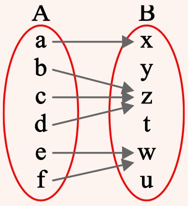
نمایش تابع در نمودار ون و زوج مرتب

✓ اگر A و B دو مجموعه باشند، رابطه‌ای که اعضای A را به B نسبت دهد، طوری که هر عضو A دقیقاً به یک عضو B نسبت داده شود، تابع است. (A دامنه، B هم‌دامنه)

✓ نمایش‌های اولیه تابع معمولاً به صورت زوج مرتب و نمودار پیکانی است.

+ مثال ۱



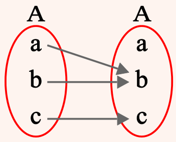
$$f : A \to B$$

$$\begin{cases} D_f = A \\ R_f = \{x, z, w\} \end{cases}$$

که به صورت زوج مرتب به صورت روبه‌رو است: $f = \{(a,y),(b,z),(c,z),(d,z),(d,z),(e,w),(f,u)\}$

✓ در حالتی که $f : A \to A$، یعنی دامنه و هم‌دامنه یکسان باشد در این صورت تابع f را در A تعریف کرده‌ایم.

+ مثال ۲



$$f : A \to A$$

✓ مجموعهٔ اول را دامنه می‌گویند، و از تمام اعضای آن باید فلش خارج شود، اما از یک عضو فلش تکراری خارج نشود.

✓ مجموعهٔ دوم را هم‌دامنه می‌گویند، لزومی ندارد که به تمام اعضای آن فلش وارد شود، به هر کدام که فلش وارد شد، برد را خواند ساخت

$R_f \subseteq B$

✓ اگر از مجموعهٔ اول، عضوی دو خروجی داشت، بایستی آن دو مساوی باشند.

+ مثال ۳ **در زوج مرتب روبه‌رو:** $f = \{(a,b),(a,c),(x,t),(y,f),(x,m)\}$

برای تابع بودن بایستی: ....

تست ۱ رابطهٔ $f = \{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m تابع است؟

۱) ۲- ‏ ‏ ۲) ۱- ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ۴) هیچ مقدار m

تست ۲ با حذف حداقل چند عضو از رابطهٔ $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}\ x^2 + y^2 \le 4\}$ رابطهٔ R به تابع تبدیل می‌شود؟

۱) ۱۰ ‏ ‏ ۲) ۹ ‏ ‏ ۳) ۸ ‏ ‏ ۴) ۷

تست ۳ چند تابع از مجموعهٔ ۴ عضوی A، به مجموعهٔ ۵ عضوی B می‌توان نسبت داد؟

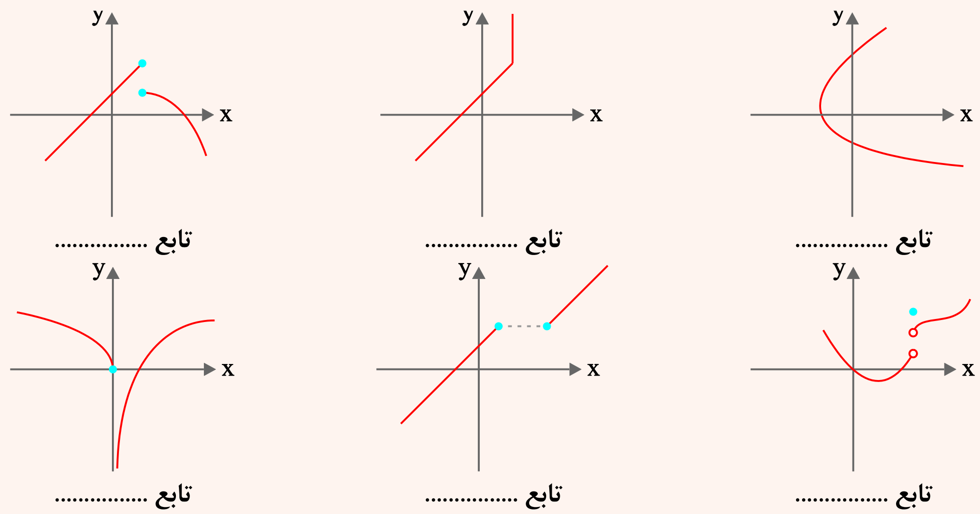
۱) ۲۰ ‏ ‏ ۲) $5! \times 4!$ ‏ ‏ ۳) 5^4 ‏ ‏ ۴) 4^5

نمودار تابع و مقداریابی تابع

✓ گاهی مواقع (که تعداد زوج مرتب‌ها زیاد است) از رسم نمودار تابع و نمایش نقاط استفاده می‌شود.

