فصل سوم
تابع

بدون انگیزه که نمی‌شود درس خواند. نیاز داریم یک نفر هر روز بیاید قد سه ساعت و نیم به ما انگیزه بدهد بلکه بنشینیم چهارتا کلمه درس بخوانیم و پنج‌تا تست حل کنیم. بیاید از این حرف‌های خوشگل موشگِل بزند که موفقیت، رمز پیروزی است و پایان شب سیه سپید است و بُزک نمیر بهار میاد گُمبوزه با خیار میاد و اینا.

انگیزه‌ی خونمان کم شده دیگر. نیاز داریم یک نفر انگشت اشاره‌اش را به طرف ما بگیرد و شخصاً به شخص شخیصِ ما بگوید تو می‌توانی. خواستن، توانستن است، بلند شو جوون ایرانی و از این‌جور حرف‌های قشنگ مَشنگ.

این حرف‌ها حالمان را خوب، ذهنمان را سبک و قلبمان را زلال می‌کند. یک نیروی محرکه‌ای می‌شود برای تحریک انگیزه‌هایمان. اصلاً بیایید یک کمپینی راه بیندازیم به اسم «کنکور انگیزشی». هر یک ساعت یک بار به مدت نیم ساعت برویم جلوی آینه و حرف‌های خوب‌خوب به خودمان بزنیم. خوب که انگیزه گرفتیم، نیم‌ساعت بعد را برنامه‌ریزی کنیم. این‌طوری ما همیشه یک آدم باانگیزه‌ی برنامه‌داری هستیم که همیشه آماده است به برنامه‌اش عمل کند و ان‌شاا... وقتش که برسد، عمل می‌کند.

درس ۱ (قسمت اول)

آشنایی با برخی از انواع تابع

در این درس، ابتدا چیزهایی را که سال دهم در مورد تابع یاد گرفتیم، خیلی سریع مرور می‌کنیم و سپس به بررسی مفصل‌تر انواع تابع می‌پردازیم.

یادآوری و تکمیل تابع و مخلفات آن!

مفهوم تابع

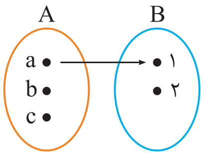
یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A **دقیقاً** یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را **دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع** می‌نامیم. **برد تابع**، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است و در واقع عضوهایی از آن را در بر می‌گیرد که عضوی از A به آن نظیر شده باشد.

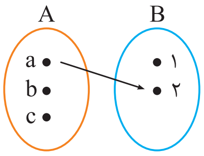
نمایش پیکانی

در نمایش پیکانی تابع، از هر عضو مجموعهٔ اول، یک پیکان خارج و به هر عضو مجموعهٔ دوم، یک یا چند پیکان وارد می‌شود. هیچ عضوی از مجموعهٔ اول نمی‌تواند بدون پیکان باشد، اما عضو یا عضوهایی از مجموعهٔ دوم می‌توانند پیکان نداشته باشند. مجموعهٔ اول، دامنه و مجموعهٔ دوم، هم‌دامنه است. برد، شامل عضوهایی از مجموعهٔ دوم است که پیکان دارند!

برای شمردن تعداد توابعی که از مجموعهٔ متناهی A به مجموعهٔ متناهی B می‌توان تعریف کرد، از نمایش پیکانی استفاده می‌کنیم. به این صورت که نگاه می‌کنیم هر عضو A را در حالت کلی یا تحت شرایط خاص موجود در مسئله، به چند عضو B می‌توان نظیر کرد. در نهایت با توجه به اصل ضرب، باید تعداد حالت‌های مربوط به تمام عضوهای A را در هم ضرب کنیم.

نکته! با روش بالا می‌فهمیم که اگر A دارای n و B دارای m عضو باشد، از A به B تعداد m^n تابع می‌توان تعریف کرد.





مثال اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲\}$ باشد، چند تابع از A به B می‌توان تعریف کرد؟

پاسخ عضو a از A را به چه عضوهایی از B می‌توانیم نظیر کنیم؟

خب ۱ یا ۲، یعنی برای a دو حالت داریم. برای b و c هم همین دو حالت را داریم.

$$\frac{\text{۲حالت}}{\text{عضو a}} \times \frac{\text{۲حالت}}{\text{عضو b}} \times \frac{\text{۲حالت}}{\text{عضو c}} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} ۲\times۲\times۲=۲^۳=۸$$

می‌خواهید ۸ تابع را ببینید؟ بفرمایید:

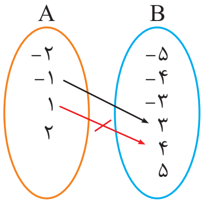
$f_۱=\{(a,۱),(b,۱),(c,۱)\}$ $\quad$ $f_۲=\{(a,۲),(b,۱),(c,۱)\}$

$f_۳=\{(a,۱),(b,۲),(c,۱)\}$ $\quad$ $f_۴=\{(a,۱),(b,۱),(c,۲)\}$

$f_۵=\{(a,۱),(b,۲),(c,۲)\}$ $\quad$ $f_۶=\{(a,۲),(b,۱),(c,۲)\}$

$f_۷=\{(a,۲),(b,۲),(c,۱)\}$ $\quad$ $f_۸=\{(a,۲),(b,۲),(c,۲)\}$

با توجه به نکته‌ای هم که در کادر بالا گفتیم، جواب همان $۸=۲^۳=n(B)^{n(A)}$ می‌شود!



مثال اگر $A\{\pm۱,\pm۲\}$ و $B=\{\pm۳,\pm۴,\pm۵\}$ باشد، چند تابع مانند f از A به B وجود دارد طوری که $f(-۱)=۳$ و $f(۱)\neq۴$ باشد؟

پاسخ عضو ۲- از A به چند عضو از B می‌تواند نظیر شود؟ خب به هر یک از ۶ عضو B!

عضو ۱- چطور؟ تکلیف این عضو مشخص است و فقط یک حالت دارد: باید به ۳ برود!

عضو ۱ چطور؟ به ۴ نرود، به هر کجا خواست برود! یعنی ۵ حالت.

عضو ۲ چطور؟ این هم مثل ۲- محدودیتی ندارد و ۶ حالته است.

$$\frac{\text{۶حالت}}{\text{عضو ۲-}} \times \frac{\text{۱حالت}}{\text{عضو ۱-}} \times \frac{\text{۵حالت}}{\text{عضو ۱}} \times \frac{\text{۶حالت}}{\text{عضو ۲}} \xRightarrow{\text{اصل ضرب}} ۶\times۱\times۵\times۶=۱۸۰$$

۱۸۰ تابع با ویژگی موردنظر می‌توان تعریف کرد!

نمایش زوج مرتبی

وقتی رابطهٔ R، عضو a از مجموعهٔ A را به عضو b از مجموعهٔ B نظیر می‌کند، می‌گوییم زوج مرتب (a,b) متعلق به این رابطه است. در واقع:

$R \subseteq \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

▽ در زوج مرتب (a,b)، a را **مؤلفهٔ اول** و b را **مؤلفهٔ دوم** می‌نامیم. اگر $a \neq b$ باشد، با عوض کردن جای این دو، زوج مرتب نیز عوض می‌شود:

$(a,b) \neq (b,a)$

▽ در نمایش زوج مرتبی تابع، مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های اول، دامنه و مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های دوم، برد تابع را تشکیل می‌دهند.

در نمایش زوج مرتبی، زمانی تابع داریم که تمام مؤلفه‌های اول متمایز باشند. اگر احیاناً مؤلفه‌های اول در دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی بودند، شرط تابع بودن این است که مؤلفه‌های دومشان هم مساوی باشند تا آن دو زوج مرتب کلاً با هم مساوی شوند.

نمایش جبری

اگر تابع f عضو a را به b نظیر کند یعنی $(a,b) \in f$، می‌نویسیم $f(a) = b$.

در واقع، $f(a)$ **مقدار تابع** f را به‌ازای a نشان می‌دهد.

اگر اعضای دامنه، طبق قانون مشخصی به اعضای هم‌دامنه نظیر شوند، به آن قانون ضابطه یا نمایش جبری تابع می‌گوییم: $y = f(x)$

معرفی تابع

کامل‌ترین شیوهٔ معرفی تابع f به صورت $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ است که در آن دامنه، هم‌دامنه و ضابطه مشخص شده است. A همان دامنهٔ تابع یعنی D_f است. B هم‌دامنه است و مجموعه‌های مختلفی می‌تواند باشد. مهم این است که برد یعنی R_f زیرمجموعهٔ هم‌دامنه باشد: $R_f \subseteq B$

مثال اگر $f = \{(4, 3m-2), (2,5), (4, m^2), (m,1)\}$ یک تابع باشد، برد آن چیست؟

پاسخ مؤلفه‌های اول در دو زوج مرتب $(4, 3m-2)$ و $(4, m^2)$ از f، با یکدیگر مساوی‌اند پس مؤلفه‌های دومشان هم باید مساوی باشد:

$3m - 2 = m^2 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1$ یا $m = 2$

اگر $m = 1$ باشد، آن‌گاه:

$f = \{(\underline{4,1}), (2,5), (\underline{4,1}), (1,1)\} = \{(4,1), (2,5), (1,1)\}$

در این حالت f تابع است و برد آن می‌شود: $\{1,5,1\} = \{1,5\}$

اگر $m = 2$ باشد، آن‌گاه:

$f = \{(\underline{4,4}), (2,5), (\underline{4,4}), (2,1)\} = \{(4,4), (2,5), (2,1)\}$

در این حالت، دو زوج مرتب $(2,5)$ و $(2,1)$ ظاهر می‌شوند که مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم غیریکسان دارند. این موضوع، تابع بودن f را منتفی می‌کند. پس $m = 2$ قبول نیست.

مثال برای تابع $\begin{cases} f: (-2,1] \to \mathbb{R}^+ \\ f(x) = x^2 + 1 \end{cases}$، کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز به همراه معرفی ضابطهٔ تابع، قابل قبول است؟

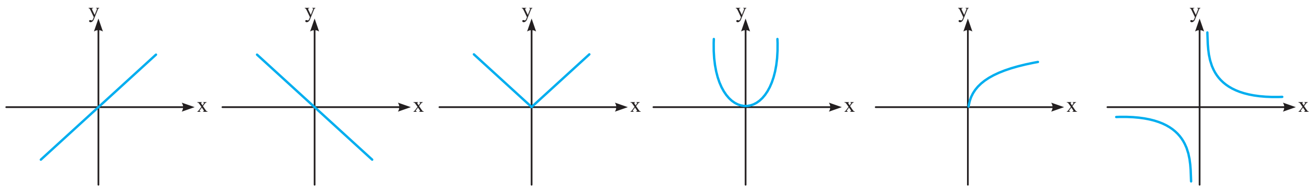
الف) $f: (-2,1] \to (5, +\infty)$
ب) $f: (-2,1] \to [1,10)$
ج) $f: (-2,1] \to (1, +\infty)$
د) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

پاسخ وقتی $x \in (-2,1]$ یعنی $-2 < x \leq 1$ آن‌گاه $0 \leq x^2 < 4$ و در نتیجه $1 \leq x^2 + 1 < 5$. پس $f(x) \in [1,5)$. در واقع، $f(x)$ تمام مقادیر بازهٔ $[1,5)$ را اختیار می‌کند و برد آن همین بازه است. هم‌دامنه، هر مجموعه‌ای شامل این بازه می‌تواند باشد. مثل $[1,10)$. در مورد (ج) دقت کنید که $x = 1$ در هم‌دامنه نیامده و در مورد (د) دقت کنید که با تغییر دامنه، کل تابع تغییر می‌کند. راستی کلاً منظورمان از $\mathbb{R}^+$، بازهٔ $(0, +\infty)$ و منظورمان از $\mathbb{R}^-$، بازهٔ $(-\infty, 0)$ است. فهمیدیم که نمایش (ب) مناسب است ولی سه مورد دیگر مناسب نیستند.

نمودار مختصاتی

زوج مرتب (a,b) از تابع f، یک نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. اگر تمام زوج مرتب‌های f را در نظر بگیریم و نقاط نظیرشان را در دستگاه مختصات معلوم کنیم، نمودار تابع f به‌دست می‌آید.

چند نمودار معروف ببینید:



$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$، $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f = [0, +\infty) \to [0, +\infty)$، $f(x) = \sqrt{x}$ | $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$، $f(x) = x^2$ | $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$، $f(x) = |x|$ | $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $f(x) = -x$ | $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $f(x) = x$

زمانی یک نمودار، نشان‌دهندهٔ تابع است که هیچ خط موازی محور yها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند! به عبارت دیگر، هر خط موازی محور yها، نمودار را در حداکثر یک نقطه قطع کند. چرا گفتیم حداکثر؟ چون اصلاً می‌تواند قطع نکند!

تصویر نمودار یک تابع بر روی محور xها، دامنهٔ تابع و تصویر نمودار تابع بر روی محور yها، برد تابع را می‌دهد.

نمایش ماشینی!

می‌توانیم تابع f را مثل ماشینی در نظر بگیریم که به آن ورودی x می‌دهیم و او به ما خروجی $f(x)$ می‌دهد. این هم برای خودش، تعبیری است!

$x \to \boxed{f} \to f(x)$

ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند. برای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی به‌دست می‌آید. البته ممکن است چند ورودی مختلف، خروجی یکسانی داشته باشند.

