

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی (دهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انتگرالگو

مجموعه کتاب‌های پایه دهم نشر الگو :

- هندسه دهم (تست و سه‌بعدی)
- ریاضی دهم (تست و سه‌بعدی)
- فیزیک دهم (تست و سه‌بعدی)
- جمع‌بندی شیمی دهم
- شیمی دهم (تست)
- هندسه دهم (تمام)
- ریاضی دهم (تمام)
- فیزیک دهم (تمام)
- فارسی دهم
- جامع زیست‌شناسی دهم



- درس‌نامه‌هایی شامل نکات کلیدی و مرور مطالب مهم
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس درس‌های کتاب درسی
- دسته‌بندی پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سه سطح ساده، متوسط و دشوار
- ۴۸۰ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۲۴۵۴ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سوالات کنکور سراسری سال‌های اخیر
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشته ریاضی)

https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

(رشته تجربی)

انتشارات
الگو

www.olgoobooks.ir



به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای کتاب درسی ریاضی پایهٔ دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعهٔ این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛

- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛

- هر جا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرسش‌های هر بخش را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شوند. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، سؤالات کنکورهای سراسری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، دو آزمون جامع

از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مریم موحدی‌مهر (ویراست اول) و عاطفه ربیعی (ویراست اول و دوم)، دکترین آریس آقانیانس (ویراست‌های دوم و سوم) و ابوالفضل علی‌بمانی (ویراست سوم) برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حرفه‌چینی تشکر و قدردانی کنیم.

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

- بخش اول: یادآوری مجموعه‌ها ۲
- بخش دوم: مجموعه‌های مهم اعداد و بازه‌ها ۵
- بخش سوم: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۵
- سؤالات کنکور سراسری ۱۸

درس دوم: متمم یک مجموعه

- بخش اول: مجموعه مرجع - متمم یک مجموعه ۱۹
- بخش دوم: تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ۲۴
- سؤالات کنکور سراسری ۳۰

درس سوم: الگو و دنباله

- بخش اول: الگو ۳۱
- بخش دوم: دنباله ۴۰
- سؤالات کنکور سراسری ۴۵

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

- بخش اول: دنباله حسابی ۴۶
- بخش دوم: دنباله هندسی ۵۶
- سؤالات کنکور سراسری ۶۵

آزمون‌های فصل ۶۷

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

- بخش اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۷۰
- بخش دوم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف ۸۰
- بخش سوم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم ۸۵
- بخش چهارم: مساحت ۸۷
- سؤالات کنکور سراسری ۸۹

درس دوم: دایره مثلثاتی

- بخش اول: زاویه مثلثاتی و دایره مثلثاتی ۹۰
- بخش دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی ۹۳
- بخش سوم: محور سینوس و محور کسینوس ۹۹
- بخش چهارم: رابطه شیب خط با تانژانت زاویه ۱۰۶

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

- بخش اول: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۰۹
- بخش دوم: اتحادهای مثلثاتی ۱۱۵
- بخش سوم: محاسبات به کمک اتحادهای مثلثاتی ۱۲۰
- سؤالات کنکور سراسری ۱۲۶

آزمون‌های فصل ۱۲۷

◆ فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

- بخش اول: حل معادله درجه دوم ۲۰۴
- بخش دوم: بحث در تعداد جواب‌های معادله درجه دوم ۲۱۲
- بخش سوم: معادله درجه دوم در مسائل دیگر ۲۱۵
- سؤالات کنکور سراسری ۲۱۸
- درس دوم: سهمی** ۲۱۹
- سؤالات کنکور سراسری ۲۳۳

درس سوم: تعیین علامت

- بخش اول: تعیین علامت ۲۳۴
- بخش دوم: نامعادله ۲۴۴
- بخش سوم: معادله‌ها و نامعادله‌های قدرمطلق ۲۵۲
- سؤالات کنکور سراسری ۲۶۱
- آزمون‌های فصل** ۲۶۳

◆ فصل پنجم: تابع

- درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن** ۲۶۶
- سؤالات کنکور سراسری ۲۷۰

درس دوم: دامنه و برد توابع

- بخش اول: دامنه، برد و ضابطه تابع ۲۷۱
- بخش دوم: تابع خطی ۲۸۲

درس سوم: انواع تابع

- بخش اول: توابع معروف ۲۸۷
- بخش دوم: مدل‌سازی با توابع ۲۹۵

◆ فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

- بخش اول: ریشه ۱۳۰
- بخش دوم: مقایسه ریشه‌ها ۱۳۷
- درس دوم: ریشه n ام**
- بخش اول: ریشه n ام ۱۳۹
- بخش دوم: مقایسه ریشه‌ها ۱۴۴
- سؤالات کنکور سراسری ۱۴۵

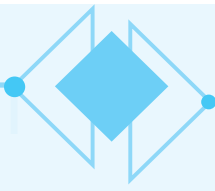
درس سوم: توان‌های گویا

- بخش اول: توان‌های گویا ۱۴۶
- بخش دوم: مقایسه توان‌ها ۱۵۳
- سؤالات کنکور سراسری ۱۵۵

درس چهارم: عبارت‌های جبری

- بخش اول: اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله ۱۵۶
- بخش دوم: اتحاد مزدوج ۱۶۲
- بخش سوم: اتحاد مربع مجموع سه جمله ۱۶۷
- بخش چهارم: اتحاد جمله مشترک ۱۶۹
- بخش پنجم: اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله ۱۷۱
- بخش ششم: اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌های دو جمله (چاق و لاغر) ۱۷۷
- بخش هفتم: تجزیه ۱۸۱
- بخش هشتم: ساده کردن عبارت‌ها ۱۸۸
- بخش نهم: گویا کردن مخرج‌های گنگ ۱۹۴
- سؤالات کنکور سراسری ۲۰۰

- آزمون‌های فصل** ۲۰۱



◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

بخش اول: مفهوم احتمال ۳۶۰

بخش دوم: ویژگی‌های احتمال ۳۷۱

سؤالات کنکور سراسری ۳۷۵

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ۳۷۷

درس سوم: متغیر و انواع آن ۳۷۹

آزمون‌های فصل ۳۸۱

◆ فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۳۸۴

◆ فصل نهم: پاسخنامه کلیدی

پاسخنامه کلیدی ۵۸۶

بخش سوم: تابع چندضابطه‌ای و تابع قدرمطلق ۲۹۹

بخش چهارم: رسم نمودار برخی توابع به کمک انتقال ۳۰۸

سؤالات کنکور سراسری ۳۱۶

آزمون‌های فصل ۳۱۷

◆ فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

درس اول: شمارش ۳۲۰

سؤالات کنکور سراسری ۳۳۰

درس دوم: جایگشت

بخش اول: جایگشت خطی ۳۳۱

بخش دوم: جایگشت r شیء از n شیء ۳۳۷

سؤالات کنکور سراسری ۳۴۰

درس سوم: ترکیب ۳۴۱

سؤالات کنکور سراسری ۳۵۶

آزمون‌های فصل ۳۵۷

درس اول / بخش اول: ریشه

ریشه دوم

- اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد، عددهای \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ را ریشه‌های دوم عدد a می‌نامیم.
- عدد صفر فقط یک ریشه دوم دارد که همان صفر است: $\sqrt{0}=0$.
- عددهای حقیقی منفی ریشه دوم ندارند.

مثال: ریشه‌های دوم عدد ۹ عددهای $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ هستند، که به ترتیب برابر ۳ و -3 هستند.

تست

اختلاف ریشه‌های دوم عدد a برابر ۶ است. مقدار a کدام است؟

۳۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

$$\sqrt{a} - (-\sqrt{a}) = 6 \Rightarrow 2\sqrt{a} = 6 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

ریشه‌های دوم عدد a برابر \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ هستند. بنابر فرض

راه‌حل

ویژگی‌های ریشه دوم

اگر a و b عددهایی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

تست

اختلاف ریشه‌های دوم عدد $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

$2\sqrt{12}$ (۴)

$2\sqrt{8}$ (۳)

$2\sqrt{6}$ (۲)

$2\sqrt{5}$ (۱)

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$$

ابتدا توجه کنید که

راه‌حل

بنابراین ریشه‌های دوم عدد مورد نظر $\sqrt{6}$ و $-\sqrt{6}$ هستند، که اختلاف آن‌ها برابر است با $2\sqrt{6} = \sqrt{6} - (-\sqrt{6})$.

نکته

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و b نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}, \quad a > 0 \Rightarrow a \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \quad a < 0 \Rightarrow a \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$$

الف) $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

ب) $\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = |3| \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

مثال:

پ) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{20}$

ت) $-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \times 3} = -\sqrt{48}$

تست

اگر $a < 0 < b$ ، حاصل $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ کدام است؟

صفر (۴)

$2a - 2b$ (۳)

$2a$ (۲)

$2b$ (۱)

چون a منفی و b مثبت است، پس $a-b$ منفی است. بنابراین

راه‌حل

$$\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = |a-b| - |a| - |b| = -(a-b) - (-a) - b = -a + b + a - b = 0$$

ریشه سوم

ریشه سوم عدد حقیقی a عددی است که مکعب آن برابر a است و آن را با $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم.

مثال: ریشه سوم عدد ۸ عدد $\sqrt[3]{8}$ است که برابر ۲ است.

تست ۴

مقدار $\sqrt[3]{-5-\sqrt{12}+\sqrt[3]{-27}}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر

توجه کنید که $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-3^3} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$ بنابراین

$$\sqrt[3]{-5-\sqrt{12}+\sqrt[3]{-27}} = \sqrt[3]{-5-\sqrt{12}-3} = \sqrt[3]{-8-\sqrt{12}} = \sqrt[3]{-8-\sqrt{4 \times 3}} = \sqrt[3]{-8-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-2^3-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

راه‌حل

تست ۵

مقدار $\sqrt[3]{-0.125} - 5\sqrt[3]{0.216}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

توجه کنید که $\sqrt[3]{-0.125} = \sqrt[3]{-\left(\frac{5}{10}\right)^3} = -\frac{5}{10}$ و $\sqrt[3]{0.216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{6}{10}\right)^3} = \frac{6}{10}$ بنابراین عدد مورد نظر برابر است با

$$-\frac{5}{10} - 5\left(\frac{6}{10}\right) = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$$

راه‌حل

ویژگی‌های ریشه سوم

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \quad \sqrt[3]{a^3 b} = a \sqrt[3]{b}$$

مثال:

الف) $\sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 4$

ب) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{8 \times 9} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

پ) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

تست ۶

اگر $a < 0$ ، حاصل $\frac{a}{\sqrt[3]{a^3}} - \frac{\sqrt{a^2}}{a}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۱

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3}} - \frac{\sqrt{a^2}}{a} = \frac{a}{a} - \frac{|a|}{a} = 1 - \frac{(-a)}{a} = 1 - (-1) = 2$$

می‌توان نوشت

راه‌حل

تست ۷

اگر $\sqrt[3]{a+5} = 3$ ، مقدار $\sqrt[3]{4\sqrt{a-5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

توجه کنید که $\sqrt[3]{a+5} = 3 \rightarrow a+5 = 3^3 = 9 \rightarrow \sqrt{a-5} = 4 \rightarrow a = 4^2 = 16 \rightarrow a-5 = 11$
 می‌توان دو $\sqrt[3]{a+5} = 3 \rightarrow a+5 = 3^3 = 9 \rightarrow \sqrt{a-5} = 4 \rightarrow a = 4^2 = 16 \rightarrow a-5 = 11$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{a-5}} = \sqrt[3]{4\sqrt{16-5}} = \sqrt[3]{4\sqrt{11}} = \sqrt[3]{4 \times 11} = \sqrt[3]{44} = 3$$

توجه کنید که

بنابراین

راه‌حل

ریشه چهارم

ریشه‌های چهارم عدد حقیقی و نامنفی a عددهایی هستند که توان چهارم آن‌ها برابر a است.

مثال: چون $2^4 = 16$ و $(-2)^4 = 16$ ، پس 2 و -2 ریشه‌های چهارم 16 هستند.

نکته

- عدد حقیقی و مثبت a دو ریشه چهارم قرینه هم دارد، که ریشه چهارم مثبت را $\sqrt[4]{a}$ و ریشه چهارم منفی را $-\sqrt[4]{a}$ نشان می‌دهیم.
- عدد صفر فقط یک ریشه چهارم دارد که همان صفر است: $\sqrt[4]{0} = 0$.
- عددهای حقیقی منفی ریشه چهارم ندارند.

مثال: عدد 81 دو ریشه چهارم دارد که برابر $\sqrt[4]{81}$ و $-\sqrt[4]{81}$ هستند. مقادیر این دو ریشه به ترتیب برابر 3 و -3 است.