✓ در نمودار تابع، هیچ‌گاه خط موازی محور yها، تابع را بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند.

مثال ۴



✓ برای یافتن مقدار تابع که به صورت شماتیک توسط دستگاه نمایش داده می‌شود. کافی است در ضابطهٔ آن مقدار x مورد نظر را قرار داد:

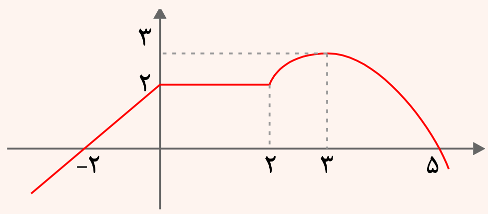
$$a \to \boxed{f} \xrightarrow{b} \Leftrightarrow f(a)=b$$

✓ برخی مواقع ضابطهٔ توابع به صورت دو ضابطه‌ای یا چند ضابطه‌ای مطرح می‌شود.

مثال ۵ در تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۰ \\ -x^{۲}-۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ مقادیر $f(f(f(۰))), f(f(۱)), f(۰), f(-۲), f(۱)$ را بیابید.

✓ برای قرائت مقادیرتابع روی نمودار مقدار عرض در تقاطع خط عمودی با نمودار تابع مد نظر خواهد بود.

مثال ۶ در نمودار روبه‌رو و مقادیر $f(f(۵)), f(۱), f(۳), f(-۱)$ را بیابید.



✓ برخی مواقع استفاده از اتحادهای اولیه در محاسبه کمک‌کننده است.

مثال ۷ در تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۲x+۵}{x^{۲}+۲x+۶}$ مقدار $f(-۱+\sqrt{۲})$ کدام است؟

تست ۴ اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ حاصل $f(f(f(\sqrt{۲})))$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۲

✓ برخی مواقع کافی است درون ورودی تابع را با مقدار خواسته شده در سؤال هماهنگ کنیم.

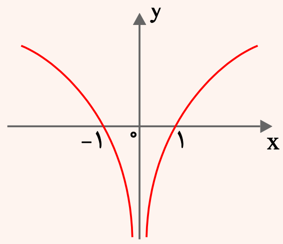
مثال ۸ اگر $f(۲x-۱)=\dfrac{۷x-۱}{x}$ مقدار $f(۵)$ و $f(۲)$ را بیابید.

مفهوم دامنه و تساوی تابع

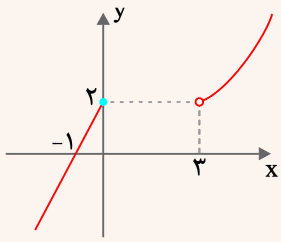
دامنهٔ تابع: مقادیر یا محدودهٔ مجاز برای ورودهای تابع است.

✓ بر روی نمودار تابع دامنه محدوده پوشیده‌ی تصوی تابع بر روی محور xها می‌شود.

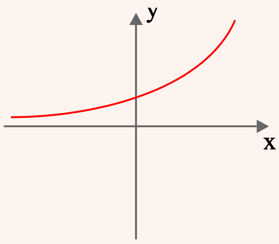
مثال ۹



$D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$



$D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$



$D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$

✓ در مورد ضوابط کسری: ریشه‌های مخرج جزو دامنه نیست: $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشهٔ مخرج}\}$

✓ در مورد رادیکال‌های فرجهٔ زوج: عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد: $\sqrt{U} \to U \geq ۰ , \frac{\text{صورت}}{\sqrt{U}} \to U > ۰$

✓ در مورد رادیکال‌های فرجه فرد: خودش به تنهایی مؤثر نیست بلکه آن چیزی که درون فرجه فرد است مهم می‌شود.

✓ در مورد توابع لگاریتمی: $\log_V^U$ بایستی: $\begin{cases} u > ۰ \\ v > ۰ \\ v \neq ۱ \end{cases}$

مثال ۱۰ دامنه توابع را تعیین کنید:

الف) $f(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۳ - ۳x^۲ + ۲x}$

ب) $f(x) = \dfrac{۲x + ۱}{\sqrt{۹x - x^۲}}$

پ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^۲ - ۱}{۴ - x}}$

ت) $f(x) = ۲\log_{(۲-x)}(x^۲ - ۹)$

✓ تساوی دو تابع: بایستی ضابطه آن‌ها (خروجی) یکسان باشد و دامنه‌ها نیز یکسان باشند.

