جز حرف S بقیهٔ حروف حق تکرارشدن را ندارند.)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

۹۱- با حروف کلمهٔ DANESH چند رمز عبور چهارحرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۷۰

۹۲- می‌خواهیم ۵ کتاب زبان و ۴ کتاب ریاضی را در یک قفسه کنار هم قرار دهیم، به طوری که هیچ دو کتاب هم‌موضوعی، کنار هم نباشند. به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۱) $۹!$ ۲) $\frac{۹!}{۴!۵!}$ ۳) $(۴!)(۵!)$ ۴) $۲(۴!)(۵!)$

۹۳- تعداد جایگشت‌های ۶حرفی کلمهٔ «suarez» که در آن‌ها حروف صدادار و بی‌صدا یکی در میان قرار بگیرند، کدام است؟ (تکرار حروف غیرمجاز است.)

۱) ۴۲ ۲) ۷۲ ۳) ۶۴ ۴) ۸۲

۹۴- حروف کلمهٔ «ASSIST» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد که حروف «S» یک در میان باشند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹۵- عدد ۳۸۵۲۹۴ چند جایگشت دارد به طوری که ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۹۶- در چند جایگشت از ارقام عدد ۱۲۳۴۶۵۸، مضارب ۳ کنار هم و مضارب ۴ نیز کنار هم هستند؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۶۰

۹۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «DAMDARAN» به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۹۸- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «mississippi» حروف مشابه کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

۹۹- با حروف کلمهٔ «دلبرانه» چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همهٔ آن‌ها عبارت «دلبر» به همین شکل مطرح شود؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۰۰- به چند طریق می‌توان ۳ خودکار آبی یکسان و ۵ خودکار قرمز یکسان را در یک جامدادی قرار داد، به طوری که خودکارهای هم‌رنگ کنار هم باشند؟

۱) ۲ ۲) $۵!۳!$ ۳) $(۲!)(۵!)(۳!)$ ۴) $۸!$

۱۰۱- ۳ کتاب زبان، ۲ کتاب فلسفه و ۳ کتاب منطق متفاوت را می‌خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم. در چند حالت کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم هستند؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۳۲۴ ۳) ۴۳۲ ۴) ۶۴۸

۱۰۲- ۳ دانش‌آموز به همراه پدرهایشان می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. در چند حالت هر پدر کنار فرزندش قرار دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

۱۰۳- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «zeidan»، دو حرف a و z کنار هم هستند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۱۰۴- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «zeidan»، سه حرف a، z و d، کنار هم هستند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۹۲

۱۰۵- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «zeidan»، کلمهٔ «zad» دیده می‌شود؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۱۰۶- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «zeidan»، دو حرف a و z کنار هم نیستند؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۴۰ ۳) ۴۶۰ ۴) ۴۸۰

۱۰۷- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «zeidan»، دو حرف a و z کنار هم هستند ولی دو حرف n و e کنار هم نیستند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۴۴

۱۰۸- چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام با ارقام ۱,۲,۳,۵,۶,۷ می‌توان ساخت به طوری که ارقام ۵ و ۶ در آن‌ها به کار رفته و در کنار هم باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴

۱۰۹- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آن‌ها، مجاز به رانندگی باشند؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۴

۱۱۰- یک ماشین ۸ صندلی برای نشستن دارد. ۶ نفر که ۲تای آن‌ها رانندگی بلدند، به چند طریق می‌توانند داخل این ماشین بنشینند؟

۱) ۲۱۶۰ ۲) ۲۵۲۰ ۳) ۴۳۲۰ ۴) ۵۰۴۰

۱۱۱- تعداد جایگشت‌های کلمهٔ «MAHSUS» که در آن‌ها بین دو حرف S، دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد، کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۱۸ ۴) ۲۴۰

۱۱۲- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «zeidan» بین دو حرف a و z، دقیقاً دو حرف قرار می‌گیرد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۶

جایگشت با تکرار (خارج کتاب)

۱۱۳- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «ASAL» کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۱۴- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «ABADAN» کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۱۵- با حروف کلمهٔ «EARNEST» چند جایگشت ۷حرفی می‌توان ساخت، به طوری که در تمام آن‌ها حرف «N» در وسط کلمه باشد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۱۱۶- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «BAMDAD» کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۰

۱۱۷- با حروف کلمهٔ «RANGIN» چند کلمهٔ رمز ۳حرفی می‌توان ساخت؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

جایگشت دوری (خارج کتاب)

۱۱۸- به چند طریق می‌توانیم ۶ نفر را دور یک میز گرد بنشانیم؟

۱) $۲^۶$ ۲) $\frac{۶!}{۲}$ ۳) $۵!$ ۴) $۶!$

۱۱۹- دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند، به طوری که ۲ فرد مورد نظر از آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟ (خارج ۹۹)

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۱۲۰- ۵ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد ۵نفره قرار بگیرند، به طوری که علی و آرش، کنار هم نباشند؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

ترکیب

۱۲۱- به چند طریق می‌توان از بین ۶ شیء، ۲ شیء انتخاب کرد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۱۲۲- به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر، یک گروه ۳نفره انتخاب کرد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۱۲۳- با ۵ نفر به .... حالت می‌توان یک صف ۳نفره و به .... حالت می‌توان یک تیم ۳نفره تشکیل داد.

۱) ۶۰، ۶۰ ۲) ۶۰، ۱۰ ۳) ۱۰، ۶۰ ۴) ۱۰، ۱۰

۱۲۴- در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد، به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟ (مهره‌های هم‌رنگ، متفاوت هستند.) (کتاب درسی)

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۱۲۵- می‌خواهیم ۸ نفر را به دو گروه ۳ و ۵ نفری تقسیم کنیم. این کار به چند حالت ممکن است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۱۲۶- روی محیط یک دایره ۱۰ نقطهٔ متمایز وجود دارد. چه تعداد وتر با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟ (کتاب درسی)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

۱۲۷- روی محیط یک دایره ۱۰ نقطهٔ متمایز وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟ (کتاب درسی)

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۱۲۸- به چند طریق می‌توانیم از بین ۹ نفر یک تیم ۴نفره تشکیل دهیم به طوری که علی حتماً در این تیم باشد ولی بهزاد در آن نباشد؟

۱) ۸۴ ۲) ۳۵ ۳) ۷۰ ۴) ۴۸

۱۲۹- به چند طریق می‌توان از بین ۸ سؤال یک امتحان به ۵ سؤال پاسخ داد، به شرط آن‌که پاسخ به ۲ سؤال اول، اجباری باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۴۲ ۴) ۸۰

۱۳۰- از بین ۸ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانیم یک گروه ۲ یا ۳ نفری تشکیل دهیم؟

۱) ۵۶ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

۱۳۱- از بین ۸ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانیم یک گروه ۲نفری و یک گروه ۳نفری تشکیل دهیم؟ *(به فرق این سؤال با سؤال قبلی، توجه کنید!)*

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۵۶۰

۱۳۲- گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته‌گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخهٔ مختلف، موجود باشد؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۸

۱۳۳- می‌خواهیم ۷ نفر را در اتاق‌های ۳، ۲ و ۲ نفره تقسیم کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۱۳۴- به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

۱۳۵- به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد به طوری که حداکثر ۳ زن انتخاب شوند؟ (کتاب درسی)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۷۴

۱۳۶- به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ پزشک و ۴ مهندس، یک گروه ۵نفره تشکیل دهیم به طوری که تعداد پزشک‌های گروه، بیشتر از تعداد مهندس‌ها باشد و حتماً مهندس در گروه باشد؟

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۰

۱۳۷- می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم، یک تیم ۶نفرهٔ والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه بخواهیم کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایهٔ دوازدهم باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۱۱۲ ۴) ۳۳۰

۱۳۸- می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم یک تیم ۶نفرهٔ والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه بخواهیم کاپیتان تیم، فردی از پایهٔ دوازدهم باشد؟ *(به فرق این سؤال با سؤال قبلی، توجه کنید!)*

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۱۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۲۸۰

۱۳۹- می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم یک تیم ۶نفرهٔ والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم. هرگاه بخواهیم حداقل ۳ نفر از اعضای تیم از پایهٔ دوازدهم باشند؟

۱) ۷۴ ۲) ۸۴ ۳) ۹۴ ۴) ۱۰۴

۱۴۰- در کمد لباس علی، ۲ پیراهن آبی، ۴ پیراهن قرمز و ۵ پیراهن سبز وجود دارد. او برای مسافرت می‌خواهد ۴ پیراهن با خود ببرد به طوری که از هر رنگ، حداقل ۱ پیراهن داشته باشد. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۷۰ ۴) ۱۸۰

۱۴۱- می‌خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان یک گروه سرود ۵نفره تشکیل دهیم، به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آن‌که حداقل ۳ نفر از آن‌ها نوجوان باشند؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵۶۰ ۴) ۶۰۶

۱۴۲- در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی، ۶ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این کیسه خارج کنیم به طوری که دقیقاً ۲ مهرهٔ آن هم‌رنگ باشند؟

۱) ۱۵۹ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۷۹ ۴) ۱۸۹

۱۴۳- از یک تیم ۹نفره می‌خواهیم یک گروه ۵نفره انتخاب کنیم، به طوری که بهزاد و سینا با هم در این گروه نباشند. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟

۱) ۸۱ ۲) ۸۶ ۳) ۹۱ ۴) ۹۶

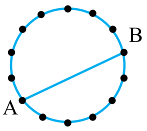
۱۴۴- می‌خواهیم از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۱، دو عدد انتخاب کنیم که مجموعشان عددی زوج باشد. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷

۱۴۵- از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دوبه‌دو غیرهم‌مدرسه‌ای باشند را انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۴۸۰

۱۴۶- با توجه به شکل زیر، ۱۴ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. وتر AB هم رسم شده است. به چند طریق می‌توان یک چهارضلعی در یک طرف وتر و یک مثلث در طرف دیگر وتر ساخت؟ (چهارضلعی‌ها و مثلث‌ها شامل نقاط A و B نیستند.)



۱) ۲۱۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۲۵

۱۴۷- تعداد جایگشت‌های ۵حرفی کلمهٔ «MANSUR» که دو حرف M و N حتماً در آن‌ها وجود داشته باشد، کدام است؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۱۲

ترکیب (تعداد زیرمجموعه)

۱۴۸- تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

۱۴۹- تعداد زیرمجموعه‌های ۲ یا ۴ عضوی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۴ ۳) ۵۶ ۴) ۵۸

۱۵۰- تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ که فاقد عدد ۴ باشد، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۵۱- تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ که شامل ۶ و ۷ و فاقد عدد ۵ باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۵۲- مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,\dots,۱۶\}$، چند زیرمجموعهٔ دوعضوی شامل اعداد اول دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۳۰

۱۵۳- مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,\dots,۱۵\}$، چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی دارد که همهٔ اعضای آن زوج یا همهٔ اعضای آن فرد باشند؟

۱) ۹۱ ۲) ۹۲ ۳) ۹۳ ۴) ۹۴

۱۵۴- مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,\dots,۱۲\}$، چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی دارد که حداقل یک عضو آن، عددی زوج است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۹۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۱۰

۱۵۵- در چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی از مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$، حداقل ۳ عدد اول وجود دارد؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۶ ۳) ۶۸ ۴) ۷۰

معادلات مربوط به C(n,r)

۱۵۶- مقدار کدام عبارت زیر با $n!$ برابر است؟

۱) $C(n,۰)$ ۲) $C(n,۱)$ ۳) $P(n,n-۱)$ ۴) $P(n,۰)$

۱۵۷- مقدار $C(۸,۳)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $۳!\times P(۸,۳)$ ۲) $\frac{P(۸,۳)}{۳!}$ ۳) $۵!\times P(۸,۳)$ ۴) $\frac{P(۸,۳)}{۵!}$

۱۵۸- اگر $P(n,۲)-C(n,۲)=۳۶$ باشد، حاصل $C(n,۶)$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۱۵۹- اگر $۲C(n,۵)=۳P(n-۱,۴)$ باشد، n کدام است؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۱۶۰- روی محیط یک دایره، n نقطه وجود دارد. اگر با این نقاط، ۵۵ وتر بتوانیم بسازیم، n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۶۱- یک مجموعهٔ nعضوی، ۴۵ زیرمجموعهٔ $(n-۲)$ عضوی دارد. n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۶۲- اگر $\binom{۲۲}{k}=\binom{۲۲}{۱۴}$ باشد، k کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۶۳- اگر $\binom{۱۸}{k}=\binom{۱۸}{k+۴}$ باشد، مقدار $C(k,۲)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۱۶۴- اگر $۲۶C(n+۳,۲)=P(n+۴,۳)$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱. گزینه ۳ باید به «یکی از ۱۰ کشور اروپایی» **یا** «یکی از ۶ کشور آسیایی» **یا** «یکی از ۳ کشور آمریکای شمالی»، مسافرت کنیم.

↓ جمع ↓ جمع

پس طبق اصل جمع، داریم:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها}=\underset{\text{اروپا}}{۱۰}+\underset{\text{آسیا}}{۶}+\underset{\text{آمریکا}}{۳}=۱۹$$

۲. گزینه ۲ در صورت مسئله از «یا» استفاده شده و تأکید شده که فقط یک خودکار **یا** یک مداد **یا** یک روان‌نویس می‌تواند انتخاب شود، لذا از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها}=\underset{\text{خودکار}}{۵}+\underset{\text{مداد}}{۸}+\underset{\text{روان‌نویس}}{۳}=۱۶$$

۳. گزینه ۴ کارمان ۳ مرحله دارد:

«از A به B» **و** «از B به C» **و** «از C به D».

