ریشهٔ nاُم

ریشهٔ nاُم a عددی است که اگر به توان n برسد برابر با a شود. مثلاً ریشهٔ سوم ۸ عددی است که اگر به توان ۳ برسد، برابر با ۸ می‌شود. می‌دانیم $۸ = ۲^۳$، پس ریشهٔ سوم ۸ برابر است با ۲ و این را به شکل $۲ = \sqrt[۳]{۸}$ می‌نویسیم. حال اگر بخواهیم ریشهٔ چهارم را -۷ محاسبه کنیم، معلوم است که هیچ عددی به توان ۴ برابر با -۷ نمی‌شود. پس عدد -۷ ریشهٔ چهارم ندارد. به همین ترتیب می‌توان گفت اعداد منفی، ریشهٔ زوج ندارند.

همچنین اگر بخواهیم ریشهٔ چهارم ۸۱ را بیابیم، معلوم است که $۸۱ = (\pm۳)^۴$، پس در واقع عدد ۸۱ دو ریشهٔ چهارم دارد. پس به طور کلی می‌توان گفت:

a	n فرد	n زوج
$a > ۰$	یک ریشهٔ nاُم دارد.	دو ریشهٔ nاُم دارد که قرینه هستند.
$a < ۰$	یک ریشهٔ nاُم دارد.	ریشهٔ nاُم ندارد.
$a = ۰$	ریشهٔ nاُم برابر صفر است.	

قرار داد: می‌دانیم اعداد مثبت دارای دو ریشهٔ زوج هستند که قرینه هستند. در این صورت $\sqrt[n]{\ }$ را برابر با مقدار مثبت ریشهٔnاُم در نظر می‌گیریم. مثلاً $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$ یا $\sqrt{۹} = ۳$ بنابراین ریشه‌های چهارم ۱۶ برابرند با $\pm\sqrt[۴]{۱۶}$

با توجّه به این‌که هر چه‌قدر عددی بزرگ‌تر باشد، ریشهٔ nاُم آن نیز بزرگ‌تر است، می‌توان برای تقریب ریشهٔ nاُم از این موضوع استفاده کرد. مثلاً می‌دانیم $۳۶ < ۲۹ < ۲۵$، پس: $۶ > \sqrt{۲۹} > ۵$ یا می‌دانیم $۱۲۵ > ۸۹ > ۶۴$، پس $۵ > \sqrt[۳]{۸۹} > ۴$.

نکته با توجّه به این‌که ۲۹ مربع کامل نیست و ۸۹ مکعب کامل نیست، $\sqrt{۲۹}$ و $\sqrt[۳]{۸۹}$ اعدادی گنگ هستند.

تست ۱ حاصل $[\sqrt[۳]{-۹۰}] + [\sqrt{۷۵}]$ کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۲»؛

$$۶۴ < ۷۵ < ۸۱ \to ۸ < \sqrt{۷۵} < ۹ \to [\sqrt{۷۵}] = ۸$$

$$-۱۲۵ < -۹۰ < -۶۴ \to -۵ < \sqrt[۳]{۹۰} < -۴ \to [\sqrt[۳]{۹۰}] = -۵$$

پس حاصل نهایی $۳ = ۵ - ۸$ است.

تست ۲ اگر حجم یک کره برابر ۱۰۰π باشد، شعاع آن بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

۱) ۲ و ۳ ۲) ۳ و ۴ ۳) ۴ و ۵ ۴) ۵ و ۶

پاسخ: گزینهٔ «۳»؛ می‌دانیم حجم کره‌ای به شعاع r، برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$، پس:

$$\frac{۴}{۳}\pi r^۳ = ۱۰۰\pi r \to r^۳ = \frac{۳۰۰}{۴} = ۷۵ \to r = \sqrt[۳]{۷۵}$$

می‌دانیم $۱۲۵ > ۷۵ > ۶۴$، پس $۵ > \sqrt[۳]{۷۵} > ۴$ است.

مثال ۱ اگر $۰ < a < ۱$ یا $a > ۱$ باشد، مقادیر $\sqrt[۴]{a}, \sqrt[۳]{a}, \sqrt{a}, a, a^۴, a^۳, a^۲$ را با هم مقایسه کنید.

پاسخ: به نمودار توابع زیر دقت کنید. با توجّه به نمودار برای $۰ < a < ۱$، داریم:

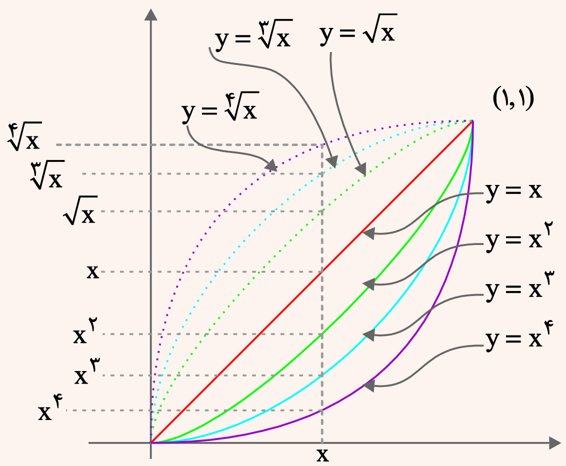
$$a^۴ < a^۳ < a^۲ < a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a}$$

یعنی اعداد بین صفر و یک هر چه‌قدر به توان بزرگ‌تر برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

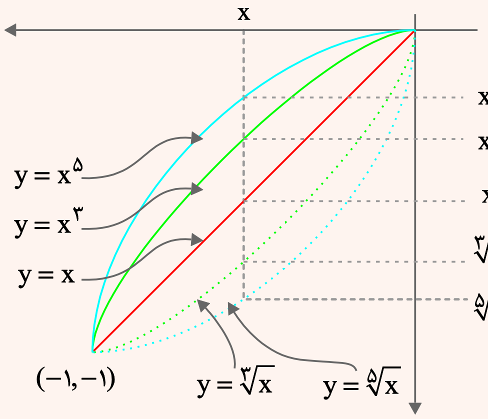
با رسم ادامهٔ نمودار هر یک از توابع برای مقادیر $a > ۱$ داریم:

$$\sqrt[۴]{a} < \sqrt[۳]{a} < \sqrt{a} < a < a^۲ < a^۳ < a^۴$$

یعنی اعداد بزرگ‌تر از یک هر چه‌قدر به توان بزرگ‌تر برسند، بزرگ‌تر می‌شوند.