مثال ۱۱ توابع $f(x) = \sqrt{\dfrac{۳ - x}{x + ۳}}$ و $g(x) = \dfrac{\sqrt{۳ - x}}{\sqrt{x + ۳}}$ مساوی ....

مثال ۱۲ توابع $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - ۳}{x + ۳}}$ و $g(x) = \sqrt{\dfrac{x - ۳}{x + ۳}}$ مساوی ....

مثال ۱۳ توابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۹}{x + ۳} & x \neq ۳ \\ -۶ & x = -۳ \end{cases}$ و $g(x) = x - ۳$ مساوی ....

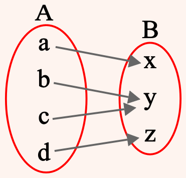
مثال ۱۴ توابع $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۲x}{x + ۲}$ و $g(x) = \dfrac{x^۲}{x}$ مساوی ....

موضوع برد تابع

✓ مقادیر خروجی تابع (یا محدودهٔ خروجی‌ها) را برد تابع می‌گوئیم.

✓ می‌دانیم که برد زیرمجموعهٔ هم‌دامنه است و اگر برد با هم‌دامنه برابر باشد تابع را پوشا می‌گوئیم.

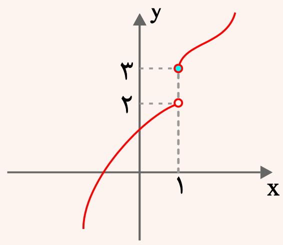
+ مثال ۱۵



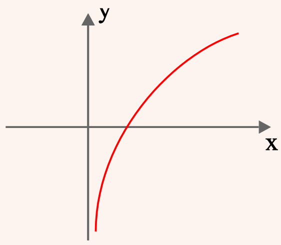
$f : A \to B$، برد با B برابر است.

✓ برد در روی نمودارها، از تصویر نمودار بر روی محور yها به دست می‌آید.

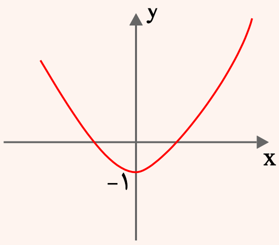
+ مثال ۱۶



$R_f =$ ....



$R_f =$ ....



$R_f =$ ....

✓ گرچه راه‌کار اساسی برای یافتن برد استفاده از کاربرد مشتق و تعیین اکسترمم‌های تابع است، اما در برخی موارد می‌توان برد را به کمک بررسی دامنه یا استفاده از اتحادها یا استفاده از نامساوی‌ها پیدا کرد.

✓ اتحادها یا نامساوی‌های مهم در یافتن برد:

الف) $U^2 \geq 0$ یا $(A \pm B)^2 \geq 0$

ب) $|U| \geq 0$

پ) $U + \dfrac{1}{U} \left| \begin{array}{l} \xrightarrow{U>0} \geq 2 \\ \xrightarrow{U<0} \leq -2 \end{array} \right.$

ت) در فرم‌های منتهی به درجه دوم $\Rightarrow \Delta > 0$

ث) $-1 \leq \sin u \leq 1$ و $-1 \leq \cos u \leq 1$

ج) $0 \leq A - [A] < 1$

+ مثال ۱۷ **برد تابع زیر را بیابید.**

الف) $f(x) = \sqrt{6x - 3[2x] + 5}$

ب) $f(x) = \sqrt{9 - 2\cos x}$

پ) $f(x) = 3^x + 3^{-x} + 5$

ت) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 1}$

ث) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - +1}$

چهار عمل اصلی در توابع

✓ منظور از چهار عمل اصلی، جمع و تفریق و ضرب و تقسیم توابع است.

✓ در تمام موارد اشتراک دامنه، موضوع اصلی است.

$D_{f+g}=D_f \cap D_g$ و $D_{f-g}=D_f \cap D_g$ و $D_{f.g}=D_f \cap D_g$ و $D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{g=0\}$ و

✓ محاسبات چهار عمل اصلی در حالتی که با زوج مرتب‌ها مواجه هستیم، روی مؤلفهٔ دوم انجام می‌شود.