↓ ضرب ↓ ضرب

پس طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\frac{۳}{\text{از A به B}}\times\frac{۲}{\text{از B به C}}\times\frac{۴}{\text{از C به D}}=۲۴$$

۴. گزینه ۴ این دانشجو می‌خواهد هم درس عمومی بردارد **و** هم اختصاصی (به طور همزمان)، پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{۳}{\text{عمومی}}\times\frac{۴}{\text{اختصاصی}}=۱۲$$

۵. گزینه ۲ مشتری باید از بین «۷ رنگ مختلف» **و** «۳ حجم موتور مختلف» **و** «۲ گیربکس مختلف» **و** «۲ داشبورد مختلف»، یکی از هر کدام را انتخاب کند؛ لذا باید از اصل ضرب استفاده کنیم (به حرف «و» بین عبارت‌ها دقت کنید).

$$\frac{۷}{\text{رنگ}}\times\frac{۳}{\text{حجم موتور}}\times\frac{۲}{\text{گیربکس}}\times\frac{۲}{\text{داشبورد}}=۸۴$$

۶. گزینه ۳ برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد، «رو» یا «پشت».

از طرفی در تاس، اعداد اول عبارت‌اند از ۲، ۳ و ۵ که تعداد آن‌ها ۳تا است. لذا طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{۲}{\text{سکهٔ ۱}}\times\frac{۲}{\text{سکهٔ ۲}}\times\frac{۲}{\text{سکهٔ ۳}}\times\frac{۳}{\text{تاس}}=۲۴$$

۷. گزینه ۴ برای مربع‌ها، اسم می‌گذاریم: ۴۸۰۹b

با مربع A شروع می‌کنیم که ۴ حالت دارد (قرمز، سبز، زرد، صورتی).

A	B	C	D

بعد سراغ مربع B می‌رویم که نباید همرنگ A باشد، یعنی ۳ حالت دارد.

مربع C هم ۳ حالت دارد، چون فقط نباید همرنگ B باشد.

مربع D هم مثل C.

پس طبق اصل ضرب، داریم:

A	B	C	D
↓	↓	↓	↓

$$۴\times۳\times۳\times۳=۱۰۸$$

۸. گزینه ۲ در هر بازی فوتبال، یک تیم میزبان و یک تیم مهمان است.

به کمک اصل ضرب، تعداد بازی‌ها برابر است با:

$$\frac{۱۰}{\text{میزبان}}\times\frac{۹}{\text{مهمان}}=۹۰$$

۹. گزینه ۱ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۱۰ سؤال داریم و هر سؤال ۴ حالت پاسخگویی دارد، پس تعداد کل حالات پاسخگویی برابر است با:

$$\frac{۴}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۲}}\times\cdots\times\frac{۴}{\text{سؤال ۱۰}}=\underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۱۰تا}}=۴^{۱۰}$$

۱۰. گزینه ۴ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۱۰ سؤال داریم و هر سؤال، ۵ حالت پاسخگویی (۴ حالت برای گزینه‌ها و ۱ حالت برای پاسخ‌ندادن) دارد، پس تعداد کل حالات پاسخگویی برابر است با:

$$\frac{۵}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۵}{\text{سؤال ۲}}\times\cdots\times\frac{۵}{\text{سؤال ۱۰}}=\underbrace{۵\times۵\times\cdots\times۵}_{\text{۱۰تا}}=۵^{۱۰}$$

۱۱. گزینه ۳ پاسخ‌دادن به سؤالات اجباری است، پس به هر سؤال ۴گزینه‌ای به ۴ حالت و به هر سؤال ۲گزینه‌ای به ۲ حالت می‌توان پاسخ داد:

$$\underbrace{\frac{۴}{}\times\frac{۴}{}\times\cdots\times\frac{۴}{}}_{\text{سؤالات ۴گزینه‌ای (۹تا)}}\times\underbrace{\frac{۲}{}\times\cdots\times\frac{۲}{}}_{\text{سؤالات ۲گزینه‌ای (۱۰تا)}}=۴^{۹}\times۲^{۱۰}$$

$$=(۲^{۲})^{۹}\times۲^{۱۰}=۲^{۱۸}\times۲^{۱۰}=۲^{۲۸}$$

۱۲. گزینه ۲ تعداد سؤالات را x فرض می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌های پاسخگویی}=(\text{تعداد گزینه‌ها}+۱)^{\text{تعداد سؤالات}}$$

$$(۱۲۵)^{۶}=(۴+۱)^{x}\Rightarrow(۵^{۳})^{۶}=۵^{x}\Rightarrow۵^{۱۸}=۵^{x}\Rightarrow x=۱۸$$

۱۳. گزینه ۴ کارمان ۶ مرحله دارد (۳تا برای رفت و ۳تا برگشت). تعداد راه‌های مراحل را باید در هم ضرب کنیم:

$$\frac{۳}{\text{A به B}}\times\frac{۳}{\text{B به C}}\times\frac{۳}{\text{C به D}}\times\frac{۲}{\text{D به C}}\times\frac{۴}{\text{C به B}}\times\frac{۱}{\text{B به A}}=۲۱۶$$

۱۴. گزینه ۳ اول تعداد مسیرهای رفت را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۳}{\text{A به B}}\times\frac{۴}{\text{B به C}}\times\frac{۲}{\text{C به D}}=۲۴$$

برای مسیرهای برگشت، از تمام حالت‌های بالا باید یکی کم کنیم تا از مسیر تکراری عبور نکنیم:

$$\frac{۱}{\text{D به C}}\times\frac{۳}{\text{C به B}}\times\frac{۲}{\text{B به A}}=۶$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\frac{۲۴}{\text{رفت}}\times\frac{۶}{\text{برگشت}}=۱۴۴$$

۱۵. گزینه ۲ تعداد جوراب‌ها را x و تعداد کفش‌ها را y می‌گیریم.

با استفاده از اصل ضرب، تعداد کل حالات تیپ‌زدن‌های! علی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۴}{\text{پیراهن}}\times\frac{۳}{\text{شلوار}}\times\frac{x}{\text{جوراب}}\times\frac{y}{\text{کفش}}=۱۲xy$$

۱۲xy باید با ۳۶۰ برابر باشد:

$$۱۲xy=۳۶۰\xrightarrow{\div۱۲}xy=۳۰$$

تمام حالاتی که حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی x و y، برابر با ۳۰ می‌شود را می‌نویسیم:

$۱)\ x=۱,\ y=۳۰\Rightarrow x+y=۳۱$

$۲)\ x=۲,\ y=۱۵\Rightarrow x+y=۱۷$

$۳)\ x=۳,\ y=۱۰\Rightarrow x+y=۱۳$

$۴)\ x=۵,\ y=۶\Rightarrow x+y=۱۱$

با توجه به گزینه‌ها، $x+y$ نمی‌تواند ۱۲ باشد.

تذکر دقت کنید به غیر از ۴ حالت بالا، ۴ حالت دیگر هم داشتیم که جای x و y در آن‌ها عوض می‌شد ولی تغییری در $x+y$ به وجود نمی‌آمد.

۱۶. گزینه ۴ هر ۶ رقم در هر ۳ خانه قابل استفاده‌اند:

$$\frac{۶}{\text{صدگان}}\times\frac{۶}{\text{دهگان}}\times\frac{۶}{\text{یکان}}=۲۱۶$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هیچ فرقی ندارد!

۱۷. گزینه ۱ در صدگان ۶ رقم می‌تواند قرار بگیرد.

در دهگان فقط رقمی که در صدگان استفاده شده نمی‌تواند بیاید (۵ حالت).

در یکان دورقمی که در صدگان و دهگان استفاده شده‌اند، نمی‌توانند بیایند (۴ حالت).

$$\underset{\uparrow}{۱,۲,\ldots,۶}\qquad\underset{\uparrow}{۱,۲,\ldots,۵,\cancel{۶}}\qquad\underset{\uparrow}{۱,۲,۳,۴,\cancel{۵},\cancel{۶}}$$

$$\frac{۶}{\text{صدگان}}\times\frac{۵}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}=۱۲۰$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها:

صدگان ← دهگان ← یکان

البته برعکس هم می‌شد! *(از وسطی هم می‌تونیم شروع کنیم.)*

۱۸. گزینه ۲ فقط باید حواسمان باشد که در صدگان، صفر نمی‌تواند قرار گیرد.

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{1,2,3,4,5}{5}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{0,1,2,3,4,5}{6}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{0,1,2,3,4,5}{6}} = 180$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هیچ فرقی ندارد!

۱۹. گزینه ۳ حواستان باشد چون صفر داریم با صدگان شروع می‌کنیم.

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{1,2,3,4,5}{5}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{0,1,2,3,4,\cancel{5}}{5}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{0,1,2,3,\cancel{4},\cancel{5}}{4}} = 100$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۲۰. گزینه ۴ باید از ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ برای پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم. ضمناً تکرار ارقام مجاز است چون محدودیتی ذکر نشده است:

$$\underset{\text{ده‌هزارگان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} \times \underset{\text{هزارگان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} \times \underset{\text{صدگان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} = 4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هیچ فرقی ندارد!

۲۱. گزینه ۳ می‌توانیم از تمام ارقام $0,1,2,\dots,9$ استفاده کنیم، فقط صفر در اولین خانهٔ سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد.

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{1,2,\dots,9}{9}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{0,1,2,\dots,\cancel{9}}{9}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{0,1,2,\dots,\cancel{9}}{8}} = 648$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۲۲. گزینه ۳ چون محدودیت زوج‌بودن داریم، از رقم یکان شروع می‌کنیم.
برای یکان ۴ حالت داریم (۲، ۴، ۶ و ۸).
بعد می‌رویم سراغ هزارگان که فقط رقم یکان نباید در آن بیاید (می‌شود ۴ حالت).
به همین ترتیب برای صدگان و دهگان به ترتیب ۳ و ۲ حالت داریم.

$$\underset{\text{هزارگان}}{\overset{\cancel{2},4,6,8,9}{4}} \times \underset{\text{صدگان}}{\overset{\cancel{2},\cancel{4},6,8,9}{3}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\cancel{2},\cancel{4},\cancel{6},8,9}{2}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} = 96$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۲۳. گزینه ۳ اول یکان را پر می‌کنیم. چون می‌خواهیم عددمان فرد باشد، یکان باید ۱ یا ۷ باشد. بعد از رقم سمت چپ شروع به پرکردن می‌کنیم و جلو می‌آییم:

$$\underset{\text{ده‌هزارگان}}{\overset{\cancel{1},2,4,6,7,8}{5}} \times \underset{\text{هزارگان}}{\overset{\cancel{1},\cancel{2},4,6,7,8}{4}} \times \underset{\text{صدگان}}{\overset{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{4},6,7,8}{3}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{4},\cancel{6},7,8}{2}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{1,7}{2}} = 240$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← ده‌هزارگان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۲۴. گزینه ۴ باید با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بسازیم. فرض بر این است که تکرار ارقام مجاز است (در متن سؤال، محدودیتی ذکر نشده)، پس خواهیم نوشت:

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{1,3,5,7,9}{5}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{1,3,5,7,9}{5}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{\text{فقط}\,5}{1}} = 25$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲۵. گزینه ۲ ارقام $0,1,2,\dots,9$ را در نظر می‌گیریم، تکرار ارقام مجاز است، پس مسئله فقط با یک حالت حل می‌شود:

$$\underset{\text{هزارگان}}{\overset{1,2,\dots,9}{9}} \times \underset{\text{صدگان}}{\overset{0,1,2,\dots,9}{10}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{0,1,2,\dots,9}{10}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{0\ \text{یا}\ 5}{2}} = 1800$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲۶. گزینه ۳ اولاً یکان عدد باید از بین ارقام $1,3,5,7,9$ انتخاب شود تا عدد، فرد محسوب شود. ثانیاً در رقم هزارگان، باید از ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم. برای دهگان و صدگان محدودیتی ذکر نشده، پس می‌توانند از بین ارقام صفر تا ۹ انتخاب شوند (توجه کنید که تکرار ارقام مجاز است؛ چون در متن سؤال، چیزی در این مورد گفته نشده است).

$$\underset{\text{هزارگان}}{\overset{2,4,6,8}{4}} \times \underset{\text{صدگان}}{\overset{0\ \text{تا}\ 9}{10}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{0\ \text{تا}\ 9}{10}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{1,3,5,7,9}{5}} = 2000$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲۷. گزینه ۳ باید در رقم یکان صفر یا ۵ نباشد، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ می‌تواند در یکان باشد.
بعد سراغ صدگان می‌رویم. صدگان به غیر از صفر و رقمی که در یکان استفاده شده، بقیهٔ ۵ رقم را می‌تواند بگیرد.
در آخر هم دهگان می‌ماند که ۵ حالت دارد (فقط ۲تایی که در یکان و صدگان نوشتیم، نباید باشد).

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{\cancel{1},2,3,4,5,6}{5}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{0,\cancel{1},\cancel{2},3,4,5,6}{5}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{1,2,3,4,6}{5}} = 125$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← صدگان ← دهگان

۲۸. گزینه ۲ به جای ستاره‌ها، خانه رسم می‌کنیم. اولین رقم سمت چپ باید فرد باشد $(1,3,5,7,9)$، ولی اولین رقم سمت راست باید زوج باشد $(2,4,6,8)$؛ بقیهٔ خانه‌ها محدودیتی ندارند، پس می‌توانند هر یک از ارقام ۱ تا ۹ را اختیار کنند (طبق صورت سؤال در بین ارقام پلاک، صفر نداریم). ضمناً تکرار ارقام مجاز است، بنابراین:

$$\overset{1,3,5,7,9}{\boxed{5}}\ \overset{1,2,3,\dots,9}{\boxed{9}\,\boxed{9}\,\boxed{9}}\ \overset{2,4,6,8}{\boxed{4}}$$

$\Rightarrow$ تعداد پلاک‌ها $= 5\times 9\times 9\times 9\times 4 = 14580$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲۹. گزینه ۲ باید با ۶ رقم ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ عدد را بسازیم.
چون عدد زوج است، پس یکان ۳ حالت دارد (۴، ۶ و ۸).
برای سه خانهٔ دیگر به ترتیب ۵، ۴ و ۳ حالت می‌ماند.

$$\underset{\text{هزارگان}}{\overset{\cancel{4},5,6,7,8,9}{5}} \times \underset{\text{صدگان}}{\overset{\cancel{4},\cancel{5},6,7,8,9}{4}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},7,8,9}{3}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{4,6,8}{3}} = 180$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۳۰. گزینه ۲ در کل با این ۸ رقم باید عددمان را بسازیم:
$0,1,2,4,5,7,8,9$
با صدگان شروع می‌کنیم که صفر نمی‌تواند باشد. پس صدگان ۷ حالت دارد. رقمی که در صدگان استفاده کردیم، نباید در دهگان بیاید. ضمناً صفر هم به بازی برمی‌گردد، پس دهگان هم ۷ حالت دارد.
تا این‌جا ۲ رقم در صدگان و دهگان استفاده شده‌اند، پس ۶ حالت برای یکان می‌ماند.