ویژگی‌های ریشه چهارم

اگر a و b عددهایی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt[4]{a^4} = a, \quad \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}, \quad \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

تست ۸

حاصل $\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{3/2} + \sqrt[4]{51/2})$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

توجه کنید که $3/2 = \frac{16}{5}$ و $51/2 = \frac{256}{5}$. بنابراین

$$\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{3/2} + \sqrt[4]{51/2}) = \sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{\frac{16}{5}} + \sqrt[4]{\frac{256}{5}}) = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{\frac{16}{5}} + \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{\frac{256}{5}} = \sqrt[4]{5 \times \frac{16}{5}} + \sqrt[4]{5 \times \frac{256}{5}} = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{256} = 2 + 4 = 6$$

راحل

نکته

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و b نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\sqrt[4]{a^4} = |a|, \quad \sqrt[4]{a^4 b} = |a|b, \quad a > 0 \Rightarrow a\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4 b}, \quad a < 0 \Rightarrow a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4 b}$$

تست ۹

اگر $x > 0$ ، حاصل $3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^4}$ کدام است؟

$5x$ (۴)

$-x$ (۳)

x (۲)

$3x$ (۱)

چون $x > 0$ ، پس $\sqrt[4]{x^4} = |x| = x$. در نتیجه

$$3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^4} = 3x + 2x = 5x$$

راحل

تست ۱۰

حاصل عبارت $\sqrt{-a} + \frac{\sqrt[3]{a^3 + 2a}}{\sqrt[4]{a^4 - 2a}}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

$\sqrt{-a} - 1$ (۴)

$\sqrt{-a} + 3$ (۳)

$\sqrt{-a} + 1$ (۲)

$\sqrt{-a} + \frac{1}{3}$ (۱)

با توجه به وجود $\sqrt{-a}$ در عبارت، واضح است که a مثبت نیست. بنابراین $\sqrt[4]{a^4} = -a$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$. در نتیجه

$$\sqrt{-a} + \frac{\sqrt[3]{a^3 + 2a}}{\sqrt[4]{a^4 - 2a}} = \sqrt{-a} + \frac{a + 2a}{-a - 2a} = \sqrt{-a} - 1$$

راحل

تست

 حاصل عبارت $\frac{\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[4]{4}-1$ (۲) $\sqrt[4]{5}-1$ (۳) $\sqrt[4]{4}+1$ (۴) $\sqrt[4]{5}+1$

توجه کنید که

راه حل

$$\frac{\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1} = \frac{\sqrt[4]{5 \times 4}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1} = \frac{\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1} = \frac{\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{4}-1)+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1} = \frac{(\sqrt[4]{4}-1)(\sqrt[4]{5}+1)}{\sqrt[4]{4}-1} = \sqrt[4]{5}+1$$

ریشه پنجم

 ریشه پنجم عدد حقیقی a عددی است که توان پنجم آن برابر a است و آن را با $\sqrt[5]{a}$ نشان می‌دهیم.

مثال: چون $2^5 = 32$ ، پس $\sqrt[5]{32} = 2$.

ویژگی‌های ریشه پنجم

 اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5]{a^5} = a, \quad \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}, \quad \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \quad \sqrt[5]{a^5 b} = a \sqrt[5]{b}$$

تست

 ریشه پنجم عدد a برابر ۱۶ است. ریشه چهارم این عدد کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۱۲۸

توجه کنید که

راه حل

$$\sqrt[5]{a} = 16 \Rightarrow a = 16^5 = (2^4)^5 = (2^5)^4$$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{(2^5)^4} = 2^5 = 32 \text{ بنابراین}$$

تست

 اگر $a = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8}$ و $b = \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}$ مقدار $\left(\frac{b}{a}\right)^5$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt[5]{2}$ (۴) $4\sqrt[5]{2}$

توجه کنید که

راه حل

$$b = \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2 \times 2} + \sqrt[5]{2 \times 4} + \sqrt[5]{2 \times 8} = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2}(\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8}) = \sqrt[5]{2} \times a$$

$$\text{بنابراین } \frac{b}{a} = \sqrt[5]{2} \text{، پس } \left(\frac{b}{a}\right)^5 = (\sqrt[5]{2})^5 = 2$$

ریشه

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

۸۳۲- مقدار $(\sqrt[4]{0.0016})^{-1}$ کدام است؟

- ۰/۴ (۴) ۰/۳ (۳) ۰/۲ (۲) ۰/۱ (۱)

کتاب درسی

۸۳۳- حاصل $\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{0.18} + \sqrt{0.98})$ کدام است؟

- $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

کتاب درسی

۸۳۴- حاصل $\frac{\sqrt[3]{0.125} + \sqrt[4]{0.256}}{\sqrt[5]{0.00001}}$ کدام است؟

- ۹ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۱ (۱)

۸۳۵- حاصل $\frac{\sqrt{0.0004} + \sqrt[3]{0.008}}{\sqrt[4]{0.0016} - \sqrt[5]{0.00001}}$ کدام است؟

- ۴/۲ (۴) ۴/۱ (۳) ۲/۲ (۲) ۱/۲ (۱)

۸۳۶- حاصل $\sqrt[5]{0.00032} \times \sqrt[4]{(0.0016)^{-1}}$ کدام است؟

- ۵۰ (۴) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) ۱ (۱)

کتاب درسی

۸۳۷- حاصل $\frac{1}{\sqrt[3]{(0.27)^{-3}}} - \frac{1}{\sqrt[5]{(0.32)^{-5}}}$ کدام است؟

- $-\frac{1}{20}$ (۴) $-\frac{1}{15}$ (۳) $-\frac{1}{10}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۱)

۸۳۸- مقدار $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{16}}$ کدام است؟

- ۸ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۸۳۹- مقدار $\sqrt{6\sqrt[3]{72\sqrt[4]{27\sqrt{9}}}}$ کدام است؟

- ۲۴ (۴) ۱۸ (۳) ۱۲ (۲) ۶ (۱)

کتاب درسی

۸۴۰- مقدار عبارت $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[3]{-64} + \sqrt{5^2} - \sqrt[5]{-32}$ کدام است؟

- ۶ (۴) ۵ (۳) -۴ (۲) -۶ (۱)

کتاب درسی

۸۴۱- حاصل $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} - \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^4}$ کدام است؟

- صفر (۴) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۱)

کتاب درسی

۸۴۲- حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}$ کدام است؟

- $\sqrt{5}-1$ (۴) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{3}-1$ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)

۸۴۳- اگر $x = 2 - \sqrt{7}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt[5]{(-x)^5} - \sqrt[4]{(-x)^4}$ کدام است؟

- ۲x (۴) ۳x (۳) -x (۲) -۳x (۱)

۸۴۴- اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[5]{a^5} + \sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4} + \sqrt{a^2}}$ کدام است؟

- ۲a (۴) صفر (۳) -۲ (۲) -۲a (۱)

- ۸۴۵- اگر $a < 0$ ، عبارت $\sqrt{-a^3} \sqrt{(-a)^2} \sqrt{a^2}$ برابر کدام است؟
- (۱) $\sqrt{-a}$ (۲) $-a$ (۳) $-a^3$ (۴) $\sqrt[3]{a}$
- ۸۴۶- اگر $a, b < 0$ ، حاصل $\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{\sqrt[5]{(a+b)^5}}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) $-\sqrt{-a-b}$ (۳) $-\frac{1}{\sqrt{-a-b}}$ (۴) -1
- ۸۴۷- اگر $-b < a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt[3]{-a^3} + \sqrt[4]{b^4} - \sqrt{(a+b)^2}$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) $a+b$ (۳) $-a-b$ (۴) $-2a$
- ۸۴۸- اگر $a \leq 1$ ، $\sqrt{(1-a)^3}$ برابر کدام است؟
- (۱) $(a-1)\sqrt{a-1}$ (۲) $(1-a)\sqrt{1-a}$ (۳) $(a-1)\sqrt{1-a}$ (۴) $(1-a)\sqrt{a-1}$
- ۸۴۹- حاصل $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt[3]{72}$ (۲) $\sqrt[3]{48}$ (۳) $\sqrt[3]{54}$ (۴) $\sqrt[3]{32}$
- ۸۵۰- حاصل $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{1024}$ کدام است؟
- (۱) $-\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $2\sqrt[3]{2}$ (۴) $-2\sqrt[3]{2}$
- ۸۵۱- اختلاف ریشه‌های چهارم عدد a برابر $\sqrt{2}$ است. ریشه سوم $\frac{a}{2}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$



- ۸۵۲- اگر $x < 0$ ، عبارت $\sqrt{-x^9}$ با کدام عبارت برابر است؟
- (۱) $-x^2\sqrt[4]{x}$ (۲) $x^2\sqrt[4]{x}$ (۳) $-x^2\sqrt[4]{-x}$ (۴) $x^2\sqrt{-x}$
- ۸۵۳- اگر $x < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x^6} + \sqrt[3]{x^9} + \sqrt{x^{12}}$ کدام است؟
- (۱) $2x^3$ (۲) x^3 (۳) $-x^3$ (۴) $-2x^3$
- ۸۵۴- اگر $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0.064$ ، حاصل $\sqrt[3]{6x-3}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۸۵۵- اگر ریشه دوم مثبت عدد $x - \sqrt{x}$ برابر ۳ باشد، حاصل عبارت $\frac{9 + \sqrt{x}}{x}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$
- ۸۵۶- اگر $a = \sqrt[3]{0.000027}$ ، مقدار $\sqrt{3}$ بر حسب a کدام است؟
- (۱) $10a$ (۲) $10\sqrt{a}$ (۳) $9\sqrt{a}$ (۴) $\frac{a}{10}$
- ۸۵۷- اگر $a = \sqrt[5]{\frac{3}{8}}$ ، مقدار $\sqrt[5]{12}$ بر حسب a کدام است؟
- (۱) $8a$ (۲) $6a$ (۳) $4a$ (۴) $2a$
- ۸۵۸- حاصل عبارت $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-1$
- ۸۵۹- اگر $\frac{(\sqrt[3]{-x})^4 - 2\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x^2}}{x^2} = 10$ ، مقدار x کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) -5

- ۸۶۰- اگر $-1 < x < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{1+\sqrt{x^2}} \times \sqrt{|x-1|}$ کدام است؟
- (۱) $1-x^2$ (۲) $1-x$ (۳) $x+1$ (۴) $-x$
- ۸۶۱- اگر $x < 0 < y$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{x^3 y^3} + \sqrt[4]{16 x^4 y^4} - \sqrt{(xy-1)^2}$ کدام است؟
- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $3xy$ (۴) $-3xy$
- ۸۶۲- اگر $a < 0 < b$ ، حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^3 b^3} - \sqrt[5]{(-a)^5 b^5} + b\sqrt{a^2} + a\sqrt[4]{(-b)^4}$ کدام است؟
- (۱) $2ab$ (۲) ab (۳) $3ab$ (۴) $4ab$
- ۸۶۳- اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{-3a^3} - \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{a^4}$ کدام است؟
- (۱) $a\sqrt{3a}$ (۲) $a(2-\sqrt{3a})$ (۳) $-a\sqrt{-3a}$ (۴) $a\sqrt{-3a}$
- ۸۶۴- اگر $x < 0 < y$ ، حاصل عبارت $A = |x|\sqrt{y^2} + y\sqrt{x^2} + |xy| - \sqrt{x^2 y^2}$ کدام است؟
- (۱) $-xy$ (۲) x (۳) $-2xy$ (۴) صفر
- ۸۶۵- هرگاه $a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{a^2 - 7a + 16} + \sqrt{a^2}$ کدام است؟
- (۱) $-a$ (۲) $4-a$ (۳) $a-4$ (۴) a^2
- ۸۶۶- اگر $a^9 = 16$ و $b^3 = -54$ ، مقدار $\frac{a^3 + b}{a^3 - b}$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{1}{7}$ (۴) $-\frac{1}{9}$
- ۸۶۷- حاصل عبارت $(x^4 y + xy + 1)(xy^4 - 1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ و $y = \sqrt[3]{4}$ کدام است؟
- (۱) 54 (۲) 63 (۳) 49 (۴) 7
- ۸۶۸- حاصل $\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{8} - \sqrt[3]{2}}$ کدام است؟
- (۱) 4 (۲) 8 (۳) 2 (۴) صفر
- ۸۶۹- حاصل $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} + \frac{\sqrt[5]{4}}{2\sqrt[3]{2}})^6$ کدام است؟
- (۱) 2^{-2} (۲) 2^{-16} (۳) 2^{-32} (۴) 2^4
- ۸۷۰- اگر $x, y < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x^3}{y}} \div \sqrt{\frac{y^3}{x}}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{x^2}{y^2}$ (۲) $-\frac{x^2}{y^2}$ (۳) $\frac{y}{x}$ (۴) $\frac{x}{y}$
- سطح ۳**
- ۸۷۱- مقدار $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{8+1}}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt[4]{4}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ (۴) $\sqrt[4]{2}$
- ۸۷۲- اگر $a-1 = \sqrt[5]{25} + \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{4} + \dots + \sqrt[5]{25}$ ، مقدار $\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{12} + \dots + \sqrt[5]{100}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt[5]{2a}$ (۲) $\sqrt[5]{4a}$ (۳) $(\sqrt[5]{2}-1)a$ (۴) $(\sqrt[5]{4}-1)a$
- ۸۷۳- اگر $abc < 0$ و $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ ، حاصل عبارت $\frac{a}{\sqrt{a^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2}}$ کدام است؟
- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 2 (۴) صفر

درس اول / بخش دوم: مقایسه ریشه‌ها

مقایسه توان‌ها و ریشه‌های دو عدد مختلف

۱- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و $a < b$. در این صورت

• $a^2 < b^2$ و $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

• $a^4 < b^4$ و $\sqrt[4]{a} < \sqrt[4]{b}$

۲- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی باشند و $a < b$. در این صورت

• $a^3 < b^3$ و $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

• $a^5 < b^5$ و $\sqrt[5]{a} < \sqrt[5]{b}$

تست

ریشه سوم -370 بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

(۴) -9 و -10

(۳) -8 و -9

(۲) -7 و -8

(۱) -6 و -7

چون مقدار ریشه سوم عددهای مکعب کامل را می‌دانیم، پس ابتدا دو عدد مکعب کامل متوالی پیدا می‌کنیم که -370 بین آنها باشد.