مثال ۲ **اگر $۰ > a > ۱-$ یا $a < -۱$ باشد، مقادیر $a^۵, a^۳, a, \sqrt[۳]{a}, \sqrt[۵]{a}$ را با هم مقایسه کنید.**



پاسخ: به نمودار توابع زیر دقت کنید. با توجّه به نمودار برای $-۱ < a < ۰$، داریم:

$$\sqrt[۵]{a} < \sqrt[۳]{a} < a < a^۳ < a^۵$$

یعنی اعداد بین صفر و منفی یک هر چه‌قدر به توان بزرگ‌تر برسند، بزرگ‌تر می‌شوند.

با رسم ادامهٔ نمودار هر یک از توابع برای مقادیر $a < -۱$ داریم:

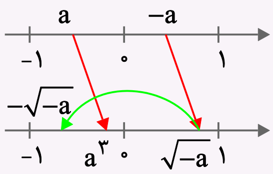
$$a^۵ < a^۳ < a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۵]{a}$$

یعنی اعداد کوچک‌تر از منفی یک هر چه‌قدر به توان بزرگ‌تر برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

تست ۳ **اگر $-۱ < a < ۰$ باشد، کدام عدد بزرگ‌تر است؟**

۱) $\frac{۱}{a}$ ۲) $-\sqrt{-a}$ ۳) $\sqrt[۳]{a}$ ۴) $a^۳$

پاسخ: گزینهٔ «۴»



در صورتی $-۱ < a < ۰$ باشد، $\frac{۱}{a} < -۱$ خواهد بود. بقیهٔ گزینه‌ها همگی بین صفر و منفی یک هستند. پس گزینهٔ «۱» جواب سؤال نیست. ضمناً با توجّه به این‌که $-۱ < a < ۰$ با توان‌های بزرگ‌تر، بزرگ‌تر خواهد بود، گزینهٔ «۴» از گزینهٔ «۳» بزرگ‌تر است. حال بین گزینهٔ ۲ و ۴ مقایسه می‌کنیم. چون $۰ < -a < ۱$ است، $-a < \sqrt{-a}$، پس طبق نمودار روبه‌رو $a^۳$ از $-\sqrt{-a}$ بزرگ‌تر است.

قوانین رادیکال‌ها

۱) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ۲) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ۳) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

در قوانین ۱ و ۲ اگر n زوج باشد، باید a و b مثبت باشند.

نکته اگر n فرد باشد: $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{-۱}\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a}$، یعنی عدد منفی از رادیکال با فرجه فرد خارج می‌شود.

تست ۴ **حاصل عبارت $\frac{۴\sqrt[۳]{۴۳۲} + ۳\sqrt[۳]{۲۰۰۰} - ۲\sqrt[۳]{۶۷۵۰}}{\sqrt[۳]{۱۶}}$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\sqrt[۳]{۴۳۲} = \sqrt[۳]{۲۱۶ \times ۲} = \sqrt[۳]{۶^۳ \times ۲} = ۶\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۲۰۰۰} = \sqrt[۳]{۱۰۰۰ \times ۲} = \sqrt[۳]{۱۰^۳ \times ۲} = ۱۰\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۶۷۵۰} = \sqrt[۳]{۳۳۷۵ \times ۲} = \sqrt[۳]{۱۵^۳ \times ۲} = ۱۵\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۱۶} = \sqrt[۳]{۸ \times ۲} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۲} = ۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$\rightarrow \frac{۴(۶\sqrt[۳]{۲}) + ۳(۱۰\sqrt[۳]{۲}) - ۲(۱۵\sqrt[۳]{۲})}{۲\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۲۴\sqrt[۳]{۲} + ۳۰\sqrt[۳]{۲} - ۳۰\sqrt[۳]{۲}}{۲\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۲۴\sqrt[۳]{۲}}{۲\sqrt[۳]{۲}} = ۱۲$$

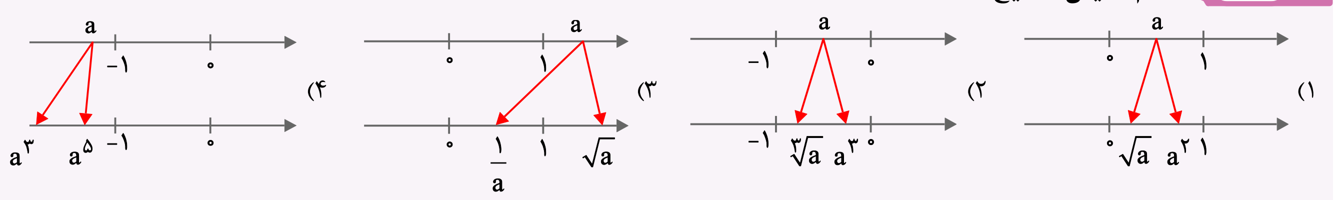
نکته مقادیر $\sqrt[n]{a}^{\,n}$ و a همواره با هم برابرند، البته به شرطی که در حالت n زوج، a نامنفی باشد.

نکته همچنین $\sqrt[n]{a^n}$ اگر n فرد باشد برابر است با a و اگر n زوج باشد، برابر است با $|a|$.