متغیر مستقل، متغیر وابسته

فرض کنیم x عنصری دلخواه از دامنهٔ تابع f است که توسط این تابع به عنصر y از هم‌دامنهٔ تابع نظیر می‌شود. $x \xrightarrow{f} y$

یعنی ماشین f به‌ازای ورودی x، خروجی y می‌دهد.

در این صورت x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامیم و می‌نویسیم $y=f(x)$. در واقع، متغیر y از طریق تابع f به متغیر x وابسته است.

یادآوری و تکمیل تبدیل نمودار توابع

انتقال عمودی: وقتی نمودار $y=f(x)$ را داریم، برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، باید $|k|$ واحد آن را در امتداد محور yها بالا یا پایین ببریم.

اگر $k>۰$ باشد، نمودار بالا می‌رود و اگر $k<۰$ باشد، نمودار پایین می‌رود.

همین!

انتقال افقی: وقتی نمودار $y=f(x)$ را داریم، برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، باید $|k|$ واحد آن را در امتداد محور xها به سمت چپ یا راست ببریم. اگر $k>۰$ باشد، نمودار به سمت چپ و اگر $k<۰$ باشد، نمودار به سمت راست می‌رود. حواسمان باشد که انتقال افقی در جهت عکس علامت k است!

قرینهٔ عمودی و افقی (انعکاس): اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم و بخواهیم نمودار $y=-f(x)$ را رسم کنیم، باید نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم (قرینهٔ عمودی، انعکاس عمودی) و اگر بخواهیم نمودار $y=f(-x)$ را رسم کنیم، باید نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم (قرینهٔ افقی، انعکاس افقی).

انبساط و انقباض عمودی: وقتی نمودار $y=f(x)$ را داریم و می‌خواهیم نمودار $y=kf(x)$ را رسم کنیم $(۰<k)$، عرض‌ها k برابر می‌شود.

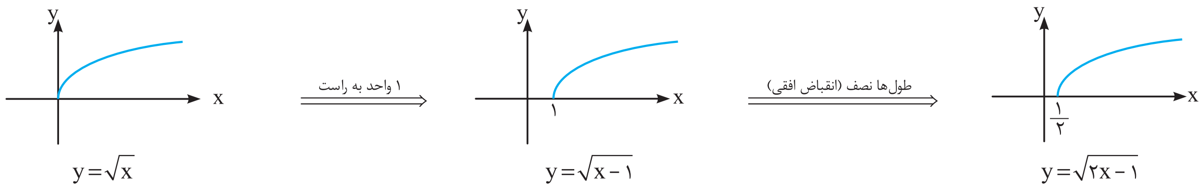
اگر $۱<k$ باشد، نمودار در راستای محور yها کشیده‌تر می‌شود (انبساط عمودی) و اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار در راستای محور yها فشرده‌تر می‌شود (انقباض عمودی).

اگر $k<۰$ باشد، علاوه بر این اتفاقات، نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود (قرینهٔ عمودی).

انبساط و انقباض افقی: وقتی نمودار $y=f(x)$ را داریم و می‌خواهیم نمودار $y=f(kx)$ را رسم کنیم $(۰<k)$، طول‌ها $\frac{۱}{k}$ برابر می‌شود. اگر $۱<k$ باشد، نمودار در راستای محور xها فشرده‌تر می‌شود (انقباض افقی) و اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار در راستای محور xها کشیده‌تر می‌شود (انبساط افقی). اگر $k<۰$ باشد، علاوه بر این اتفاقات، نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود (قرینهٔ افقی).

مثال نمودار $y=\sqrt{۲x-۱}$ را رسم کنید.

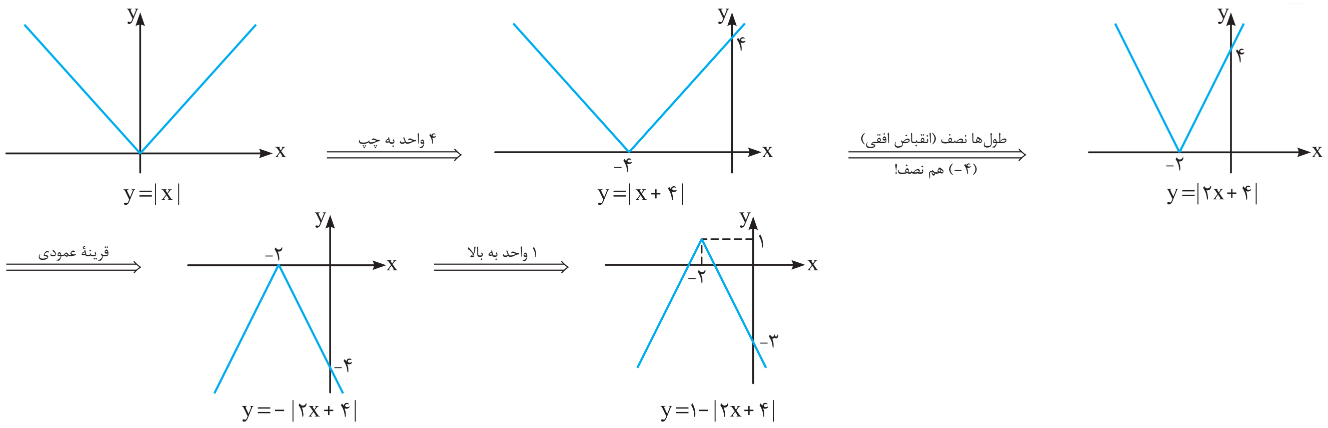
پاسخ



در واقع اگر فرض کنیم $f(x)=\sqrt{x-۱}$، تابع مورد نظر ما $f(۲x)$ است. به همین خاطر طول‌ها را نصف کردیم. حواسمان به $x=۱$ هم بود که وقتی نصف شد به $x=\frac{۱}{۲}$ تبدیل شد.

مثال مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع $y=۱-|۲x+۴|$ و محور xها را بیابید.

پاسخ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع $y=۱-|۲x+۴|$ و محور xها یک مثلث به ارتفاع ۱ است و برای پیداکردن طول قاعدهٔ آن لازم است طول نقاط برخورد نمودار با محور xها را پیدا کنیم:

$$y=۰ \Rightarrow ۱-|۲x+۴|=۰ \Rightarrow |۲x+۴|=۱ \Rightarrow ۲x+۴=\pm۱ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \text{ یا } x=-\frac{۳}{۲}$$

طول قاعدهٔ مثلث می‌شود $(-\frac{۳}{۲})-(-\frac{۵}{۲})=۱$ و مساحت آن برابر است با: $\frac{۱}{۲}\times۱\times۱=\frac{۱}{۲}$.

بگذارید یک جمع‌بندی نسبتاً خوشگل از تبدیلات داشته باشیم!

نمونه	نوع تبدیل	شرح تبدیل روی $y=f(x)$
$y=f(x)+۲$	انتقال عمودی	۲ واحد به طرف بالا
$y=f(x)-۲$	انتقال عمودی	۲ واحد به طرف پایین
$y=f(x+۲)$	انتقال افقی	۲ واحد به طرف چپ
$y=f(x-۲)$	انتقال افقی	۲ واحد به طرف راست
$y=۲f(x)$	انبساط عمودی	عرض‌ها ۲ برابر
$y=\frac{۱}{۲}f(x)$	انقباض عمودی	عرض‌ها نصف
$y=f(۲x)$	انقباض افقی	طول‌ها نصف
$y=f(\frac{۱}{۲}x)$	انبساط افقی	طول‌ها ۲ برابر
$y=-f(x)$	انعکاس عمودی	قرینه نسبت به محور xها
$y=f(-x)$	انعکاس افقی	قرینه نسبت به محور yها

توابع چندجمله‌ای

ضابطهٔ توابع چندجمله‌ای، به صورت روبه‌روست: $f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$

$a_n, a_{n-۱}, \dots, a_۲, a_۱, a_۰$ ضرایب چندجمله‌ای هستند و اعداد حقیقی‌اند. اگر $a_n \neq ۰$ باشد، $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نامیده می‌شود. در مورد n، دقت کنید که عددی حسابی (طبیعی یا صفر) است و مثلاً نمی‌تواند منفی یا کسری باشد. دامنهٔ توابع چندجمله‌ای در حالت کلی برابر $\mathbb{R}$ است ولی در مورد برد آن نمی‌توان نظر کلی داد. راستی اگر ضرایب اندیس‌دار دوست ندارید، ضابطهٔ تابع را به فرم $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\dots+kx+l$ در نظر بگیرید. والا!

مثال کدام‌یک از توابع $f(x)=\frac{x^۴}{۲}-\sqrt{۲}x^۳+x-۱$ و $g(x)=x^۳+x\sqrt{x}+۴$ چندجمله‌ای است؟ دامنهٔ آن را مشخص کنید.

پاسخ خب $f(x)$ تابع چندجمله‌ای و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است. در $g(x)$، $\sqrt{x}$ می‌بینیم و در نتیجه تابع چندجمله‌ای نیست.

تابع درجه صفر (ثابت): اگر $n=۰$ باشد، تابع چندجمله‌ای به صورت $f(x)=a$ درمی‌آید. بر این تابع، فقط یک عضو دارد (a) و چنین تابعی را **ثابت** می‌نامیم. نمودار مختصاتی این تابع، خط افقی (موازی محور xها) یا قسمت‌هایی از آن است.

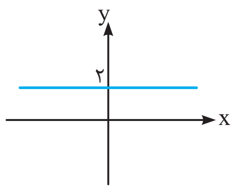
مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\{۲\} \\ f(x)=۲ \end{cases}$

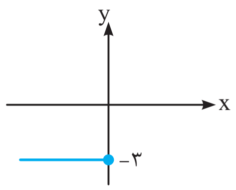
ب) $\begin{cases} f:(-\infty,۰]\to\{-۳\} \\ f(x)=-۳ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\{۰\} \\ f(x)=۰ \end{cases}$

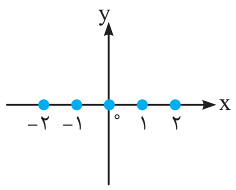
پاسخ بفرمایید:



(الف)

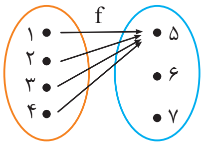


(ب)



(ج)

مثال تابع $\begin{cases} f:\{۱,۲,۳,۴\} \to \{۵,۶,۷\} \\ f(x)=۵ \end{cases}$ را با نمایش پیکانی نشان دهید.



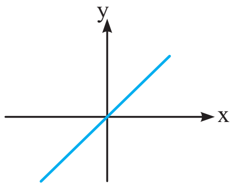
پاسخ همهٔ پیکان‌ها به ۵ وارد می‌شوند. برد تابع، $R_f=\{۵\}$ است.

تابع همانی: تابعی است که هر عضو از دامنه را به همان عضو در هم‌دامنه نظیر می‌کند. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=x$ می‌باشد و نمودار آن نیمساز ناحیهٔ اول و سوم یا قسمت‌هایی از آن است.

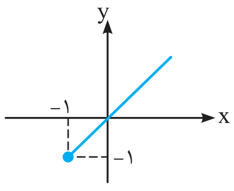
مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x)=x \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f:[-۱,+\infty) \to [-۱,+\infty) \\ f(x)=x \end{cases}$

پاسخ بفرمایید:



(الف)



(ب)

مثال درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه و برد تابع همانی با هم مساوی است.

ب) اگر دامنه و برد یک تابع با هم مساوی باشد، آن تابع همانی است.

پاسخ الف) درست است. از هر دست بِدی، از همون دست می‌گیری!

ب) درست نیست. این هم مهم است که هر عضو دقیقاً به خودش نظیر شود. مثلاً در تابع $y=x^۳$ دامنه و برد مساوی $\mathbb{R}$ است ولی این تابع همانی نیست.

تابع درجه یک (خطی): ضابطهٔ این توابع به صورت $f(x)=ax+b$ است و نمودار آن‌ها به شکل خط راستی با شیب a و عرض از مبدأ b می‌باشد. برای رسم نمودار این توابع، کافی است دو نقطه از آن‌ها را پیدا و به هم وصل کنید و از دو طرف ادامه دهید!

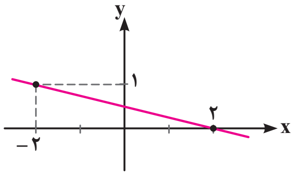
اگر ضابطهٔ تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم، داریم:

از رابطهٔ دوم به دست می‌آید $b=-۲a$ که با جای‌گذاری در رابطهٔ اول، داریم:

پس نمایش جبری تابع به صورت $f(x)=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

مثال تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ خطی است طوری که $f(-۲)=۱$ و $f(۲)=۰$. **نمودار تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.**

پاسخ دو نقطهٔ $(-۲,۱)$ و $(۲,۰)$ را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم:



$f(-۲)=۱ \Rightarrow -۲a+b=۱$

$f(۲)=۰ \Rightarrow ۲a+b=۰$

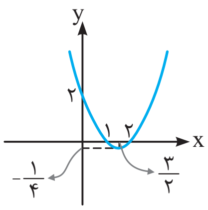
$-۲a-۲a=۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$

$b=-۲a=\frac{۱}{۲}$

تابع درجه دو: ضابطهٔ این توابع به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ است $(a\neq ۰)$ و نمودارشان همان سهمی‌ها هستند که قبلاً مفصلاً بررسی کرده‌ایم. اگر دامنهٔ این توابع محدود شده باشد، نمی‌توان در مورد بردشان نظر کلی داد. رسم نمودار، تکنیک مربع کامل کردن و توجه به رأس سهمی با مختصات $(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ در این زمینه مفید است. برد این توابع هیچ‌وقت $\mathbb{R}$ نمی‌شود!