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{\text{به‌جز صفر}}{7}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{\text{به‌جز صدگان}}{7}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{\text{به‌جز صدگان و دهگان}}{6}} = 294$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۳۱. گزینه ۱ عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که یکان آن صفر باشد. از طرفی عدد مورد نظر باید از ۴۰۰ بزرگ‌تر باشد، پس صدگان آن باید ۴ به بالا باشد، لذا خواهیم نوشت:

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{4,5,8}{3}} \times \underset{\text{دهگان}}{\overset{1,4,5,\cancel{8}}{3}} \times \underset{\text{یکان}}{\overset{0}{1}} = 9$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← صدگان ← دهگان

۳۲. گزینه ۳ ابتدا باید خانهٔ دهگان را پر کنیم، چون شرط اصلی سؤال در مورد آن است؛ سپس خانهٔ سمت چپ و در نهایت خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم:

صدگان: ۸ (۱ تا ۹ به‌جز دهگان) × دهگان: ۴ (۲,۳,۵,۷) × یکان: ۸ (۰ تا ۹ به‌جز صدگان و دهگان) = ۲۵۶

ترتیب پرکردن خانه‌ها: دهگان ← صدگان ← یکان

۳۳. گزینه ۲ با توجه به شرایط مسئله، پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

ده‌هزارگان: ۴ (۵,۶,۷,۸) × هزارگان: ۵ (~~۸~~,۱,۳,۵,۶,۷) × صدگان: ۴ (~~۷~~,۱,۳,۵,۶) × دهگان: ۳ (~~۶~~,۱,۳,۵) × یکان: ۲ (~~۵~~,۱,۳) = ۴۸۰

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانهٔ بعدی رفته‌ایم، یک رقم دلخواه از خانهٔ قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانهٔ دوم از چپ، به دلخواه عدد ۸ را که در خانهٔ اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۸ می‌توانید ۵ یا ۶ یا ۷ را خط بزنید، هیچ فرقی ندارد.

ترتیب پرکردن خانه‌ها: ده‌هزارگان ← بقیه با هر ترتیبی درستن!

۳۴. گزینه ۱ ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی عبارت‌اند از ۱,۳,۵,۷,۹. در یکان فقط از ۵ می‌توانیم استفاده کنیم تا عددمان مضرب ۵ باشد؛ ضمناً اولین خانهٔ سمت چپ فقط می‌تواند ۷ یا ۹ باشد (چون عددمان باید بزرگ‌تر از ۷۰۰۰۰ باشد).

پس خواهیم داشت:

ده‌هزارگان: ۲ (۷,۹) × هزارگان: ۳ (~~۹~~,۱,۳,۷) × صدگان: ۲ (~~۷~~,۱,۳) × دهگان: ۱ (~~۳~~,۱) × یکان: ۱ (فقط ۵) = ۱۲

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← ده‌هزارگان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۳۵. گزینه ۱ برای آن‌که عدد مطلوب بین ۳۰۰۰ و ۶۰۰۰ باشد، رقم هزارگان آن (اولین خانهٔ سمت چپ) فقط می‌تواند ۳ یا ۴ یا ۵ باشد؛ لذا به شکل مقابل عمل می‌کنیم:

هزارگان: ۳ (۳,۴,۵) × صدگان: ۵ (۰,~~۳~~,۴,۵,۶,۷) × دهگان: ۴ (۰,~~۴~~,۵,۶,۷) × یکان: ۳ (۰,~~۵~~,۶,۷) = ۱۸۰

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هزارگان ← بقیه با هر ترتیبی درستن!

۳۶. گزینه ۱ از صدگان شروع می‌کنیم که ۴ حالت دارد (۱، ۲، ۳ و ۴).

برای دهگان ۹ حالت داریم (صفر تا ۹ به‌جز رقمی که در صدگان آمده).

برای یکان هم ۸ حالت می‌ماند (صفر تا ۹ به‌جز دو رقمی که تا این‌جا استفاده شدند).

صدگان: ۴ (۱,۲,۳,۴) × دهگان: ۹ (صفر تا ۹ به‌جز صدگان) × یکان: ۸ (صفر تا ۹ به‌جز صدگان و دهگان) = ۲۸۸

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۳۷. گزینه ۳ رقم صدگان این عدد، ۶ حالت دارد: ۳,۴,۵,۶,۷,۸

حالا تمام حالت‌هایی که مجموع رقم یکان و دهگان، ۸ می‌شود را می‌نویسیم که ۹ حالت می‌شود.

پس طبق اصل ضرب، برای صدگان ۶ حالت و برای یکان و دهگان (با هم) ۹ حالت داریم:

یکان	دهگان
۰	۸
۱	۷
۲	۶
۳	۵
۴	۴
۵	۳
۶	۲
۷	۱
۸	۰

تعداد اعداد = صدگان: ۶ (۳,۴,۵,۶,۷,۸) × یکان و دهگان: ۹ (یک ردیف از جدول) = ۵۴

۳۸. گزینه ۲ دو جور مسیر داریم:

۱) مسیر ABE: $\frac{3}{\text{A به B}} \times \frac{4}{\text{B به E}} = 12$

۲) مسیر ACDE: $\frac{2}{\text{A به C}} \times \frac{4}{\text{C به D}} \times \frac{3}{\text{D به E}} = 24$

تعداد کل مسیرها برابر است با: $12 + 24 = 36$

۳۹. گزینه ۳ می‌خواهیم از شهر M شروع به حرکت کرده و بدون عبور از شهر B به شهر Z برویم، پس دو مسیر کلی خواهیم داشت:

۱) مسیر MAZ: $\frac{2}{\text{M به A}} \times \frac{2}{\text{A به Z}} = 4$

۲) مسیر MCZ: $\frac{2}{\text{M به C}} \times \frac{3}{\text{C به Z}} = 6$

پس تعداد کل مسیرها برابر است با: $4 + 6 = 10$

۴۰. گزینه ۳ علی دو جور می‌تواند لباس بپوشد:

۱) شلوار پارچه‌ای با کت: $\frac{4}{\text{شلوار پارچه‌ای}} \times \frac{3}{\text{کت}} = 12$

۲) شلوار جین با پیراهن: $\frac{6}{\text{شلوار جین}} \times \frac{5}{\text{پیراهن}} = 30$

تعداد کل حالات برابر است با: $12 + 30 = 42$

۴۱. گزینه ۴ نسترن به دو حالت می‌تواند برای موبایلش رمز بگذارد:

۱) از حروف A، B، C و D استفاده کند: $\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4} = 64$ (A,B,C,D)

۲) از ارقام ۱ تا ۶ استفاده کند: $\underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6} = 216$ (۱,۲,...,۶)

پس تعداد کل حالات رمزگذاری برابر است با: $64 + 216 = 280$

۴۲. گزینه ۲ به دو روش می‌توانیم از A به D برویم:

۱) مسیر ABCD: $\frac{3}{\text{A به B}} \times \frac{y}{\text{B به C}} \times \frac{4}{\text{C به D}} = 12y$

۲) مسیر AED: $\frac{x}{\text{A به E}} \times \frac{3}{\text{E به D}} = 3x$

مجموع دو حالت بالا، باید برابر با ۲۴ باشد:

$12y + 3x = 24 \xrightarrow{\div 3} 4y + x = 8$

با توجه به این‌که x و y اعداد طبیعی هستند، y فقط می‌تواند ۱ باشد:

$4y + x = 8 \xrightarrow{y=1} 4 + x = 8 \Rightarrow x = 4$

پس: $x + y = 4 + 1 = 5$

۴۳. گزینه ۲ ۴تا حالت می‌تواند رخ دهد! برای همین هم این سؤال، جزء سؤالات سخت است!

۱) رفت و برگشت را از جاده‌های بالایی برویم:

$\frac{2}{\text{A به B}} \times \frac{4}{\text{B به D}} \times \frac{3}{\text{D به B}} \times \frac{1}{\text{B به A}} = 24$ ($3 = 4-1$ و $1 = 2-1$)

۲) رفت از مسیر بالا و برگشت از مسیر پایین باشد:

$\frac{2}{\text{A به B}} \times \frac{4}{\text{B به D}} \times \frac{3}{\text{D به C}} \times \frac{3}{\text{C به A}} = 72$

۳) رفت و برگشت را از جاده‌های پایینی برویم:

$\frac{3}{\text{A به C}} \times \frac{3}{\text{C به D}} \times \frac{2}{\text{D به C}} \times \frac{2}{\text{C به A}} = 36$ ($2 = 3-1$ و $2 = 3-1$)

۴) رفت از مسیر پایین و برگشت از مسیر بالا باشد:

$$\frac{۳}{C \text{ به } A}\times\frac{۳}{D \text{ به } C}\times\frac{۴}{B \text{ به } D}\times\frac{۲}{A \text{ به } B}=۷۲$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $۲۴+۷۲+۳۶+۷۲=۲۰۴$

۴۴. گزینه ۲ دو حالت داریم:

۱) یکان و صدگان فرد و دهگان زوج باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,\cancel{۷}}{\uparrow}}{۳}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۲,۴,۶}{\uparrow}}{۳}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۷}{\uparrow}}{۴}}{\text{یکان}}=۳۶$$

۲) یکان و صدگان زوج و دهگان فرد باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۲,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{۲}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۷}{\uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۲,۴,۶}{\uparrow}}{۳}}{\text{یکان}}=۲۴$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با: $۳۶+۲۴=۶۰$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ⟵ صدگان ⟵ دهگان

۴۵. گزینه ۳ دو حالت داریم:

۱) تمام ارقام فرد باشند: برای صدگان ۵ حالت (۱، ۳، ۵، ۷، ۹) داریم. یکی از آن‌ها را در صدگان استفاده می‌کنیم، پس برای دهگان، ۴ حالت و به همین صورت برای یکان ۳ حالت می‌ماند:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,\cancel{۷}}{\uparrow}}{۳}}{\text{یکان}}=۶۰$$

۲) تمام ارقام زوج باشند: برای صدگان ۴ حالت (۲، ۴، ۶، ۸) داریم. برای دهگان، پنج حالت (۰، ۲، ۴، ۶، ۸) داریم ولی چون یکی از آن‌ها در صدگان استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای یکان هم ۳ حالت می‌ماند:

$$\frac{\overset{\overset{۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۲,۴,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۲,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{۳}}{\text{یکان}}=۴۸$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $۶۰+۴۸=۱۰۸$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ⟵ دهگان ⟵ یکان

۴۶. گزینه ۲ دو حالت داریم:

۱) رقم یکان و هزارگان هر دو فرد باشند:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\uparrow}}{۵}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,۵,\cancel{۶},۷,۸}{\uparrow}}{۸}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{۷}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{۴}}{\text{یکان}}=۱۱۲۰$$

۲) رقم یکان و هزارگان هر دو زوج باشند:

$$\frac{\overset{\overset{۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{۴}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,۵,\cancel{۶},۷,۹}{\uparrow}}{۸}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{۷}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۲,۴,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{۴}}{\text{یکان}}=۸۹۶$$

تعداد کل این اعداد، برابر است با: $۱۱۲۰+۸۹۶=۲۰۱۶$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): هزارگان ⟵ یکان ⟵ صدگان ⟵ دهگان

۴۷. گزینه ۴ چون در یکان صفر می‌تواند قرار گیرد و تکرار مجاز نیست، باید دو حالت در نظر بگیریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۵}{\uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,\cancel{۵}}{\uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۲۰$$

۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ باشد):

$$\frac{\overset{\overset{۱,\cancel{۲},۳,۴,۵}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۳,۴,\cancel{۵}}{\uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۲,۴}{\uparrow}}{۲}}{\text{یکان}}=۳۲$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با: $۲۰+۳۲=۵۲$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ⟵ صدگان ⟵ دهگان

۴۸. گزینه ۳ چون تکرار ارقام مجاز نیست و صفر هم جزء ارقام داده‌شده است، لذا باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم، یکی وقتی یکان صفر باشد و دیگری وقتی یکان صفر نباشد (۶ یا ۸ باشد)؛ لذا داریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۶,۸}{\uparrow}}{۵}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,\cancel{۶}}{\uparrow}}{۳}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۶۰$$

۲) یکان صفر نباشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۳,۵,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{۴}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۳,۵,\cancel{۶}}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۳,\cancel{۵}}{\uparrow}}{۳}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{۶یا۸}}{\uparrow}}{۲}}{\text{یکان}}=۹۶$$

تعداد کل اعداد برابر است با: $۶۰+۹۶=۱۵۶$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ⟵ هزارگان ⟵ صدگان ⟵ دهگان

۴۹. گزینه ۲ عددی که مضرب ۵ است، باید یکانش صفر یا ۵ باشد. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{\overset{\overset{\text{۱ تا ۶}}{\uparrow}}{۶}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{۱ تا ۶ به‌جز صدگان}}{\uparrow}}{۵}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۳۰$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶}{\uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{۵}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۲۵$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با: $۳۰+۲۵=۵۵$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ⟵ صدگان ⟵ دهگان

۵۰. گزینه ۳ عددی که مضرب ۵ است، باید یکانش صفر یا ۵ باشد. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۵}{\uparrow}}{۵}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,\cancel{۵}}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,\cancel{۴}}{\uparrow}}{۳}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۶۰$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴}{\uparrow}}{۴}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,\cancel{۴}}{\uparrow}}{۴}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۰,۱,۲,\cancel{۳}}{\uparrow}}{۳}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۴۸$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با: $۶۰+۴۸=۱۰۸$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ⟵ هزارگان ⟵ صدگان ⟵ دهگان