مثال ۱۸ اگر $f=\{(2,5),(-1,3),(3,-2),(4,-2)\}$ و $g=\{(1,-3),(-1,4),(4,2),(3,-1),(-2,0)\}$ توابع زیر را تشکیل دهید:

الف) $2f+3g=$ ....

ب) $\dfrac{2f}{g-4}=$ ....

پ) $f^2-g=$ ....

✓ در حالتی که توابع به صورت ضابطه بیان شوند کافی است فقط ضوابط آن‌ها را با چهار عمل اصلی تشکیل دهیم. (با مقدمه دامنه)

مثال ۱۹ اگر $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ و $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}$ تابع $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ و دامنهٔ آن‌ها را مشخص کنید.

مثال ۲۰ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ x^3-1 & x\geq 1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}|x| & x\leq 1\\ \sqrt{x} & x\geq 1\end{cases}$ توابع $f-g$ و $\dfrac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

مثال ۲۱ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>1\\ x^3 & x\leq 1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 4\\ \sqrt[3]{x+4} & x<4\end{cases}$ تابع $f+g$ را تشکیل دهید.

مفهوم ترکیب توابع

✓ اگر عملیات متوالی را بر روی دو یا چند تابع انجام دهیم، ترکیب توابع را داریم:

$$a \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to g(f(a))$$

$$a \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to f(g(a))$$

مثال ۲۲ اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\begin{cases}-x^2 & x\geq 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ حاصل $f(f(g(0))$ و $(gof)(-1)$ و $(fog)(-4)$ را محاسبه کنید.

✓ در مورد زوج مرتب‌ها کافی، خروجی تابع درونی را به عنوان ورودی تابع بیرونی قرار دهیم.

مثال ۲۳ اگر $f=\{(2,-1),(-3,4),(-1,4),(0,5),(3,2)\}$ و $g(x)=\{(-4,2),(5,1),(3,-2),(4,1)\}$ توابع fog و gof را بیابید.

✓ در حالت ضابطه‌های چندگانه کافی است **خروجی مناسب** از تابع درونی را به جای ورودی در تابع بیرونی قرار دهیم.

مثال ۲۴ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ توابع fog و gof را بسازید.

اگر فرض کنیم شرایط دامنهٔ مهیا باشد، در ضابطه‌ها «**به جای x قرار دادن تابع**» به راحتی ضابطه ترکیب توابع را می‌دهد.

مثال ۲۵ اگر $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-3}$ و $g(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$ توابع fog و gof و fof را بیابید.

تست ۵ اگر $\begin{cases} f(x)=3x+a \\ g(x)=2x-1 \end{cases}$ و $(fog)_{(x)}=(gof)_{(x)}$ مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۱-

دامنه در ترکیب توابع

$$x \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{g} \longrightarrow (gof)(x)$$

✓ با توجه به دستگاه روبه‌رو

برای بررسی دامنه تابع $(gof)(x)$ بایستی مجموعهٔ روبه‌رو $D_{gof}=\{x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}$ و اشتراک بین محاسبات بررسی شوند. (معمولاً ابتدا دامنه f و g را می‌یابیم)

✓ در حالت بررسی دامنه $(fog)(x)$ هم خواهیم داشت: $D_{fog}=\{x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

مثال ۲۶ در توابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ و $g(x)=\dfrac{x+2}{4-x}$ دامنهٔ توابع fog و gof را محاسبه کنید.

مثال ۲۷ در توابع $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x-2}$ دامنهٔ fog و gof را محاسبه کنید.

مثال ۲۸ در توابع $f(x)=\sqrt{4-x}+1$ و $g(x)=\sqrt{x-2}$ دامنهٔ fog را محاسبه کنید.

✓ اگر اشتراک دو مورد بالا تهی بود، تابع fog و gof قابل تشکیل نیست.

✓ در مورد fof نیز همانند بالا محاسبه خواهد شد: $D_{fof}\{x\in D_f , f(x)\in D_f\}$

مثال ۲۹ اگر $f(x)=3x+2 \ (-1\le x\le 3)$ دامنهٔ fof را محاسبه کنید.

برد در نزدیک توابع

✓ برای یافتن برد تابع مثل $(fog)(x)$ ابتدا برد تابع $g(x)$ را می‌یابیم و سپس سؤال بازنویسی می‌شود، یعنی برد $g(x)$ را به عنوان محدودهٔ x به تابع f اعمال می‌کنیم تا برد تابع f را در این حالت بیابیم

مثال ۳۰ اگر $\begin{cases} f(x)=-x^2+4x \\ g(x)=x^2-2x \end{cases}$ برد تابع fog و gof را محاسبه کنید.