مثال برد تابع $\begin{cases} f:[۰,۳)\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^۲-۳x+۲ \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ **روش اول:** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. این بهترین و مطمئن‌ترین روش تعیین برد است.



ضریب $x^۲$ مثبت $\Rightarrow$ ∪

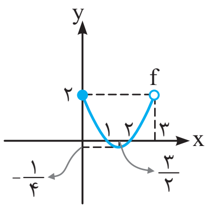
ریشه‌ها: $x=۱,۲$

عرض از مبدأ: $f(۰)=۲$

طول رأس سهمی: $-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$

عرض رأس: $f(\frac{۳}{۲})=\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۲=-\frac{۱}{۴}$

البته باید دامنه را به بازهٔ $[۰,۳)$ محدود کنیم:



تصویر نمودار روی محور yها، برد تابع f را می‌دهد.

$R_f=[-\frac{۱}{۴},۲]$

روش دوم: ضابطهٔ تابع را برحسب مربع کامل می‌نویسیم. برای این کار، از نصف ضریب x یعنی $-\frac{3}{2}$ استفاده می‌کنیم و $(x-\frac{3}{2})^2$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(x-\frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 2 = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 \Rightarrow f(x) = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

حالا از روی دامنه یعنی $0 \le x < 3$، این ضابطه را می‌سازیم:

$$0 \le x < 3 \xRightarrow{-\frac{3}{2}} -\frac{3}{2} \le x - \frac{3}{2} < \frac{3}{2} \xRightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \le (x-\frac{3}{2})^2 \le \frac{9}{4} \xRightarrow{-\frac{1}{4}} -\frac{1}{4} \le (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \le 2$$

حالت $f(x) = -\frac{1}{4}$ به‌ازای $x = \frac{3}{2}$ و حالت $f(x) = 2$ به‌ازای $x = 0$ اتفاق می‌افتد و $f(x)$ تمام مقادیر بازهٔ $[-\frac{1}{4}, 2]$ را اختیار می‌کند. برد تابع، همین بازه است.

این روش، حواس جمع می‌خواهد!

روش سوم: وقتی $a > 0$ است، سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ مینیمم دارد و مختصات پایین‌ترین نقطهٔ آن به صورت $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.

در این سؤال هم‌ضریب x^2 در $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مثبت است و این تابع مینیمم دارد. مینیمم آن در $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$ اتفاق می‌افتد که عضو بازهٔ $[0, 3)$ است. مقدار مینیمم هم می‌شود $-\frac{\Delta}{4a}$ یا به‌جای آن می‌توانیم $f(\frac{3}{2})$ را حساب کنیم:

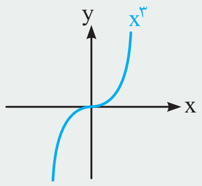
$$y_{min} = f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2}) + 2 = -\frac{1}{4}$$

همچنین $f(0) = f(3) = 2$ و $x = 0$ عضو دامنه است. با این حرف‌ها، برد تابع همان $[-\frac{1}{4}, 2]$ می‌شود.

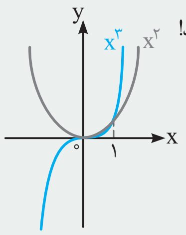
تابع درجه سه (مطالعه آزاد): ضابطهٔ این توابع به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

اگر دامنهٔ این توابع محدود نشده و همان $\mathbb{R}$ باشد، بردشان هم مساوی $\mathbb{R}$ خواهد بود. ساده‌ترین تابع درجه سوم، تابع $f(x) = x^3$ می‌باشد که نمودارش به شکل مقابل است:



نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه مختصات ببینید. این دو نمودار، در دو نقطه به طول‌های $x = 0, 1$ همدیگر را ملاقات می‌کنند! دقت کنید که در فاصلهٔ $(0, 1)$، نمودار $y = x^3$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار می‌گیرد.

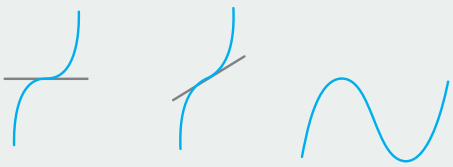


مثال به کمک رسم نمودار، مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^3 > x^2$ را مشخص کنید.

پاسخ فقط در بازهٔ $(1, +\infty)$، نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار می‌گیرد. مجموعه جواب نامعادله، همین بازه است!

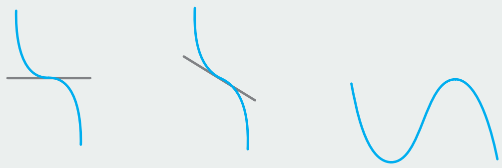
(مطالعه آزاد)

وقتی ضریب x^3 مثبت است، نمودار هر تابع درجه سوم به یکی از شکل‌های زیر است:



مثل $y=x^3$ — مثل $y=x^3+x$ — مثل $y=x^3-x$

اگر ضریب x^3 منفی باشد، نمودار تابع درجه سوم به یکی از شکل‌های زیر خواهد بود:



مثل $y=-x^3$ — مثل $y=-x^3-x$ — مثل $y=-x^3+x$

مطلب بالا صرفاً جهت اطلاع بود!

یادداشت مؤلف

تابع $y = x^3$ را در سال دوازدهم خواهید شناخت، ولی ما آن را اینجا معرفی کردیم. چون شناختن فرم‌های کلی توابع درجه سوم، در حل تست‌ها کمک کننده است.

توابع گویا

ضابطهٔ توابع گویا

توابع گویا، توابع کسری هستند که صورت و مخرجشان چندجمله‌ای است. در واقع، هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توجه توابع چندجمله‌ای هم جزو توابع گویا محسوب می‌شوند. در واقع، توابعی گویا با مخرج ۱ هستند.

مثال کدام گزینه، ضابطهٔ تابع گویا نیست؟

الف) $y=\frac{۱}{x^۲+x}$ ب) $y=\frac{\sqrt{۳}x-۱}{x^۳+۱}$

ج) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x^۲+x\sqrt{x}}$ د) $y=\frac{\sqrt{۳x}-۳}{\sqrt{۳}}$

پاسخ الف) گویاست!

ب) گویاست. اعداد ثابت موجود در ضابطه رادیکالی باشند، ایرادی ندارد.

ج) گویاست. ضابطهٔ تابع ساده می‌شود و رادیکال‌های شامل x از بین می‌روند.

$$y=\frac{\cancel{x+\sqrt{x}}}{x(\cancel{x+\sqrt{x}})}=\frac{۱}{x}$$

د) گویا نیست. x از زیر رادیکال، بیرون نمی‌آید!

دامنهٔ توابع گویا

کسرها به‌ازای ریشه‌های مخرجشان تعریف نشده‌اند.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x\,|\,Q(x)=۰\}$$

راستی دامنه را همیشه قبل از ساده کردن ضابطهٔ تابع تعیین کنیم. این مهم است که ضابطه دست نخورده باشد. هرچه مخرج دیدیم، باید مخالف صفر باشد.

مثلاً دامنهٔ تابع $y=\frac{x(x-۲)}{(x+۱)(x-۲)}$ می‌شود $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$. اگر ضابطه را ساده کنیم: $y=\frac{x}{x+۱}$ و از روی آن دامنه را تعیین کنیم، ممکن است به اشتباه بگوییم دامنهٔ تابع مساوی $\mathbb{R}-\{-۱\}$ می‌شود. حواسمان باشد!

مثال دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+\frac{۱}{x-۱}}{x^۲+\frac{۱}{x}}$ را بیابید.

پاسخ برای تعیین دامنهٔ $f(x)$، ریشهٔ تمام مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم. سه تا مخرج می‌بینیم:

$x-۱$ در کسر $\frac{۱}{x-۱}$: ریشهٔ این مخرج، $x=۱$ است.

x در کسر $\frac{۱}{x}$: ریشهٔ این مخرج، $x=۰$ است.

$x^۲+\frac{۱}{x}$ در کل کسر مربوط به $f(x)$: ریشهٔ این مخرج، $x=-۱$ است. ببینید:

$$x^۲+\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow x^۲=-\frac{۱}{x}\xrightarrow{x\neq ۰}x^۳=-۱\Rightarrow x=-۱$$

پس دامنهٔ $f(x)$ مساوی $\mathbb{R}-\{-۱,۰,۱\}$ است.

مثال اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۳-x+۱}{۳x^۲+ax+b}$ مساوی $\mathbb{R}-\{-۲,۵\}$ باشد، a و b را بیابید.

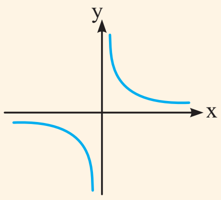
پاسخ خب -۲ و ۵ باید ریشه‌های مخرج باشند. هر عبارت درجه دوم با ریشه‌های α و β به فرم $a(x-\alpha)(x-\beta)$ است. در اینجا مخرج به شکل $(x+۲)(x-۵)$ یا ضریبی از آن است. آن ضریب چیست؟ همان ضریب $x^۲$ در $۳x^۲+ax+b$. در واقع، مخرج این شکلی است: $۳(x+۲)(x-۵)=۳(x^۲-۳x-۱۰)=۳x^۲-۹x-۳۰$

از مقایسهٔ عبارت بالا با $۳x^۲+ax+b$ می‌فهمیم که $a=-۹$ و $b=-۳۰$.

تابع $y=\frac{۱}{x}$

ساده‌ترین تابع گویا، همین $y=\frac{۱}{x}$ است. دامنه و برد این تابع، $\mathbb{R}-\{۰\}$ و نمودار آن به شکل روبه‌روست:

نمودار این تابع، محورهای مختصات را قطع یا از آن‌ها عبور نمی‌کند. بلکه در کنار آن‌ها به حرکت خود ادامه می‌دهد و در افق محو می‌شود!

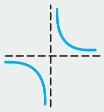
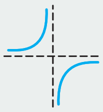
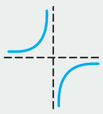
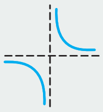


توابع هموگرافیک

توابع هموگرافیک، خوشگل‌ترین و کنکوری‌ترین نوع از توابع گویا هستند! ضابطهٔ این توابع، به شکل زیر است:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad (c\neq ۰\,,\,ad-bc\neq ۰)$$

در واقع، صورت کسر درجه اول یا عدد ثابت و مخرج، درجه اول است. شرط $ad-bc\neq ۰$ هم تضمین می‌کند که صورت و مخرج به گونه‌ای با هم ساده نمی‌شوند که تابع ثابت شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، ابتدا خطچین عمودی $x=-\frac{d}{c}$ و خطچین افقی $y=\frac{a}{c}$ را رسم کنید. نمودار تابع به یکی از دو شکل  یا  است که با توجه به مقدار عرض از مبدأ یعنی $f(۰)$ می‌توانید این موضوع را بفهمید. در واقع اگر $ad-bc>۰$ باشد، نمودار به فرم  و اگر $ad-bc<۰$ باشد، نمودار به فرم  خواهد بود.

مثال کدام دو تابع با هم برابرند؟

الف) $g=\{(۲,۴),(۱,۳)\}\ ,\ f=\{(۱,۴),(۲,۳)\}$

ب) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۴x \end{cases}\ ,\ \begin{cases} g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{۸x}{۲} \end{cases}$

ج) $f(x)=\sqrt{x^۲}\ ,\ g(x)=|x|$

د) $f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}\ ,\ g(x)=۱$

پاسخ الف) برابر نیستند. زوج‌های مرتب یکسانی نمی‌بینیم!

ب) برابر نیستند. ضابطه‌ها یکسان‌اند ولی دامنه‌ها یکسان نیستند. $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}^+$

ج) برابر هستند. ضابطه‌ها یکسان‌اند. $\sqrt{x^۲}=|x|$. دامنهٔ هر دو تابع هم $\mathbb{R}$ است.

د) برابر نیستند. ضابطه‌ها یکسان‌اند. $\frac{x+۱}{x+۱}=۱$ ولی دامنه‌ها یکسان نیستند. $f(x)$ به‌ازای ریشهٔ مخرج یعنی $x=-۱$ تعریف نشده است. $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۱، قسمت اول

کتاب محترم درسی

۵۰۶ توابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x<۰ \\ -۱ & x>۰ \end{cases}$ ، $g(x)=\frac{|x|}{x}$ و $h(x)=\frac{x-۱}{|x-۱|}$ مفروض‌اند. کدام مطلب درست است؟ (کتاب درسی)

۱) توابع f و g مساوی‌اند. ۲) توابع g و h مساوی‌اند. ۳) هر سه تابع با هم مساوی‌اند. ۴) توابع، دو به دو نابرابرند.