۵۱. گزینه ۳ با ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸\}$ باید عدد ۴رقمی زوج بنویسیم. چون صفر در یکان می‌تواند باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸}{\uparrow}}{۷}}{\text{هزارگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,۷,\cancel{۸}}{\uparrow}}{۶}}{\text{صدگان}}\times\frac{\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,\cancel{۷}}{\uparrow}}{۵}}{\text{دهگان}}\times\frac{\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{۱}}{\text{یکان}}=۲۱۰$$

۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد):

۱,۲,۳,۴,۶,۷,~~۸~~	۰,۱,۲,۳,۴,۶,~~۸~~	۰,۱,۲,۳,۴,~~۶~~	۲,۴,۶,۸	
۶	۶	۵	۴	= ۷۲۰
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

پس تعداد کل اعداد برابر است با: ۲۱۰ + ۷۲۰ = ۹۳۰

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۵۲. گزینه «۳» در ۳ حالت بررسی می‌کنیم:

۱) فقط یکان زوج باشد (دهگان و صدگان فرد):

۱,۳,۵,۷,۹	۱,۳,۵,۷,~~۹~~	۰,۲,۴,۶,۸	
۵	۴	۵	= ۱۰۰
صدگان	دهگان	یکان	

۲) فقط دهگان زوج باشد (یکان و صدگان فرد):

۱,۳,۵,۷,۹	۰,۲,۴,۶,۸	۱,۳,۵,۷,~~۹~~	
۵	۵	۴	= ۱۰۰
صدگان	دهگان	یکان	

۳) فقط صدگان زوج باشد (یکان و دهگان فرد):

۲,۴,۶,۸	۱,۳,۵,۷,۹	۱,۳,۵,۷,~~۹~~	
۴	۵	۴	= ۸۰
صدگان	دهگان	یکان	

مجموع سه حالت بالا برابر است با: ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۸۰ = ۲۸۰

ترتیب پرکردن خانه‌ها
- ۱) یکان ← صدگان ← دهگان
- ۲) دهگان ← صدگان ← یکان
- ۳) صدگان ← دهگان ← یکان

۵۳. گزینه «۳» باید دو حالت جداگانه برای حل این سؤال در نظر بگیریم. یکی وقتی که اولین خانهٔ سمت چپ ۳ باشد و دیگری وقتی اولین خانه سمت چپ ۴ یا ۵ باشد.

۱) صدگان ۳ باشد:

فقط۳	۴,۵	۰,۱,۲,۴,~~۵~~	
۱	۲	۴	= ۸
صدگان	دهگان	یکان	

۲) صدگان ۴ یا ۵ باشد:

۵,۴	۰,۱,۲,۳,~~۴~~,۵	۰,۱,۲,۳,~~۵~~	
۲	۵	۴	= ۴۰
صدگان	دهگان	یکان	

پس تعداد کل حالات برابر است با: ۸ + ۴۰ = ۴۸

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ← دهگان ← یکان

۵۴. گزینه «۱» دو حالت داریم:

۱) هزارگان ۵ باشد:

۵	۰,۲,۴	۰,۲,~~۴~~,۶,۸	۰,۲,۶,~~۸~~	
۱	۳	۴	۳	= ۳۶
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

۲) هزارگان ۲ یا ۴ باشد:

۲,۴	۰,۲,~~۴~~,۵,۶,۸	۰,۲,۵,۶,~~۸~~	۰,۲,۵,~~۶~~	
۲	۵	۴	۳	= ۱۲۰
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

پس تعداد کل این اعداد، برابر است با: ۳۶ + ۱۲۰ = ۱۵۶

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): هزارگان ← صدگان ← دهگان ← یکان

۵۵. گزینه «۳» رقم صدگان این عدد، ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ است. در دو حالت تعداد این اعداد را می‌شماریم:

۱) صدگان ۴ یا ۶ باشد:

۴,۶	۰,۱,۲,۳,~~۴~~,۵	۰,۲,۴,~~۶~~	
۲	۵	۳	= ۳۰
صدگان	دهگان	یکان	

۲) صدگان ۳ یا ۵ باشد:

۳,۵	۰,۱,۲,۳,۴,~~۵~~,~~۶~~	۰,۲,۴,۶	
۲	۵	۴	= ۴۰
صدگان	دهگان	یکان	

تعداد کل این اعداد برابر است با: ۳۰ + ۴۰ = ۷۰

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ← یکان ← دهگان

۵۶. گزینه «۳» رقم یکان صفر یا ۵ است، پس دو حالت داریم. بعد از پرکردن یکان، در هر دو حالت باید سراغ هزارگان برویم (چون محدودیت کوچک‌تر از ۶۰۰۰ بودن را داریم).

۱) یکان صفر باشد:

۱,۲,۳,۵	~~۱~~,۲,۳,۵,۷,۸	~~۲~~,۳,۵,۷,۸	صفر	
۴	۵	۴	۱	= ۸۰
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

۲) یکان ۵ باشد:

۱,۲,۳	۰,~~۱~~,۲,۳,۷,۸	۰,۲,۳,۷,~~۸~~	۵	
۳	۵	۴	۱	= ۶۰
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

تعداد کل حالات برابر است با: ۸۰ + ۶۰ = ۱۴۰

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۵۷. گزینه «۲» تمام حالاتی که دو رقم یکسان (یعنی ۲ تا رقم ۴) کنار هم هستند را می‌نویسیم:

۱) رقم ده‌هزارگان و هزارگان، ۴ باشند:

۴	۴	۱,۲,۳	۱,۲,~~۳~~	۱,~~۲~~	
۱	۱	۳	۲	۱	= ۶
ده‌هزارگان	هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

۲) رقم هزارگان و صدگان، ۴ باشند:

۱,۲,۳	۴	۴	۱,۲,~~۳~~	۱,~~۲~~	
۳	۱	۱	۲	۱	= ۶
ده‌هزارگان	هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

۳) رقم صدگان و دهگان، ۴ باشند:

۱,۲,۳	۱,۲,~~۳~~	۴	۴	۱,~~۲~~	
۳	۲	۱	۱	۱	= ۶
ده‌هزارگان	هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

۴) رقم دهگان و یکان، ۴ باشند:

۱,۲,۳	۱,۲,~~۳~~	۱,~~۲~~	۴	۴	
۳	۲	۱	۱	۱	= ۶
ده‌هزارگان	هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

پس تعداد کل حالات برابر است با: ۶ + ۶ + ۶ + ۶ = ۲۴

۵۸. گزینه «۴» اگر ۳ رقم یک عدد ۴رقمی فرد باشد، باید ۱ رقم آن زوج باشد. ۴ حالت داریم:

۱) فقط یکان زوج باشد:

			۰,۲,۴,۶,۸	
۵	۴	۳	۵	= ۳۰۰
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	

۲) فقط دهگان زوج باشد:

$$\frac{5}{\text{هزارگان}}\times\frac{4}{\text{صدگان}}\times\overset{\overset{0,2,4,6,8}{\uparrow}}{\frac{5}{\text{دهگان}}}\times\frac{3}{\text{یکان}}=300$$

۳) فقط صدگان زوج باشد:

$$\frac{5}{\text{هزارگان}}\times\overset{\overset{0,2,4,6,8}{\uparrow}}{\frac{5}{\text{صدگان}}}\times\frac{4}{\text{دهگان}}\times\frac{3}{\text{یکان}}=300$$

۴) فقط هزارگان زوج باشد:

$$\overset{\overset{2,4,6,8}{\uparrow}}{\frac{4}{\text{هزارگان}}}\times\frac{5}{\text{صدگان}}\times\frac{4}{\text{دهگان}}\times\frac{3}{\text{یکان}}=240$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $300+300+300+240=1140$

۵۹. گزینه ۲ با توجه به این‌که عدد مورد نظرمان باید بین ۲۶۰۰ و ۸۰۰۰ باشد، پس هزارگان آن می‌تواند ۲، ۳، ۶ و ۷ باشد.

در ۴ حالت، این اعداد را می‌شماریم:

هزارگان ۲ و صدگان ۶ باشد: $\overset{\overset{2}{\uparrow}}{\frac{1}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{6}{\uparrow}}{\frac{1}{\text{صدگان}}}\times\frac{4}{\text{دهگان}}\times\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{\frac{1}{\text{یکان}}}=4$

هزارگان ۲ و صدگان ۷ یا ۹ باشد: $\overset{\overset{2}{\uparrow}}{\frac{1}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{\text{۷یا۹}}{\uparrow}}{\frac{2}{\text{صدگان}}}\times\frac{4}{\text{دهگان}}\times\overset{\overset{\text{۰یا۶}}{\uparrow}}{\frac{2}{\text{یکان}}}=16$

هزارگان ۶ باشد: $\overset{\overset{6}{\uparrow}}{\frac{1}{\text{هزارگان}}}\times\frac{5}{\text{صدگان}}\times\frac{4}{\text{دهگان}}\times\overset{\overset{\text{۰یا۲}}{\uparrow}}{\frac{2}{\text{یکان}}}=40$

هزارگان ۳ یا ۷ باشد: $\overset{\overset{\text{۳یا۷}}{\uparrow}}{\frac{2}{\text{هزارگان}}}\times\frac{5}{\text{صدگان}}\times\frac{4}{\text{دهگان}}\times\overset{\overset{\text{۰یا۲یا۶}}{\uparrow}}{\frac{3}{\text{یکان}}}=120$

تعداد کل حالات برابر است با: $4+16+40+120=180$

۶۰. گزینه ۳

تعداد کل اعداد ۳رقمی که می‌توانیم با ارقام صفر تا ۶ بنویسیم، برابر است با:

$$\overset{\overset{\text{۱تا۶}}{\uparrow}}{\frac{6}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰تا۶}}{\uparrow}}{\frac{7}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰تا۶}}{\uparrow}}{\frac{7}{\text{یکان}}}=294$$

تعداد کل اعداد ۳رقمی با ارقام صفر تا ۶، بدون ارقام تکراری، برابر است با:

$$\overset{\overset{\text{۱تا۶}}{\uparrow}}{\frac{6}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰تا۶ به‌جز صدگان}}{\uparrow}}{\frac{6}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰تا۶ به‌جز صدگان و دهگان}}{\uparrow}}{\frac{5}{\text{یکان}}}=180$$

پس طبق اصل متمم، داریم:

$$\text{با رقم تکراری}=\text{کل}-\text{بدون رقم تکراری}=294-180=114$$

۶۱. گزینه ۳ تعداد کل کلمات ۴حرفی با ۶ حرف داده‌شده، برابر است با:

$$\underline{6}\times\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}=360$$

تعداد کلماتی که حرف A ندارند، برابر است با:

$$\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}=120$$

پس طبق اصل متمم، داریم:

$$\text{با حرف A}=(\text{کل})-(\text{بدون حرف A})=360-120=240$$

۶۲. گزینه ۴ اعداد سه‌رقمی را می‌توانیم به دو دسته تقسیم کنیم: «اعدادی که شامل رقم ۸ هستند» و «اعدادی که شامل رقم ۸ نیستند».

ابتدا تعداد کل اعداد سه‌رقمی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{9}{\text{صدگان}}\times\frac{10}{\text{دهگان}}\times\frac{10}{\text{یکان}}=900$$

حالا تعداد اعداد سه‌رقمی که شامل رقم ۸ نیستند را حساب می‌کنیم:

$$\frac{8}{\text{صدگان}}\times\frac{9}{\text{دهگان}}\times\frac{9}{\text{یکان}}=648$$

$$\text{تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم ۸ دارند}=(\text{تعداد کل اعداد سه‌رقمی})-(\text{تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم ۸ ندارند})$$

$$=900-648=252$$

۶۳. گزینه ۲

$$6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$$

$$5!=1\times2\times3\times4\times5=120$$

$$0!=1$$

پس: $6!-5!+0!=720-120+1=601$

۶۴. گزینه ۴ هرکدام از کسرها را ساده می‌کنیم:

$$\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}}=90$$

$$\frac{13!}{12!}=\frac{13\times\cancel{12!}}{\cancel{12!}}=13$$

پس: $\frac{10!}{8!}-\frac{13!}{12!}=90-13=77$

۶۵. گزینه ۴ جای $26!$ می‌نویسیم $26\times25!$ و بعد در صورت و مخرج از $25!$، فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{26!+25!}{26!-25!}=\frac{26(25!)+25!}{26(25!)-25!}=\frac{\cancel{25!}(26+1)}{\cancel{25!}(26-1)}=\frac{27}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در ۴}}\frac{108}{100}=1/08$$

۶۶. گزینه ۴ حاصل a و b را پیدا می‌کنیم:

$$a=\underbrace{5!+5!+\cdots+5!}_{\text{۶ تا}}=6\times5!=6!$$

$$b=\frac{10!}{90}=\frac{\cancel{10\times9}\times8!}{\cancel{90}}=8!$$

پس: $\frac{b}{a}=\frac{8!}{6!}=\frac{8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}}=56$

۶۷. گزینه ۲ در چهار عمل اصلی، نمی‌توانیم حاصل را بدون بازکردن فاکتوریل، به دست آوریم. پس روابط (الف) و (ب) قطعاً نادرست هستند. هم‌چنین دقت کنید که نمی‌توانیم از یک عددی که نماد فاکتوریل دارد و زیر رادیکال است، بدون محاسبه جذر بگیریم؛ یعنی رابطهٔ $\sqrt{9!}=3!$ نادرست است (بدون توجه به فاکتوریل، فقط از ۹ جذر گرفته شده). یعنی ابتدا باید حاصل $9!$ را حساب کرد، سپس از آن جذر گرفت. روابط (پ)، (ت) و (ج) همگی درست هستند.