مثال ۳ مثال‌های زیر را ببینید:

$\sqrt[3]{(-5)^3}=\sqrt[3]{-125}=-5$ $\qquad$ $\sqrt[5]{2^5}=\sqrt[5]{32}=2$ $\qquad$ $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$ $\qquad$ $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{16}=2$

تست ۵ کدام نمایش صحیح است؟



پاسخ: گزینهٔ «۲»؛ اگر $0<a<1$ باشد، $a^2<a$ (نادرستی گزینهٔ ۱)

اگر $a>1$ باشد $\sqrt{a}<a$ (نادرستی گزینهٔ ۳)

اگر $a<-1$ باشد، $a^5<a^3$ (نادرستی گزینهٔ ۴)

تست ۶ اگر $0<a<1$ باشد، کدام عبارت مثبت است؟

۱) $\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}$ $\qquad$ ۲) $\sqrt{a}-\sqrt[3]{a+1}$ $\qquad$ ۳) $\sqrt[4]{a}-\frac{1}{a}$ $\qquad$ ۴) $\sqrt[4]{a}-a^4$

پاسخ: گزینهٔ «۴»؛ اگر $0<a<1$ باشد، $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$ پس عبارت گزینهٔ ۱ منفی است. ضمناً $a+1>1$ و از آن $\sqrt{a+1}>1$، پس عبارت گزینهٔ ۲ منفی است.

همچنین $\frac{1}{a}>1$ است، پس عبارت گزینهٔ ۳ منفی است. همچنین $\sqrt[4]{a}>a^4$ است، پس عبارت گزینهٔ ۴ مثبت است.

تست ۷ اگر برای عدد حقیقی $a=\frac{2m-1}{m+1}$ داشته باشیم: $\sqrt{-a}+a>0$ ، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-1<m<0$ $\qquad$ ۲) $-1<m<\frac{1}{2}$ $\qquad$ ۳) $0<m<\frac{1}{2}$ $\qquad$ ۴) $m<-1$

پاسخ: گزینهٔ «۳»؛

$$\sqrt{-a}+a>0\to\sqrt{-a}>-a\to 0<-a<1\to -1<a<0\to -1<\frac{2m-1}{m+1}<0$$

حال دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{2m-1}{m+1}<0\xrightarrow{\text{بین دو ریشه}}-1<m<\frac{1}{2}\quad (I)$$

$$-1<\frac{2m-1}{m+1}\to\frac{2m-1}{m+1}+1>0\to\frac{2m-1+m+1}{m+1}>0\to\frac{3m}{m+1}>0\xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}}m<-1 \text{ یا } m>0\quad (II)$$

اشتراک موارد I و II به صورت $0<m<\frac{1}{2}$ است.

تست ۸ ریشهٔ سوم عدد $64\sqrt[4]{8}$ را A می‌نامیم. اگر ریشهٔ سوم عدد AB، $\sqrt[4]{18}$ باشد، $[B^2]$ کدام است؟ (سه ۱۴۰۰ ت)

۱) ۱ $\qquad$ ۲) ۲ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»؛

$$A=\sqrt[3]{64\sqrt[4]{8}}=\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}=4\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}}=4\sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[3]{AB}=\sqrt[4]{18}\xrightarrow{\text{توان ۱۲}}(AB)^4=18^3\to B^4=\frac{18^3}{A^4}=\frac{18^3}{4^4\times 2}$$

$$=\frac{2^3\times 3^6}{2^9}=\frac{3^6}{2^6}=(\frac{3}{2})^6\to B^2=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}\to[B^2]=2$$

توان‌های گویا

عدد $a^{\frac{۱}{n}}$ را اگر $a \geq ۰$ باشد، به شکل $\sqrt[n]{a}$ تعریف می‌کنیم. به همین شکل $a^{\frac{m}{n}}$ را به شکل $\sqrt[n]{a^m}$ تعریف می‌کنیم. دقت کنید که برای اعداد منفی توان‌های گویا را تعریف نمی‌کنیم. مثلاً $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ تعریف شده نیست، ولی $\sqrt[۳]{-۸}$، ریشهٔ سوم -۸ (همان -۲) است.

قوانین توان های گویا:

۱) $a^m.a^n = a^{m+n}$

۲) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

۳) $a^m.b^m = (ab)^m$

۴) $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$

۵) $(a^m)^n = a^{mn}$

نکته از قانون ۱ داریم: $a \times a^{-۱} = a^{\circ} = ۱$ ، پس $a^{-۱} = \frac{۱}{a}$ ، به همین ترتیب می‌توان نشان داد $a^{-m} = \frac{۱}{a^m}$.

تست ۹ حاصل $۸۱^۳(۵۰ \times (\frac{۳^{-۲}}{۵})^۲)^۳$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$۸۱^۳(۵۰\times(\frac{۳^{-۲}}{۵})^۲)^۳ = (۳^۴)^۳(۵^۲\times ۲\times\frac{۳^{-۴}}{۵^۲})^۳ = ۳^{۱۲}\times(۲\times ۳^{-۴})^۳ = ۳^{۱۲}\times ۲^۳\times ۳^{-۱۲} = ۲^۳ = ۸$$

تست ۱۰ اگر $A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲\times\sqrt[۳]{۲^۴}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲\times ۲^{\frac{۴}{۳}}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^{۲+\frac{۴}{۳}}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{\frac{۱۰}{۳}}{۵}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۱۰^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۶}{۳}} = ۲^۲ = ۴$$

$$\rightarrow (۲A)^{-\frac{۱}{۳}} = ۸^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۸^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}} = \frac{۱}{۲}$$

تست ۱۱ مقدار $\sqrt[۳]{\frac{a^۸}{a\sqrt{a^۲}}}$ اگر $a < ۰$ باشد، برابر کدام است؟

۱) $a^۲$ ۲) $-a^۲$ ۳) $|a|$ ۴) $-|a|$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\sqrt[۳]{\frac{a^۸}{a\sqrt{a^۲}}} = \sqrt[۳]{\frac{a^۸}{a|a|}} = \sqrt[۳]{\frac{a^۸}{-a^۲}} = \sqrt[۳]{-a^۶} = -\sqrt[۳]{a^۶} = -a^{\frac{۶}{۳}} = -a^۲$$

تست ۱۲ **در کدام مرحله از گزارهٔ زیر، نتیجه‌گیری غلط است؟**

$$-۱ \overset{(۱)}{=} \sqrt[۳]{-۱} \overset{(۲)}{=} (-۱)^{\frac{۱}{۳}} \overset{(۳)}{=} (-۱)^{\frac{۲}{۶}} \overset{(۴)}{=} \sqrt[۶]{(-۱)^۲} = \sqrt[۶]{۱} = ۱$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»

در مرحلهٔ ۲ اشتباهی صورت گرفته است که منجر به نتیجهٔ غلط شده است. توان گویا فقط برای اعداد نامنفی تعریف می‌شود، یعنی $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ تعریف نمی‌شود.