مثال ۳۱ اگر $\begin{cases} f(x)=-2\sin x+3 \\ g(x)=-x^2+4x \end{cases}$ برد تابع $(gof)(x)$ را محاسبه کنید.

مثال ۳۲ اگر $f(x)=2x-[2x]$ و $g(x)=-x^2+4x$ برد تابع $(gof)(3x)$ را محاسبه کنید.

مثال ۳۳ اگر $f(x)=\begin{cases} -1 & x<-1 \\ x & -1\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$ برد توابع gof و fog را محاسبه کنید.

مثال ۳۴ اگر $\begin{cases} f(x)=3x+1 \\ -2<x\le 2 \end{cases}$ برد تابع $fof(x)$ را محاسبه کنید.

یافتن تابع مجهول در ترکیب توابع

✓ در صورتی که در فرم‌های $f(g(x))$ یا $g(f(x))$ یکی از توابع f یا g مجهول سؤال باشند، تمرکز اصلی روی <u>تابع درونی</u> است. چه جزو داده‌ها باشد چه جزو مجهولات.

حالت اول) اگر تابع درونی مجهول باشد! ترکیب تابع ساخته می‌شود و با اطلاعات سؤال برابر قرار دهید.

+ مثال ۳۵ تابع $g(x)=3x^3+2$ و $g(f(x))=x^3-2$، تابع $f(x)$ را بیابید.

+ مثال ۳۶ اگر $g(x)=\dfrac{3x-2}{x-2}$ و $g(f(x))=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع $f(x)$ را بیابید.

+ مثال ۳۷ اگر $f=\{(-1,2),(2,3),(3,-2),(4,3)\}$ و $fog=\{(-1,3),(3,2),(6,-2)\}$ تابع $g(x)$ را بیابید.

حالت دوم: اگر تابع بیرونی مجهول باشد، معمولاً با نام‌گذاری قسمت درونی و یافتن x به جواب می‌رسیم. در این حالت دقت کنید که به راحتی بتوانیم تغییر نقش پارامترها را اجرا کنیم: مثلاً

$$\begin{cases} f(t)=t^3-4t \\ f(x)=x^3-4x \end{cases}$$

+ مثال ۳۸ اگر $g(x)=\dfrac{3x-2}{x-2}$ و $f(g(x))=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع f را بیابید.

+ مثال ۳۹ اگر $f(3x-1)=9x^2-6x+2$ تابع $f(x)$ را محاسبه کنید.

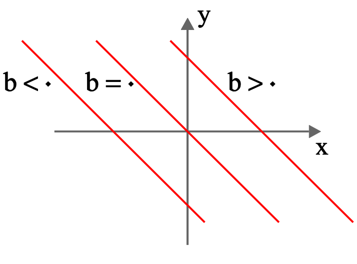
+ مثال ۴۰ اگر $f(x+\dfrac{1}{x})=x^3+\dfrac{1}{x^3}$ تابع $f(x)$ را محاسبه کنید.

تابع خطی

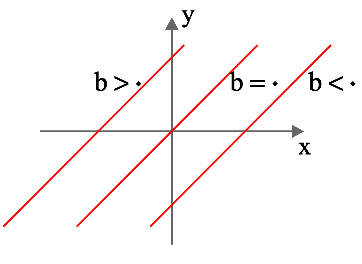
✓ جزو ساده‌ترین مدل‌های توابع، تابع خطی است و دو مؤلفهٔ اصلی در یافتن تابع خطی (همانند هندسهٔ تحلیلی) شیب خط و عرض از مبدأ آن است.

✓ فرم تابع خطی در حالت کلی به صورت $f(x)=ax+b \quad (a\neq 0)$ است.

✓ نمودار تابع خطی به صورت‌های زیر رسم می‌شود:



$(a<0)$

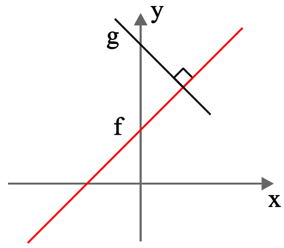


$(a>0)$

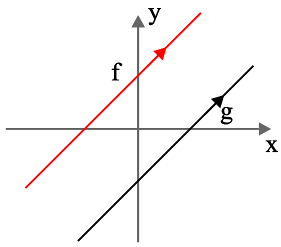
✓ برای یافتن تابع خطی، معمولاً داشتن دو نقطه (در ساده‌ترین حالت) کافی است. که در این صورت یا از طریق هندسه تحلیلی و پیدا کردن شیب خط و عرض از مبدأ کار می‌کنیم و یا از خواص تابع و حل دستگاه پارمترهای a و b را می‌یابیم.