توجه کنید که $7^3 = 343$ و $8^3 = 512$. پس 370 بین 7^3 و 8^3 است. بنابراین

$$-8^3 < -370 < -7^3 \Rightarrow \sqrt[3]{-8^3} < \sqrt[3]{-370} < \sqrt[3]{-7^3} \Rightarrow \sqrt[3]{(-8)^3} < \sqrt[3]{-370} < \sqrt[3]{(-7)^3} \Rightarrow -8 < \sqrt[3]{-370} < -7$$

راه‌حل

مقایسه توان‌ها و ریشه‌های مختلف یک عدد

$1 < \sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < \dots$

$\dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < 1$

$-1 < \sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < a < a^3 < a^5 < \dots$

$a^5 < a^3 < a < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < -1$

• اگر $a > 1$ ، آن‌گاه

• اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه

• اگر $-1 < a < 0$ ، آن‌گاه

• اگر $a < -1$ ، آن‌گاه

تست

اگر $a = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ ، حاصل عبارت $|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a}|$ کدام است؟

(۴) $2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - \sqrt[4]{a}$

(۳) $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$

(۲) $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - 2\sqrt[4]{a}$

(۱) $\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}$

ابتدا توجه کنید که $0 < \frac{2}{7} < 1$ ، پس $0 < \sqrt[3]{\frac{2}{7}} < 1$. بنابراین $0 < a < 1$. پس

راه‌حل

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| = -(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$$

همچنین

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} \Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a} < 0 \Rightarrow |\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a}| = -(\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{a}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} + \sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{a} = \sqrt[4]{a} - \sqrt{a}$$

مقایسهٔ ریشه‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی

- ۸۷۴- کدام یک تقریب بهتری برای $\sqrt[3]{30}$ است؟
 (۱) $2/2$ (۲) $2/3$ (۳) $2/4$ (۴) $2/5$
- ۸۷۵- کدام عدد بین ۳ و ۴ قرار ندارد؟
 (۱) $\sqrt{13}$ (۲) $\sqrt[3]{31}$ (۳) $\sqrt[3]{310}$ (۴) $\sqrt[5]{301}$
- ۸۷۶- عدد $\sqrt[4]{450}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟
 (۱) ۵ و ۴ (۲) ۶ و ۵ (۳) ۷ و ۶ (۴) ۸ و ۷
- ۸۷۷- اگر $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ ، کدام یک درست نیست؟
 (۱) $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt{a} < a$ (۳) $\sqrt{a} < a^2$ (۴) $a^2 < \sqrt{a}$

سطح ۲

- ۸۷۸- اگر $0 < a < 1$ ، حاصل عبارت $\sqrt{(a-\sqrt{a})^2} + \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})^2} - \sqrt{(a-\sqrt[3]{a})^2}$ کدام است؟
 (۱) $2a$ (۲) $2\sqrt[3]{a}$ (۳) $2\sqrt{a}$ (۴) صفر
- ۸۷۹- اگر $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ ، کدام یک درست نیست؟
 (۱) $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ (۲) $\sqrt{a} > a$ (۳) $\sqrt{a^3} > \sqrt[3]{a^2}$ (۴) $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt{a^3}$
- ۸۸۰- چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد که $\sqrt[3]{a} < \sqrt{6}$ ؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵
- ۸۸۱- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $\sqrt{2} < \sqrt[3]{n} < \sqrt{3}$ ؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۸۸۲- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشهٔ سوم آن در بازهٔ $(2, 3)$ قرار دارد؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰
- ۸۸۳- چند عدد صحیح وجود دارد که حداقل یک ریشهٔ چهارم آن در بازهٔ $(-4, 3)$ قرار داشته باشد؟
 (۱) ۶۳ (۲) ۶۴ (۳) ۲۵۵ (۴) ۲۵۶
- ۸۸۴- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشهٔ چهارم مثبت آن بین ۳ و ۴ و ریشهٔ پنجم آن بین ۲ و ۳ است؟
 (۱) ۱۵۸ (۲) ۱۵۹ (۳) ۱۶۰ (۴) ۱۶۱
- ۸۸۵- اگر $1 < a < 2$ ، کدام یک درست نیست؟
 (۱) $\sqrt{a-1} < \sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt[3]{a-1} < \sqrt{a}$ (۳) $\sqrt[5]{a} < \sqrt{a-1}$ (۴) $\sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$

سطح ۳

- ۸۸۶- اگر $a = \sqrt{2} + \sqrt{45}$ ، $b = \sqrt{5} + \sqrt{18}$ و $c = \sqrt{7} + \sqrt{20}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a < b < c$ (۲) $b < a < c$ (۳) $c < b < a$ (۴) $b < c < a$
- ۸۸۷- اگر $0 < a < b$ ، حاصل عبارت $A = \frac{|\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}| + |\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}|}{|\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}| + |\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}|}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) \sqrt{b} (۴) \sqrt{a}

درس دوم / بخش اول: ریشه nام

ریشه nام

n زوج باشد	a دو ریشه nام قرینه دارد: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$	$a > 0$
n فرد باشد	a یک ریشه nام دارد: $\sqrt[n]{a}$	
n زوج باشد	a ریشه nام ندارد.	$a < 0$
n فرد باشد	a یک ریشه nام دارد: $\sqrt[n]{a}$	

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$.
 عدد b را ریشه nام عدد a می‌نامیم، به شرطی که $b^n = a$.
 ریشه nام مثبت عدد مثبت a را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم.
 همچنین، $\sqrt[n]{0} = 0$.

مثال: چون $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$ ، پس ریشه‌های ششم عدد 64 برابر 2 و -2 هستند.
 چون $3^7 = 2187$ ، پس $\sqrt[7]{2187} = 3$.

ویژگی‌های ریشه nام

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و m و n عددهایی طبیعی باشند که $m, n \geq 2$ (اگر n زوج باشد، a و b نامنفی‌اند). در این صورت

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (2) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (3) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad (4) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

- (5) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n} = a$ و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
 (6) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n b} = |a| \sqrt[n]{b}$.
 (7) اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، آن‌گاه $a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$.

تست 1

حاصل $\sqrt[6]{(\sqrt{2}-2)^6} - \sqrt[7]{(3-\sqrt{2})^7}$ کدام است؟

- (1) -1 (2) 1 (3) $2\sqrt{2}+1$ (4) $2\sqrt{2}-1$

راه‌حل توجه کنید که

$$\sqrt[6]{(\sqrt{2}-2)^6} = |\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}, \quad \sqrt[7]{(3-\sqrt{2})^7} = 3-\sqrt{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$2-\sqrt{2}-(3-\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}-3+\sqrt{2} = -1$$

تست 2

اگر $\frac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{n}$ مقدار $\sqrt[4]{9n+1}$ کدام است؟

- (1) $\sqrt[4]{2}$ (2) 2 (3) 4 (4) $\sqrt[4]{4}$

ابتدا توجه کنید که سمت چپ تساوی داده شده برابر است با

$$\frac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{4 \times 16}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 16}{8}} = \sqrt[4]{8}$$

بنابراین

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{n} \Rightarrow n = 8$$

در نتیجه $\sqrt[4]{9n+1} = \sqrt[4]{9 \times 8 + 1} = \sqrt[4]{64} = 2$

تست
□□□□

اگر $ab > 0$ و $b\sqrt[6]{a^6} - a = 0$ ، حاصل $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6}$ کدام است؟

- (۱) $1 \pm a$ (۲) $a - 1$ (۳) $b - 1$ (۴) $a - b$

ابتدا توجه کنید که

راه‌حل

$$b\sqrt[6]{a^6} - a = 0 \Rightarrow b|a| - a = 0 \Rightarrow b|a| = a$$

بنابراین اگر $a > 0$ ، $b = 1$ و اگر $a < 0$ ، $b = -1$. در نتیجه $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6} = |a| + |b| = |a| + 1$ که اگر a مثبت باشد برابر با $1 + a$ و اگر a منفی باشد، برابر با $1 - a$ است.

نکته

(۱) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

(۲) $\sqrt[m]{a^n} \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

(۳) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

تست
□□□□

حاصل $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}\sqrt[2]{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[4]{2}$ (۲) $\sqrt[6]{2}$ (۳) $\sqrt[2]{2}$ (۴) $\sqrt[24]{2}$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}\sqrt[2]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^2 \times 2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \times 2}} = \sqrt[4]{2^2 \times 2} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[2]{2}$$

تست
□□□□

حاصل $A = \sqrt[6]{2^{15} \times 3^8} - \sqrt[6]{2^8 \times 3^{15}}$ کدام است؟

- (۱) $6\sqrt[6]{6}$ (۲) $-6\sqrt[6]{6}$ (۳) $\sqrt[6]{6}$ (۴) $-\sqrt[6]{6}$

توجه کنید که

راه‌حل

$$\sqrt[6]{2^{15} \times 3^8} = \sqrt[6]{2^{14} \times 2 \times 3^7 \times 3} = \sqrt[6]{2^2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 12\sqrt[6]{6}, \quad \sqrt[6]{2^8 \times 3^{15}} = \sqrt[6]{2^7 \times 2 \times 3^{14} \times 3} = \sqrt[6]{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 18\sqrt[6]{6}$$

بنابراین $A = 12\sqrt[6]{6} - 18\sqrt[6]{6} = -6\sqrt[6]{6}$.