تست ۱۳ **حاصل عبارت $\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\sqrt{۱+\sqrt{۷}}$ کدام است؟** *(تجربی داخل ۱۴۰۱)*

۱) ۱   ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) ۲   ۴) $۲\sqrt[۴]{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\sqrt{۱+\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^۲} = \sqrt[۴]{۱+۷+۲\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{۸+۲\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{۲(۴+\sqrt{۷})}$$

پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}} \times \sqrt[۴]{۲(۴+\sqrt{۷})} = \sqrt[۴]{۲(۴+\sqrt{۷})^{-۱}(۴+\sqrt{۷})} = \sqrt[۴]{۲}$$

تست ۱۴ **تساوی $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a}^n$ با چه شرایطی برقرار است؟ $(n \in \mathbb{N})$**

۱) n فرد   ۲) n زوج و مقدار نامنفی a
۳) گزینهٔ ۱ و ۲   ۴) با هر مقدار حقیقی a و هر مقدار طبیعی n

پاسخ: گزینهٔ «۳»

اگر n فرد باشد، هر دو طرف تساوی برابر با a هستند. اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a}$ فقط برای مقادیر نامنفی a تعریف شده است و همچنین $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است.

تست ۱۵ **ریشهٔ هفتم عدد مثبت a، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{۱۵}{۷}$ است. $(\frac{۱}{a}-۳)$ چند برابر $(۱+\sqrt{۳})$ است؟** *(تجربی داخل ۱۴۰۲ نوبت اول)*

۱) $۶-۳\sqrt{۳}$ ۲) ۳   ۳) ۶   ۴) $۶+۳\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$\sqrt[۷]{a} = ۲۷ \times a^{\frac{۱۵}{۷}} \xrightarrow{\text{توان ۷}} a = ۲۷^۷ \times a^{۱۵}$$

$$\rightarrow a = ۳^{۲۱} \times a^{۱۵} \rightarrow a^{۱۴} = ۳^{-۲۱} \rightarrow a = \sqrt[۱۴]{۳^{-۲۱}} = ۳^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\frac{\frac{۱}{a}-۳}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}-۳}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{۱+\sqrt{۳}} \times \frac{۱-\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}} = \frac{-۳(۳+۱-۲\sqrt{۳})}{۱-۳} = ۳(۲-\sqrt{۳}) = ۶-۳\sqrt{۳}$$

تست ۱۶ **اگر $A = \sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}$ باشد، حاصل $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$، کدام است؟** *(ریاضی خارج ۹۸)*

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ «؟»

$$A = \sqrt[۵]{۳^۲ \times ۳^{\frac{۱}{۲}}} \times (۳ \times ۲^۲)^{-۱/۵} = \sqrt[۵]{۳^{\frac{۵}{۲}}} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} \times ۲^{-۳} = ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} \times ۲^{-۳} = ۳^{-۱} \times ۲^{-۳} \rightarrow A^{-۱} = ۳ \times ۲^۳ = ۲۴$$

$$\rightarrow (۱+A)^{\frac{۱}{۲}} = ۲۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

تست ۱۷ ساده شده عبارت $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\times\sqrt[5]{16}}{2^{-\frac{7}{10}}}$ کدام است؟ (سه ۲ ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۳»؛

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{2\times 2^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}=2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2^4}=2^{\frac{4}{5}}$$

پس حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{4}{5}}}{2^{-\frac{7}{10}}}=\frac{2^{\frac{5+8}{10}}}{2^{-\frac{7}{10}}}=2^2=4$$

اتحادهای جبری

اتحاد یک تساوی است که به‌ازای تمام مقادیر حقیقی برقرار است. اتحادهای جبری شامل چند جمله‌ای هستند و تعداد زیادی دارند که تعدادی از پرکاربردترین آن‌ها را با هم مرور می‌کنیم.

نام اتحاد	اتحاد جبری
مربع دوجمله‌ای	$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
	$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
مکعب دوجمله‌ای	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
مزدوج	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
جملهٔ مشترک	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
چاق و لاغر	$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$
	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

چند تست کاربری از اتحادها

تست ۱۸ حاصل 49×51 کدام است؟

۱) ۲۵۰۱ ۲) ۲۵۹۹ ۳) ۲۴۹۹ ۴) ۲۳۹۹

پاسخ: گزینهٔ «۳»؛ از اتحاد مزدوج داریم:

$$51\times 49=(50+1)(50-1)=50^2-1^2=2500-1=2499$$

تست ۱۹ اگر $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}=3$ باشد، حاصل $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

عبارت‌های داده شده مزدوج یکدیگرند، با ضرب آن‌ها در هم داریم:

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4})=(x+2)-(x-4)=6\rightarrow(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4})(3)=6\rightarrow\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}=2$$

تست ۲۰ حاصل $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $2^{128}-1$ ۲) 2^{128} ۳) $2^{256}-1$ ۴) $2^{128}+1$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

با ضرب $(2-1)$ در عبارت داده شده داریم:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(2-1)(2+1)}_{2^2-1}(2^2+1)}_{2^4-1}(2^4+1)}_{2^8-1}\cdots(2^{64}+1)=2^{128}-1$$

تست ۲۱ فرض کنید $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ مقدار $(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2$، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2=((a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}))^2=((a+\frac{1}{a})^2-\sqrt{2}^2)^2=$$

$$(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2)^2=(a^2+\frac{1}{a^2})^2=a^4+\frac{1}{a^4}+2=7-4\sqrt{3}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}+2=$$

$$\frac{(7-4\sqrt{3})^2+1}{7-4\sqrt{3}}+2=\frac{49+48-8\sqrt{3}+1}{7-4\sqrt{3}}+2=\frac{98-56\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+2=\frac{14(7-4\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}+2=14+2=16$$