درستی قسمت (ج) نیز که بدیهی است، فقط (پ) و (ت) را اثبات می‌کنیم:

(پ) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=(n+1)n=n^2+n$$

(ت) درست است. $\begin{cases}0!=1\\1!=1\end{cases}\Rightarrow(0!)^2=(1!)^2$

۶۸. گزینه ۳ می‌دانیم !۴ می‌شود ۲۴.
پس x^2+x-2 باید ۴ باشد:

$$x^2+x-2=4 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها برابر است با: $x_2-x_1=2-(-3)=5$

۶۹. گزینه ۴ حاصل ۲ عبارت فاکتوریلی، ۱ می‌شود: $0!=1$ و $1!=1$
پس x^2-4 باید صفر یا ۱ باشد:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$x^2-4=1 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

پس معادله، ۴ جواب حقیقی دارد.

۷۰. گزینه ۳ دو کسر را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=n+1$$

$$\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$$

پس: $\frac{(n+1)!}{n!}+\frac{n!}{(n-1)!}=(n+1)+n=2n+1$

۷۱. گزینه ۳ اول معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=8 \Rightarrow \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}}=8 \Rightarrow n+2=8 \Rightarrow n=6$$

پس: $\frac{n!}{4!}=\frac{6!}{4!}=\frac{6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}}=30$

۷۲. گزینه ۳ اول معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n)}=\frac{1}{6} \Rightarrow n^2+n=6 \Rightarrow n^2+n-6=0$$

$$\Rightarrow (n+3)(n-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} n_1=-3 \ \times \\ n_2=2 \ \checkmark \end{cases}$$

به ازای $n=-3$، $(n+2)!$ می‌شود $(-1)!$ که تعریف نمی‌شود.
به ازای $n=2$، $(n+2)!$ می‌شود: $(2+2)!=4!=24$

۷۳. گزینه ۲ به !۷ دست نمی‌زنیم و !۶ را باز می‌کنیم:

$$7!\times6!=7!\times1\times2\times3\times4\times5\times6$$

جای ۴×۲ می‌نویسیم ۸: $\underbrace{7!\times8}_{8!}\times3\times5\times6=8!\times3\times5\times6$

جای ۶، می‌نویسیم ۳×۲: $8!\times3\times5\times2\times3$

جای ۳×۳ و ۲×۵، به ترتیب ۹ و ۱۰ می‌نویسیم: $8!\times9\times10$

عبارت بالا همان !۱۰ است، پس: $n=10$

حاصل عبارت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم: $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}=\frac{9!}{8!}=\frac{9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}}=9$

۷۴. گزینه ۴ تعداد جایگشت‌های n شیء، برابر با $n!$ است.
در این‌جا ۵ شیء داریم، پس:
تعداد جایگشت $=5!=1\times2\times3\times4\times5=120$

۷۵. گزینه ۴ تعداد جایگشت‌های $n-1$ شیء، برابر با $(n-1)!$ است.
پس باید $(n-1)!$ با ۲۴ برابر باشد: $(n-1)!=24$

از طرفی ۲۴ برابر با !۴ است: $(n-1)!=4! \Rightarrow n-1=4 \Rightarrow n=5$
ما الان جایگشت $n+1$ شیء را می‌خواهیم که می‌شود:

$$(n+1)!=(5+1)!=6!=720$$

۷۶. گزینه ۲ در کل ۶ نفر داریم.
تعداد حالت‌های سخنرانی n نفر، $n!$ است. پس تعداد حالات سخنرانی ۶ نفر، !۶ است.

۷۷. گزینه ۱ می‌دانیم n شیء یا n نفر به $n!$ حالت مختلف می‌توانند در صف کنار هم قرار بگیرند. لذا ۱۲ نفر به !۱۲ حالت می‌توانند در یک صف قرار بگیرند. از طرفی !۱۲ برابر است با $12\times11!$.

۷۸. گزینه ۳ باید $(n+2)!$، ۲۱۰ برابر $(n-1)!$ باشد:

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=210 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=210$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)n=210$$

حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی (یعنی n، $n+1$ و $n+2$) برابر با ۲۱۰ است.
باید ۲۱۰ را به صورت حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بنویسیم: $\underset{\substack{\downarrow\\ n}}{5}\times6\times7=210$
پس $n=5$ است.

در نتیجه: $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}=\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}}=10\times9=90$

۷۹. گزینه ۳ راه I از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.
۳تا جا و ۵تا شیء داریم: $\underset{\text{جای اول}}{5}\times\underset{\text{جای دوم}}{4}\times\underset{\text{جای سوم}}{3}=60$

راه II از فرمول $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ کمک بگیریم:

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}=5\times4\times3=60$$

۸۰. گزینه ۱ جایگشت‌های r شیء از n شیء (تشکیل صف rتایی با n نفر)، برابر با $P(n,r)$ است.
پس در این‌جا، تعداد صف‌های ۳نفره با ۷ نفر، برابر است با: $P(7,3)$

تذکر البته از اصل ضرب هم می‌توانستیم تعداد حالات را حساب کنیم:

$$\underset{\text{نفر اول}}{7}\times\underset{\text{نفر دوم}}{6}\times\underset{\text{نفر سوم}}{5}=210$$

ولی جواب با رابطهٔ P در گزینه‌ها آمده بود!

۸۱. گزینه ۳ راه I هرکدام از مسافرها می‌توانند در ۵ ایستگاه از اتوبوس پیاده شوند، پس: $\underset{\text{مسافر ۱}}{5}\times\underset{\text{مسافر ۲}}{5}\times\underset{\text{مسافر ۳}}{5}=5^3$

تذکر شاید تعجب کنید که چرا این تست وسط سؤالای تبدیل آمده! خواستیم یک شوک به شما وارد کنیم تا حواستان بیشتر به مفاهیم باشد!

۸۲. گزینه ۱ راه I از اصل ضرب کمک می‌گیریم:

$$\underset{\text{کار ۱}}{12}\times\underset{\text{کار ۲}}{11}\times\underset{\text{کار ۳}}{10}=1320$$

راه II

$$P(12,3)=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!}=12\times11\times10=1320$$

۸۳. گزینه ۴ با استفاده با توجه به رابطهٔ $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$، باید $n=12$ و $n-r=8$ باشد:

$$n-r=8 \xrightarrow{n=12} 12-r=8 \Rightarrow r=4$$

پس $P(12,4)$ برابر با $\frac{12!}{8!}$ می‌شود.

۸۴. گزینه ۴ با استفاده از فرمول $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$، صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

صورت: $P(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۹۰$

مخرج: $P(۵,۱)=\frac{۵!}{(۵-۱)!}=\frac{۵!}{۴!}=۵$

پس: $\frac{P(۱۰,۲)}{P(۵,۱)}=\frac{۹۰}{۵}=۱۸$

۸۵. گزینه ۲ اول عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$P(n+۱,n)=\frac{(n+۱)!}{(n+۱-n)!}=\frac{(n+۱)!}{۱!}=(n+۱)!$$

حالا $(n+۱)!$ را برابر با ۶ قرار می‌دهیم: $(n+۱)!=۶$

جای ۶ می‌توانیم از !۳ استفاده کنیم:

$$(n+۱)!=۳! \Rightarrow n+۱=۳ \Rightarrow n=۲$$

۸۶. گزینه ۳ اول عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$P(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=n(n-۱)$$

عبارت به دست آمده را با ۵۶ برابر قرار می‌دهیم: $n(n-۱)=۵۶$

اگر ۵۶ را به صورت ضرب دو عدد متوالی بنویسیم، نیازی به حل معادله نیست:

$n(n-۱)=۸\times۷$

پس $n=۸$.

۸۷. گزینه ۳ سمت چپ تساوی یعنی $P(n+۲,۳)$ را معنی می‌کنیم:

$(n+۲)$ تا شیء و ۳تا جا داریم. تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\underset{\text{جای اول}}{n+۲}\times\underset{\text{جای دوم}}{n+۱}\times\underset{\text{جای سوم}}{n}$$

پس: $P(n+۲,۳)=(n+۲)(n+۱)(n)$

معادلهٔ داده‌شده، ساده‌تر می‌شود: $P(n+۲,۳)=۱۲n(n+۲)$

$$\Rightarrow \cancel{(n+۲)}(n+۱)\cancel{(n)}=۱۲\cancel{n}\cancel{(n+۲)} \Rightarrow n+۱=۱۲$$

$$\Rightarrow n=۱۱$$

۸۸. گزینه ۴ چون کلمهٔ «تمساح» فارسی است بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم.

دقت کنید خانهٔ اول و آخر، فقط ۱ حالت دارند و ۳ حرف برای ۳ خانهٔ دیگر می‌ماند:

$$\underset{\text{حرف آخر}}{\overset{\text{ح}}{۱}}\times\overset{\text{\cancel{س}،الف}}{۱}\times\overset{\text{\cancel{م}،س،الف}}{۲}\times\overset{\text{م،س،الف}}{۳}\times\underset{\text{حرف اول}}{\overset{\text{ت}}{۱}}=۶$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: حرف اول ⟵ حرف آخر ⟵ حرف دوم، سوم و چهارم

۸۹. گزینه ۲ با خانهٔ اول شروع می‌کنیم که محدودیت دارد.

خانهٔ اول باید «م» نباشد، پس ۴ حالت دارد (ت، س، الف، ح).

یکی از ۴ حرف بالا (مثلاً ت) استفاده شده و برای خانه‌های دیگر حرف «م» به ۳ حرف باقی‌مانده اضافه می‌شود.

$$\overset{\text{\cancel{ح}،م}}{۱}\times\overset{\text{\cancel{الف}،ح،م}}{۲}\times\overset{\text{\cancel{س}،الف،ح،م}}{۳}\times\overset{\text{\cancel{ت}،س،الف،ح،م}}{۴}\times\underset{\text{حرف اول}}{\overset{\text{ت،س،الف،ح}}{۴}}=۹۶$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: حرف اول ⟵ حرف دوم، سوم و چهارم و پنجم

۹۰. گزینه ۲ ۶ خانه رسم می‌کنیم، خانهٔ اول و آخر فقط به یک حالت پُر می‌شوند (با حرف S). از بقیهٔ حروف (T ،I ،S ،A) برای پُرکردن خانه‌های باقی‌مانده استفاده می‌کنیم:

$$\underset{\text{حرف اول}}{\overset{S}{۱}}\times\overset{A,S,I,T}{۴}\times\overset{A,S,I,\cancel{T}}{۳}\times\overset{A,S,\cancel{I}}{۲}\times\overset{A,\cancel{S}}{۱}\times\underset{\text{حرف آخر}}{\overset{S}{۱}}=۲۴$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: حرف اول و آخر ⟵ حرف دوم تا پنجم

۹۱. گزینه ۱ راه I حرف S در ۴ جایگاه می‌تواند قرار بگیرد:

۱) حرف اول، S باشد. برای ۳ خانهٔ باقی‌مانده از ۵ حرف $\{D,A,N,E,H\}$ استفاده می‌کنیم:

$$\underset{\text{حرف اول}}{\overset{S}{۱}}\times۵\times۴\times۳=۶۰$$

۲) حرف دوم، S باشد:

$$۵\times\underset{\text{حرف دوم}}{\overset{S}{۱}}\times۴\times۳=۶۰$$

۳) حرف سوم، S باشد:

$$۵\times۴\times\underset{\text{حرف سوم}}{\overset{S}{۱}}\times۳=۶۰$$

۴) حرف چهارم، S باشد:

$$۵\times۴\times۳\times\underset{\text{حرف چهارم}}{\overset{S}{۱}}=۶۰$$

تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۶۰+۶۰+۶۰+۶۰=۲۴۰$

راه II از اصل متمم استفاده کنیم.

تمام رمزهای ۴حرفی با ۶ حرف $\{D,A,N,E,S,H\}$ را می‌نویسیم:

$$۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$$

تمام رمزهای ۴حرفی که S ندارند را می‌نویسیم:

$$۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$$

پس: رمزهایی که S دارند = (کل رمزها) − (رمزهایی که S ندارند)

$=۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$

۹۲. گزینه ۳ راه I چون تعداد کتاب‌های زبان، یکی بیشتر از تعداد کتاب‌های ریاضی است، پس شروع صف باید با کتاب زبان باشد.

در کل ۹تا جایگاه داریم و نحوهٔ پرشدن به صورت زیر است:

زبان ریاضی زبان ریاضی زبان ریاضی زبان ریاضی زبان

کتاب‌های زبان در جای خودشان، به !۵ حالت و کتاب‌های ریاضی در جای خودشان به !۴ حالت می‌توانند قرار بگیرند:

$$\underset{\text{زبان}}{۵}\times\underset{\text{ریاضی}}{۴}\times\underset{\text{زبان}}{۴}\times\underset{\text{ریاضی}}{۳}\times\underset{\text{زبان}}{۳}\times\underset{\text{ریاضی}}{۲}\times\underset{\text{زبان}}{۲}\times\underset{\text{ریاضی}}{۱}\times\underset{\text{زبان}}{۱}$$

پس تعداد کل حالات قرارگرفتن کتاب‌ها برابر است با: $\underset{\text{زبان}}{۵!}\times\underset{\text{ریاضی}}{۴!}$

راه II با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در درس‌نامه داریم: کتاب‌های زبان، یکی بیشتر از کتاب‌های ریاضی است، پس تعداد حالت‌ها برابر است با !۴×!۵.

۹۳. گزینه ۲ راه I حروف صدادار $\{u,a,e\}$ و حروف بی‌صدا $\{s,r,z\}$ هستند.