کنکورهای اخیر

۵۰۷ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $f(۳-x)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۵۰۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & x>۳ \\ ۲x+۳ & x\le ۳ \end{cases}$ ، مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

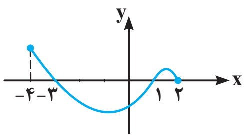
۵۰۹ اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در این بازه کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $[\frac{۲}{۳},۲]$ ۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ۴) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۵۱۰ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}$ ، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $x\le -۱$ ۲) $x\ge -۱$ ۳) $x\le ۱$ ۴) $x\ge ۱$

۵۱۱ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۲)



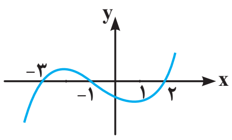
۱) $[۰,۲]$

۲) $[-۳,۲]$

۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$

۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۵۱۲ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $y=\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



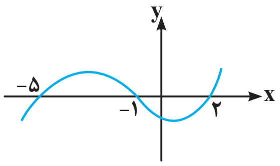
۱) $[-۳,۲]$

۲) $[-۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۱]$

۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

تست‌های بیشتر



۵۱۳ اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x}+\sqrt{f(x)}$ کدام است؟

۱) $[-۵,-۱]\cup[۲,+\infty)$
۲) $[۰,+\infty)$
۳) $[۲,+\infty)$
۴) $[۱,+\infty)$

۵۱۴ دامنهٔ تعریف تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۲,۳)$

۵۱۵ اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{(x-۱)(x+۲)^۳}{x(x+۱)^۲}}$ را به‌صورت $[a,b)\cup(c,۰)\cup[d,+\infty)$ بنویسیم، $۲a+b+c-d$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

۵۱۶ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\sqrt{x}-x}$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۰,۱\}$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-(۰,۱)$

۵۱۷ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۱۸ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x+۳}}$ کدام است؟

۱) $[-۱,+\infty)$ ۲) $[-۳,+\infty)$ ۳) $[-۳,-۱]$ ۴) $\varnothing$

۵۱۹ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-|x-۱|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۵

۵۲۰ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{||x-۱|-۳|-۲}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۵۲۱ دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{\sqrt{|x|-x}}$ برابر کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $[-۱,۰)$ ۴) $(-\infty,-۱]$

۵۲۲ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x+۳|x-۱|-۶}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۲۳ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{|x-۱|+|x+۲|-۳}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۲,۱)$ ۲) $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $\mathbb{R}$

۵۲۴ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۳}{۲x^۲-ax+b}$ مساوی $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ باشد، $a+۲b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۵۲۵ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۳-۱}{x^۲+ax+۱}$ مساوی $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $(-۲,۲)$

۵۲۶ اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{x+۱}{۲x^۲-ax+b}$ مساوی $\mathbb{R}-\{۳\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۳۰ ۴) -۳۰

۵۲۷ اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{ax^۲+x+۱}$ مساوی $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $۰<a$ ۲) $۰<a<۱$ ۳) $۰<a\le\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\le a$

۵۲۸ برد تابع $y=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۴\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۴\}$

۵۲۹ برد تابع $y = x - ۶\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳۶ ۴) ۹

۵۳۰ کمترین مقدار تابع $y = x - \sqrt{x} + ۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) صفر

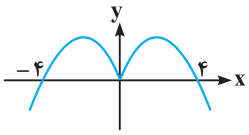
۵۳۱ برد تابع $y = \sqrt{x - |x|}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $[۰, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۰]$ ۴) $\{۰\}$

۵۳۲ برد تابع $y = \frac{۲x+۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{۱\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{۲\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{۱, ۲\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۵۳۳ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل روبه‌رو باشد، $\sqrt{\frac{۱}{f(x)}}$ به‌ازای چند عدد صحیح x تعریف شده است؟



۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۳۴ اگر دو تابع $f = \{(۱, b), (-۲, ۳), (۲, ۱)\}$ و $g = \{(a-۱, b), (۲, ۱), (b+۲, c+a)\}$ با هم برابر باشند، مقدار $\frac{b}{ac}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۵۳۵ تابع $f(x) = \sqrt{x|x|}$ با کدام‌یک از توابع زیر مساوی است؟

۱) $g(x) = x$ ۲) $g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$ ۳) $g(x) = \sqrt{x^۲}$ ۴) $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$

۵۳۶ در کدام گزینه، دو تابع داده‌شده با هم مساوی‌اند؟

۱) $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۲x + ۱}\ ,\ g(x) = x + ۱$

۲) $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱}\ ,\ g(x) = (\sqrt{x-۱}) \times (\sqrt{x+۱})$

۳) $f(x) = \frac{۱}{۱ - \sqrt{x}}\ ,\ g(x) = \frac{۱ + \sqrt{x}}{۱ - x}$

۴) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۱}}\ ,\ g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}}$

۵۳۷ در کدام گزینه، دو تابع داده‌شده با هم مساوی‌اند؟

۱) $f(x) = |x^۲ + x|\ ,\ g(x) = x|x+۱|$

۲) $f(x) = |x| + ۲\ ,\ g(x) = \frac{x^۲ - ۴}{|x| - ۲}$

۳) $f(x) = |x| - ۱\ ,\ g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{|x| + ۱}$

۴) $f(x) = \frac{|x+۱|}{x}\ ,\ g(x) = \frac{x+۱}{|x|}$

تست‌های بیشترترا!

۵۳۸ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \frac{\sqrt{۱ - \sqrt[۳]{x+۱}}}{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x+۱}}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) بی‌شمار ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۵۳۹ دامنهٔ تابع $y = \sqrt{-\frac{x}{۳} - ۲ + \sqrt{\frac{x}{۳} + ۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۵۴۰ دامنهٔ تابع $y = \frac{\sqrt{x(x^۲ - ۱)}}{\sqrt{|x| + x}}$ مجموعه‌ای از کدام xهاست؟

۱) $x > ۱$ ۲) $-۱ \leq x < ۰$ ۳) $۰ < x \leq ۱$ ۴) $x \geq ۱$

۵۴۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x}}}$ کدام است؟

۱) $[۰, +\infty)$ ۲) $[۱, +\infty)$ ۳) $[۰, \sqrt{۲})$ ۴) $\{۰\} \cup [۱, +\infty)$

۵۴۲ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{۲x^۲ + ax + ۲}$ مساوی $[۰, +\infty)$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $[۴, +\infty)$ ۲) $(-۴, +\infty)$ ۳) $(-۴, ۴)$ ۴) $\mathbb{R} - (-۴, ۴)$

۵۴۳ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+۲}{\sqrt{۲x^۲-۱۲x+b}}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{a\}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۵۴

۵۴۴ برد تابع $y=\dfrac{x}{۱+x^۲}$ با مجموعه جواب کدام نامعادله برابر است؟

۱) $|x|\le ۲$ ۲) $\dfrac{۲}{|x|}\ge ۱$ ۳) $۲|x|\le ۱$ ۴) $|x+۱|\le ۲$

۵۴۵ برد تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

۵۴۶ اگر برد تابع $y=x+\dfrac{۱}{x+۱}$ را به شکل $\mathbb{R}-(a,b)$ بنویسیم، $b-۲a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۵۴۷ حداقل و حداکثر مقدار تابع $y=x^۲+\dfrac{۴}{x^۲}$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) ۴، وجود ندارد ۲) وجود ندارد، ۴ ۳) صفر، ۴ ۴) ۴، ۸

۵۴۸ برد تابع $y=x+۵+\dfrac{۱}{x+۳}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(۰,۴)$ ۲) $[۰,۴]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $\mathbb{R}$

۵۴۹ برد تابع $y=\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۳}{۴},+\infty)$ ۲) $(-\infty,\frac{۳}{۴}]$ ۳) $[\frac{۳}{۴},۳)\cup(۳,+\infty)$ ۴) $[\frac{۳}{۴},۳)$

۵۵۰ برد تابع $y=\dfrac{x^۲+۵}{\sqrt{x^۲+۱}}$ کدام است؟

۱) $[۳\sqrt{۲},+\infty)$ ۲) $[\sqrt{۵},+\infty)$ ۳) $[۴,+\infty)$ ۴) $(۴,+\infty)$

۵۵۱ برد تابع $y=\sqrt{x+۵}-\sqrt{x+۱}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $(۰,۲]$ ۴) $(-\infty,\sqrt{۵}]$

۵۵۲ برد تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+۱}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۱]$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[۰,۱)$

۵۵۳ در صورتی که برد تابع f فاصلهٔ $(-\infty,۱-)$ بوده و تابع g روی $(-\infty,۱-)$ به وسیلهٔ $g(x)=\dfrac{f(x)-۱}{f(x)+۱}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه برد g کدام فاصله است؟

۱) $(-\infty,۱]$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

۵۵۴ برد تابع $y=\dfrac{x^۲}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $[۰,۴]$ ۲) $\mathbb{R}-(۰,۴)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-[۰,۴]$

۵۵۵ برد تابع $y=\dfrac{x+۳}{(x-۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[-\frac{۱}{۱۶},+\infty)$ ۳) $[-۱,+\infty)$ ۴) $[-\frac{۱}{۲۵},+\infty)$

۵۵۶ برد تابع $y=۲x+\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$ ۲) $[-۲,\sqrt{۵}]$ ۳) $[-\sqrt{۵},+\infty)$ ۴) $[-۲,+\infty)$

۵۵۷ برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۱+x^۲}{۲x}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-[-۱,۱]$

۵۵۸ برد تابع $f(x)=x-\sqrt{4-x^2}$ کدام فاصله است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $[-\sqrt{2},2]$ ۳) $[-2\sqrt{2},2]$ ۴) $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

۵۵۹ برد تابع $y=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{9},1]$ ۲) $(-\infty,\frac{1}{9}]\cup(1,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $[0,1)$

۵۶۰ برد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{x} & 0<x\\ x-1 & x\leq 0\end{cases}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۶۱ اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-x-1}{x-1} & x\neq 1\\ ax^2+a-1 & x=1\end{cases}$ و $g(x)=2x+1$ با هم برابر باشند، a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۵۶۲ اگر دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{3}{x-2}$ و $g(x)=\frac{ax-6}{bx^2+cx+d}$ با هم مساوی باشند، مقدار $\frac{cd}{a-b}$ کدام است؟ $(a\neq b)$

۱) ۸ ۲) -8 ۳) ۴ ۴) -4

یادداشت مؤلف

در بحث تابع، بعضی مطالب را در سال دهم نیز گفته بودیم. انصافاً این بار دیگر سؤال‌های تابع را خوب یاد بگیرید و قال قضیه را بکنید! نمودارها را بشناسید و از رسم نمودار توابع طفره نروید. بعداً نگید نگفتم!

۵۰۶ | ۴ دامنه‌ها را مقایسه کنیم:

$$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\quad,\quad D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\quad,\quad D_h=\mathbb{R}-\{۱\}$$

این هم ضابطه‌ها:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x<۰\\ -۱ & x>۰\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{x}=-۱ & x<۰\\ \dfrac{x}{x}=۱ & x>۰\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۱}{-(x-۱)}=-۱ & x<۱\\ \dfrac{x-۱}{x-۱}=۱ & x>۱\end{cases}$$

اگرچه دامنه‌های f و g با هم برابرند، اما ضابطه‌های آن‌ها یکسان نیست. هیچ دو تابعی (از میان سه تابع بالا) با هم برابر نیستند. تمام!

۵۰۷ | ۴

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow f(۳-x)=\sqrt{۲(۳-x)-(۳-x)^۲}$$

زیر رادیکال، نامنفی:

$$۲(۳-x)-(۳-x)^۲\geq ۰\Rightarrow(۳-x)(۲-(۳-x))\geq ۰$$

$$\Rightarrow(۳-x)(x-۱)\geq ۰$$

$$\xRightarrow{\text{تعیین علامت}}۱\leq x\leq ۳\Rightarrow D_{f(۳-x)}=[۱,۳]$$

۵۰۸ | ۴

$$f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲$$

$$f(f(۵))=f(۲)=۲\times ۲+۳=۷$$

$$f(۱)=۲\times ۱+۳=۵$$

$$f(f(۱))=f(۵)=۲$$

پس:

$$f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

۵۰۹ | ۴ **روش اول:** در عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}$، فرجه فرد و زیر رادیکال چندجمله‌ای است، پس دامنهٔ این عبارت می‌شود $\mathbb{R}$.

زیر رادیکال دوم نامنفی باشد:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{۲}{x^۲}\geq\frac{۹}{۲}\xRightarrow{x\neq ۰}۹x^۲\leq ۴\Rightarrow x^۲\leq\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow|x|\leq\frac{۲}{۳}\Rightarrow-\frac{۲}{۳}\leq x\leq\frac{۲}{۳}\quad,\quad x\neq ۰\Rightarrow D=[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$$

روش دوم (عددگذاری): عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ ۴، به‌ازای $x=۰$ تعریف نشده است، پس $x=۰$ به دامنهٔ عبارت تعلق ندارد. گزینهٔ (۲) رد شد. $x=۱$ هم باعث می‌شود زیر رادیکال منفی شود. پس $x=۱$ هم به دامنه تعلق ندارد. گزینه‌های (۱) و (۳) هم رد شد. گزینهٔ (۴) ماند!

۵۱۰ | ۳

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}\Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}$$

زیر رادیکال، نامنفی:

$$-x+|-x+۲|\geq ۰\Rightarrow|-x+۲|\geq x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x+۲\geq x\\ \text{یا}\\ -x+۲\leq -x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq ۱\\ \text{یا}\\ ۲\leq ۰\ \text{غیر ممکن}\end{cases}\Rightarrow x\leq ۱$$

۵۱۱ | ۴ زیر رادیکال نامنفی باشد: $xf(x)\geq ۰$

پس باید x و $f(x)$ هم‌علامت باشند. در سمت راست محور yها که $x\geq ۰$ است، نمودار تابع f در بازهٔ $[۱,۲]$ نامنفی است.