تست
□□□□

اگر $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^n}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}$ ، مقدار n کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^n}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^n}} \Rightarrow \sqrt[4 \times 3]{2^n} = \sqrt[3 \times 4]{2^n} \Rightarrow \sqrt[12]{2^n} = \sqrt[12]{2^4} \Rightarrow \sqrt[3]{2^n} = \sqrt[3]{2^4} \Rightarrow 2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

تست
□□□□

اگر $\sqrt[5]{a^3 a} = 2$ ، مقدار $\sqrt[4]{a^2} \sqrt[3]{a^2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[2]{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

توجه کنید که $\sqrt[5]{a^3 a} = \sqrt[5]{a^3 \times a} = \sqrt[5]{a^4} = 2$. بنابراین $a^4 = 2^5$. از طرف دیگر،

راه‌حل

$$\sqrt[4]{a^2} \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[4 \times 3]{a^2 \times a^2} = \sqrt[12]{a^4 \times a^4} = \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[12]{(a^4)^2} = \sqrt[12]{2^5 \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2^4 = 16$$

ریشه n ام

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

سطح ۱

 ۸۸۸- حاصل $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{4}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{58}$ (۲) $4\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{112}$ (۴) $5\sqrt[3]{2}$

 ۸۸۹- حاصل $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{3}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{3}$ (۲) $-\sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[3]{3}$ (۴) $\sqrt[3]{3}$

 ۸۹۰- حاصل کسر $\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$

 ۸۹۱- مقدار $\frac{\sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40}}{\sqrt{(5\sqrt[3]{5})^2}}$ کدام است؟

- (۱) $5\sqrt[3]{5}$ (۲) ۵ (۳) $\sqrt[3]{5}$ (۴) $4\sqrt[3]{5}$

 ۸۹۲- مقدار $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{9}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[5]{6}$ (۲) $\sqrt[5]{9}$ (۳) $\sqrt[5]{9}$ (۴) $\sqrt[5]{6}$

 ۸۹۳- حاصل $\sqrt[5]{2^4 \sqrt[5]{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[5]{2}$ (۲) $\sqrt[5]{2}$ (۳) $\sqrt[5]{8}$ (۴) $\sqrt[5]{8}$

 ۸۹۴- مقدار $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{3}}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt[3]{27}$ (۳) $\sqrt[3]{9}$ (۴) $\sqrt[3]{27}$

 ۸۹۵- مقدار $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴) صفر

 ۸۹۶- اگر $a < 0$ و n عددی طبیعی و فرد باشد، حاصل $\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n+1]{a^{n+1}}$ کدام است؟

- (۱) $2a$ (۲) $-2a$ (۳) $a+1$ (۴) صفر

 ۸۹۷- اگر $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = a$ ، مقدار $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) \sqrt{a} (۲) $\sqrt[3]{a}$ (۳) $a\sqrt{a}$ (۴) $\sqrt[3]{a^2}$

سطح ۲

 ۸۹۸- حاصل $\frac{7}{5} \sqrt{\frac{5^2 + 15^2}{7^2 + 21^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{7}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $(\frac{5}{7})^2$

 ۸۹۹- اگر $\sqrt[m-n]{5} = a$ ، حاصل عبارت $\frac{a^m - a^n}{a^m + a^n}$ چند است؟ (m و n عددهایی طبیعی اند و $m > n$).

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی

- ۹۰۰ اگر $x = \sqrt{\sqrt{5}}$ حاصل $x^6 + x^8$ کدام است؟
 ۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۵ (۴)
- ۹۰۱ اگر $a = \sqrt[3]{4}$ مقدار $a\sqrt{a}$ کدام است؟
 ۲ (۱) $2\sqrt[3]{2}$ (۲) $4\sqrt[3]{2}$ (۳) ۴ (۴)
- ۹۰۲ اگر $m = \sqrt[5]{4\sqrt{2}}$ حاصل $m^2 - m\sqrt{2}$ کدام است؟
 ۲ (۱) ۴ (۲) صفر (۳) $\sqrt{2}$ (۴)
- ۹۰۳ اگر $a = \sqrt[3]{2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}}}$ و $b = \sqrt[3]{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ مقدار ab کدام است؟
 $\frac{1}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۴ (۴)
- ۹۰۴ اگر $a, b > 0$ حاصل $\sqrt{\frac{a^2}{b}} \times \sqrt[4]{\frac{b}{a^5}} \times \sqrt{a^3 b^2}$ کدام است؟
 ۱ (۱) $\sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt[3]{ab}$ (۳) \sqrt{ab} (۴)
- ۹۰۵ حاصل $\sqrt[5]{y-2} \times \sqrt{2-y}$ کدام است؟
 $\sqrt{(2-y)^7}$ (۱) $-\sqrt[5]{4-y^2}$ (۲) $-\sqrt{(2-y)^7}$ (۳) $\sqrt[5]{(y-2)^7}$ (۴)
- ۹۰۶ حاصل عبارت $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} - \sqrt[5]{\sqrt[4]{96}} - \frac{2}{\sqrt[5]{16}}$ کدام است؟
 $2\sqrt[5]{3}$ (۱) $3\sqrt[5]{2}$ (۲) $-2\sqrt[5]{3}$ (۳) $-3\sqrt[5]{2}$ (۴)
- ۹۰۷ کدام تساوی درست نیست؟
 $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{2}$ (۱) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = 3\sqrt[3]{3}$ (۲) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}$ (۳) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt{2}$ (۴)
- ۹۰۸ حاصل $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2\sqrt[3]{3\sqrt[6]{6}}}}$ کدام است؟
 ۶ (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt[3]{6}$ (۳) $\sqrt[6]{6}$ (۴)
- ۹۰۹ مقدار $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}{\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}}$ کدام است؟
 $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ (۱) $\sqrt[4]{3}$ (۲) $\sqrt[3]{9}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ (۴)
- ۹۱۰ اگر $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{k-3}}} = 8$ مقدار k کدام است؟
 ۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴)
- ۹۱۱ اگر $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[5]{3^{n+5}}$ مقدار n کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۹۱۲ اگر $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{y^k}}$ مقدار k کدام است؟
 -۱ (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴)
- ۹۱۳ اگر $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$ مقدار $\sqrt[n]{n+27}$ کدام است؟
 ۲ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[4]{2}$ (۴)
- ۹۱۴ اگر $\sqrt[3]{9} = \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$ مقدار n کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۹۱۵ اگر $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{\sqrt[3]{3}} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3^a}$ مقدار a کدام است؟
 ۹ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)
- ۹۱۶ اگر $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt[3]{3}$ کدام گزینه $\sqrt[6]{18}$ را برحسب a و b درست نشان می‌دهد؟
 $b\sqrt{a}$ (۱) $b\sqrt[3]{a}$ (۲) $a\sqrt{b}$ (۳) $a\sqrt[3]{b}$ (۴)

- ۹۱۷- حاصل $A = \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^3} \times \sqrt[4]{2-\sqrt{3}} \times \sqrt[2]{(2-\sqrt{3})^3}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{3}-2$ (۲) $2-\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (۴) $\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$
- ۹۱۸- اگر $a = 1 - \sqrt[3]{3}$ و $b = \frac{\sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[3]{3a}}{\sqrt[3]{3}-1}$ مقدار $a-b$ کدام است؟
- (۱) $1 + \sqrt[3]{3}$ (۲) $1 + \sqrt[3]{3}$ (۳) $-\sqrt[3]{3}$ (۴) $-2\sqrt[3]{3}$
- ۹۱۹- اگر $a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$ کدام گزینه عددی صحیح است؟
- (۱) a^{-8} (۲) a^{-12} (۳) a^8 (۴) a^{12}
- ۹۲۰- اگر $a > 0$ ، حاصل $\frac{\sqrt[3]{a} \sqrt[2]{a} \sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a} \sqrt[3]{a}}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt[3]{a^2}$ (۲) $a\sqrt{a}$ (۳) $a\sqrt[3]{a}$ (۴) $\sqrt[6]{a}$
- ۹۲۱- عبارت $\sqrt[3]{a} \sqrt[4]{a}$ چند برابر عبارت $\sqrt[12]{a^6} \sqrt[3]{a^{-2}}$ است؟ ($a > 0$)
- (۱) 1 (۲) 2 (۳) a (۴) a^2
- ۹۲۲- اگر $\sqrt[3]{a} \sqrt[4]{\frac{1}{a}} \times \sqrt[6]{a} = 3$ مقدار a کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) 9 (۴) 27
- ۹۲۳- اگر $\sqrt[3]{2^5} \sqrt{x} = \sqrt[2]{2} \times \sqrt[5]{3}$ مقدار x کدام است؟
- (۱) 3^3 (۲) 3^4 (۳) 2^7 (۴) 2^8
- ۹۲۴- اگر $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{x}$ مقدار x کدام است؟
- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{4}$ (۴) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$
- ۹۲۵- اگر $\sqrt[5]{16} \sqrt[3]{a} = 2\sqrt[2]{2}$ مقدار a کدام است؟
- (۱) 16 (۲) 16^2 (۳) 16^3 (۴) 16^5
- ۹۲۶- اگر $\sqrt{\sqrt[3]{4a+2}} = \sqrt[4]{2}$ مقدار a کدام است؟
- (۱) 14 (۲) 30 (۳) 62 (۴) 126
- ۹۲۷- اگر $\sqrt{3} \times \sqrt[2]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{x} \times \sqrt[6]{x}$ مقدار x کدام است؟
- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{27}{4}$ (۴) $\frac{27}{8}$

سطح ۳

- ۹۲۸- حاصل $\sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n}}}$ چند است؟
- (۱) 10 (۲) 20 (۳) 30 (۴) 45
- ۹۲۹- اگر $\sqrt[3]{x} \sqrt{x} = 2$ مقدار $\sqrt{x} \sqrt[3]{x}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt[3]{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$
- ۹۳۰- اگر $\sqrt[3]{a} \sqrt{\frac{1}{a}} = 5$ حاصل $\sqrt[3]{a} \sqrt{\frac{1}{a}}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) 5 (۳) 25 (۴) $5\sqrt{5}$
- ۹۳۱- اگر $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n+2} \sqrt[n]{4} \sqrt[n]{4^n}}$ کدام است؟
- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

درس دوم / بخش دوم: مقایسه ریشه‌ها

مقایسه ریشه‌های n ام دو عدد مختلف

- اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه
 $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
 $a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$
 و در نتیجه
- اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و n عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه
 $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
 $a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$
 و در نتیجه

تست

ریشه هفتم چند عدد طبیعی بین ۲ و ۳ است؟

- ۲۰۵۷ (۱) ۲۰۵۸ (۲) ۲۰۵۹ (۳) ۲۰۶۰ (۴)

$$2 < \sqrt[n]{n} < 3 \Leftrightarrow 2^Y < n < 3^Y \Leftrightarrow 128 < n < 2187$$

توجه کنید که

چون n عددی طبیعی است، پس $129 \leq n \leq 2186$ ، یعنی تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $2186 - 129 + 1 = 2058$.

راه‌حل

تست

ریشه ششم مثبت عدد ۹۰۰ در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱, ۲) (۱) (۲, ۳) (۲) (۳, ۴) (۳) (۴, ۵) (۴)

$$1^6 = 1, \quad 2^6 = 64, \quad 3^6 = 729, \quad 4^6 = 4096$$

به توان ششم عددهای طبیعی توجه کنید:

$$3^6 < 900 < 4^6 \Rightarrow 3 < \sqrt[6]{900} < 4$$

بنابراین

راه‌حل

تست

اگر $a = \sqrt{2}$ ، $b = \sqrt[3]{3}$ و $c = \sqrt[6]{6}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $c < a < b$ (۴) $c < b < a$

فرجه ریشه‌ها را یکی می‌کنیم: $a = \sqrt{2} = \sqrt[3 \times 2]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ ، $b = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3 \times 2]{3^2} = \sqrt[6]{9}$ ، $c = \sqrt[6]{6}$ و اکنون توجه کنید که

$$\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} \Rightarrow c < a < b$$

راه‌حل

مقایسه ریشه‌های مختلف یک عدد

• اگر m و n عددهایی طبیعی باشند و $m < n$ ، آن‌گاه

$$0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a} \qquad a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

• اگر m و n عددهایی طبیعی و فرد باشند و $m < n$ ، آن‌گاه

$$a < -1 \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a} \qquad -1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

تست

اگر $a = \sqrt{-0.6}$ ، کدام عدد کوچک‌تر است؟

- (۱) $-\sqrt{-a}$ (۲) \sqrt{a} (۳) $-\sqrt{-a}$ (۴) \sqrt{a}

$$-1 < -0.6 < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt{-0.6} < 0 \Rightarrow -1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$$

توجه کنید که

$$-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < -a < 1 \Rightarrow \sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a} \Rightarrow -\sqrt{-a} < -\sqrt[3]{-a}$$

از طرف دیگر،

اکنون باید مشخص کنیم \sqrt{a} کوچک‌تر است یا $-\sqrt[3]{-a}$. توجه کنید که $\sqrt{a} = -\sqrt{-a}$ و چون $0 < -a < 1$ ، پس

$$\sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a} \Rightarrow -\sqrt{-a} < -\sqrt[3]{-a} \Rightarrow \sqrt{a} < -\sqrt[3]{-a}$$

بنابراین \sqrt{a} کوچک‌ترین گزینه است.