چون تعداد هر دو دسته یکسان است، پس چینش آن‌ها، ۲ حالت دارد:

۱) با صدادار شروع شود:

$$\underset{\text{صدادار}}{\overset{u,a,e}{۳}}\times\underset{\text{بی‌صدا}}{\overset{s,r,z}{۳}}\times\underset{\text{صدادار}}{\overset{\cancel{u},a,e}{۲}}\times\underset{\text{بی‌صدا}}{\overset{\cancel{s},r,z}{۲}}\times\underset{\text{صدادار}}{\overset{\cancel{a},e}{۱}}\times\underset{\text{بی‌صدا}}{\overset{\cancel{r},z}{۱}}=۳۶$$

۲) با بی‌صدا شروع شود:

$$\underset{\text{بی‌صدا}}{۳}\times\underset{\text{صدادار}}{۳}\times\underset{\text{بی‌صدا}}{۲}\times\underset{\text{صدادار}}{۲}\times\underset{\text{بی‌صدا}}{۱}\times\underset{\text{صدادار}}{۱}=۳۶$$

پس تعداد کل جایگشت‌ها، برابر است با: $۳۶+۳۶=۷۲$

ترتیب پرکردن (در هر دو حالت): خانهٔ ۱، ۳ و ۵ ⟵ خانهٔ ۲، ۴ و ۶

راه II تعداد حروف صدادار و بی‌صدا با هم برابر است و می‌خواهیم یکی‌درمیان باشند. پس داریم: $۲\times n!\times n!=۲\times ۳!\times ۳!=۲\times ۶\times ۶=۷۲$

۹۴. گزینه ۴ برای آن‌که ۳تا S، یکی‌درمیان قرار گیرند، ۲ حالت داریم:

۱) Sها در جایگاه اول، سوم و پنجم باشند و ۳ حرف A، I و T در جایگاه‌های زوج:

$$\underset{\text{اول}}{\overset{S}{۱}}\times\overset{A,I,T}{۳}\times\underset{\text{سوم}}{\overset{S}{۱}}\times\overset{A,I,\cancel{T}}{۲}\times\underset{\text{پنجم}}{\overset{S}{۱}}\times\overset{A,\cancel{I}}{۱}=۶$$

۲) برعکس حالت بالا:

$$\overset{A,I,T}{۳}\times\underset{\text{دوم}}{\overset{S}{۱}}\times\overset{A,I,\cancel{T}}{۲}\times\underset{\text{چهارم}}{\overset{S}{۱}}\times\overset{A,\cancel{I}}{۱}\times\underset{\text{ششم}}{\overset{S}{۱}}=۶$$

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۶+۶=۱۲$

۹۵. گزینه ۴ اعداد فرد را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\boxed{۳,۵,۹}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\boxed{۸}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۳}}{\boxed{۲}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۴}}{\boxed{۴}}$$

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۴ می‌شود.

جایگشت اعداد داخل بستهٔ ۱، !۳ حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\overset{\text{جایگشت بسته‌ها}}{۴!}\times\underset{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}}{۳!}=۲۴\times ۶=۱۴۴$$

۹۶. گزینه ۳ مضارب ۳ را در یک بسته و مضارب ۴ را هم در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\boxed{۳,۶}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\boxed{۴,۸}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۳}}{\boxed{۱}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۴}}{\boxed{۲}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۵}}{\boxed{۵}}$$

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۵ می‌شود.

جایگشت اعداد داخل بستهٔ ۱، !۲ حالت و جایگشت اعداد داخل بستهٔ ۲ نیز، !۲ حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{بسته‌ها}}{۵!}\times\underset{\text{بستهٔ ۱}}{۲!}\times\underset{\text{بستهٔ ۲}}{۲!}=۱۲۰\times ۲\times ۲=۴۸۰$

۹۷. گزینه ۱ حروف یکسان را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\boxed{D,D}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\boxed{A,A,A}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۳}}{\boxed{M}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۴}}{\boxed{R}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۵}}{\boxed{N}}$$

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۵ می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌های ۱ و ۲ یکسان است، پس داخلشان جایگشتی ندارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{بسته‌ها}}{۵!}\times\underset{\text{بستهٔ ۱}}{۱}\times\underset{\text{بستهٔ ۲}}{۱}=۱۲۰$

۹۸. گزینه ۱ حروف یکسان را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\boxed{i,i,i,i}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\boxed{s,s,s,s}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۳}}{\boxed{p,p}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۴}}{\boxed{m}}$$

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۴ می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌ها یکسان است، پس داخلشان جایگشتی ندارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{بسته‌ها}}{۴!}\times\underset{\text{بستهٔ ۱}}{۱}\times\underset{\text{بستهٔ ۲}}{۱}\times\underset{\text{بستهٔ ۳}}{۱}=۲۴$

۹۹. گزینه ۳ حروف «دلبر» را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\boxed{\text{دلبر}}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\boxed{\text{ا}}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۳}}{\boxed{\text{ن}}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۴}}{\boxed{\text{هـ}}}$$

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۴ می‌شود.

داخل بستهٔ ۱ جایگشتی نداریم، چون حروف حق جابه‌جایی ندارند (باید کلمهٔ «دلبر» باشد نه مثلاً «ربدل»).

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underset{\text{جایگشت بسته‌ها}}{۴!}\times\overset{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}}{۱}=۲۴\times ۱=۲۴$$

۱۰۰. گزینه ۱ خودکارهای هم‌رنگ را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:

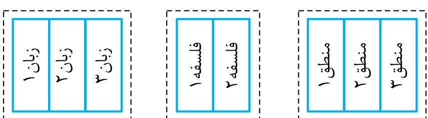
$$\boxed{\text{آبی،آبی،آبی}}\,,\boxed{\text{قرمز، قرمز، قرمز، قرمز}}$$

در کل ۲ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۲ می‌شود.

چون داخل بسته‌ها، اشیای یکسانی داریم، پس جایگشتی نداریم.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{بسته‌ها}}{۲!}\times\underset{\text{آبی‌ها}}{۱}\times\underset{\text{قرمزها}}{۱}=۲$

۱۰۱. گزینه ۳ کتاب‌های هم‌موضوع را در یک بسته قرار می‌دهیم:



بسته ۱ بسته ۲ بسته ۳

در کل ۳ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۳ می‌شود.

جایگشت کتاب‌های داخل بستهٔ ۱، !۳ حالت دارد. همچنین جایگشت کتاب‌های داخل بستهٔ ۲ و ۳ به ترتیب !۲ و !۳ حالت دارند.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underset{\text{بسته‌ها}}{۳!}\times\overset{\text{زبان‌ها}}{۳!}\times\underset{\text{فلسفه‌ها}}{۲!}\times\overset{\text{منطق‌ها}}{۳!}=۶\times ۶\times ۲\times ۶=۴۳۲$$

۱۰۲. گزینه ۲ هر فرزند را به همراه پدرش در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\boxed{\text{فرزند۱وپدر۱}}\,,\boxed{\text{فرزند۲وپدر۲}}\,,\boxed{\text{فرزند۳وپدر۳}}$$

این ۳ بسته را به !۳ حالت می‌توانیم کنار هم قرار دهیم.

داخل هر بسته، جای پدر و فرزند می‌تواند عوض شود، پس داخل هر بسته، !۲ حالت داریم.

در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{بسته‌ها}}{۳!}\times\underset{\text{داخل بسته‌ها}}{(۲!)^{۳}}=۶\times ۸=۴۸$

۱۰۳. گزینه ۲ دو حرف a و z را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\boxed{z,a}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\boxed{e}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۳}}{\boxed{i}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۴}}{\boxed{d}}\,,\underset{\text{بستهٔ ۵}}{\boxed{n}}$$

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۵ می‌شود.

جایگشت حروف داخل بستهٔ ۱، !۲ است.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\overset{\text{جایگشت بسته‌ها}}{۵!}\times\underset{\text{جایگشت داخل بستهٔ ۱}}{۲!}=۱۲۰\times ۲=۲۴۰$$

۱۰۴. گزینه ۲ ۳ حرف a، z و d را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$\boxed{a,z,d}\ ,\ \boxed{e}\ ,\ \boxed{i}\ ,\ \boxed{n}$

بستهٔ۱ بستهٔ۲ بستهٔ۳ بستهٔ۴

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۴ می‌شود.

جایگشت حروف داخل بستهٔ ۱، !۳ حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$\underbrace{\overbrace{۴!}^{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times ۳!}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ۱}} = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$

۱۰۵. گزینه ۱ کلمهٔ zad را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$\boxed{zad}\ ,\ \boxed{e}\ ,\ \boxed{i}\ ,\ \boxed{n}$

بستهٔ۱ بستهٔ۲ بستهٔ۳ بستهٔ۴

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۴ می‌شود.

داخل بستهٔ ۱، جایگشتی نداریم، چون حروف، حق جابه‌جایی ندارند (باید کلمه zad باشد نه مثلاً zda).

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$\underbrace{\overbrace{۴!}^{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times ۱}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ۱}} = ۲۴ \times ۱ = ۲۴$

۱۰۶. گزینه ۴ از اصل متمم کمک می‌گیریم.

تعداد کل جایگشت‌های کلمهٔ zeidan برابر با !۶ است.

تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف a و z کنار هم هستند را در ۳ تست قبل‌تر حساب کردیم که ۲۴۰تا می‌شد.

پس: (a وz کنار هم نباشند) = (کل حالات) − (a وz کنار هم باشند)

$= ۶! - ۲۴۰ = ۷۲۰ - ۲۴۰ = ۴۸۰$

۱۰۷. گزینه ۴

تعداد جایگشت‌هایی که a و z کنار هم هستند را حساب می‌کنیم:

$\boxed{a,z},\boxed{e},\boxed{i},\boxed{d},\boxed{n}$

$\underbrace{\overbrace{۵!}^{\text{جایگشت ۵ بسته}} \times ۲!}_{\text{جایگشت داخل بستهٔ a و z}} = ۱۲۰ \times ۲ = ۲۴۰$

حالا در این ۲۴۰ حالت، یا e و n کنار هم هستند یا کنار هم نیستند.

تعداد حالاتی که e و n کنار هم هستند (a و z هم باید کنار هم باشند) را حساب می‌کنیم:

$\boxed{a,z},\boxed{e,n},\boxed{i},\boxed{d} \Rightarrow \overbrace{۴!}^{\text{۴ بسته}} \times \underbrace{۲!}_{\text{بستهٔ a و z}} \times \overbrace{۲!}^{\text{بستهٔ e و n}} = ۲۴ \times ۲ \times ۲ = ۹۶$

حالا از ۲۴۰ حالت، ۹۶ حالتی که e و n کنار هم هستند را کنار می‌گذاریم:

(a وz کنار هم هستند و e وn کنار هم نیستند.) = (کلِ a وz کنار هم‌ها) − (a وz کنار هم و e وn کنار هم)

$= ۲۴۰ - ۹۶ = ۱۴۴$

۱۰۸. گزینه ۳ تمام حالاتی که در یک عدد ۴رقمی، دو رقم ۵ و ۶ کنار هم هستند را می‌نویسیم:

۱) ۵ ۶ ــ ــ

۲) ۶ ۵ ــ ــ

۳) ــ ۵ ۶ ــ

۴) ــ ۶ ۵ ــ

۵) ــ ــ ۵ ۶

۶) ــ ــ ۶ ۵

در تمام ۶ حالت بالا، دو خانهٔ خالی را باید با ۴ رقم {۱,۲,۳,۷} پر کنیم، که اولی ۴ حالت و دومی ۳ حالت دارد، پس هر کدام ۱۲ حالت دارند و در کل $۶ \times ۱۲ = ۷۲$ حالت داریم.

۱۰۹. گزینه ۲ ۵ جایگاه برای نشستن داریم:

$\underset{\text{صندلی راننده}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۲}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۳}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۴}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۵}}{\underline{\quad}}$

در صندلی راننده، ۳ نفر می‌توانند قرار بگیرند:

$\underset{\text{صندلی راننده}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{صندلی۲}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۳}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۴}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{صندلی۵}}{\underline{\quad}}$

پس الان ۴ نفر داریم. این ۴ نفر را در ۴ صندلی دیگر باید قرار دهیم.

$\underset{\text{صندلی راننده}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{صندلی۲}}{\underline{۴}} \times \underset{\text{صندلی۳}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{صندلی۴}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{صندلی۵}}{\underline{۱}}$

$= ۳ \times ۲۴ = ۷۲$

۱۱۰. گزینه ۴ برای صندلی راننده، ۲ انتخاب داریم.

الان ۵ نفر و ۷ صندلی داریم.

به هر کدام از این ۵ نفر یک صندلی اختصاص می‌دهیم:

$\underset{\text{نفر اول}}{\underline{۷}} \times \underset{\text{نفر دوم}}{\underline{۶}} \times \underset{\text{نفر سوم}}{\underline{۵}} \times \underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{۴}} \times \underset{\text{نفر پنجم}}{\underline{۳}} = ۲۵۲۰$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$\overbrace{۲}^{\text{صندلی راننده}} \times \underbrace{۲۵۲۰}_{\text{نشستن ۵ نفر روی ۷ صندلی دیگر}} = ۵۰۴۰$

۱۱۱. گزینه ۲ ابتدا باید جایگاه دو حرف S را در کلمات مختلفی که ساخته می‌شود، مشخص کنیم:

۱)	S	۴	S	۳	۲	۱	⇒ !۴
۲)	۴	S	۳	S	۲	۱	⇒ !۴
۳)	۴	۳	S	۲	S	۱	⇒ !۴
۴)	۴	۳	۲	S	۱	S	⇒ !۴

(M,A,H,U — M,A,H,$\cancel{U}$ — M,A,$\cancel{H}$ — M,$\cancel{A}$)

پس Sها چهار حالت مختلف خواهند داشت و جواب نهایی برابر می‌شود با:

$۴ \times ۴! = ۹۶$

۱۱۲. گزینه ۲ تمام حالت‌هایی که بین a و z، دو حرف می‌تواند قرار بگیرد را می‌نویسیم:

۱)	a	۴	۳	z	۲	۱	⇒ !۴
۲)	۴	a	۳	۲	z	۱	⇒ !۴
۳)	۴	۳	a	۲	۱	z	⇒ !۴
۴)	z	۴	۳	a	۲	۱	⇒ !۴
۵)	۴	z	۳	۲	a	۱	⇒ !۴
۶)	۴	۳	z	۲	۱	a	⇒ !۴

(e,i,d,n — e,i,d,$\cancel{n}$ — e,i,$\cancel{d}$ — e,$\cancel{i}$)

تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$۶ \times ۴! = ۶ \times ۲۴ = ۱۴۴$

۱۱۳. (گزینه ۲) در کل، ۴ حرف داریم، پس در صورت !۴ می‌آید.
۲تا حرف A تکرار می‌شود، پس در مخرج !۲ داریم.
پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۴!}{۲!}=۴\times۳=۱۲$