در سمت چپ محور yها هم که $x\leq ۰$ است، نمودار f در بازهٔ $[-۳,۰]$ نامثبت است.

پس دامنه می‌شود اجتماع این بازه‌ها. یعنی: $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۵۱۲ | ۴ زیر رادیکال نامنفی: ریشهٔ $x+۱=۰$ می‌شود -۱ و نمودار f محور xها را در -۳، -۱ و ۲ قطع می‌کند و در بازه‌های $(-۳,-۱)$ و $(۲,+\infty)$ بالای محور xها و در بازه‌های $(-\infty,-۳)$ و $(-۱,۲)$ زیر محور xها قرار دارد.

پس جدول تعیین علامت $(x+۱)f(x)$ این‌طور می‌شود:

x		−۳		−۱		۲	
x+۱	−		−	۰	+		+
f(x)	−	۰	+	۰	−	۰	+
(x+۱)f(x)	+	۰	−	۰	−	۰	+

پس:

$$(x+۱)f(x)\geq ۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$$

منظور سؤال از اینکه گفته تابع غیر نقطه‌ای، این است که دامنهٔ تابع شامل نقطهٔ منفرد -۱ نباشد.

پس دامنهٔ تابع می‌شود: $(-\infty,-۳]\cup[۲,+\infty)=\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۵۱۳ | ۳ زیر رادیکال‌ها، نامنفی:

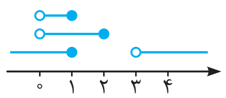
$$۰\leq x\quad,\quad ۰\leq f(x)$$

در بازه‌های $[-۵,-۱]$ و $[۲,+\infty)$، نمودار f بالای محور xهاست، یعنی $۰\leq f(x)$.

حالا اشتراک $x\geq ۰$ با این دو بازه، می‌شود $[۲,+\infty)$.

۵۱۴ | ۱ **روش اول:** زیر هر دو رادیکال، نامنفی:

$$\begin{cases}۰\leq\dfrac{x-۱}{x-۳}\Rightarrow x\leq ۱\ \text{یا}\ ۳<x\\ ۰\leq\dfrac{۲-x}{x}\Rightarrow ۰<x\leq ۲\end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}}۰<x\leq ۱\Rightarrow \text{دامنه}=(۰,۱]$$



روش دوم (عددگذاری): $x=۲$ زیر رادیکال اول را منفی می‌کند، پس در دامنه نیست و گزینه‌های (۲) و (۳) که این عدد را دارند رد می‌شوند.

$x=\frac{۱}{۲}$ زیر هیچ‌کدام از رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند، پس عضو دامنه است و گزینهٔ (۴) که این عدد را ندارد، رد می‌شود.

۵۱۵ | ۲ زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم و منفی‌ها را دور می‌ریزیم:

	−۲		−۱		۰		۱	
−	۰	+	‖	+	‖	−	۰	+

دامنهٔ تابع می‌شود: $[-۲,-۱)\cup(-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$. با توجه به‌صورت سؤال، $a=-۲$، $b=c=-۱$ و $d=۱$. پس $۲a+b+c-d=-۷$.

۵۱۶ | ۳ **روش اول:** به خاطر $\sqrt{x}$، باید $x\geq ۰$ و به خاطر $\sqrt{\sqrt{x}-x}$، باید:

$$۰\leq\sqrt{x}-x\Rightarrow x\leq\sqrt{x}\xRightarrow{\text{به توان ۲}}x^۲\leq x\Rightarrow x^۲-x\leq ۰$$

$$\Rightarrow x(x-۱)\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$$

اشتراک $x\geq ۰$ و $۰\leq x\leq ۱$ می‌شود بازهٔ $[۰,۱]$.

روش دوم (عددگذاری): تابع به‌ازای $x=\frac{۱}{۴}$ تعریف شده، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) که $\frac{۱}{۴}$ را شامل نمی‌شوند، پَر!

۵۱۷ | ۱ زیر هر دو رادیکال، نامنفی:

$$\sqrt{1-4x}\ :\ 0\le 1-4x \Rightarrow 4x\le 1 \Rightarrow x\le \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3-\sqrt{1-4x}}\ :\ 0\le 3-\sqrt{1-4x} \Rightarrow \sqrt{1-4x}\le 3$$

$$\Rightarrow 1-4x\le 9 \Rightarrow -8\le 4x \Rightarrow -2\le x$$

اشتراک $x\le \frac{1}{4}$ و $-2\le x$ می‌شود $-2\le x\le \frac{1}{4}$ که شامل ۳ عدد صحیح ۰، ۱- و ۲- است.

۵۱۸ | ۴ روش اول: به خاطر $\sqrt{x+1}$، باید $-1\le x$ و به خاطر $\sqrt{x+3}$، باید $x\ge -3$. همچنین به خاطر $\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}$، باید:

$$0\le \sqrt{x+1}-\sqrt{x+3} \Rightarrow \sqrt{x+3}\le \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow x+3\le x+1 \Rightarrow 3\le 1 \quad \text{غیرممکن}$$

دامنهٔ تابع تهی شد!

روش دوم (عددگذاری): تابع به‌ازای $x=-1$ تعریف نشده، پس سه گزینهٔ اول که ۱- را شامل می‌شوند، پَرا!

۵۱۹ | ۳ زیر رادیکال، نامنفی:

$$0\le 4-|x-1| \Rightarrow |x-1|\le 4 \Rightarrow -4\le x-1\le 4 \Rightarrow -3\le x\le 5$$

دامنهٔ تابع $[-3,5]$ است که ۹ عدد صحیح $-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$ را دارد.

۵۲۰ | ۲ برای پیداکردن دامنه، می‌گوییم زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$||x-1|-3|-2\ge 0 \Rightarrow ||x-1|-3|\ge 2$$

$$\Rightarrow |x-1|-3\le -2 \quad \text{یا} \quad 2\le |x-1|-3$$

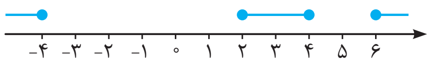
دو نامعادله را جدا حل می‌کنیم و دست آخر از جواب‌هایشان اجتماع می‌گیریم:

$$|x-1|-3\le -2 \Rightarrow |x-3|\le 1 \Rightarrow -1\le x-3\le 1 \Rightarrow 2\le x\le 4$$

$$2\le |x-1|-3 \Rightarrow |x-1|\ge 5 \Rightarrow x-1\le -5 \quad \text{یا} \quad 5\le x-1$$

$$\Rightarrow x\le -4 \quad \text{یا} \quad 6\le x$$

اجتماع همهٔ حرف‌های بالا را در شکل زیر ببینید:



اعداد صحیح $-3,-2,-1,0,1,5$ در منطقهٔ مطلوب ما نیستند، پس دامنهٔ تابع این ۶ عدد صحیح را شامل نمی‌شود.

۵۲۱ | ۴ روش اول: زیر دو رادیکال نامنفی، مخرج مخالف صفر! پس:

$$0\le x^2-1 \Rightarrow 1\le x^2 \Rightarrow x\le -1 \quad \text{یا} \quad 1\le x$$

$$0<|x|-x \Rightarrow x<|x| \Rightarrow x<0$$

دقت کنید که اگر $x\ge 0$ باشد، $|x|=x$ خواهد بود! حالا اشتراک نتایج بالا می‌شود $x\le -1$؛ پس دامنه $(-\infty,-1]$ است.

روش دوم (عددگذاری): $x=-2$ عضو دامنه است، پس سه گزینهٔ اول پَرا!

۵۲۲ | ۱ زیر رادیکال، نامنفی: $x+3|x-1|-6\ge 0$

ریشهٔ قدرمطلق $x=1$ است، پس برای برداشتن قدرمطلق دو فاصلهٔ زیر را جدا می‌کنیم:

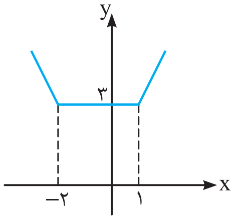
$$x\ge 1:\ x+3(x-1)-6\ge 0 \Rightarrow 4x\ge 9 \Rightarrow x\ge \frac{9}{4}$$

$$x<1:\ x+3(-x+1)-6\ge 0 \Rightarrow -2x\ge 3 \Rightarrow x\le -\frac{3}{2}$$

دامنهٔ تابع، $(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{9}{4},+\infty)$ است که ۴ عدد صحیح ۲، ۱، ۰ و ۱- را شامل نمی‌شود.

۵۲۳ | ۴ روش اول: زیر رادیکال، نامنفی: $|x-1|+|x+2|\ge 3$

با توجه به نمودار تابع $y=|x-1|+|x+2|$، نامساوی بالا همیشه برقرار است و دامنه می‌شود $\mathbb{R}$!



روش دوم (عددگذاری): $x=0$ در دامنه هست؟ زیر رادیکال را صفر می‌کند، پس هست! دو گزینهٔ اول، $x=0$ را ندارند و رد می‌شوند. $x=1$ در دامنه هست؟ زیر رادیکال را صفر می‌کند، پس هست! گزینهٔ (۳)، $x=1$ را ندارد و رد می‌شود. فقط گزینهٔ (۴) ماند!

۵۲۴ | ۴ مخرج باید دو ریشه داشته باشد: $x=1$ و $x=2$. یعنی به شکل $(x-1)(x-2)$ یا ضریبی از آن باشد. با توجه به مشاهدهٔ $2x^2$ در مخرج، می‌توانیم بگوییم آن ضریب ۲ است. یعنی مخرج این شکلی است:

$$2(x-1)(x-2)=2x^2-6x+4$$

از مقایسهٔ عبارت بالا با $2x^2-ax+b$ نتیجه می‌شود $a=6$ و $b=4$. پس $a+2b=14$.

۵۲۵ | ۴ مخرج نباید ریشه داشته باشد، یعنی دلتای آن منفی است:

$$\Delta=a^2-4<0 \Rightarrow a^2<4 \Rightarrow -2<a<2$$

۵۲۶ | ۳ مخرج باید فقط یک ریشه داشته باشد و آن هم $x=3$ است.

روش اول: $x=3$ مخرج را صفر می‌کند:

$$2\times 3^2-3a+b=0 \Rightarrow 3a-b=18$$

مخرج فقط یک ریشه دارد، پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow a^2-8b=0 \Rightarrow a^2=8b$$

از $3a-b=18$ نتیجه می‌شود $b=3a-18$، پس $a^2=8b$ می‌شود:

$$a^2=8(3a-18)\Rightarrow a^2-24a+144=0\Rightarrow (a-12)^2=0\Rightarrow a=12$$

$$b=3a-18=18 \Rightarrow a+b=30$$

روش دوم: $x=3$ ریشهٔ مضاعف مخرج است، پس مخرج به‌شکل $(x-3)^2$ یا ضریبی از آن است. آن ضریب چیست؟ ضریب x^2 در مخرج: ۲. پس مخرج به‌شکل $2(x-3)^2=2x^2-12x+18$ است. از مقایسهٔ این عبارت با مخرج نتیجه می‌شود $a=12$ و $b=18$. بنابراین $a+b=30$.

۵۲۷ | ۴ زیر رادیکال باید نامنفی باشد: $0\le ax^2+x+1$. اگر $a=0$ باشد، عبارت درجه‌اول می‌شود که می‌تواند منفی باشد. پس با شرط $a\ne 0$ می‌رویم جلو. برای این که این عبارت درجه‌دوم همواره نامنفی باشد، باید دلتای آن نامثبت و ضریب x^2اش مثبت باشد:

$$\begin{cases}\Delta\le 0\Rightarrow 1-4a\le 0\Rightarrow \frac{1}{4}\le a\\ \text{ضریب } x^2 \text{ مثبت} \Rightarrow 0<a\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{1}{4}\le a$$

۵۲۸ | ۴

$$y=\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2} \Rightarrow y=x-2 \quad (x\ne -2)$$

برد تابع خطی $y=x-2$ مساوی $\mathbb{R}$ است اما x نمی‌تواند مساوی ۲- باشد، پس y هم مقدار $-2-2=-4$ را اختیار نمی‌کند. یعنی برد تابع مساوی $\mathbb{R}-\{-4\}$ است.

۵۲۹ | ۴ روش اول: مربع کامل می‌کنیم! نصف ضریب $\sqrt{x}$ مساوی ۳- می‌شود، پس $(\sqrt{x}-۳)^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y=x-۶\sqrt{x}=(\sqrt{x})^۲-۶\sqrt{x}$$

$$y=((\sqrt{x})^۲-۶\sqrt{x}+۹)-۹=(\sqrt{x}-۳)^۲-۹$$

حالا برای هر $x\geq ۰$ (عضو دامنهٔ تابع) داریم:

$$(\sqrt{x}-۳)^۲\geq ۰ \Rightarrow (\sqrt{x}-۳)^۲-۹\geq -۹$$

یعنی برد تابع مساوی $[-۹,+\infty)$ است که ۹ عدد صحیح منفی را شامل می‌شود.