تست ۲۲ فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$، کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) $4(2+\sqrt{3})$ ۲) $4(2-\sqrt{3})$ ۳) $16(2+\sqrt{3})$ ۴) $16(2-\sqrt{3})$

پاسخ: گزینهٔ «۴»

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab))^2=((a^2+b^2)^2-(2ab)^2)^2=$$

$$(a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2)^2=(a^4+b^4-2a^2b^2)^2=(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\sqrt{\sqrt{6}-2}\sqrt{\sqrt{6}+2})^2=$$

$$=(2\sqrt{6}-2\sqrt{6-4})^2=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=2^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(6+2-2\sqrt{12})=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

تست ۲۳ حاصل $\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}-2$ ۴) $2+2\sqrt{5}-\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$9+4\sqrt{5}=9+2\sqrt{20}=(\sqrt{4}+\sqrt{5})^2=(2+\sqrt{5})^2\rightarrow\sqrt{9+4\sqrt{5}}=|2+\sqrt{5}|=2+\sqrt{5}$$

$$8-2\sqrt{15}=(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2\rightarrow\sqrt{8-2\sqrt{15}}=|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

پس حاصل نهایی برابر است با:

$$2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$$

نکته عبارت‌های $a\pm2\sqrt{b}$ را بعضاً می‌توان به شکل مربع کامل نوشت، اگر بتوان دو عدد حقیقی مانند y و x که مجموعشان a و حاصل‌ضربشان b باشد. در این صورت: $a\pm2\sqrt{b}=(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2$. این عبارت‌ها را رادیکال مرکب می‌نامیم.

مثال ۴ $11+\sqrt{112}$ را به شکل $11+2\sqrt{28}$ می‌نویسیم. حال اعدادی که حاصل‌جمع‌شان ۱۱ و حاصل‌ضرب‌شان ۲۸ است، ۷ و ۴ هستند. پس:

$$11+2\sqrt{28}=(\sqrt{4}+\sqrt{7})^2=(2+\sqrt{7})^2$$

تست ۲۴ **مجموع ارقام $۱۰۵^۳$ برابر کدام گزینه است؟** (کتاب درسی)

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۲۶ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ «۱»

با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(۱۰۰+۵)^۳ = ۱۰۰^۳ + ۳\times۱۰۰^۲\times۵ + ۳\times۱۰۰\times۵^۲ + ۵^۳ = ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱۵۰۰۰۰ + ۷۵۰۰ + ۱۲۵ = ۱۱۵۷۶۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱+۱+۵+۷+۶+۲+۵ = ۲۷$$

تست ۲۵ **معادلهٔ $x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۹ = ۰$ چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸ - ۱ = ۰ \to (x-۲)^۳ - ۱ = ۰ \to (x-۲)^۳ = ۱ \to x-۲ = ۱ \to x = ۳$$

پس این معادله فقط یک ریشه دارد.

نکته بد نیست بسط مکعب دوجمله‌ای‌های زیر را حفظ باشید:

$$(x+۱)^۳ = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱$$

$$(x-۱)^۳ = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱$$

$$(x+۲)^۳ = x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸$$

$$(x-۲)^۳ = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸$$

تست ۲۶ **فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱)(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱ + \sqrt[۳]{x^۲}) = ۲\sqrt[۳]{x}$، باشند. مقدار $x_۱ + x_۲$، کدام است؟** (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۴»

$$\frac{\sqrt[۳]{x^۴} + ۱ + \sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \times (\sqrt[۳]{x^۲} - ۱) = ۲\sqrt[۳]{x} \to \frac{(\sqrt[۳]{x^۴} + ۱ + \sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}} = ۲\sqrt[۳]{x} \to$$

$$\frac{x^۲ - ۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = ۲\sqrt[۳]{x} \to x^۲ - ۱ = ۲x \to x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a} = ۲$$

تست ۲۷ **تست: اگر $۲x + \frac{۱}{x} = ۴$ باشد، حاصل $۸x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$ کدام است؟**

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ «۳»

از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$A = ۸x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = (۲x)^۳ + (\frac{۱}{x})^۳ = (۲x + \frac{۱}{x})((۲x)^۲ + (\frac{۱}{x})^۲ - ۲)$$

از مربع عبارت $۲x + \frac{۱}{x}$ داریم:

$$(۲x + \frac{۱}{x})^۲ = (۲x)^۲ + (\frac{۱}{x})^۲ + ۴ \to ۴^۲ = (۲x)^۲ + (\frac{۱}{x})^۲ + ۴ \to (۲x)^۲ + (\frac{۱}{x})^۲ = ۱۲$$

$$\to A = ۴\times(۱۲ - ۲) = ۴۰$$

تجزیه

تجزیه یک عبارت به این معنی است که آن را به شکل حاصل‌ضرب چند عبارت بنویسیم. اگر عبارتی مثل $p(x)$ را به شکل $p(x)=f(x).h(x).g(x)...$ بنویسیم، عبارت‌های $f(x)$، $g(x)$ و ... را مقسوم‌علیه‌ها، عوامل یا شمارنده‌های $p(x)$ می‌نامیم و $p(x)$ را مضرب عبارت‌های $f(x)$، $g(x)$ و ... می‌نامیم.

یکی از مهم‌ترین روش‌ها در تجزیه عبارت‌ها، استفاده از اتحادهاست. مخصوصاً اتحادهای مزدوج، جمله مشترک و چاق و لاغر پرکاربردترین اتحادها در تجزیه عبارت‌ها هستند.

نکته مضرب عبارتی مثل $(x-2y)$ عبارت $5(x-2y)$ است. دقت کنید که $\sqrt{3}(x-2y)$ مضرب این عبارت نیست. در واقع ساده‌ترین مضرب هر عبارت مضرب صحیحی از آن عبارت است.

مثال ۵ **عبارت‌های زیر را تا جای ممکن تجزیه کنید.** (کتاب درسی)

۱) x^6-y^6

۲) $8a^3+27$

۳) a^3b^6-8

۴) x^2-5x+6

۵) x^4+x^2-2

پاسخ:

۱) $x^6-x^6 \overset{\text{مزدوج}}{=} (x^3)-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3) \overset{\text{چاق و لاغر}}{=} (x-y)(x^2+y^2+xy)(x+y)(x^2+y^2-xy)$

تذکر: می‌توانستید ابتدا با اتحاد چاق و لاغر عبارت‌ها را تجزیه کنید و سپس از اتحاد مزدوج استفاده کنید.