۱۱۴. (گزینه ۲) در کل، ۶ حرف داریم، پس در صورت !۶ می‌آید.
۳تا حرف A تکرار می‌شود، پس در مخرج !۳ داریم.
پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۶!}{۳!}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$

۱۱۵. (گزینه ۲) جایگاه حرف N مشخص شده، پس می‌توانیم حرف N را حذف کنیم و با بقیهٔ حروف، کلمات ۶حرفی بسازیم ولی حرف «E» ۲ بار تکرار شده، پس داریم: تعداد کلمات مطلوب $=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۷۲۰}{۲}=۳۶۰$

۱۱۶. (گزینه ۳) در کل، ۶ حرف داریم، پس در صورت !۶ می‌آید.
۲تا حرف A و ۲تا حرف D تکرار می‌شود، پس در مخرج !۲×!۲ داریم.
پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۶!}{\underset{A\ \text{۲تا}}{\underset{\downarrow}{۲!}}\times\underset{D\ \text{۲تا}}{\underset{\downarrow}{۲!}}}=\frac{۷۲۰}{۴}=۱۸۰$

۱۱۷. (گزینه ۲) دو حالت خواهیم داشت:
۱) کلماتی که سه حرف آن‌ها متمایزند که تعدادشان برابر است با:
R,A,N,G,I
$\boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{۳}\Rightarrow ۶۰$
۲) کلماتی که شامل ۲ حرف N هستند، در این صورت ۱ حرف دیگر از بین ۴ حرف R، A، G و I انتخاب می‌شود.
حالت‌های مختلفشان را می‌نویسیم:

۱)	N	N	۴
۲)	N	۴	N
۳)	۴	N	N

۱۲ حالت

پس تعداد کل حالات برابر است با:
$۶۰+۱۲=۷۲$

۱۱۸. (گزینه ۳) تعداد جایگشت‌های n شخص دور یک میز دایره‌ای برابر با $(n-1)!$ است.
پس تعداد جایگشت‌های دوری $n=۶$ نفر، برابر است با: $(۶-۱)!=۵!$

۱۱۹. (گزینه ۲) تعداد جایگشت‌های n شخص دور یک میز دایره‌ای برابر با $(n-1)!$ است. در واقع در دور میز گرد نشستن، مکان نشستن نفر اول مهم نیست.
دو نفری که قرار است کنار هم قرار بگیرند (مثلاً A و B) را در یک بسته قرار می‌دهیم: $\boxed{A,B},C,D,E,F$
پس انگار ۵ شیء داریم که می‌خواهیم آن‌ها را دور یک میز گرد بنشانیم. این کار به !(۵−۱) حالت، یعنی ۲۴=!۴ حالت انجام می‌شود. چون خود A و B می‌توانند جابه‌جا شوند، ۲ حالت هم داخل بسته داریم، پس در کل $۲۴\times۲=۴۸$ حالت داریم.

۱۲۰. (گزینه ۳) از اصل متمم کمک می‌گیریم.
در کل ۵ نفر، به !۴ حالت می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند.
علی و آرش را در یک بسته قرار می‌دهیم: [علی،آرش], [A], [B], [C]
الان ۴ نفر داریم که جایگشت دور میز گردشان !۳ می‌شود. از طرفی چون خود علی و آرش می‌توانند جابه‌جا شوند، داخل بسته هم، !۲ حالت داریم.
یعنی تعداد کل این حالات برابر است با: $۳!\times۲!=۶\times۲=۱۲$
پس تعداد حالاتی که علی و آرش کنار هم نیستند، برابر است با: $۲۴-۱۲=۱۲$

۱۲۱. (گزینه ۱) تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء، برابر است با:
$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$
پس در این‌جا با جای‌گذاری $n=۶$ و $r=۲$، داریم:
$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}۲!}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

۱۲۲. (گزینه ۱) تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء، برابر است با:
$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$
پس در این‌جا با جای‌گذاری $n=۱۰$ و $r=۳$، داریم:
$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\,۳!}=\frac{۱۰\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۲۰$$

۱۲۳. (گزینه ۲) برای صف باید از اصل ضرب یا تبدیل استفاده کنیم:
$$\underset{\text{نفر اول}}{۵}\times\underset{\text{نفر دوم}}{۴}\times\underset{\text{نفر سوم}}{۳}=۶۰$$
برای تیم باید از ترکیب استفاده کنیم. باید ۳ نفر از بین ۵ نفر انتخاب کنیم:
$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

۱۲۴. (گزینه ۲) در کل ۴+۶ یعنی ۱۰تا مهره داریم.
می‌خواهیم ۳ مهره از ۱۰ مهره را انتخاب کنیم:
$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\,۳!}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$$

۱۲۵. (گزینه ۱) برای این کار کافی است یک گروه ۳ (یا ۵) نفره از این ۸ نفر انتخاب کنیم . گروه دیگر هم با این کار، خودبه‌خود انتخاب شده است!
$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!۳!}=\frac{۸\times۷\times۶}{۳\times۲}=۵۶$$
دقت کنید هر وقت شما یک گروه ۳نفری می‌سازید، ۵ نفر باقی می‌مانند که خود به خود یک گروه ۵نفری تشکیل می‌دهند.

۱۲۶. (گزینه ۲) برای ساخت وتر، نیاز به انتخاب ۲ نقطه از بین ۱۰ نقطه داریم:
$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$$

۱۲۷. (گزینه ۳) برای ساخت مثلث، نیاز به انتخاب ۳ نقطه از بین ۱۰ نقطه داریم:
$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲}=۱۲۰$$

۱۲۸. (گزینه ۲) تیم ۴نفره به صورت زیر است:
{علی, ○, ○, ○}
از ۹ نفری که داشتیم، علی انتخاب شده و بهزاد هم نباید انتخاب شود، پس می‌ماند ۷ نفر؛ یعنی از این ۷ نفر باید ۳ نفر انتخاب کنیم:
$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵}{\cancel{۳\times۲}}=۳۵$$

۱۲۹. (گزینه ۲) ۲ سؤال اول که راه فرار ندارند و باید پاسخ دهیم.
پس از ۶تا سؤال بعدی باید به ۳تا پاسخ دهیم.
از این ۶ سؤال، ۳تا را انتخاب می‌کنیم: $\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{۳!\,\cancel{۳!}}=۲۰$

۱۳۰. (گزینه ۳) به جملهٔ روبه‌رو دقت کنید: «گروه ۲نفری **یا** گروه ۳نفری»
↓
جمع

تعداد گروه‌های ۲نفری برابر است با: $\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$

تعداد گروه‌های ۳نفری برابر است با: $\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!۳!}=\frac{۸\times۷\times۶}{۳\times۲}=۵۶$

مجموع این دو حالت برابر است با: $۲۸+۵۶=۸۴$

۱۳۱. گزینهٔ ۴ به جملهٔ روبه‌رو دقت کنید: «گروه ۲نفری $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ گروه ۳نفری»

اول از ۸ نفر، ۲ نفر انتخاب می‌کنیم: $\binom{8}{2}=\frac{8\times7}{2}=28$

۲ نفر از ۸ نفر را کنار می‌گذاریم. حالا از ۶ نفر باقی‌مانده، ۳ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=20$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\binom{8}{2}\times\binom{6}{3}=28\times20=560$

۱۳۲. گزینهٔ ۳ به جملهٔ روبه‌رو دقت کنید: «دسته‌گل ۴تایی $\underset{\text{جمع}}{\text{یا}}$ دسته‌گل ۵تایی $\underset{\text{جمع}}{\text{یا}}$ دسته‌گل ۶تایی»

تعداد دسته‌گل‌های ۴تایی برابر است با: $\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2}=70$

تعداد دسته‌گل‌های ۵تایی برابر است با: $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$

تعداد دسته‌گل‌های ۶تایی برابر است با: $\binom{8}{6}=\frac{8!}{6!2!}=\frac{8\times7}{2}=28$

مجموع این سه حالت برابر است با: $70+56+28=154$

۱۳۳. گزینهٔ ۴ به جملهٔ روبه‌رو دقت کنید: «اتاق ۳نفره $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ اتاق ۲نفره $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ اتاق ۲ نفره»

ابتدا ۳ نفر از ۷ نفر انتخاب می‌کنیم: $\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$

حالا از ۴ نفر باقی‌مانده، ۲ نفر انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$

و در آخر از ۲ نفر باقی‌مانده، ۲ نفر انتخاب می‌کنیم: $\binom{2}{2}=1$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=35\times6\times1=210$

۱۳۴. گزینهٔ ۴ به جملهٔ روبه‌رو دقت کنید: «۲ اسباب‌بازی $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ ۲ اسباب‌بازی $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ ۲ اسباب‌بازی»

ابتدا ۲ اسباب‌بازی از ۶ اسباب‌بازی انتخاب می‌کنیم: $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15$

حالا از ۴ اسباب‌بازی باقی‌مانده، ۲تا انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$

و در آخر از ۲ اسباب‌بازی باقی‌مانده، ۲تا انتخاب می‌کنیم: $\binom{2}{2}=1$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=15\times6\times1=90$

۱۳۵. گزینهٔ ۴ پس از این‌که این ۶ نفر را انتخاب کنیم، جابه‌جایی آن‌ها با هم، گروه جدیدی ایجاد نمی‌کند. پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. حداکثر ۳ زن، یعنی ۳ زن یا ۲ زن یا ۱ زن یا هیچ زن. ولی اگر هیچ زنی انتخاب نشود، باید هر ۶ نفر مرد باشند که غیرممکن است (چون کلاً ۵ مرد وجود دارد).

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\overset{\text{۳مرد و ۳ زن}}{\binom{4}{3}\times\binom{5}{3}}\underset{\text{یا}}{+}\overset{\text{۴مرد و ۲ زن}}{\binom{4}{2}\times\binom{5}{4}}\underset{\text{یا}}{+}\overset{\text{۵مرد و ۱ زن}}{\binom{4}{1}\times\binom{5}{5}}$$

$$=(\frac{4!}{3!1!}\times\frac{5!}{3!2!})+(\frac{4\times3}{2}\times\frac{5!}{4!1!})+(4\times1)$$

$$=(4\times10)+(6\times5)+(4\times1)=74$$

۱۳۶. گزینهٔ ۲ با توجه به شرایط سؤال باید «۳ پزشک $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ ۲ مهندس» $\underset{\text{جمع}}{\text{یا}}$ «۴ پزشک $\underset{\text{ضرب}}{\text{و}}$ ۱ مهندس» انتخاب کنیم:

$$\overset{\text{۳پزشک}}{\binom{5}{3}}\overset{\text{و}}{\times}\overset{\text{۲مهندس}}{\binom{4}{2}}\underset{\text{یا}}{+}\overset{\text{۴پزشک}}{\binom{5}{4}}\overset{\text{و}}{\times}\overset{\text{۱مهندس}}{\binom{4}{1}}=(\frac{5!}{3!2!}\times\frac{4\times3}{2})+\frac{5!}{4!\times1!}\times4$$

$$=(\frac{5\times4}{2}\times6)+(5\times4)=60+20=80$$

۱۳۷. گزینهٔ ۲ چون کاپیتان فرد مشخصی از پایهٔ دوازدهم است، پس ۱ حالت دارد.

حالا باید از ۸ نفره باقی‌مانده (۴ یازدهمی و ۴ دوازدهمی)، ۵ نفر انتخاب کنیم تا تیم ۶نفرمان تکمیل شود:

$$\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{کاپیتان}}{1}\overset{\text{و}}{\times}\underset{\text{۵ نفر دیگر تیم}}{56}=56$

۱۳۸. گزینهٔ ۴ کاپیتان باید یک نفر از بین ۵ نفر دوازدهمی باشد:

$$\binom{5}{1}=5$$

حالا باید از ۸ نفر باقی‌مانده (۴ یازدهمی و ۴ دوازدهمی)، ۵ نفر انتخاب کنیم تا تیم ۶نفرمان تکمیل شود: $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{کاپیتان}}{5}\overset{\text{و}}{\times}\underset{\text{۵ نفر دیگر تیم}}{56}=280$

۱۳۹. گزینهٔ ۱ ۳ حالت ممکن است رخ دهد:

۱) ۳تا دوازدهمی و ۳تا یازدهمی داشته باشیم:

$$\binom{5}{3}\binom{4}{3}=\frac{5!}{2!3!}\times\frac{4!}{1!3!}=10\times4=40$$

۲) ۴تا دوازدهمی و ۲تا یازدهمی داشته باشیم:

$$\binom{5}{4}\binom{4}{2}=\frac{5!}{1!4!}\times\frac{4\times3}{2}=5\times6=30$$

۳) ۵تا دوازدهمی و ۱ یازدهمی داشته باشیم:

$$\binom{5}{5}\binom{4}{1}=1\times4=4$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $40+30+4=74$

۱۴۰. گزینهٔ ۲ علی به ۳ حالت می‌تواند این کار را انجام دهد:

۱) ۲ پیراهن آبی، ۱ قرمز و ۱ سبز:

$$\binom{2}{2}\binom{4}{1}\binom{5}{1}=1\times4\times5=20$$

۲) ۱ پیراهن آبی، ۲ قرمز و ۱ سبز:

$$\binom{2}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{1}=2\times\frac{4\times3}{2}\times5=2\times6\times5=60$$

۳) ۱ پیراهن آبی، ۱ قرمز و ۲ سبز:

$$\binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{2}=2\times4\times\frac{5\times4}{2}=2\times4\times10=80$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $20+60+80=160$

۱۴۱. گزینهٔ ۴ برای آن‌که حداقل ۳ نوجوان در گروه سرود ۵نفره باشند، سه حالت داریم:

۱) ۳تا نوجوان و ۲تا کودک یا جوان باشند:

$$\binom{5}{3}\times\binom{11}{2}=\frac{5!}{2!3!}\times\frac{11\times10}{2}=10\times55=550$$

۲) ۴تا نوجوان و ۱ کودک یا جوان باشند:

$$\binom{5}{4}\times\binom{11}{1}=\frac{5!}{1!4!}\times11=5\times11=55$$

۳) ۵تا نوجوان باشند: $\binom{5}{5}=1$

مجموع تعداد حالات برابر است با: $550+55+1=606$

۱۴۲. (گزینه ۴) برای آن‌که دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند، سه حالت داریم:

۱) ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز یا سبز باشد:

$$\binom{4}{2}\times\overbrace{\binom{9}{1}}^{\text{مجموع قرمزها و سبزها}}=\frac{4\times3}{2}\times9=6\times9=54$$

۲) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا سبز باشد:

$$\binom{6}{2}\times\overbrace{\binom{7}{1}}^{\text{مجموع آبی‌ها و سبزها}}=\frac{6\times5}{2}\times7=15\times7=105$$

۳) ۲ مهره سبز و ۱ مهره آبی یا قرمز باشد:

$$\binom{3}{2}\times\overbrace{\binom{10}{1}}^{\text{مجموع آبی‌ها و قرمزها}}=\frac{3\times2}{2}\times10=3\times10=30$$

مجموع سه حالت بالا برابر است با: $54+105+30=189$

۱۴۳. (گزینه ۳) (راه I) برای آن‌که بهزاد و سینا با هم در این گروه نباشند، ۳ حالت داریم:

۱) بهزاد باشد و سینا نباشد:

$$\begin{pmatrix}\overset{\text{همه به‌جز بهزاد و سینا}}{7}\\ \underset{\text{انتخاب ۴ نفر باقی‌مانده برای گروه}}{4}\end{pmatrix}=\frac{7!}{3!4!}=35$$

۲) سینا باشد و بهزاد نباشد: $\binom{7}{4}=35$

۳) بهزاد و سینا نباشند: $\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!2!}=21$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $35+35+21=91$

(راه II) از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم:

$$\left(\text{تعداد حالاتی که بهزاد و سینا با هم در گروه نیستند}\right)=\left(\text{تعداد کل حالات}\right)-\left(\text{تعداد حالاتی که بهزاد و سینا هر دو در گروه هستند}\right)$$

$$=\binom{9}{5}-\binom{7}{3}=\frac{9!}{4!5!}-\frac{7!}{4!3!}=126-35=91$$

۱۴۴. (گزینه ۳) مجموع دو عدد طبیعی، زمانی زوج است که «هر دو فرد باشند» یا «هر دو زوج باشند».

در بین اعداد ۱ تا ۱۱، ۶ عدد فرد و ۵ عدد زوج داریم.

یک بار هر دو عدد باید فرد باشند: $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15$

یک بار هم هر دو باید زوج باشند: $\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10$

پس در کل ۱۰+۱۵ یعنی ۲۵ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

۱۴۵. (گزینه ۳) ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10$$

حالا از مدرسهٔ انتخابی اول، ۱ نفر از ۴ نفر انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{1}=4$

و باز هم همین کار را برای مدرسهٔ انتخابی دوم انجام می‌دهیم: $\binom{4}{1}=4$

و همین کار را برای مدرسهٔ سوم انجام می‌دهیم: $\binom{4}{1}=4$

طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\overset{\text{انتخاب ۳ مدرسه از بین ۵ مدرسه}}{10}\times\underset{\text{انتخاب ۱ دانش‌آموز از مدرسهٔ اول}}{4}\times\overset{\text{مدرسهٔ دوم}}{4}\times\underset{\text{مدرسهٔ سوم}}{4}=640$$

۱۴۶. (گزینه ۴) دو حالت داریم:

۱) با ۷ نقطهٔ بالا یک مثلث و با ۵ نقطهٔ پایین یک چهارضلعی بسازیم:

$$\binom{7}{3}\times\binom{5}{4}=\frac{7!}{4!3!}\times\frac{5!}{1!4!}=35\times5=175$$

۲) با ۷ نقطهٔ بالا یک چهارضلعی و با ۵ نقطهٔ پایین یک مثلث بسازیم:

$$\binom{7}{4}\times\binom{5}{3}=\frac{7!}{3!4!}\times\frac{5!}{2!3!}=35\times10=350$$

تعداد کل حالات بالا برابر است با: $175+350=525$

۱۴۷. (گزینه ۱) دو حرف M و N به همراه ۳ حرف دیگر، کلمات ۵حرفی تشکیل می‌دهند که تعداد آن‌ها برابر !۵ است. از طرفی ۳ حرفی که در مورد آن‌ها صحبت شد باید از بین ۴ حرف (A، S، U و R) انتخاب شوند که این کار به $\binom{4}{3}$ حالت مختلف انجام می‌گیرد. در نهایت طبق اصل ضرب به جواب خواهیم رسید: تعداد کلمات مطلوب: $5!\times\binom{4}{3}=120\times4=480$

۱۴۸. (گزینه ۴) از بین ۷ عضو، باید ۴ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!3!}=35$$

۱۴۹. (گزینه ۳) تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی یک مجموعهٔ ۷عضوی برابر است با: $\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2}=21$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی یک مجموعهٔ ۷عضوی برابر است با: $\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!3!}=35$

مجموع دو حالت بالا برابر است با: $21+35=56$

۱۵۰. (گزینه ۳) عدد ۴ را کنار می‌گذاریم. می‌ماند ۶ عدد دیگر:

$$\{1,2,3,\cancel{4},5,6,7\}$$

باید از بین این ۶ عدد، ۴ عدد انتخاب کنیم: $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5}{2}=15$

۱۵۱. (گزینه ۱) زیرمجموعهٔ ۴عضوی که شامل دو عدد ۶ و ۷ باشد به صورت مقابل است: $\{6,7,\bigcirc,\bigcirc\}$

عدد ۵ نباید در این زیرمجموعه باشد.

در نتیجه ۲تا جای خالی را باید از بین ۴ رقم $\{1,2,3,4\}$ انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$$

۱۵۲. (گزینه ۲) اعداد اول مجموعهٔ A عبارت‌اند از: $2,3,5,7,11,13$

چون قرار است زیرمجموعه شامل ۲ عدد اول باشد، پس باید از بین ۶ عدد بالا، ۲ عدد را انتخاب کنیم که می‌شود: $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15$

۱۵۳. (گزینه ۱) در مجموعهٔ $A=\{1,2,\dots,15\}$، ۸ عدد فرد و ۷ عدد زوج وجود دارد.

دو حالت داریم:

۱) برای نوشتن زیرمجموعهٔ ۳عضوی که همهٔ اعضای آن فرد باشند، باید ۳ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!۳!}=۵۶$$

۲) برای نوشتن زیرمجموعهٔ ۳عضوی که همهٔ اعضای آن زوج باشند، باید ۳ عضو از ۷ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!۳!}=۳۵$$

پس تعداد کل زیرمجموعه‌ها با این شرط برابر است با: $۵۶+۳۵=۹۱$

۱۵۴. گزینهٔ ۳ از اصل متمم کمک می‌گیریم:

متمم «حداقل یک عضو آن، زوج است» می‌شود «هر سه عضو آن فرد است.»

تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳عضوی برابر است با:

$$\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۹!۳!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶}=۲۲۰$$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که هر ۳ عضو آن فرد است، برابر است با:

$$\binom{\overset{\text{تعداد اعداد فرد از ۱ تا ۱۲}}{۶}}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴}{۶}=۲۰$$

پس تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل ۱ عضو آن زوج است برابر است با:

$$۲۲۰-۲۰=۲۰۰$$

۱۵۵. گزینهٔ ۲ مجموعهٔ A را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

$$B=\underbrace{\{۲,۳,۵,۷\}}_{\text{اعداد اول}},C=\underbrace{\{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰\}}_{\text{اعداد غیراول}}$$

زیرمجموعهٔ مورد نظر باید حداقل ۳تا از اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ را داشته باشد، پس دو حالت داریم:

حالت اول: ۳تا از مجموعهٔ B و ۲تا از مجموعهٔ C انتخاب کنیم:

$$\binom{۴}{۳}\binom{۶}{۲}=۴\times\frac{۶\times۵}{۲}=۴\times۱۵=۶۰$$

حالت دوم: ۴تا از مجموعهٔ B و یکی از مجموعهٔ C انتخاب کنیم:

$$\binom{۴}{۴}\binom{۶}{۱}=۱\times۶=۶$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $۶۰+۶=۶۶$

۱۵۶. گزینهٔ ۳ تک‌تک گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

۱) $C(n,۰)=\frac{n!}{(n-۰)!\times۰!}=\frac{n!}{n!}=۱$

۲) $C(n,۱)=\frac{n!}{(n-۱)!\times۱!}=\frac{n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=n$

۳) $P(n,n-۱)=\frac{n!}{(n-(n-۱))!}=\frac{n!}{(n-n+۱)!}=\frac{n!}{۱!}=n!$

۴) $P(n,۰)=\frac{n!}{(n-۰)!}=\frac{n!}{n!}=۱$

۱۵۷. گزینهٔ ۲ از دو رابطهٔ روبه‌رو باید استفاده کنیم:

$$\begin{cases}(۱)\ P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}\\[2mm](۲)\ C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}\end{cases}$$

مقدار $P(۸,۳)$ و $C(۸,۳)$ برابر است با:

$$P(۸,۳)=\frac{۸!}{۵!}$$

$$C(۸,۳)=\frac{۸!}{۵!۳!}$$

پس باید $P(۸,۳)$ را بر $۳!$ تقسیم کنیم تا با $C(۸,۳)$ برابر شود:

$$\frac{P(۸,۳)}{۳!}=C(۸,۳)$$

۱۵۸. گزینهٔ ۲ عبارت داده‌شده را با استفاده از فرمول‌های ترکیب و تبدیل باز می‌کنیم:

$$P(n,۲)-C(n,۲)=۳۶\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!}-\frac{n!}{(n-۲)!\times۲!}=۳۶$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}-\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}\times۲!}=۳۶$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۱}-\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب دو طرف در ۲}}۲n(n-۱)-n(n-۱)=۷۲$$

$$\Rightarrow۲n^۲-۲n-n^۲+n=۷۲\Rightarrow n^۲-n-۷۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}(n-۹)(n+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۹\ (\text{ق‌ق})\\n=-۸\ (\text{غ‌ق‌ق})\end{cases}$$

پس مقدار عبارت $C(n,۶)$ برابر است با:

$$C(n,۶)=C(۹,۶)=\frac{۹!}{۳!\times۶!}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}\times۷\times\cancel{۶!}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times۱\times\cancel{۶!}}=۸۴$$

۱۵۹. گزینهٔ ۳ می‌دانیم که فرمول‌های تبدیل و ترکیب به صورت زیر هستند:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ \text{و}\ C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

حالا به کمک دو فرمول بالا، عبارت‌های داده‌شده در متن معادله را باز می‌کنیم:

$$۲C(n,۵)=۳P(n-۱,۴)$$

$$\Rightarrow۲\times\frac{n!}{(n-۵)!۵!}=۳\times\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۴)!}$$

$$\Rightarrow\frac{۲(n)\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۵)!}۵!}=\frac{۳\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۵)!}}\Rightarrow\frac{۲n}{۵!}=۳$$

$$\Rightarrow۲n=۳\times۵!\Rightarrow۲n=۳\times۱۲۰\Rightarrow n=\frac{۳\times\overset{۶۰}{\cancel{۱۲۰}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۸۰$$

۱۶۰. گزینهٔ ۳ اگر n نقطه روی محیط یک دایره داشته باشیم با آن‌ها می‌توانیم $\binom{n}{۲}$ تا وتر بسازیم.

پس در این‌جا $\binom{n}{۲}$ برابر با ۵۵ شده است:

$$\binom{n}{۲}=۵۵\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۵۵\Rightarrow n^۲-n=۱۱۰$$

$$\Rightarrow n^۲-n-۱۱۰=۰\xrightarrow[\text{جمله‌مشترک}]{\text{تجزیه با اتحاد}}(n-۱۱)(n+۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۱۱\ \checkmark\\n=-۱۰\ \times\end{cases}$$

۱۶۱. گزینهٔ ۳ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

از طرفی تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی برابر است، پس در این‌جا باید تعداد زیرمجموعه‌های $n-۲$عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی برابر باشد.

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی یک مجموعهٔ nعضوی، ۴۵ شده:

$$\binom{n}{۲}=۴۵\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵\Rightarrow n^۲-n=۹۰$$

$$\Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترک}}(n-۱۰)(n+۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۱۰\ \checkmark\\n=-۹\ \times\end{cases}$$

۱۶۲. گزینه ۲

نکته اگر $\binom{n}{b}=\binom{n}{a}$ باشد، آن‌گاه $a=b$ یا $a+b=n$.

یعنی از تساوی $\binom{۲۲}{k}=\binom{۲۲}{۱۴}$، نتیجه می‌گیریم یا $k=۱۴$ است یا مجموع k و ۱۴ باید ۲۲ باشد:

$$k+۱۴=۲۲ \Rightarrow k=۸$$

۱۶۳. گزینه ۴

نکته $C(n,۲)=\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

از تساوی $\binom{۱۸}{k}=\binom{۱۸}{k+۴}$، نتیجه می‌گیریم مجموع k و $k+۴$ برابر ۱۸ است:

$$k+(k+۴)=۱۸ \Rightarrow k=۷$$

پس مقدار $C(k,۲)$ برابر است با:

$$C(۷,۲)=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

۱۶۴. گزینه ۳ با استفاده از دو فرمول روبه‌رو، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۱)\ C(n,r)=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}\\[2mm](۲)\ P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}\end{cases}$$

$$۲۶C(n+۳,۲)=P(n+۴,۳)$$

$$\Rightarrow ۲۶\times\frac{(n+۳)!}{(n+۳-۲)!\,۲!}=\frac{(n+۴)!}{(n+۴-۳)!}$$

$$\Rightarrow ۲۶\times\frac{\overset{۱}{\cancel{(n+۳)!}}}{۲\,\underset{۱}{\cancel{(n+۱)!}}}=\frac{(n+۴)\times\overset{۱}{\cancel{(n+۳)!}}}{\underset{۱}{\cancel{(n+۱)!}}} \Rightarrow \frac{۲۶}{۲}=n+۴$$

$$\Rightarrow ۱۳=n+۴ \Rightarrow n=۹$$