روش دوم: x را برحسب y می‌نویسیم. برای این کار، جملهٔ شامل $\sqrt{x}$ را یک طرف تنها می‌گذاریم تا دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$y=x-۶\sqrt{x}\Rightarrow x-y=۶\sqrt{x}$$

همین‌جا دقت کنید که به خاطر $\sqrt{x}$ باید $x\geq ۰$ باشد و از طرفی چون $x-y$ مساوی عبارت نامنفی $۶\sqrt{x}$ شده، باید $x-y\geq ۰$ و در نتیجه $y\leq x$ حالا دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x-y)^۲=۳۶x\Rightarrow x^۲-۲xy+y^۲=۳۶x\Rightarrow x^۲-(۲y+۳۶)x+y^۲=۰$$

معادله‌ای درجه‌دو برحسب x! برای وجود x باید Δ نامنفی باشد:

$$\Delta=۴(y+۱۸)^۲-۴y^۲=۴((y+۱۸)^۲-y^۲)$$

$$\Delta\geq ۰\Rightarrow (y+۱۸)^۲-y^۲\geq ۰\Rightarrow ۳۶y+۱۸^۲\geq ۰$$

$$\Rightarrow y\geq -\frac{۱۸^۲}{۳۶}\Rightarrow y\geq -\frac{۱۸}{۲}\Rightarrow y\geq -۹$$

البته اگر خود x را هم حساب می‌کردیم، با شرط جدیدی مواجه نمی‌شدیم.

۵۳۰ | ۲ با فرض $t=\sqrt{x}$، عبارت به شکل $t^۲-t+۲$ درمی‌آید که درجه‌دو است. پس تکنیک مربع کامل کردن جواب می‌دهد. نصف ضریب $\sqrt{x}$ می‌شود $-\frac{۱}{۲}$، پس $(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲})^۲$ را تشکیل می‌دهیم: $x-\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}$. برای رسیدن به ضابطهٔ تابع باید $-\frac{۱}{۴}$ را کم و ۲ را اضافه کنیم:

$$y=(x-\sqrt{x}+\frac{۱}{۴})-\frac{۱}{۴}+۲=(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۷}{۴}\geq ۰+\frac{۷}{۴}\Rightarrow y\geq \frac{۷}{۴}$$

برد تابع مساوی $[\frac{۷}{۴},+\infty)$ است. یعنی باید گزینهٔ (۲) را انتخاب کنیم.

۵۳۱ | ۴ اگر x نامنفی باشد، $x-|x|=x-x=۰$ و در نتیجه $y=۰$ می‌شود. اگر x منفی باشد $x-|x|=x-(-x)=۲x$ که چون x منفی است ۲x هم منفی است و این یعنی زیر رادیکال منفی می‌شود، پس x نمی‌تواند منفی باشد. یعنی دامنهٔ تابع مساوی $[۰,+\infty)$ و برد آن مساوی $\{۰\}$ است.

۵۳۲ | ۲ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۱\}$ است و این هم x برحسب y:

$$y=\frac{۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow yx-y=۲x+۱\Rightarrow yx-۲x=y+۱$$

$$\Rightarrow x(y-۲)=y+۱\Rightarrow x=\frac{y+۱}{y-۲}$$

$\frac{y+۱}{y-۲}$ هیچ وقت مساوی ۱ نمی‌شود (اول کار گفتیم $x\neq ۱$)، چون:

$$\frac{y+۱}{y-۲}=۱\Rightarrow y+۱=y-۲\Rightarrow ۱=-۲ \quad (!)$$

پس $x=\frac{y+۱}{y-۲}$ همیشه باید موجود باشد و برای همین لازم است $y\neq ۲$ باشد.

یعنی برد تابع $\mathbb{R}-\{۲\}$.

بلد باشیم که برد توابع هموگرافیک یعنی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ مساوی $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

۵۳۳ | ۱ برای وجود $\sqrt{\frac{۱}{f(x)}}$ باید $f(x)>۰$ تا زیر رادیکال نامنفی و مخرج مخالف صفر باشد. از طرفی $f(x)>۰$ یعنی نمودار $y=f(x)$ بالای محور xها واقع شده باشد. با توجه به نمودار، در بازه‌های $(-۴,۰)$ و $(۰,۴)$ این ویژگی برقرار است. این بازه‌ها روی هم شامل ۶ عدد صحیح $\pm۱,\pm۲,\pm۳$ هستند.

۵۳۴ | ۱ توابع f و g باید به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند. زوج مرتب $(۲,۱)$ را از هر دو تابع کنار می‌گذاریم. با توجه به مؤلفه‌های دوم $(a-۱,b)$ و $(۱,b)$ می‌فهمیم که این دو زوج مرتب با هم و در نتیجه زوج‌های مرتب $(b+۲,c+a)$ و $(-۲,۳)$ هم با یکدیگر برابرند.

$$(۱,b)=(a-۱,b)\Rightarrow a-۱=۱\Rightarrow a=۲$$

$$(b+۲,c+a)=(-۲,۳)\Rightarrow \begin{cases} b+۲=-۲\Rightarrow b=-۴ \\ c+a=۳ \xrightarrow{a=۲} c=۱ \end{cases}$$

پس:

$$\frac{b}{ac}=-۲$$

۵۳۵ | ۴ $D_f=[۰,+\infty)$، چون:

$$x|x|\geq ۰ \xRightarrow{|x|\geq ۰} x\geq ۰$$

پس می‌توانیم قدرمطلق $|x|$ را برداریم:

$$f(x)=\sqrt{x\times x}$$

که با توجه به مثبت بودن x، می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$$

سه گزینهٔ اول، مشکل دامنه دارند و دامنهٔ همهٔ آن‌ها $\mathbb{R}$ است!

۵۳۶ | ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱) $f(x)=\sqrt{(x+۱)^۲}=|x+۱|$، پس ضابطهٔ دو تابع برابر نیست. مثلاً $f(-۲)=۱$ و $g(-۲)=-۱$.

۲) $D_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$ و $D_g=[۱,+\infty)$، پس دو تابع مساوی نیستند.

۳) $D_f=D_g=[۰,+\infty)-\{۱\}$ و:

$$f(x)=\frac{۱}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۱}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-x}=g(x)$$

پس دو تابع مساوی‌اند.

۴) $D_f=(-\infty,-۱)\cup[۰,+\infty)$ و $D_g=[۰,+\infty)$ پس دو تابع مساوی نیستند.

۵۳۷ | ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱) مساوی نیستند، مثلاً $f(-۲)=۲$ و $g(-۲)=-۲$.

۲) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{\pm۲\}$، پس دو تابع مساوی نیستند.

۳) $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و داریم:

$$g(x)=\frac{x^۲-۱}{|x|+۱}=\frac{|x|^۲-۱}{|x|+۱}=\frac{(|x|+۱)(|x|-۱)}{|x|+۱}=|x|-۱=f(x)$$

پس دو تابع مساوی‌اند.

۴) مساوی نیستند، مثلاً $f(-\frac{۱}{۲})=-۱$ و $g(-\frac{۱}{۲})=۱$.

۵۳۸ | ۴ به خاطر $\sqrt{۱-\sqrt[۳]{x+۱}}$، باید:

$$۰\leq ۱-\sqrt[۳]{x+۱}\Rightarrow \sqrt[۳]{x+۱}\leq ۱\Rightarrow x+۱\leq ۱\Rightarrow x\leq ۰$$

و به خاطر $\sqrt{x+۱}$ که در مخرج کسر و زیر $\sqrt[۳]{\ }$ قرار گرفته، باید:

$$۰\leq x+۱\Rightarrow -۱\leq x$$

همچنین مخرج نباید صفر شود:

$$\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x+۱}}\neq ۰\Rightarrow ۱\neq\sqrt{x+۱}\Rightarrow ۱\neq x+۱\Rightarrow x\neq ۰$$

اشتراک نتایج بالا، می‌شود $-۱\leq x<۰$. این فاصله فقط یک عدد صحیح در خود دارد: $x=-۱$.

۵۳۹ | ۴ زیر هر دو رادیکال، نامنفی:

$$\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}\ :\ ۰\le\frac{x}{۳}+۲\Rightarrow -۲\le\frac{x}{۳}\Rightarrow -۶\le x$$

$$۰\le-\frac{x}{۳}-۲+\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}\Rightarrow\frac{x}{۳}+۲\le\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}$$: رادیکال بزرگه!

فرض کنیم $t=\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}$، پس نامعادلهٔ بالا به شکل زیر است:

$$t^۲\le t\Rightarrow t^۲-t\le ۰\Rightarrow t(t-۱)\le ۰\Rightarrow ۰\le t\le ۱\xRightarrow{۰\le t}t\le ۱$$

یعنی:

$$\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}\le ۱\Rightarrow\frac{x}{۳}+۲\le ۱\Rightarrow\frac{x}{۳}\le -۱\Rightarrow x\le -۳$$

اشتراک $-۶\le x$ و $x\le -۳$ می‌شود $-۶\le x\le -۳$ که ۴ عدد صحیح $-۶,-۵,-۴,-۳$ را شامل می‌شود.

۵۴۰ | ۴ روش اول: زیر هر دو رادیکال باید نامنفی باشد و مخرج نباید صفر شود، یعنی: $|x|+x>۰\ ,\ x(x^۲-۱)\ge ۰$

$x(x^۲-۱)\ge ۰\Rightarrow (x+۱)x(x-۱)\ge ۰\Rightarrow -۱\le x\le ۰$ یا $۱\le x$

	-۱		۰		۱	
−		+		−		+

در مورد $|x|+x>۰$، اگر x مثبت باشد این نامساوی به‌صورت $۲x>۰$ درمی‌آید که همیشه برقرار است ولی اگر x منفی یا صفر باشد، نامساوی به شکل $-x+x>۰$ یا $۰>۰$ درمی‌آید که هیچ‌وقت برقرار نیست. پس جواب این نامعادله $x>۰$ است. حالا اشتراک «$۱\le x$ یا $-۱\le x\le ۰$» و «$x>۰$» می‌شود $۱\le x$.

روش دوم (عددگذاری): $x=۱$ عضو دامنه است؟ بله، چون زیر رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند و مخرج را نیز صفر نمی‌کند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) که $x=۱$ ندارند، رد می‌شوند. $x=۲$ عضو دامنه است؟ بله کنترل کردیم دیدیم هست! پس گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود. گزینهٔ (۴) ماند!

۵۴۱ | ۴ از آخر (ته ضابطه) به اول می‌آییم، به خاطر $\sqrt{x}$، باید $x\ge ۰$ باشد و به خاطر $\sqrt{x-\sqrt{x}}$، باید $x-\sqrt{x}$ نامنفی باشد، پس $x\ge ۱$ (جذر اعداد بزرگ‌تر از ۱، از خودشان کوچک‌تر و جذر اعداد مثبت کوچک‌تر از ۱، از خودشان بزرگ‌تر است). البته $x-\sqrt{x}$ به‌ازای $x=۰$ صفر می‌شود و این هم قبول است! تا اینجا فهمیدیم $x=۰$ یا $x\ge ۱$. حالا باید $x-\sqrt{x-\sqrt{x}}$ نامنفی باشد. با شرایطی که ایجاد شد، این عبارت منفی بشو نیست!

چون گفتیم اگر $\sqrt{x}$ را از x کم کنیم $(x-\sqrt{x})$، حاصل نامنفی است و حالا اگر چیزی کمتر از $\sqrt{x}$ مثل $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ را از x کم کنیم، قطعاً حاصل نامنفی است!

یعنی دامنهٔ تابع برابر است با: $\{۰\}\cup[۱,+\infty)$

۵۴۲ | ۲ به خاطر $\sqrt{x}$، باید $x\ge ۰$ باشد. اتفاقاً دامنه $[۰,+\infty)$ شده. پس دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد.

حالت اول: مخرج ریشه نداشته باشد؛ یعنی $\Delta<۰$:

$$\Delta=a^۲-۱۶<۰\Rightarrow a^۲<۱۶\Rightarrow -۴<a<۴$$

حالت دوم: مخرج ریشه داشته باشد $(\Delta\ge ۰)$، اما ریشهٔ مثبت نداشته باشد. چون اگر ریشهٔ مثبت داشته باشد، باید از بازهٔ $[۰,+\infty)$ حذف شود. نداشتن ریشهٔ مثبت، یعنی حاصل‌جمع جواب ها منفی و حاصل ضرب جواب‌ها مثبت.

$S=-\frac{a}{۲}<۰\Rightarrow ۰<a\ ,\ P=\frac{۲}{۲}>۰\Rightarrow$ برقرار است

پس اگر $a\ge ۴$ یا $a\le -۴$ باشد (این نتیجهٔ شرط $\Delta\ge ۰$ بود)، باید $a>۰$ باشد. یعنی $a\ge ۴$. اجتماع $-۴<a<۴$ و $a\ge ۴$ می‌شود $(-۴,+\infty)$.