۲) $8a^3+27 \overset{\text{چاق و لاغر}}{=} (2a)^3+3^3=(2a+3)((2a)^2+3^2-2a\times 3)=(2a+3)(4a^2+9-6a)$

۳) $a^3b^6-8 \overset{\text{چاق و لاغر}}{=} (ab^2)^3-2^3=(ab^2-2)((ab^2)^2+2^2+ab^2\times 2)=(ab^2-2)(a^2b^4+4+2ab^2)$

۴) $x^2-5x+6 \overset{\text{جمله مشترک}}{=} (x-2)(x-3)$

۵) $x^4+x^2-2 \overset{\text{جمله مشترک}}{=} (x^2+2)(x^2-1) \overset{\text{مزدوج}}{=} (x^2+2)(x-1)(x+1)$

✓ در تجزیهٔ عبارت‌ها گاهی لازم است، عبارتی را کم و زیاد کنیم. مثلاً تجزیه عبارت x^4+4 را ببینید.

$$x^4+4+4x^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$$

تست ۲۸ **کدام عبارت از شمارنده‌های x^4+x^2+1 است؟**

۱) x^2+1

۲) x^2+x

۳) x^2+x-1

۴) x^2-x+1

پاسخ: گزینهٔ «۴»

عبارت x^2 را زیاد کم می‌کنیم:

$$x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2 \overset{\text{مزدوج}}{=} (x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

✓ در چند جمله‌ای‌ها حدس ریشه‌ها می‌تواند در تجزیه کمک‌کننده باشد. اگر چندجمله‌ای $p(x)$ دارای ریشهٔ a باشد، آن‌گاه بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. ($(x-a)$ یکی از عوامل آن است) در این صورت با تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$ می‌توان آن را تجزیه کرد.

تست ۲۹ **چندجمله‌ای x^3+x+10 بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟**

۱) x^2+2x-5 ۲) x^2+5x-2 ۳) x^2-2x+5 ۴) x^2+2x-5

پاسخ: گزینهٔ «۳»

راه حل ۱ اگر $x=-2$ را جای‌گذاری کنید، عبارت x^3+x+10، صفر می‌شود، پس عبارت داده شده بر $x+2$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x+10 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2-2x+5 \\ -2x^2+x+10 & \\ \underline{-\ \ 2x^2-4x} & \\ 5x+10 & \\ \underline{5x+10} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\to x^3+x+10=(x+2)(x^2-2x+5)$$

راه حل ۲ عدد ۱۰ را به صورت $2+8$ می‌نویسیم:

$$x^3+x+10=x^3+8+x+2=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)=(x+2)(x^2-2x+5)$$

تست ۳۰ **در تجزیه عبارت y^3+y^2-2 کدام عامل وجود دارد؟** (سه آ ۱۴۰۱)

۱) y^2+y+1 ۲) $y+2$ ۳) $y+1$ ۴) y^2+2y+2

پاسخ: گزینهٔ «۴»

معلوم است که $y=1$ ریشه این عبارت است، پس $y-1$ را از آن استخراج می‌کنیم:

$$y^3-1+y^2-1=(y-1)(y^2+y+1)+(y-1)(y+1)=(y-1)(y^2+y+1+y+1)=(y-1)(y^2+2y+2)$$

تست ۳۱ **عبارت x^4+2x^2+9 بر کدام‌یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟** (سه آ ۱۴۰۱)

۱) x^2+2x+3 ۲) $x+1$ ۳) $x-3$ ۴) x^2-2x-3

پاسخ: گزینهٔ «۱»

عبارت $4x^2$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$x^4+2x^2+9+4x^2-4x^2=x^4+6x^2+9-4x^2=(x^2+3)^2-(2x)^2=(x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$$

تست ۳۲ **در تجزیهٔ عبارت $x^5+1=(x+1).A(x)$ مجموع ضرایب $A(x)$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) -1

پاسخ: گزینهٔ «۱»

راه حل ۱ از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+1)$ (فرد $= n$)

پس: $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$\to A(x)=x^4-x^3+x^2-x+1\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}}1-1+1-1+1=1$$

راه حل ۲ در هر چندجمله‌ای مانند $A(x)$، مجموع ضرایب همان $A(1)$ است:

$$A(x)=\frac{x^5+1}{x+1}\to A(1)=\frac{2}{2}=1$$

ک.م.م عبارت‌های جبری

ک.م.م دو یا چند عبارت جبری حاصل‌ضرب **عوامل (شمارنده‌ها) مشترک و غیرمشترک** آن‌ها است. در واقع عبارت‌های مشترک را یک بار می‌نویسیم. عوامل هر عبارت از تجزیهٔ آن عبارت به دست می‌آید.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ک.م.م دو عبارت $x^۲-۴$ و $x^۲-۵x+۶$ را بیابیم. ابتدا هر دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

عامل مشترک

$$\begin{aligned}&x^۲-۴=\underset{\uparrow}{(x-۲)}(x+۲)\\&x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)\end{aligned}\xrightarrow{\text{ک.م.م}}(x-۲)(x+۲)(x-۳)$$

همان‌طور که می‌بینید ک.م.م دو عبارت لزوماً با حاصل‌ضرب آن‌ها برابر نیست. در صورتی ک.م.م دو عبارت برابر با حاصل‌ضرب آن‌هاست که عامل مشترک نداشته باشند.

نکته وقتی بین دو کسر مخرج مشترک می‌گیریم، ک.م.م مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک انتخاب می‌کنیم. در این صورت با محاسبات ساده‌تری روبه‌رو خواهیم بود.