راه‌حل

مقایسهٔ ریشه‌ها

پرسی‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

- ۹۳۲- عدد $\sqrt[6]{1000}$ در کدام بازه قرار دارد؟
 (۱) $(2, 2/5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(4/5, 5)$ (۴) $(5, 6)$
- ۹۳۳- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشهٔ ششم منفی آن در بازهٔ $(-4, -3)$ قرار دارد؟
 (۱) ۳۳۶۳ (۲) ۳۳۶۴ (۳) ۳۳۶۵ (۴) ۳۳۶۶
- ۹۳۴- اگر $0 < a < 1$ ، حاصل $\sqrt[6]{a} - \sqrt[5]{a} + |\sqrt[6]{a} - \sqrt[5]{a}| + |\sqrt[6]{a} - \sqrt[5]{a}|$ کدام است؟
 (۱) $2\sqrt[6]{a}$ (۲) $2\sqrt[6]{a}$ (۳) $\sqrt[6]{a}$ (۴) $\sqrt[6]{a} - \sqrt[5]{a}$
- ۹۳۵- اگر $a = \sqrt[6]{1/0.1}$ ، کدام عدد بزرگ‌تر است؟
 (۱) $\sqrt[6]{a}$ (۲) $\sqrt[6]{a}$ (۳) $\sqrt[6]{a}$ (۴) $\sqrt[6]{a}$

سطح ۲

- ۹۳۶- کدام عدد بزرگ‌تر است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt[3]{5}$ (۳) $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[4]{2}}$ (۴) $\frac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[4]{10}}$
- ۹۳۷- اگر $a = \sqrt{3}$ ، $b = \sqrt[3]{9}$ و $c = \sqrt[4]{27}$ کدام گزینه درست است؟
 (۱) $b < a < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < b < c$ (۴) $a < c < b$
- ۹۳۸- کدام عدد بزرگ‌تر است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[4]{4}$ (۴) $\sqrt[5]{5}$
- ۹۳۹- اگر $a = \sqrt{-4}$ ، $b = \sqrt{-4}$ و $c = \sqrt{-4}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a < b < c$ (۲) $a < c < b$ (۳) $b < c < a$ (۴) $c < b < a$
- ۹۴۰- اگر $a = \sqrt{6}$ ، $b = \sqrt[3]{15}$ و $c = \sqrt[4]{220}$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $a < b < c$ (۲) $a < c < b$ (۳) $c < b < a$ (۴) $b < a < c$
- ۹۴۱- کدام گزینه درست است؟
 (۱) $\sqrt[6]{2} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{11}$ (۲) $\sqrt[6]{2} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{11}$ (۳) $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < \sqrt[6]{2}$ (۴) $\sqrt{5} < \sqrt[6]{2} < \sqrt[3]{11}$

کنکور سراسری

ریاضی خارج ۹۵

- ۹۴۲- حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{24}$ کدام است؟
 (۱) $6\sqrt[6]{2}$ (۲) $3\sqrt[6]{32}$ (۳) $2\sqrt[6]{9}$ (۴) ۶

نکته

محاسبات مربوط به ریشه‌ها را می‌توان با تبدیل ریشه‌ها به توان گویا و استفاده از ویژگی‌های توان‌های گویا، راحت‌تر انجام داد.

تست ۳

اگر $a > 0$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[6]{a} \times \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$

(۲) $\sqrt[12]{a}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

(۴) $\sqrt[6]{a}$

$$\frac{\sqrt[6]{a} \times \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{6} + \frac{2}{4} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

می‌توان نوشت

راه‌حل
تست ۴

اگر $a = \sqrt{b^3} \sqrt{b^2} \sqrt{b}$ ، آن‌گاه a^8 برابر کدام است؟

(۱) b^{34}

(۲) b^{17}

(۳) b^7

(۴) b^8

$$a = \sqrt{b^3} \sqrt{b^2} \sqrt{b} = (b^3)^{\frac{1}{2}} (b^2)^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = b^{\frac{6}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = b^{\frac{9}{2}} = b^4 \times b^{\frac{1}{2}}$$

توجه کنید که

راه‌حل

$$. a^8 = (b^{\frac{9}{2}})^8 = b^{36}$$

تست ۵

اگر $\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{3} = 3^a$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) $\frac{11}{12}$

(۲) $\frac{13}{12}$

(۳) $\frac{19}{24}$

(۴) $\frac{23}{24}$

$$\sqrt{3} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{3} = \sqrt{3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{3^{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}} = \sqrt{3^{\frac{12}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}}} = \sqrt{3^{\frac{19}{12}}} = 3^{\frac{19}{24}}$$

با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به دست می‌آید.

راه‌حل

$$. a = \frac{19}{24}$$

تست ۶

اگر $\frac{\sqrt[4]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{a}$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt[4]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{2^{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{6}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{11}{6}}} = 2^{\frac{11}{24}}$$

توجه کنید که

راه‌حل

$$\frac{\sqrt[4]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{\frac{11}{24}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{11}{24} - \frac{12}{24}} = 2^{-\frac{1}{24}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{24}}$$

بنابراین

$$. a = \frac{1}{2}$$

توان‌های گویا

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

۹۴۳- حاصل عبارت $\frac{(0/64)^{0/25}}{(0/2)^{0/5}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

کتاب درسی

۹۴۴- حاصل کسر $\frac{(0/04)^2 \times (625)^{-1/4}}{(0/008)^{-1/3}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{125}$ ۴) $\frac{2}{25}$

کتاب درسی

۹۴۵- حاصل $\frac{(0/00032)^{0/2}}{(0/25)^{0/5}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{4}{25}$ ۴) $\frac{25}{4}$

کتاب درسی

۹۴۶- مقدار $(\frac{1}{64})^5 - (\frac{1}{32})^6$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $-\frac{1}{32}$

کتاب درسی

۹۴۷- مقدار $\frac{-1}{3} + 27^{\frac{-1}{3}} - \frac{2}{3} + 32^{\frac{-2}{5}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{101}{30}$ ۲) $\frac{101}{60}$ ۳) $\frac{101}{120}$ ۴) $\frac{101}{180}$

کتاب درسی

۹۴۸- حاصل عبارت $\frac{\frac{1}{646} \times 125^3}{\frac{3}{92} - 8^2}$ کدام است؟

- ۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۹۴۹- حاصل $\frac{\frac{3}{8^4} \times \frac{1}{12^3} \times 95}{(\frac{1}{2})^{12} \times (\frac{1}{3})^{15}}$ کدام است؟

- ۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

۹۵۰- حاصل $3^{-\frac{1}{2}} \sqrt{27}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۹۵۱- حاصل عبارت $(\frac{1}{62} + \frac{1}{122})^3 \times \frac{1}{2}$ چند است؟

- ۱) $2 + \sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2} - 2$ ۳) $2 - \sqrt{2}$ ۴) $-2 - \sqrt{2}$

۹۶۴- اگر $a^{1/2} = b^{1/5}$ ، آن‌گاه $a^{1/5}$ برابر کدام است؟ ($a, b > 0$)

(۱) $b^{1/25}$ (۲) $b^{1/25}$ (۳) $b^{1/5}$ (۴) $b^{1/75}$

۹۶۵- اگر $a^{3/4} = b^{1/2}$ ، آن‌گاه $a^{-1/3}$ برابر کدام است؟

(۱) $b^{1/2}$ (۲) $b^{1/2}$ (۳) $b^{1/9}$ (۴) $b^{1/4}$

۹۶۶- اگر $a = \sqrt[5]{2\sqrt{8}}$ ، مقدار $\sqrt[3]{a^2}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[5]{8}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt[4]{16}$ (۴) $\sqrt[3]{16}$

۹۶۷- اگر $(\frac{y}{n})^{n-1}$ ، مقدار a^n کدام است؟

(۱) ۱ (۲) y^{n-2} (۳) y (۴) y^{2-n}

۹۶۸- اگر $\sqrt[3]{2^6 \sqrt[5]{2^4} \sqrt[3]{2^2}} = 10\sqrt[5]{2^a}$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) ۵۲ (۲) ۱۵۴ (۳) ۱۰۴ (۴) ۲۰۸

۹۶۹- اگر $a > 0$ ، حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^2}})^{1/5}$ کدام است؟

(۱) a^2 (۲) a (۳) \sqrt{a} (۴) $a^{1/5}$

۹۷۰- اگر $a > 0$ ، حاصل $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}} \sqrt[3]{\frac{a^2}{\sqrt{a}}}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ (۳) $\sqrt[3]{a}$ (۴) $\sqrt[3]{a^2}$

۹۷۱- اگر $a > 0$ ، حاصل $\frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} \times \sqrt{a}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt[3]{a}$ (۳) $\sqrt[3]{a^2}$ (۴) \sqrt{a}

۹۷۲- اگر $\frac{\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{a}}{\sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{a}} = 2$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۱۶

۹۷۳- اگر $\sqrt[5]{5^2} = (\frac{1}{125})^{-1}$ ، مقدار n کدام است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴) ۳۱

۹۷۴- اگر $\sqrt[3]{5} = ((125)^2)^{1/3}$ ، مقدار n کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۹۷۵- اگر $(\frac{1}{81})^{-2} = \frac{\sqrt[3]{3^n} \times \sqrt[4]{9}}{\sqrt[3]{3}}$ ، مقدار n کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۳

۹۷۶- اگر $x = \sqrt[3]{2^{15}}$ ، حاصل $x \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[5]{x^2}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $\sqrt[3]{2^6}$

۹۷۷- اگر $\sqrt{y}\sqrt{y}\sqrt{y}=y^k$ ، مقدار k کدام است؟

$\frac{y}{8}$ (۴)	$\frac{3}{4}$ (۳)	$\frac{5}{8}$ (۲)	$\frac{3}{8}$ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

۹۷۸- اگر $\sqrt[5]{\frac{9}{\sqrt[3]{81}}}=3^k$ ، مقدار k کدام است؟

$\frac{2}{15}$ (۴)	$\frac{1}{15}$ (۳)	$\frac{1}{5}$ (۲)	$\frac{1}{3}$ (۱)
--------------------	--------------------	-------------------	-------------------

۹۷۹- اگر $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{4}}=2^a$ ، مقدار a کدام است؟

$-\frac{5}{6}$ (۴)	$-\frac{5}{12}$ (۳)	$\frac{5}{2}$ (۲)	$\frac{5}{3}$ (۱)
--------------------	---------------------	-------------------	-------------------

۹۸۰- اگر $\sqrt[5]{125\sqrt[3]{5}}=(5^n)^5$ ، مقدار n کدام است؟

$\frac{8}{21}$ (۴)	$\frac{5}{21}$ (۳)	$\frac{4}{21}$ (۲)	$\frac{2}{21}$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۹۸۱- اگر $\frac{\sqrt{5}\sqrt[5]{5}}{\sqrt{\frac{1}{5}}}=5^k$ ، مقدار k کدام است؟

$\frac{11}{12}$ (۴)	$\frac{11}{10}$ (۳)	$\frac{11}{9}$ (۲)	$\frac{11}{13}$ (۱)
---------------------	---------------------	--------------------	---------------------

۹۸۲- اگر $\frac{a\sqrt[3]{a}\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}=a^s$ ، مقدار s کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)	$\frac{4}{3}$ (۳)	۵ (۲)	$\frac{8}{3}$ (۱)
-------------------	-------------------	-------	-------------------

۹۸۳- اگر $\sqrt[4]{9\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\sqrt{48}}=3\frac{n}{4}$ ، مقدار n کدام است؟

۹ (۴)	۷ (۳)	۵ (۲)	۱۳ (۱)
-------	-------	-------	--------

۹۸۴- اگر $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2^n}}}=2$ ، مقدار n کدام است؟

۵۴ (۴)	۴۸ (۳)	۴۶ (۲)	۴۵ (۱)
--------	--------	--------	--------

۹۸۵- اگر $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{32^k}}$ ، مقدار k کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)	$\frac{3}{2}$ (۳)	۲ (۲)	$\frac{5}{2}$ (۱)
-------------------	-------------------	-------	-------------------

۹۸۶- اگر $\sqrt[3]{\frac{x^2}{\sqrt{x}}}=4$ ، مقدار x کدام است؟

۲۴ (۴)	۱۶ (۳)	۸ (۲)	۴ (۱)
--------	--------	-------	-------

۹۸۷- اگر $\sqrt{a\sqrt{a}}=4$ ، مقدار $\sqrt{a+\sqrt{a}}$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)	۲ (۳)	$\sqrt{8}$ (۲)	$\sqrt{10}$ (۱)
----------------	-------	----------------	-----------------

۹۸۸- اگر $a=5^5$ و $b=7^5$ ، حاصل $\frac{27}{35^5}$ برحسب a و b کدام است؟

$\frac{a+1}{b+1}$ (۴)	$\frac{25ab}{7}$ (۳)	$\frac{yab}{25}$ (۲)	$\frac{5a}{7b}$ (۱)
-----------------------	----------------------	----------------------	---------------------