۵۴۳ | ۴ عبارت زیر رادیکال در مخرج، باید نامنفی و دارای فقط یک ریشه $(x=a)$ باشد. در واقع، می‌خواهیم $۲x^۲-۱۲x+b$ ریشهٔ مضاعف $x=a$ داشته باشد. یعنی به شکل $(x-a)^۲$ یا مضربی از آن باشد. با توجه به این که ضریب $x^۲$ در $۲x^۲-۱۲x+b$ مساوی ۲ است، آن ضریب ۲ است: $۲(x-a)^۲$. خب $۲(x-a)^۲=۲x^۲-۴ax+۲a^۲$. حالا از مقایسهٔ $۲x^۲-۱۲x+b$ با $۲x^۲-۴ax+۲a^۲$، می‌فهمیم:

$$۴a=۱۲\Rightarrow a=۳\ ,\ b=۲a^۲=۲\times۳^۲=۱۸$$

پس: $ab=۵۴$

۵۴۴ | ۳ روش اول: x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{x}{۱+x^۲}\Rightarrow y+yx^۲=x\Rightarrow yx^۲-x+y=۰$$

معادله‌ای درجه‌دو برحسب x! دامنهٔ تابع اصلی مساوی $\mathbb{R}$ است، پس این معادله همیشه باید جواب داشته باشد. شرط داشتن جواب این است که Δ نامنفی باشد:

$$\Delta\ge ۰\Rightarrow ۱-۴y^۲\ge ۰\Rightarrow y^۲\le\frac{۱}{۴}$$

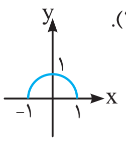
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le y\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{برد تابع}=[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$$

روش دوم: به‌ازای $x=۰$ به‌دست می‌آید $y=۰$. حالا با فرض $xy\neq ۰$، اگر طرفین $y=\frac{x}{۱+x^۲}$ را معکوس کنیم، حاصل‌جمع یک عدد با معکوسش به‌دست می‌آید: $\frac{۱}{y}=\frac{۱+x^۲}{x}=\frac{۱}{x}+\frac{x^۲}{x}=\frac{۱}{x}+x$. می‌توانیم بگوییم همیشه $\frac{۱}{y}\ge ۲$ یا $\frac{۱}{y}\le -۲$. پس $۰<y\le\frac{۱}{۲}$ یا $-\frac{۱}{۲}\le y<۰$. اجتماع این دو حالت با $y=۰$ می‌شود بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$.

به هر حال، برد تابع با مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲|x|\le ۱$ مساوی است یعنی گزینهٔ (۳). راستی! کلاً می‌توانیم نامساوی روبه‌رو را بلد باشیم:

$$-۱\le\frac{۲x}{۱+x^۲}\le ۱$$

۵۴۵ | ۳ روش اول: نمودار تابع را بلدیم (نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱).



با توجه به نمودار برد تابع $[۰,۱]$ است.

روش دوم: x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=۱-y^۲$$

$x^۲\ge ۰$ (البته با توجه به دامنهٔ تابع، $۰\le x^۲\le ۱$)، پس $۱-y^۲\ge ۰$. یعنی $y^۲\le ۱$ و در نتیجه $-۱\le y\le ۱$. از طرفی y که مساوی $\sqrt{۱-x^۲}$ است نامنفی است $y\ge ۰$. پس $۰\le y\le ۱$.

روش سوم (عددگذاری): y نمی‌تواند منفی باشد (مساوی $\sqrt{۱-x^۲}$)، پس گزینه‌های (۱) و (۴) که اعداد منفی را شامل می‌شوند قبول نیستند. حالا مثلاً y می‌تواند مساوی ۲ باشد؟ نه، چون:

$$۲=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow ۴=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=-۳\ (!)$$

پس گزینهٔ (۲) هم که ۲ را دارد، رد می‌شود.

۵۴۶ | ۲ سعی می‌کنیم مجموع یک عدد با معکوسش را بسازیم:

$$y=(x+۱)+\frac{۱}{(x+۱)}-۱$$

اگر $x+۱<۰$ باشد، $(x+۱)+\frac{۱}{(x+۱)}\le -۲$ و اگر $۰<x+۱$ باشد، $۲\le (x+۱)+\frac{۱}{(x+۱)}$. پس کلاً:

$$y\le -۲-۱ \text{ یا } ۲-۱\le y \Rightarrow y\le -۳ \text{ یا } ۱\le y$$

یعنی برد تابع مساوی $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ است که می‌شود $\mathbb{R}-(-۳,۱)$.

با توجه به‌صورت سؤال، $a=-۳$ و $b=۱$. پس $b-۲a=۷$.

۵۴۷ | ۱ این بار دیگر نمی‌توانیم جمع یک عدد با معکوسش را ظاهر کنیم. اما ضرب $x^۲$ و $\frac{۴}{x^۲}$ که عدد ثابت می‌شود! خب از $a+b\ge ۲\sqrt{ab}$ استفاده می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{۴}{x^۲}\ge ۲\sqrt{x^۲\cdot\frac{۴}{x^۲}}\Rightarrow y\ge ۴$$

برد تابع مساوی $[۴,+\infty)$ شد. یعنی حداقل مقدار تابع ۴ است و حداکثر مقدار ندارد. گزینهٔ (۱) همین را می‌گوید!

۵۴۸ | ۱ ظاهر کردن یک عبارت با معکوسش کار آسانی است:

$$y=x+۵+\frac{۱}{x+۳}=(x+۳+\frac{۱}{x+۳})+۲$$

$x+۳+\frac{۱}{x+۳}$ جمع یک عبارت یعنی $x+۳$ با معکوس است و $x+۳$ هم تمام مقادیر مثبت و منفی را می‌تواند اختیار کند. می‌دانیم جمع هر عدد با معکوسش حداکثر ۲- یا حداقل ۲ است، پس:

$$x+۳+\frac{۱}{x+۳}\le -۲ \text{ یا } ۲\le x+۳+\frac{۱}{x+۳}$$

اگر هر دو نامساوی به‌دست آمده را با ۲ جمع کنیم، ضابطهٔ y ظاهر می‌شود:

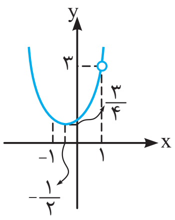
$$y\le ۰ \text{ یا } ۴\le y$$

پس برد تابع مساوی $(-\infty,۰]\cup[۴,+\infty)$ است که به شکل $\mathbb{R}-(۰,۴)$ هم قابل نمایش است.

۵۴۹ | ۱

$$y=\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x-۱}\Rightarrow y=x^۲+x+۱ \quad (x\ne ۱)$$

تابع $y=x^۲+x+۱$ به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{۲}$ مینیمم می‌شود و مینیمم آن برابر است با $\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۴}$. نمودار تابع را ببینید:



برد این تابع مساوی $[\frac{۳}{۴},+\infty)$ است. دقت کنید که اگرچه $x\ne ۱$ و مقدار $x^۲+x+۱$ به‌ازای $x=۱$ می‌شود ۳، اما نباید ۳ را از برد حذف کنیم. چون به‌ازای $x=-۲$ هم به عرض ۳ می‌رسیم!

۵۵۰ | ۳ ضابطه را خوش‌دست کنیم:

$$y=\frac{x^۲+۵}{\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{(x^۲+۱)+۴}{\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{(\sqrt{x^۲+۱})^۲+۴}{\sqrt{x^۲+۱}}=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۴}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

گفتیم کلاً اگر $a\,,b>۰$ باشد، آن‌گاه $a+b\ge ۲\sqrt{ab}$ و حالت تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که $a=b$ باشد. با فرض $a=\sqrt{x^۲+۱}$ و $b=\frac{۴}{\sqrt{x^۲+۱}}$، تابلوست که $a\,,b>۰$ و می‌توانیم بگوییم:

$$a+b>۲\sqrt{ab}\Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}+\frac{۴}{\sqrt{x^۲+۱}}\ge ۲\sqrt{۴}=۴$$

یعنی برد تابع، بازهٔ $[۴\,,+\infty)$ است. دقت کنید که حالت تساوی به‌ازای $x=\pm\sqrt{۳}$ اتفاق می‌افتد.

۵۵۱ | ۳ اول حواسمان به دامنه باشد:

$$۰\le x+۵\Rightarrow -۵\le x\ ,\ ۰\le x+۱\Rightarrow -۱\le x$$

اشتراک نتایج بالا می‌شود $-۱\le x$. حالا ضابطه را هم خوش‌دست کنیم!

$$y=\sqrt{x+۵}-\sqrt{x+۱}=\sqrt{x+۵}-\sqrt{x+۱}\times\frac{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}$$

$$=\frac{(x+۵)-(x+۱)}{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}\Rightarrow y=\frac{۴}{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}$$

با افزایش x، هم $\sqrt{x+۵}$ و هم $\sqrt{x+۱}$ افزایش می‌یابند، پس جمع آن‌ها نیز زیاد می‌شود. یعنی $\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}$ صعودی است و مینیمم آن به‌ازای کوچک‌ترین عضو دامنه اتفاق می‌افتد. کوچک‌ترین عضو دامنه $x=-۱$ است و:

$$\sqrt{-۱+۵}+\sqrt{-۱+۱}=۲$$

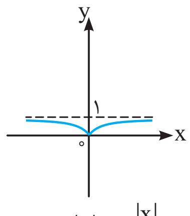
یعنی:

$$\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}\ge ۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}\le\frac{۱}{۲}$$

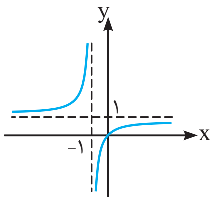
$$\xRightarrow{\times ۴} ۰<\frac{۴}{\sqrt{x+۵}+\sqrt{x+۱}}\le ۲$$

پس برد تابع، $(۰,۲]$ است.

۵۵۲ | ۴ **روش اول:** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. اگر فرض کنیم $g(x)=\frac{x}{x+۱}$ آن‌گاه $f(x)$ مساوی $g(|x|)$ است. پس نمودار هموگرافیک $g(x)$ را می‌کشیم، سپس برای رسیدن به $g(|x|)$، سمت چپ محور yها را حذف کرده، قرینهٔ سمت راست نمودار نسبت به محور yها را به نمودار اضافه می‌کنیم. برای رسم $g(x)=\frac{x}{x+۱}$، دو خط $x=-۱$ و $y=۱$ را رسم می‌کنیم و چون $ad-bc=۱-۰>۰$، با دو قسمت صعودی مواجه هستیم:



$f(x)=g(|x|)=\frac{|x|}{|x|+۱}$



$g(x)=\frac{x}{x+۱}$

با توجه به شکل، برد تابع f می‌شود: $[۰,۱)$

روش دوم: ضابطه را خوش‌دست می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(|x|+۱)-۱}{|x|+۱}=۱-\frac{۱}{|x|+۱}$$

حالا:

$$|x|\ge ۰\Rightarrow |x|+۱\ge ۱\Rightarrow ۰<\frac{۱}{|x|+۱}\le ۱$$

$$\Rightarrow -۱\le -\frac{۱}{|x|+۱}<۰\Rightarrow ۰\le ۱-\frac{۱}{|x|+۱}<۱\Rightarrow ۰\le f(x)<۱$$

روش سوم (عددگذاری): آیا $f(x)$ می‌تواند مساوی ۱ شود؟ نه، چون:

$$f(x)=1 \Rightarrow \frac{|x|}{|x|+1}=1 \Rightarrow |x|=|x|+1 \Rightarrow 0=1 \quad (!)$$

پس گزینه‌های (۲) و (۳) که ۱ را دارند رد می‌شوند. گزینهٔ (۱) هم که درست نیست، چون $f(x)$ نمی‌تواند منفی شود. خب فقط گزینهٔ (۴) ماند دیگر!

۵۵۳ | ۳ روش اول: کمی ضابطه را خوش‌دست‌تر کنیم:

$$g(x)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{(f(x)+1)-2}{f(x)+1}=1-\frac{2}{f(x)+1}$$

سؤال گفته برد تابع f مساوی $(-\infty,-1)$ است، بنابراین:

$$f(x)<-1\Rightarrow f(x)+1<0\Rightarrow \frac{1}{f(x)+1}<0 \xRightarrow{\times(-2)} \frac{-2}{f(x)+1}>0$$

$$\xRightarrow{+1} 1-\frac{2}{f(x)+1}>1 \Rightarrow g(x)>1$$

یعنی برد g مساوی $(1,+\infty)$ است.

روش دوم (عددگذاری): آیا $g(x)$ می‌تواند ۱ شود؟ نه، چون:

$$g(x)=1 \Rightarrow \frac{f(x)-1}{f(x)+1}=1$$

$$\Rightarrow f(x)-1=f(x)+1 \Rightarrow -1=1$$

پس گزینه‌های (۱) و (۴) که ۱ را دارند رد می‌شوند. آیا $g(x)$ می‌تواند صفر شود؟

$$g(x)=0 \Rightarrow \frac{f(x)-1}{f(x)+1}=0 \Rightarrow f(x)-1=0 \Rightarrow f(x)=1$$

اما برد f مساوی $(-\infty,-1)$ است و $f(x)$ نمی‌تواند ۱ شود. پس $g(x)$ نمی‌تواند صفر شود و گزینهٔ (۲) که شامل صفر است رد می‌شود.

۵۵۴ | ۲ x را برحسب y بنویسیم:

$$y=\frac{x^2}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2 \Rightarrow x^2-yx+y=0$$

معادله‌ای درجه‌دو برحسب x! برای وجود x باید دلتا نامنفی باشد:

$$y^2-4y\ge0 \Rightarrow y(y-4)\ge0 \Rightarrow y\le0 \ \text{یا}\ 4\le y$$

برد تابع $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ است که به شکل $\mathbb{R}-(0,4)$ هم قابل نوشتن است.