تست ۳۳ **کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $x^۳+x^۲-۴x-۴$ و $x^۳-x^۲-۴x+۴$ کدام است؟**

۱) $x^۴-۵x^۲+۴$ ۲) $x^۴-۴x^۲-۵$ ۳) $x^۴+۵x^۲+۴$ ۴) $x^۴+۴x^۲-۵$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

ابتدا هر دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳+x^۲-۴x-۴=x^۲(x+۱)-۴(x+۱)=(x+۱)(x^۲-۴)=(x+۱)(x-۲)(x+۲)$$

$$x^۳-x^۲-۴x+۴=x^۲(x-۱)-۴(x-۱)=(x-۱)(x^۲-۴)=(x-۱)(x-۲)(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}}(x-۱)(x+۱)(x-۲)(x+۲)=(x^۲-۱)(x^۲-۴)=x^۴-۵x^۲+۴$$

تست ۳۴ **اگر $\frac{۳}{x^۲-x}=\frac{B}{x}+\frac{A}{x-۱}$ به‌ازای هر عدد حقیقی عضو مجموعه $R-\{۰,۱\}$ برقرار باشد، حاصل $A+۲B$ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ «۲»

راه حل ۱ سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم. چون کسرها عامل مشترک ندارند، ک.م.م آن‌ها حاصل‌ضرب‌شان است:

$$\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x}=\frac{۳}{x^۲-x}\to\frac{Ax+B(x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{۳}{x^۲-x}\to AX+B(x-۱)=۳\to(A+B)x-B=۳$$

چون تساوی به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی برقرار است، ضرایب جملات هم درجه در دو طرف تساوی با هم برابرند:

$$\text{ضریب } x=\text{ضریب } x\to A+B=۰\quad(*)$$

$$\text{عدد ثابت}=\text{عدد ثابت}\to -B=۳\to B=-۳\xrightarrow{*}A=۳\to A+۲B=-۳$$

راه حل ۲ چون تساوی به‌ازای هم اعداد حقیقی برقرار است، دو عدد دلخواه را در تساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x}=\frac{۳}{x^۲-x}\to\begin{cases}x=۲\to\frac{A}{۱}+\frac{B}{۲}=\frac{۳}{۲}\to ۲A+B=۳\\x=-۲\to\frac{A}{-۳}+\frac{B}{-۲}=\frac{۳}{۶}\to ۲A+۳B=-۳\end{cases}\xrightarrow{-}۲B=-۶\to B=-۳\to A=۳\to A+۲B=-۳$$

گویا کردن مخرج کسرها

اگر مخرج کسرها عدد یا عبارت گنگ (رادیکالی) باشد، عملیات‌های جبری و محاسباتی را سخت می‌کند. در این صورت سعی می‌کنیم مخرج کسرها را گویا کنیم. برای گویا کردن مخرج کسرها عموماً اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر راهگشا هستند. معمولاً در رادیکال‌های با فرجهٔ ۲، اتحاد مزدوج و در رادیکال‌ها با فرجهٔ ۳، اتحاد چاق و لاغر کاربردی هستند.

مثال ۶ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{۳}{۳+\sqrt{۷}}$ ۲) $\frac{۸}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}$ ۵) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt{۲}}$

پاسخ:

۱) $\frac{۳}{۳+\sqrt{۷}}\times\frac{۳-\sqrt{۷}}{۳-\sqrt{۷}}=\frac{۳(۳-\sqrt{۷})}{۹-۷}=\frac{۹-۳\sqrt{۷}}{۲}$

۲) $\frac{۸}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=\frac{۸(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}{۵-۳}=۴(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})=۴\sqrt{۵}-۴\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x}}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x}}{x-۸}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}=\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}{۷-۳}=\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۲۱}}{۴}$

۵) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۴}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{۱۶}+۴+۲\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۱۶}+۴+۲\sqrt[۳]{۴}}=\frac{(\sqrt[۳]{۲}+۲)(\sqrt[۳]{۱۶}+۴+۲\sqrt[۳]{۴})}{۴-۸}=\frac{(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۱۶}+۴+۲\sqrt[۳]{۴})}{-۴}$

تست ۳۵ اگر $\frac{a\sqrt{۲}+b\sqrt{۵}+c\sqrt{۱۰}+d}{۶}=\frac{۱}{۳+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}$ و a، b، c و d صحیح باشند، $\frac{ab}{c-d}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$\frac{۱}{۳+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}\times\frac{۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}=\frac{۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{(۳+\sqrt{۲})^۲-\sqrt{۵}^۲}=\frac{۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۹+۲+۶\sqrt{۲}-۵}=\frac{۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۶\sqrt{۲}+۶}$$

$$=\frac{۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۶(\sqrt{۲}+۱)}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{(۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۵})(\sqrt{۲}-۱)}{۶(۲-۱)}=\frac{۳\sqrt{۲}-۳+۲-\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}}{۶}=$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}-۱}{۶}\to a=۲,b=-۱,c=۱,d=-۱\to\frac{ab}{c-d}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

تست ۳۶ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}-۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}$، کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۶}}\times\frac{۵+\sqrt{۶}}{۵+\sqrt{۶}}=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱۲}+۱۵\sqrt{۳}+۳\sqrt{۱۸}}{۲۵-۶}=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}+۱۵\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۱۹}=\frac{۱۹\sqrt{۲}+۱۹\sqrt{۳}}{۱۹}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

$$(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=(\sqrt{۳}-۱)^{-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۳-۱}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$$

پس حاصل نهایی برابر است با:

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-۲(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲})=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱=\sqrt{۲}-۱$$

تست ۳۷ جزء صحیح عدد $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{200}}{\sqrt[4]{1024}-\sqrt{18}}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

گزینهٔ «۴»

$$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt[4]{1024}-\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{100\times 2}}{\sqrt[4]{2^{10}}-\sqrt{9\times 2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2^5}-3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=10$$

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}\simeq\sqrt{3+2(1/4)}=\sqrt{5/8}\simeq 2/4$$

$$\to[10-2/4]=7$$

تست ۳۸ به‌ازای چند مقدار طبیعی n، حاصل $\sqrt{n+7}+\sqrt{n-9}$ صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ «۲»؛ با گویا کردن این عبارت داریم:

$$\sqrt{n+7}+\sqrt{n-9}\times\frac{\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}}=\frac{n+7-(n-9)}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}}=\frac{16}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}}$$