- ۹۸۹- حاصل عبارت $(a^n \sqrt[n]{a^{1-n}} \sqrt[n]{a^{1-n}}) \div \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{a}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{n}$ (۳) a^{-n} (۴) n^a
- ۹۹۰- اگر $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{8^{n+1}}}{\sqrt[4]{4^{2n+3}}}} = 2$ ، مقدار n کدام است؟
- (۱) ۹ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۱۴ (۴) ۱۲۰
- ۹۹۱- اگر $32a = \frac{1}{2^{10}} \times \frac{2}{2^{10}} \times \frac{3}{2^{10}} \times \dots \times \frac{9}{2^{10}}$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰
- ۹۹۲- اگر $6^3 = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{a}$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۹۹۳- اگر $3^{23} = x \times \sqrt{x^3} \times \sqrt[3]{x^6}$ ، حاصل $\sqrt[6]{x}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt[3]{3^2}$ (۳) ۳ (۴) 3^2
- ۹۹۴- اگر $\sqrt[3]{y} = 3$ و $y \sqrt[3]{x} = 81$ ، حاصل $\sqrt[6]{x} \sqrt[3]{y}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt[6]{27}$ (۲) $3\sqrt[6]{3}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt[6]{3}$
- ۹۹۵- اگر $\sqrt[4]{a\sqrt[6]{b}} = 4$ و $\sqrt[6]{b\sqrt[4]{a}} = 6$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟
- (۱) $(\frac{2}{3})^5$ (۲) $(\frac{2}{3})^6$ (۳) $(\frac{2}{3})^9$ (۴) $(\frac{2}{3})^{15}$
- ۹۹۶- اگر $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt[5]{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5^2}}}$ ، مقدار x کدام است؟
- (۱) $\sqrt[5]{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) ۲۵
- ۹۹۷- معادله $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = 10$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۹۹۸- اگر $(\frac{2}{3})^x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ ، مقدار x چند است؟
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{8}$
- ۹۹۹- اگر $3^5 = \sqrt{x} \sqrt[3]{\frac{1}{x} \sqrt{x}}$ ، مقدار x کدام است؟
- (۱) 3^{-12} (۲) 3^{12} (۳) 3^8 (۴) 3^{-8}
- ۱۰۰۰- اگر $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{4}} = \sqrt[5]{x\sqrt{2}}$ ، مقدار x کدام است؟
- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ۱۰۰۱- اگر $2\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = x\sqrt{x\sqrt{x}}$ ، حاصل $x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ کدام است؟
- (۱) $2\sqrt[3]{128}$ (۲) $2^2\sqrt[3]{128}$ (۳) $4\sqrt[3]{128}$ (۴) $4^2\sqrt[3]{128}$
- ۱۰۰۲- اگر $a^4 b^2 = 16\sqrt{2}$ ، مقدار $\sqrt{a\sqrt[3]{b}} \times \sqrt[3]{b\sqrt{a}}$ کدام است؟ ($a, b > 0$)
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[4]{8}$ (۴) $\sqrt{8}$

درس سوم / بخش دوم: مقایسه توان‌ها

مقایسه توان‌های گویای یک عدد

۱- فرض کنید a عددی حقیقی باشد که $a > 1$ و r و s عددهایی گویا و مثبت باشند.

• $a^r > 1$

• اگر $r > s$ ، آن‌گاه $a^r > a^s$.

۲- فرض کنید a عددی حقیقی باشد که $0 < a < 1$ و r و s عددهایی گویا و مثبت باشند.

• $a^r < 1$

• اگر $r > s$ ، آن‌گاه $a^r < a^s$.

مثال: چون ۲ از ۱ بزرگ‌تر است، پس هر توان مثبت آن هم از ۱ بزرگ‌تر است. مثلاً

$$\frac{4}{25} > 1, \quad \frac{4}{2^3} > 1$$

همچنین، 2^5 از 2^4 کوچک‌تر است چون $\frac{1}{5}$ از $\frac{1}{4}$ کوچک‌تر است.

مثال: چون $\frac{3}{4}$ از ۱ کوچک‌تر است، پس هر توان مثبت آن هم از ۱ کوچک‌تر است. مثلاً

$$\left(\frac{3}{4}\right)^7 < 1, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^9 < 1$$

همچنین، $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ از $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ بزرگ‌تر است چون $\frac{2}{3}$ از $\frac{3}{4}$ کوچک‌تر است.

تست

۱

اگر $0 < x < 1$ ، $a = \sqrt{x}$ ، $b = \sqrt[5]{x^4}$ و $c = \sqrt[3]{x}$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $c < b < a$ (۲) $c < a < b$ (۳) $b < c < a$ (۴) $b < a < c$

توجه کنید که $a = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ، $b = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$ و $c = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. از طرف دیگر $\frac{1}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ و چون $0 < x < 1$ ، پس

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^5} \Rightarrow c > a > b$$

راه‌حل

مقایسهٔ توان‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۰۰۳- اگر $a = (\frac{1}{3})^5$ ، $b = (\frac{1}{3})^7$ و $c = (\frac{1}{3})^{11}$ کدام درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $c < a < b$ (۳) $c < b < a$ (۴) $b < c < a$

۱۰۰۴- اگر $x = 9^2$ ، $y = 81^2$ و $z = 243^5$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $x > y > z$ (۲) $y > x > z$ (۳) $y > x = z$ (۴) $x = z > y$

۱۰۰۵- کدام عدد بزرگ‌تر است؟

- (۱) $2^{\frac{3}{2}}$ (۲) $2^{\frac{4}{3}}$ (۳) $2^{\frac{5}{4}}$ (۴) $2^{\frac{6}{5}}$

۱۰۰۶- کدام عدد کوچک‌تر است؟

- (۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^4$ (۲) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^5$ (۳) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^7$ (۴) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^8$

سطح ۲

۱۰۰۷- کدام عدد از بقیه کوچک‌تر است؟

- (۱) $64^{\frac{1}{5}}$ (۲) $32^{\frac{1}{4}}$ (۳) $16^{\frac{1}{3}}$ (۴) $8^{\frac{1}{2}}$

۱۰۰۸- اگر $a = \sqrt[3]{4}$ ، $b = \sqrt{64}$ و $c = \sqrt[9]{256}$ کدام یک درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $b < a < c$ (۴) $c < a < b$

۱۰۰۹- اگر $x > 1$ ، $a = \sqrt{x^3}$ ، $b = \sqrt[5]{x^2}$ و $c = \sqrt{x^9}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a > b > c$ (۲) $b < a < c$ (۳) $c < a < b$ (۴) $a > c > b$

۱۰۱۰- اگر $0 < a < 1$ ، $x = \sqrt{a^3}$ ، $y = \sqrt[3]{a^4}$ و $z = \sqrt[12]{a^{10}}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $z < y < x$ (۲) $z < x < y$ (۳) $x < y < z$ (۴) $x < z < y$

۱۰۱۱- اگر $a = \sqrt{2} - 1$ ، کدام عدد بزرگ‌تر است؟

- (۱) $\sqrt{a^2}$ (۲) $\sqrt[4]{a^3}$ (۳) $\sqrt[5]{a^4}$ (۴) $\sqrt[6]{a^5}$

۱۰۱۲- اگر $(fa)^{\frac{4}{3}} > 8a^2$ ، حدود a کدام است؟

- (۱) $0 < a < \frac{1}{4}$ (۲) $0 < a < \frac{1}{2}$ (۳) $a > \frac{1}{8}$ (۴) $a > \frac{1}{4}$

۱۰۱۳- اگر $a^{\frac{4}{5}} < a^{\frac{3}{4}}$ و $(\frac{f}{d})^{\frac{a}{2}} > (\frac{f}{d})^{2a-1}$ ، حدود a کدام است؟

- (۱) $0 < a < 1$ (۲) $0 < a < \frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3} < a < 1$ (۴) $1 < a < \frac{3}{2}$

۱۰۱۴- اگر $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b^2}$ و $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt{c^3}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a^2 < c$ (۲) $c^y = a^6$ (۳) $c^3 = a^2$ (۴) $a > c$

۱۰۱۵- اگر $a = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ ، $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ و $c = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{5}}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a > b > c$ (۲) $b > a > c$ (۳) $c > a > b$ (۴) $c > b > a$

کنکور سراسری

۱۰۱۶- اگر $A = \sqrt[5]{4^3 \sqrt{16}} (\frac{1}{4})^{-\frac{4}{3}}$ ، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟
 (۱) $0/25$ (۲) $0/5$ (۳) $0/75$ (۴) 1

۱۰۱۷- اگر $A = \sqrt[5]{9 \sqrt{3}} (12)^{-1/5}$ ، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام است؟
 (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

ریاضی ۹۸

ریاضی خارج ۹۸

درس چهارم / بخش اول: اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

این تساوی را اتحاد مربع مجموع دو جمله می‌نامند. طبق این اتحاد، مربع مجموع دو جمله برابر است با مجموع مربع‌های این دو جمله و دو برابر حاصل ضرب آن‌ها. به عبارت دیگر،

$$\left(\begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \text{جمله اول} \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ \text{جمله دوم} \end{array} \right)^2 = \begin{array}{c} a^2 \\ \uparrow \\ \text{مربع جمله اول} \end{array} + \begin{array}{c} 2ab \\ \uparrow \\ \text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله} \end{array} + \begin{array}{c} b^2 \\ \uparrow \\ \text{مربع جمله دوم} \end{array}$$

به همین ترتیب، اتحاد مربع تفاضل دو جمله به صورت زیر است:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال:

الف) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

ب) $(3-\sqrt{2})^2 = 3^2 - 2(3)(\sqrt{2}) + \sqrt{2}^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

تست

۱ اگر $a+b=4$ و $a^2+b^2=12$ ، مقدار ab کدام است؟

۶ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

بنابر اتحاد مربع مجموع دو جمله،

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 4^2 = 12 + 2ab \Rightarrow 2ab = 4 \Rightarrow ab = 2$$

راه‌حل

تست

۲ مقدار $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{6})^2$ کدام است؟

$12+8\sqrt{6}$ (۴)

۲۴ (۳)

۲۲ (۲)

$8\sqrt{6}$ (۱)

توجه کنید که بنابر اتحادهای مربع تفاضل و مجموع دو جمله،

$$(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{6})^2 = \sqrt{2}^2 - 2(\sqrt{2})(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2(2)(\sqrt{6}) + \sqrt{6}^2 = 2 - 4\sqrt{6} + 12 + 4 + 4\sqrt{6} + 6 = 24$$

راه‌حل

تست

۳ مقدار $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ کدام است؟

$\sqrt{3}+2$ (۴)

$\sqrt{2}+3$ (۳)

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (۱)

اگر عبارت‌های زیر رادیکال را به صورت مربع مجموع یا تفاضل دو عدد بنویسیم، محاسبات ساده می‌شوند. از الگوی اتحادهای مربع مجموع و تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{2}^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{2} = \sqrt{3}+2$.

راه‌حل

تست ۴

 اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ ، مقدار $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

راه حل

 طرفین تساوی $x - \frac{1}{x} = 3$ را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد مربع تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

تست ۵

 اگر $a + \frac{3}{2a} = 4$ ، مقدار $4a^2 + \frac{9}{a^2}$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۶ (۲) ۵۲ (۳) ۷۶ (۴)

راه حل

 توجه کنید که $12 - 4a^2 + \frac{9}{a^2} = (2a + \frac{3}{a})^2 - 12$. از طرف دیگر، بنابر فرض $a + \frac{3}{2a} = 4$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به دست می‌آید

$$2a + \frac{3}{a} = 8. \text{ بنابراین، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با } 8^2 - 12 = 52.$$

تست ۶

 اگر $a + b = 3$ و $a^2b + ab^2 = -30$ ، حاصل $a^2 - ab + b^2$ کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۵۰ (۲) ۲۸ (۳) ۳۹ (۴)

راه حل

توجه کنید که

$$a^2b + ab^2 = ab(a+b) = -30. \xrightarrow{a+b=3} ab = -10.$$

بنابراین

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab = 9 - 3(-10) = 39$$

تست ۷

 اگر $a + b = \sqrt{7ab}$ ، حاصل $A = \frac{a^2 + b^2 + 3ab}{a^2 + b^2 - 4ab}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۵ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

راه حل

 اگر طرفین رابطه $a + b = \sqrt{7ab}$ را به توان ۲ برسانیم، آن‌گاه

$$(a+b)^2 = (\sqrt{7ab})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 7ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 5ab$$

 بنابراین عبارت مورد نظر به شکل $A = \frac{a^2 + b^2 + 3ab}{a^2 + b^2 - 4ab} = \frac{5ab + 3ab}{5ab - 4ab} = \frac{8ab}{ab} = 8$ ساده می‌شود.