۵۵۵ | ۲ x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{x+3}{(x-1)^2} \Rightarrow y=\frac{x+3}{x^2-2x+1}$$

$$\xRightarrow{x\neq1} yx^2-2yx+y=x+3 \Rightarrow yx^2-(2y+1)x+(y-3)=0$$

با توجه به ضابطهٔ اولیهٔ تابع، y می‌تواند صفر باشد (به‌ازای $x=-3$). با فرض $y\neq0$، معادلهٔ بالا درجه‌دوم برحسب x است. برای وجود x در این معادله، باید Δ نامنفی باشد.

$$\Delta=(2y+1)^2-4y(y-3)=4y^2+4y+1-4y^2+12y=16y+1$$

$$\xRightarrow{0\le\Delta} 0\le16y+1 \Rightarrow -\frac{1}{16}\le y$$

۵۵۶ | ۲ برای نوشتن x برحسب y، ابتدا رادیکال را تنها می‌کنیم تا بعداً بتوانیم راحت‌تر به توان ۲ برسانیم:

$$y=2x+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y-2x=\sqrt{1-x^2}$$

بگذارید همین‌جا عهد ببندیم که زیر رادیکال منفی نباشد:

$$0\le1-x^2 \Rightarrow x^2\le1 \Rightarrow -1\le x\le1$$

و حاصل رادیکال هم نامنفی باشد:

$$0\le y-2x \Rightarrow 2x\le y$$

حالا با خیال راحت به توان ۲ برسانیم:

$$(y-2x)^2=1-x^2\Rightarrow y^2-4xy+4x^2=1-x^2\Rightarrow 5x^2-4yx+(y^2-1)=0$$

معادله‌ای درجه‌دو برحسب x به‌دست آمد. برای داشتن جواب و وجود x، باید دلتا نامنفی باشد:

$$\Delta\ge0 \Rightarrow 16y^2-20(y^2-1)\ge0 \xrightarrow{\div4} 4y^2-5(y^2-1)\ge0$$

$$\Rightarrow -y^2+5\ge0 \Rightarrow y^2\le5 \Rightarrow -\sqrt5\le y\le\sqrt5$$

اما گفتیم $2x\le y$ و $-1\le x\le1$، پس $-2\le y$. با این حساب، $-2\le y\le\sqrt5$ و برد تابع می‌شود $[-2,\sqrt5]$.

۵۵۷ | ۳ روش اول: x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{1+x^2}{2x} \Rightarrow 2xy=1+x^2 \Rightarrow x^2-2yx+1=0$$

معادله‌ای درجه‌دو برحسب x! شرط وجود x (جواب) آن است که Δ نامنفی باشد:

$$\Delta=4(y^2-1)\ge0 \Rightarrow y^2\ge1 \Rightarrow y\le-1 \ \text{یا}\ 1\le y$$

یعنی برد تابع مساوی $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ است که به شکل $\mathbb{R}-(-1,1)$ هم قابل نوشتن است.

روش دوم: اینکه $-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le1$ تقریباً معروف است! پس می‌توانیم بگوییم $-1\le\frac{1}{f(x)}\le1$. اگر $0<\frac{1}{f(x)}\le1$ آن‌گاه $1\le f(x)$ و اگر $-1\le\frac{1}{f(x)}<0$ آن‌گاه $f(x)\le-1$. یعنی برد تابع همان است که در روش اول گفتیم!

۵۵۸ | ۳ x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=x-\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x-y=\sqrt{4-x^2}$$

قبل از اینکه به توان ۲ برسانیم، حواسمان باشد که باید $4-x^2\ge0$ باشد، یعنی $-2\le x\le2$ و چون حاصل رادیکال هم نامنفی است، باید $0\le x-y$ پس $y\le x$.

حالا به توان دو:

$$(x-y)^2=4-x^2\Rightarrow x^2-2xy+y^2=4-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-2yx+(y^2-4)=0$$

برای وجود x، باید دلتای معادلهٔ بالا نامنفی باشد:

$$\Delta=(-2y)^2-4(2)(y^2-4)=4(-y^2+8)$$

$$\xRightarrow{0\le\Delta} 0\le-y^2+8 \Rightarrow y^2\le8\Rightarrow|y|\le\sqrt8$$

$$\Rightarrow -\sqrt8\le y\le\sqrt8 \Rightarrow -2\sqrt2\le y\le2\sqrt2$$

اما گفتیم $-2\le x\le2$ و $y\le x$، پس $-2\sqrt2\le y\le2$.

۵۵۹ | ۲ روش اول: صورت و مخرج یک وجه مشترک دارند: x^2+x، پس ضابطه را کمی خوش‌دست‌ کنیم:

$$y=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}=\frac{(x^2+x-2)+2}{x^2+x-2}=1+\frac{2}{x^2+x-2}$$

در مخرج ضریب x^2 مثبت است، پس مینیمم دارد. مینیمم آن به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد و برابر است با $(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-2=-\frac{9}{4}$. یعنی:

$$x^2+x-2\ge-\frac{9}{4}$$

اگر $-\frac{۹}{۴} \le x^۲+x-۲<۰$ آن‌گاه:

$$\frac{۱}{x^۲+x-۲} \le -\frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۲}{x^۲+x-۲} \le -\frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{۲}{x^۲+x-۲} \le \frac{۱}{۹} \Rightarrow y \le \frac{۱}{۹}$$

اگر $۰<x^۲+x-۲$ آن‌گاه:

$$۰<\frac{۱}{x^۲+x-۲} \Rightarrow ۰<\frac{۲}{x^۲+x-۲} \Rightarrow ۱<۱+\frac{۲}{x^۲+x-۲} \Rightarrow ۱<y$$

پس برد تابع می‌شود $(-\infty,\frac{۱}{۹}]\cup(۱,+\infty)$.

روش دوم: x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^۲+x}{x^۲+x-۲} \Rightarrow yx^۲+yx-۲y=x^۲+x$$

$$\Rightarrow (y-۱)x^۲+(y-۱)x-۲y=۰$$

معادله‌ای درجه‌دو برحسب x! برای وجود x باید Δ نامنفی باشد:

$$\Delta=(y-۱)^۲-۴(y-۱)(-۲y)=(y-۱)(y-۱+۸y)=(۹y-۱)(y-۱)$$

$$\xRightarrow{\Delta\ge۰} (۹y-۱)(y-۱)\ge۰ \Rightarrow y\le\frac{۱}{۹} \text{ یا } ۱\le y$$

اما اگر بیاییم و خود ریشه‌ها یعنی x را هم با روش دلتا حساب کنیم ($x=\frac{-(y-۱)\pm\sqrt{۹y^۲-۱۰y+۱}}{۲(y-۱)}$)، می‌بینیم که $y=۱$ مخرج را صفر می‌کند.

از ضابطهٔ تابع اصلی هم چون مخرج همیشه ۲ واحد از صورت کوچک‌تر است، y نمی‌تواند ۱ باشد. پس به‌جای $۱\le y$ باید بگوییم $۱<y$. یعنی برد تابع مساوی $(-\infty,\frac{۱}{۹}]\cup(۱,+\infty)$ است.

۵۶۰ | ۳ برد $y=\frac{x^۲+۱}{x}, ۰<x$:

$$y=\frac{x^۲}{x}+\frac{۱}{x}=x+\frac{۱}{x} \xrightarrow{۰<x} ۲\le y$$

(جمع هر عدد مثبت با معکوسش حداقل ۲ است)

برد $y=x-۱, x\le۰$: $x\le۰ \Rightarrow x-۱\le-۱ \Rightarrow y\le-۱$

یعنی کلاً $۲\le y$ یا $y\le-۱$. پس برد تابع f می‌شود:

$$R_f=(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$$

در مجموعهٔ بالا، ۲ عدد صحیح ۰، ۱ را نمی‌بینیم.

۵۶۱ | ۴ کافی است به‌ازای $x=۱$، دو تابع با هم برابر باشند:

$$f(۱)=g(۱)\Rightarrow a+a-۱=۳\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

دقت کنید که به ازای $x\ne۱$، داریم:

$$f(x)=\frac{(۲x+۱)\cancel{(x-۱)}}{\cancel{x-۱}}=۲x+۱=g(x)$$

۵۶۲ | ۲ $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$، پس D_g هم باید همین بشود. یعنی مخرج $g(x)$ باید فقط یک ریشه داشته باشد: $x=۲$. همچنین ضابطهٔ g باید ساده شود و به شکل ضابطهٔ f درآید. اگر $b=۰$ باشد، با توجه به اینکه سوال گفته $a\ne b$ و در نتیجه $a\ne۰$، هرگز ضابطه‌ها یکسان نخواهد شد. پس $b\ne۰$ و مخرج $g(x)$ واقعاً درجه دو است! گفتیم مخرج باید ریشهٔ مضاعف $x=۲$ داشته باشد، یعنی به شکل $(x-۲)^۲$ یا ضریبی از آن درآید. حالا برویم سراغ صورت $g(x)$. صورت باید عامل $x-۲$ داشته باشد، پس به شکل $۳(x-۲)$ است! یعنی:

$$ax-۶=۳(x-۲) \Rightarrow a=۳$$

پس ضریب $(x-۲)^۲$ در مخرج همان ۱ است. در واقع:

$$g(x)=\frac{۳(x-۲)}{(x-۲)^۲}=\frac{۳}{x-۲}$$

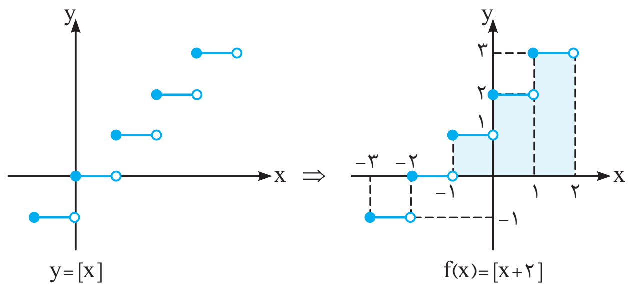
فهمیدیم مخرج $g(x)$ به شکل $(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴$ است. از مقایسهٔ این عبارت با $bx^۲+cx+d$، معلوم می‌شود: $b=۱$، $c=-۴$ و $d=۴$. بنابراین:

$$\frac{cd}{a-b}=\frac{(-۴)(۴)}{۳-۱}=-۸$$

۵۶۳ | ۲ خب $-۱۰۴<-۱۰۳/۰۰۳<-۱۰۳$ پس $[-۱۰۳/۰۰۳]=-۱۰۴$، $-۴=-\frac{۵۲}{۱۳}<-\frac{۵۱}{۱۳}<-\frac{۳۹}{۱۳}=-۳$ پس $[-\frac{۵۱}{۱۳}]=-۴$ و $۱<\frac{۴۱}{۳۷}<۲$ پس $[\frac{۴۱}{۳۷}]=۱$. عبارت موردنظر در صورت سؤال، برابر می‌شود با:

$$-۱۰۴-۴(-۴)+۵(۱)=-۸۳$$

۵۶۴ | ۳ برای رسیدن به نمودار $f(x)=[x+۲]$ باید نمودار $y=[x]$ را ۲ واحد به چپ ببریم. می‌توانستیم بنویسیم $f(x)=[x]+۲$ و بگوییم نمودار $y=[x]$ را ۲ واحد به بالا ببریم. نتیجه یکی می‌شود!



در بازهٔ $[-۱,۲)$ سه مستطیل مطابق شکل ایجاد می‌شود که مساحت آن‌ها $۱\times۱=۱$، $۱\times۲=۲$ و $۱\times۳=۳$ می‌باشد. مجموع این مساحت‌ها می‌شود ۶.

۵۶۵ | ۴ طول پله‌ها ۲ است: $\frac{x}{۲}$ و ارتفاع پله‌ها هم ۲ است: $۲[\;]$. تا این‌جا شد $۲[\frac{x}{۲}]$ اما شروع کار در مبدأ از روی محور xها نیست و انگار نمودار ۱ واحد بالا رفته:

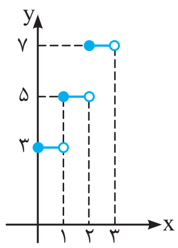
$$y=۲[\frac{x}{۲}]+۱$$

۵۶۶ | ۱ وقتی $[u]=k\in\mathbb{Z}$، می‌گوییم $k\le u<k+۱$. در این‌جا هم می‌نویسیم:

$$[x+۰/۴]=۳\Rightarrow ۳\le x+۰/۴<۴\Rightarrow ۲/۶\le x<۳/۶$$

می‌خواهیم دو طرف را در ۱/۱ ضرب کنیم. برای این کار، می‌توانیم بگوییم $۱/۱a=(۱+۰/۱)a=a+۰/۱a$. به عنوان مثال، $۱/۱\times۲/۶=۲/۶+۰/۲۶=۲/۸۶$ و $۱/۱\times۳/۶=۳/۶+۰/۳۶=۳/۹۶$. بنابراین با ضرب نامساوی بالا در ۱/۱، به‌دست می‌آید $۲/۸۶<۱/۱x<۳/۹۶$. با این حساب، حاصل $[۱/۱x]$ برابر با ۲ یا ۳ می‌شود.

۵۶۷ | ۲ با توجه به توضیحات مسئله، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



طول پله‌ها ۱ و ارتفاع پله‌ها ۲ است: $۲[x]$. اما شروع نمودار در مبدأ از روی محور xها صورت نگرفته و انگار همه چیز ۳ واحد بالا رفته: $f(x)=۲[x]+۳$. بنابراین $a=۲$ و $b=۳$. در نتیجه $۲a-b=۱$.