اگر قرار باشد این عبارت صحیح باشد، باید مخرج آن یکی از اعداد زیر باشد:

$$\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 16$$

چون $\sqrt{n+7}>\sqrt{n-9}$ است، پس مخرج مثبت است و برابر با ۱، ۲، ۴ یا ۱۶ است:

۱) $\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}=1\to\sqrt{n+7}=1+\sqrt{n-9}\to n+7=1+n-9+2\sqrt{n-9}\to 15=2\sqrt{n-9}\to$

$\frac{15}{2}=\sqrt{n-9}\to n-9=\frac{225}{4}\to n=\frac{261}{4}\notin\mathbb{N}$

۲) $\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}=2\to\sqrt{n+7}=2+\sqrt{n-9}\to n+7=4+n-9+4\sqrt{n-9}\to 12=4\sqrt{n-9}\to\sqrt{n-9}=3\to n-9=9\to n=18$

۳) $\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}=4\to\sqrt{n+7}=4+\sqrt{n-9}\to n+7=16+n-9+8\sqrt{n-9}\to 8\sqrt{n-9}=0\to n=9$

۴) $\sqrt{n+7}-\sqrt{n-9}=16\to\sqrt{n+7}=16+\sqrt{n-9}\to n+7=256+n-9+32\sqrt{n-9}\to -240=32\sqrt{n-9}\to\sqrt{n-9}=\frac{-15}{2}$

پس فقط دو مقدار $n=9$ و $n=18$ صحیح است.

جمع‌بندی

ریشهٔ n اُم

✓ اگر a^n برابر b باشد، a را ریشهٔ nاُم b می‌نامیم.

✓ تعداد ریشه‌های nاُم عدد a:

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n زوج	۲	۱	۰
n فرد	۱	۱	۱

✓ اگر $a>0$ باشد و n زوج باشد، مقدار مثبت ریشهٔ nاُم a: $\sqrt[n]{a}$

✓ مقایسهٔ عدد و ریشه‌های آن

$a>1 \to \sqrt[3]{a}<\sqrt{a}<a<a^2<a^3$

$0<a<1 \to a^3<a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}$

$-1<a<0 \to \sqrt[5]{a}<\sqrt[3]{a}<a<a^3<a^5$

$a<-1 \to a^5<a^3<a<\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}$

✓ قوانین رادیکال‌ها

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

نکته: $\sqrt[n]{a^n}$ ← n فرد: a ؛ n زوج: $|a|$

❖ توان‌های گویا

✓ اگر $a\geq ۰$ ← $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

✓ قوانین توان‌های گویا

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$
$$a^m\times b^m=(ab)^m$$
$$\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$$
$$(a^m)^n=a^{mn}$$

❖ اتحادهای جبری

نام اتحاد	اتحاد جبری
مربع دو جمله‌ای	$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab$
	$(a-b)^۲=a^۲+b^۲-۲ab$
مکعب دو جمله‌ای	$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$
	$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$
مربع سه جمله‌ای	$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲bc+۲ac$
مزدوج	$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$
جملهٔ مشترک	$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$
چاق و لاغر	$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)$
	$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۳+b^۲+ab)$

✓ **رادیکال مرکب** ← $\underbrace{a}_{\text{جمع x و y}}\pm ۲\underbrace{\sqrt{b}}_{\text{ضرب x و y}}=(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^۲$

❖ تجزیه

- اتحادها
- کم و زیاد کردن
- حدس ریشه در چند جمله‌ای

$$p(x)\xrightarrow{\text{تجزیه}}p(x)=\underbrace{f_۱(x)\times f_۲(x)\times\dots}_{\text{شمارنده‌های p}}$$

مضرب $f_۱$ ، $f_۲$، ...

❖ ک.م.م عبارت‌های جبری ← حاصل‌ضرب عوامل غیرمشترک و مشترک با توان بزرگ‌تر

❖ گویا کردن مخرج کسرها

- رادیکال های با فرجهٔ ۲ ← ضرب در مزدوج
- رادیکال‌های با فرجهٔ ۳ ← ضرب در چاق یا لاغر

تست ۳۹ حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2})(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) -1 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) 1 ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

اگر $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$ فرض کنیم:

$$A^2=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\sqrt{9-5}=6-2\sqrt{4}=2\xrightarrow{A<0}A=-\sqrt{2}$$

پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}\times(-\sqrt{2})=\frac{-2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}+2}=-1$$

تست ۴۰ کسر $A=\frac{4}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+2$ با کدام گزینه معادل است؟

۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ ۳) $\sqrt[3]{24}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+2=\frac{4}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}\times\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}+2=\frac{4}{(3-1)}(\sqrt[3]{3}-1)+2=2\sqrt[3]{3}-2+2=2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}$$

تست ۴۱ اگر $a<a^3<a^4<a^2$ برقرار باشد، a در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(-\infty,-1)$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

اگر $0<a<1$ باشد، $a>a^2$ است، پس گزینهٔ «۱» غلط است.

اگر $a>1$ باشد، $a^4>a^2$ است، پس گزینهٔ «۲» غلط است.

اگر $a<-1$ باشد $a^3<a$ است، پس گزینهٔ «۴» غلط است.

دقت کنید که اگر $-1<a<0$ باشد، a^4,a^2 مثبت هستند و $a^4<a^2$ است.

تست ۴۲ اگر $(a+\sqrt{b})^3=c+54\sqrt{6}$ مقدار a^2-b+c کدام است؟ $(a,b,c\in\mathbb{N})$

۱) ۱۴۶ ۲) ۱۴۲ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۵۲

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$(a+\sqrt{b})^3=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}=a^3+3ab+(3a^2+b)\sqrt{b}$$

پس:

$$\begin{cases}b=6\\a^3+3ab=c\\3a^2+b=54\xrightarrow{b=6}3a^2=48\to a^2=16\xrightarrow{a\in\mathbb{N}}a=4\end{cases}$$

$$\to c=a^3+3ab=64+3\times4\times6=136$$

$$\to a^2-b+c=16-6+136=146$$