تست ۸

 اگر $2 = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ ، حاصل $5x - x^2$ کدام است؟

- $\frac{17}{4}$ (۱) $\frac{15}{4}$ (۲) $\frac{13}{4}$ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴)

راه حل

ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 = x - 1 + 4 - x + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} = 3 + 2\sqrt{-x^2 + 5x - 4}$$

 بنابراین $\sqrt{5x - x^2} - 4 = \frac{1}{2}$ در نتیجه

$$5x - x^2 - 4 = \frac{1}{4} \Rightarrow 5x - x^2 = \frac{17}{4}$$

تست
□□□□

اگر $2x^2 - 6x + 1 = 0$ ، حاصل $4x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

راه‌حل

ابتدا تساوی داده شده را به شکل $2x^2 + 1 = 6x$ بازنویسی می‌کنیم. اگر دو طرف این تساوی را بر x تقسیم کنیم، به دست می‌آید $2x + \frac{1}{x} = 6$. اکنون

به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، به دست می‌آید

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(2x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 36 - 4 = 32$$

تست
□□□□

اگر $\frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{10}$ ، حاصل $\frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4}$ کدام است؟

$\frac{1}{60}$ (۴)

$\frac{1}{50}$ (۳)

$\frac{1}{40}$ (۲)

$\frac{1}{30}$ (۱)

راه‌حل

رابطه داده شده را به صورت $\frac{x^2 + 3x + 2}{x} = 10$ می‌نویسیم، پس

$$\frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{2}{x} = 10 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 7$$

حال، طرفین رابطه اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = 49 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 5 = 50 \Rightarrow \frac{x^4 + 5x^2 + 4}{x^2} = 50$$

$$\frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{50}$$

بنابراین

تست
□□□□

مقدار عبارت $x^3 - 4x^2 + x + 2$ به ازای $x = 2 - \sqrt{3}$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$$x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = (-\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

در نتیجه

$$x^3 - 4x^2 + x + 2 = x(x^2 - 4x + 1) + 2 = 2$$

اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

 ۱۰۱۸- ساده شده عبارت $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$ کدام است؟

- (۱) $2(a+b)$ (۲) $2\left(\frac{a+b}{b} + \frac{b}{a}\right)$ (۳) ۲ (۴) ۴

کتاب درسی

 ۱۰۱۹- مقدار عبارت $A = (x-1)^2 + (x+1)^2 - (\sqrt{2}x-1)^2$ به ازای $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $1 + 2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) ۵

 ۱۰۲۰- اگر $a+b=4$ و $ab=\frac{1}{2}$ ، مقدار a^2+b^2 کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

 ۱۰۲۱- مقدار عبارت x^2+4x به ازای $x = \sqrt{3}-2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

 ۱۰۲۲- اگر $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 6$ ، حاصل $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}$ کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۲ (۳) ۶۴ (۴) ۳۸

 ۱۰۲۳- اگر $\frac{a^2+1}{a} = 3$ ، مقدار $\frac{a^4+1}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۷ (۴) ۵

 ۱۰۲۴- اگر $x + \frac{3}{2x} = 3$ ، حاصل عبارت $4x^2 + \frac{9}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۱۲ (۴) ۳۶

 ۱۰۲۵- اگر $xy=2$ و $x^2+y^2=5$ ، حاصل $x^4-14x^2y^2+y^4$ کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۱۳ (۳) -۱۳ (۴) -۳۹

 ۱۰۲۶- اگر $a + \frac{1}{a+2} = 4$ ، مقدار عبارت $(a+2)^2 + \frac{1}{(a+2)^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

سطح ۲

 ۱۰۲۷- اگر $a-b=3$ و $ab=2$ ، حاصل a^4+b^4 کدام است؟

- (۱) ۱۷۷ (۲) ۱۶۱ (۳) ۳۷ (۴) ۱۷

 ۱۰۲۸- اگر $a^2+b^2=5ab$ و $a>b>0$ ، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ (۳) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ (۴) $\sqrt{\frac{9}{2}}$

۱۰۲۹- اگر $1 - |a| = \frac{1}{a}$ ، حاصل $|a| + \frac{1}{a}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $-\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{5}$

۱۰۳۰- اگر $-\frac{1}{2} = \frac{(x-7)(y-8)}{(x-7)^2 + (y-8)^2}$ ، حاصل $x+y$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱۵ (۳) ۱ (۴) ۲۲

۱۰۳۱- مقدار $\sqrt{3-2\sqrt{3}}\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt[4]{3}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt[4]{3}$ (۴) $2\sqrt[4]{3}$

۱۰۳۲- مقدار $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۱۰۳۳- اگر بدانیم $a+b=\sqrt{75}$ و $b+\frac{1}{a}=\sqrt{27}$ ، حاصل $a^2+\frac{1}{a^2}$ چقدر است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۱۰۳۴- اگر $a+2b=\sqrt{12}$ و $\frac{1}{a}+b=\sqrt{48}$ ، مقدار $a^2+\frac{4}{a^2}$ کدام است؟

(۱) ۱۲۲ (۲) ۱۱۶ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۰۸

۱۰۳۵- اگر $x - \frac{1}{x-2} = 4$ ، حاصل $\frac{(x-2)^2}{(x-2)^4 + 1}$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۰۳۶- حاصل عبارت $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ (۲) $1 - 2\sqrt{2}$ (۳) $1 - \sqrt{2}$ (۴) $\frac{3}{2} - 2\sqrt{2}$

۱۰۳۷- اگر $\sqrt{11+\sqrt{72}} = x + \sqrt{2}$ ، مقدار x کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۹

۱۰۳۸- مقدار $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۱۴ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) ۲۸



۱۰۳۹- اگر $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\frac{x^2}{x^4+1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{11}$

۱۰۴۰- اگر $\frac{x}{x^2-3x+4} = \frac{1}{2}$ ، حاصل $\frac{x^2}{x^4-x^2+16}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{17}$

۱۰۴۱- اگر $a^2 - 4a + 2 = 0$ ، مقدار $a^2 + \frac{4}{a^2}$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴)

۱۰۴۲- اگر $a + 2\sqrt{a} = 1$ ، حاصل $a^2 - 6a$ کدام است؟

- ۳ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)

۱۰۴۳- اگر $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، مقدار $x^2 - 33x$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۱۰۴۴- عدد $2\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ با کدام عدد زیر برابر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{14} - 3$

۱۰۴۵- مقدار عبارت $2x^3 - 4x^2 - 8x + 3$ به ازای $x = 1 - \sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴۶- مقدار عبارت $2a^3 + 7a^2 - 2a - 12$ به ازای $a = \sqrt{5} - 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $16a$ (۳) $8a$ (۴) 24

۱۰۴۷- کدام گزینه درست است؟

(۱) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$

۱۰۴۸- اگر $a = \sqrt{7} + \sqrt{21}$ ، $b = \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{13} + \sqrt{15}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $c < b < a$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < c < b$ (۴) $a < b < c$

۱۰۴۹- کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

- (۱) $3 - \sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{6} - 2$ (۳) $3\sqrt{6} - 7$ (۴) $\sqrt{8} - \sqrt{6}$

۱۰۵۰- کمترین مقدار ممکن عبارت $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 10$ کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) -۲۰ (۳) -۱۹ (۴) -۱۸

۱۰۵۱- اگر $a - b = 1 + \sqrt{2}$ و $b - c = 1 - \sqrt{2}$ ، مقدار عبارت $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۵۲- چند عدد طبیعی مانند m می‌توان پیدا کرد که $((3 + 2\sqrt{5})^2 - m)^2$ عددی طبیعی باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی

۱۰۵۳- ساده شده عبارت $\sqrt{2 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha}$ کدام است؟

- (۱) $1 - \cos\alpha$ (۲) $1 - |\cos\alpha|$ (۳) $1 - |\sin\alpha|$ (۴) $1 - \sin\alpha$

۱۰۵۴- ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{\sin^4 15^\circ + 4\cos^2 15^\circ} - 2}{\sqrt{\cos^4 15^\circ + 4\sin^2 15^\circ} - 2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan^2 15^\circ$ (۳) $\cot^2 15^\circ$ (۴) $\sin^2 15^\circ$

۱۰۵۵- حاصل عبارت $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}}$ به ازای $\alpha = 100^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\sin 100^\circ - \cos 100^\circ$ (۲) $\sin 100^\circ - \cos 100^\circ$ (۳) $-\sin 100^\circ + \cos 100^\circ$ (۴) $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ$

درس چهارم / بخش دوم: اتحاد مزدوج

اتحاد مزدوج

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

این تساوی را اتحاد مزدوج می‌نامند. طبق این اتحاد، حاصل ضرب دو پرانتز که یکی تفاضل دو جمله و دیگری مجموع این دو جمله است، برابر است با تفاضل مربع جمله اول و مربع جمله دوم (این دو پرانتز را مزدوج یکدیگر می‌نامند).

مثال:

الف) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = \sqrt{7}^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$

ب) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = \underbrace{(x^2-1)}_{\text{مزدوج}} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{مزدوج}} = (x^2)^2 - 1 = x^4 - 1$

تست

مقدار $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \div \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱/۶ (۴)

۱/۸ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۲ (۱)

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \div \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{9-8}}{\sqrt{36-20}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

تست

مقدار $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}$ کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

راه‌حل اول توجه کنید که

راه‌حل

$$5-2\sqrt{6} = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad 5+2\sqrt{6} = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

در نتیجه

راه‌حل دوم فرض کنید $x = \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}$. در این صورت

$$x^2 = (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^2 + (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^2 + 2\sqrt{5-2\sqrt{6}} \times \sqrt{5+2\sqrt{6}} = 5-2\sqrt{6} + 5+2\sqrt{6} + 2\sqrt{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}$$

$$= 10 + 2\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = 10 + 2\sqrt{25-24} = 10 + 2 = 12$$

بنابراین $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

تست

اگر $a = 7-4\sqrt{3}$ و $b = (2+\sqrt{3})^2$ ، حاصل $a^b b^a$ کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه‌حل اول توجه کنید که $b = (2+\sqrt{3})^2 = 4+3+2 \times 2 \times \sqrt{3} = 7+4\sqrt{3}$. در نتیجه

راه‌حل

$$ab = (7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow a^b b^a = (ab)^a = 1^a = 1$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a = 7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$. در نتیجه $ab = (2-\sqrt{3})^2 \times (2+\sqrt{3})^2 = ((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^2 = 1$

بنابراین $a^b b^a = (ab)^a = 1^a = 1$.

تست ۴

 حاصل عبارت $(3+\sqrt{5}-\sqrt{14})(3+\sqrt{14}+\sqrt{5})$ کدام است؟

- ۳√۵ (۱) ۶√۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

 بنا بر اتحاد مزدوج، **راه حل**

$$(3+\sqrt{5}+\sqrt{14})(3+\sqrt{5}-\sqrt{14})=(3+\sqrt{5})^2-(\sqrt{14})^2=14+6\sqrt{5}-14=6\sqrt{5}$$

تست ۵

 حاصل عبارت $\sqrt[3]{2+2\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{6-4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

 چون $6-4\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^2$ ، پس $\sqrt[3]{6-4\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{2-\sqrt{2}}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{(2+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\sqrt[3]{2(1+\sqrt{2})\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

راه حل
تست ۶

 اگر $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}=-\frac{1}{12}$ ، مقدار $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

 فرض می‌کنیم مقدار عبارت خواسته شده برابر a باشد. یعنی $a=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$. طرفین تساوی بالا و تساوی $-\frac{1}{12}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}$ را در

یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$-\frac{1}{12}a=(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})\Rightarrow-\frac{a}{12}=x-1-(x+3)\Rightarrow-\frac{a}{12}=-4\Rightarrow a=48$$

راه حل
تست ۷

 اگر $a=(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$ ، مقدار 3^{16} بر حسب a کدام است؟

- ۸a (۱) ۸a+1 (۲) ۸a-1 (۳) 9a-1 (۴)

 دو طرف تساوی داده شده را در 3^2-1 ضرب می‌کنیم:

$$(3^2-1)a=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)=(3^8-1)(3^8+1)=3^{16}-1$$

 بنابراین $3^{16}-1=8a$. در نتیجه $3^{16}=8a+1$.