+ مثال ۴۱ تابع خطی بنویسید که از دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$ و $B=\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$ بگذرد.

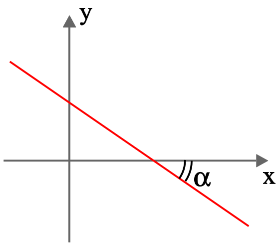
✓ گاهی مواقع موضوعات مرتبط با شیب خط همانند زاویه با محور xها و یا بحث‌های توازی و تعامد خطوط نیز مطرح می‌شود.



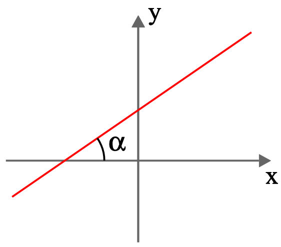
$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-1}{a}x + b \\ g(x) = ax + b' \end{cases}$



$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = ax + b' \end{cases}$



$a = -\tan\alpha$



$a = +\tan\alpha$

✓ گاهی مواقع توابع خطی به صورت خط خطی (یا قطعه‌ای) نیز بیان می‌شوند، در این حالت گرچه کلیت تابع را خطی نمی‌دانیم اما می‌توانیم آن را تکه‌ای خطی بنامیم.

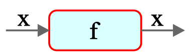
مثال ۴۲ تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \\ -2x + 3 & x \le 1 \end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را بیابید.

مثال ۴۳ اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \ge -1 \\ ax + b & x < -1 \end{cases}$ برد برابر $\mathbb{R}$ باشد و معادلهٔ $f(x) = k$ به ازای تمام مقادیر k فقط یک جواب داشته باشد حدود a و b را بیابید.

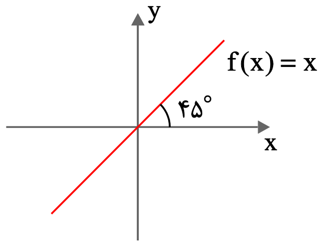
توابع همانی و ثابت

✓ یکی از حالت‌های خاص توابع خطی تابع همانی است.

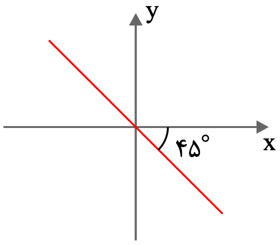
با ضابطهٔ $f(x) = x$



✓ در نگاه اول $D_f = R_f = \mathbb{R}$ است، اما در سؤالات مطرح شده گاهی این دامنه و برد توسط طراح محدود می‌شود.



✓ نمودار این تابع نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.

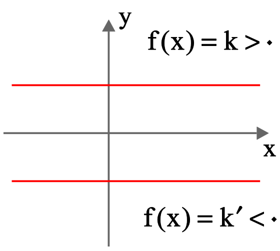


✓ بیشینهٔ تابع همانی، تابع $g(x) = -x$ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است.

تست ۶ اگر تابع $(x \ne -2)$ $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 2}$ تابع همانی باشد، $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

✓ تابع ثابت را نیز می‌توان حالت خاصی از توابع خطی (با شیب صفر) در نظر گرفت.



✓ تابع $f(x)=۰$، همان محور x را مشخص می‌کند.

مثال۴۴ تابع $f(x)=\frac{۴x-۲}{۲x-۱}$ را رسم کنید.

مثال۴۵ تابع $f(۱)=\{(-۱,a+۳b),(۰,۲-۳b),(-۳,۲b+۱)\}$ تابعی ثابت است. مقادیر a و b را بیابید.

مثال۴۶ اگر توابع f و g به ترتیب همانی و ثابت باشد و $f(۳).f(۴)+f(-۴)g(۲)=۸$ مقدار $g(۵)$ را بیابید.

تست ۷ نمونه: اگر $f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲$ تابعی ثابت باشد، برد آن کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{-۲}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{-۴}{۷}$

مثال۴۷ آیا شرایطی وجود دارد که ترکیب دو تابع خطی f و g که ثابت نیستند، تابعی ثابت شود؟