راه حل

اتحاد مزدوج

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۰۵۶- حاصل $\sqrt{5-\sqrt{21}} \times \sqrt{5+\sqrt{21}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۵۷- حاصل عبارت $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ به ازای $x=\sqrt[4]{18}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۱۰۵۸- مقدار عبارت $A = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$ به ازای $x = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۵۹- اگر $a = \sqrt{2} + 1$ ، حاصل عبارت $a(a-1)(a-2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۰- اگر $a = \sqrt{6} - 2$ و $b = \sqrt{6} + 2$ ، مقدار $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۱- اگر $a = \sqrt{6} + 1$ و $b = \sqrt{6} - 1$ ، مقدار عبارت $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

سطح ۲

۱۰۶۲- واسطه هندسی عددهای $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$ و $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۳- عبارت $(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}})^4$ با کدام عدد زیر برابر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۴- اگر $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ و $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a+b)^6$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۵- حاصل عبارت $\sqrt{\frac{\sqrt{24}-4}{\sqrt{24}+4}} - \sqrt{\frac{\sqrt{24}+4}{\sqrt{24}-4}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۶- اگر $a-b=b-c=5$ ، مقدار عبارت $a^2-2b^2+c^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۷- اگر $a^y = \sqrt{5} + 2$ و $b^x = \sqrt{5} - 2$ ، مقدار $(ab)^{56}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۸- حاصل عبارت $\frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۹- اگر $a = \frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1}$ حاصل $\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{6-2}}$ بر حسب a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2a}$ (۲) $\frac{2}{a}$ (۳) $\frac{a}{2}$ (۴) $2a$

۱۰۷۰- اگر $a = 3^8 - 1$ ، مقدار عبارت $(3^8 + 1)(3^4 + 1)(3^2 + 1)$ بر حسب a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{a}$ (۲) $\frac{2}{a}$ (۳) $\frac{1}{a+1}$ (۴) $\frac{2}{a+1}$

۱۰۷۱- اگر $A = \sqrt{2}(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$ ، مقدار عبارت $\sqrt[4]{A+256}$ به ازای $x = 2 + \sqrt{2}$ کدام است؟

(۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $6 + 4\sqrt{2}$ (۳) $6 + 2\sqrt{2}$ (۴) $4 + 4\sqrt{2}$

۱۰۷۲- a ، b و c عددهای حقیقی و مثبت اند. $a + b + c = 16$ و b واسطه هندسی a و c است. مقدار $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۰۷۳- ساده شده عبارت $(1 - \sqrt{2})\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۱۰۷۴- اگر $A = (2 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})$ و $B = 5 + \sqrt{27}$ ، حاصل $\frac{2A}{B} + 1$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $2 - \sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

۱۰۷۵- حاصل عبارت $(\sqrt[3]{343} - \sqrt[3]{243})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{81})$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۰۷۶- حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(12 - 2\sqrt{35})}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{7}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{7}$

۱۰۷۷- مقدار $\sqrt[4]{11 + 4\sqrt{7}} \times \sqrt{\sqrt{7} - 2}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۴

۱۰۷۸- حاصل عبارت $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2}$ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) $-2\sqrt{2}$

۱۰۷۹- مقدار $\sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{11 - 6\sqrt{2}}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{5}$ (۴) $\sqrt[3]{7}$

۱۰۸۰- حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{6+2}\sqrt[3]{\sqrt{6-2}\sqrt[3]{\sqrt{6-2}}}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۰۸۱- حاصل عبارت $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

۱۰۸۲- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}} \times \sqrt[4]{17 - 6\sqrt{8}}}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2} + 1$ (۴) $\sqrt{2} - 1$

۱۰۸۳- اگر $a = \sqrt{5} + 1$ ، حاصل عبارت $(\sqrt[4]{5} - 1)(\sqrt[4]{5} + 1)$ بر حسب a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{a-1}$ (۲) $\frac{1}{a+1}$ (۳) $\frac{4}{a}$ (۴) $a+2$

۱۰۸۴- اگر $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 2$ ، مقدار $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{4}{2}$

- ۱۰۸۵- اگر $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=a$ و $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}=2a+1$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$
- ۱۰۸۶- اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x}=1$ و $\sqrt{x-a}-\sqrt{x}=a+1$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۱۰۸۷- اگر $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{2}{x^2+x}$ ، مقدار عبارت $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۱۰۸۸- اگر $\sqrt[4]{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ، مقدار $\frac{2}{x-1}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



- ۱۰۸۹- ساده شده عبارت $(\sqrt{22}+\sqrt{12}-\sqrt{10})(\sqrt{33}-\sqrt{18}+\sqrt{15})$ کدام است؟
- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $10\sqrt{11}$ (۳) $12\sqrt{5}$ (۴) $22\sqrt{6}$
- ۱۰۹۰- اگر $a=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ و $b=2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ، مقدار ab کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴
- ۱۰۹۱- اگر $a, b > 0$ ، $a-\frac{1}{b}=8$ و $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}=4$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۹
- ۱۰۹۲- اگر $x, y > 0$ ، $x-\frac{1}{y}=12$ و $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{y}}=2$ ، مقدار xy کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۶
- ۱۰۹۳- اگر $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ، حاصل $(a+b)^8$ چقدر است؟
- (۱) ۶ (۲) 6^2 (۳) 6^4 (۴) 6^8
- ۱۰۹۴- مقدار عبارت $\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۱۰۹۵- اگر $x=\sqrt{1+\sqrt{6}}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ برحسب x کدام است؟
- (۱) $2x^2$ (۲) x (۳) $x\sqrt{2}$ (۴) x^2
- ۱۰۹۶- اگر $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{\sqrt{3}-1}$ برحسب a کدام است؟
- (۱) \sqrt{a} (۲) $2a$ (۳) $\sqrt{2a}$ (۴) $\sqrt{2a}$
- ۱۰۹۷- حاصل عبارت $(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}})^2\sqrt{2}$ کدام است؟
- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۱۶
- ۱۰۹۸- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد، ساده شده عبارت $1+\cot \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{-1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{1-\cos \alpha}$ (۳) $\frac{-1}{\sin \alpha}$ (۴) $\frac{1}{1-\sin \alpha}$

درس چهارم / بخش سوم: اتحاد مربع مجموع سه جمله

اتحاد مربع مجموع سه جمله

فرض کنید a, b و c سه عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

این تساوی را اتحاد مربع مجموع سه جمله می‌نامند. طبق این اتحاد، مربع مجموع سه جمله برابر است با مجموع مربع‌های این سه جمله به علاوه مجموع دو برابر حاصل ضرب هر دو تا از آن‌ها.

مثال:

الف) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sqrt{6} = 2 + 3 + 6 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{18} = 11 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{18}$

ب) $(x^2 - x + 1)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2x^2(-x) + 2(-x)(1) + 2x^2(1) = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + 2x^2 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

در عبارت $(x^2 + x - \frac{1}{2})^2$ ضریب جمله x^2 کدام است؟

تست
□□□□

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

$$(x^2 + x - \frac{1}{2})^2 = x^4 + x^2 + \frac{1}{4} + 2x^3 - x - x^2 = x^4 + 2x^3 - x + \frac{1}{4}$$

بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

بنابراین ضریب جمله x^2 صفر است.

راه حل

اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ و $a+b+c=4$ ، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

تست
□□□□

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc} = 0 \Rightarrow bc+ac+ab=0$$

ابتدا توجه کنید که

پس

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow 4^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 16$$

راه حل

اگر $a+b=4-c$ و $ab+ac+bc=3$ ، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

تست
□□□□

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

تساوی $a+b=4-c$ را به شکل $a+b+c=4$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(a+b+c)^2 = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(\underbrace{ab+ac+bc}_3) = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

راه حل

اگر $a^2 + 2ab = 30$ ، $b^2 - 2ac = 24$ و $c^2 - 2bc = 10$ ، مقدار $|c-a-b|$ کدام است؟

تست
□□□□

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

تساوی‌های داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = 64 \Rightarrow (a+b-c)^2 = 64 \Rightarrow |a+b-c| = 8 \Rightarrow |c-a-b| = 8$$

راه حل

درس چهارم / بخش چهارم: اتحاد جمله مشترک

اتحاد جمله مشترک

فرض کنید x , a و b عددهایی حقیقی باشند. در این صورت

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

این تساوی را اتحاد جمله مشترک می‌نامند. طبق این اتحاد، برای پیدا کردن حاصل ضرب دو پرانتز که جمله‌ای مشترک دارند، مربع جمله مشترک، حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک و حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک را حساب می‌کنیم و این‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به عبارت دیگر،

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \text{جمله} & \text{جمله‌های} & \text{مربع جمله} & \text{مجموع} & \text{جمله} \\ \text{مشترک} & \text{غیرمشترک} & \text{مشترک} & \text{جمله‌های} & \text{مشترک} \\ & & & \text{غیرمشترک} & \text{غیرمشترک} \\ & & & & \text{حاصل ضرب} \\ & & & & \text{جمله‌های} \\ & & & & \text{غیرمشترک} \end{matrix}$

مثال:

الف) $(x-a)(x-2a) = x^2 + (-a-2a)x + (-a)(-2a) = x^2 - 3ax + 2a^2$

ب) $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = (x^2+x)^2 + (1+2)(x^2+x) + 1 \times 2 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3(x^2+x) + 2 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$

تست

در عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ضریب x^2 کدام است؟

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

با استفاده از اتحادهای جمله مشترک و مربع مجموع دوجمله، عبارت را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = ((x^2+5x)+4)((x^2+5x)+6) \\ &= (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) + 24 = x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24 = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 \end{aligned}$$

بنابراین ضریب x^2 در این عبارت برابر ۳۵ است.

راه‌حل

تست

اگر $x^2 - 3x = 7$ ، حاصل $(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$ کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۱ (۳)

۱۹ (۲)

۱۷ (۱)

ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ و $(x-4)(x+1) = x^2 - 3x - 4$. بنابراین

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) = (7+2)(7-4) = 27$$

راه‌حل

اتحاد جمله مشترک

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۱۱۳- حاصل عبارت $(x+2)(x+4)-(x+1)(x+5)$ کدام است؟

$x-4$ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	$x-1$ (۱)
-----------	-------	-------	-----------

۱۱۱۴- اگر $(x-2)(x+3)=1$ ، مقدار x^2+x کدام است؟

۸ (۴)	۷ (۳)	۶ (۲)	۵ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۱۱۵- اگر $a-b=4$ و $ab=2$ ، مقدار $(1+a)(1-b)$ کدام است؟

۸ (۴)	۶ (۳)	۴ (۲)	۳ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۱۱۶- اگر $a+b=ab=5$ ، حاصل $x^2-(x+a)(x+b)+5$ کدام است؟

$-5x$ (۴)	$x+5$ (۳)	$x-5$ (۲)	$5x$ (۱)
-----------	-----------	-----------	----------

سطح ۲

۱۱۱۷- اگر $x^2=5x+2$ ، حاصل عبارت $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$ کدام است؟

۵۶ (۴)	۴۸ (۳)	۴۲ (۲)	۳۶ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۱۱۸- عبارت $A=x(x-1)(x+1)(x-2)+1$ با کدام عبارت برابر است؟

$(x^2+x+1)^2$ (۴)	$(x^2-x-1)^2$ (۳)	$(x^2+x-1)^2$ (۲)	$(x^2-x+1)^2$ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

۱۱۱۹- اگر $x=\sqrt{\sqrt{5}-1}$ ، مقدار عبارت $(x-1)(x-2)(x^2+3x+2)$ کدام است؟

$15-9\sqrt{5}$ (۴)	$15-7\sqrt{5}$ (۳)	$15+9\sqrt{5}$ (۲)	$15+7\sqrt{5}$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۱۱۲۰- مقدار عبارت $A=(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ کدام است؟

$51-\sqrt{13}$ (۴)	$50+\sqrt{13}$ (۳)	۵۱ (۲)	۵۰ (۱)
--------------------	--------------------	--------	--------

درس چهارم / بخش پنجم: اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله

اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

این تساوی را اتحاد مکعب مجموع دو جمله می‌نامند. طبق این اتحاد، مکعب مجموع دو جمله برابر است با مجموع مکعب‌های این دو جمله، سه برابر مربع جمله اول در جمله دوم و سه برابر مربع جمله دوم در جمله اول. به عبارت دیگر،

$$(a+b)^3 = a^3 + \underbrace{3a^2b}_{\substack{\text{مکعب سه برابر مربع سه برابر مربع مکعب جمله اول} \\ \text{جمله دوم در جمله اول در جمله دوم}}} + \underbrace{3ab^2}_{\substack{\text{مکعب سه برابر مربع سه برابر مربع مکعب جمله دوم} \\ \text{جمله اول در جمله اول در جمله دوم}}} + b^3$$

به همین ترتیب، اتحاد مکعب تفاضل دو جمله به صورت زیر است:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال:

الف) $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \times 1 + 3(2x) \times 1^2 + 1^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

ب) $(\frac{x}{2}-2)^3 = (\frac{x}{2})^3 - 3(\frac{x}{2})^2 \times 2 + 3(\frac{x}{2}) \times 2^2 - 2^3 = \frac{x^3}{8} - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 8$

پ) $(1-\sqrt{2})^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times \sqrt{2} + 3 \times 1 \times \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 = 1 - 3\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$

تست

ضرب x^3 در عبارت $((x+2)^3 - 6x^2)^2$ کدام است؟

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

عبارت را با استفاده از اتحادهای مکعب مجموع دو جمله و مربع مجموع سه جمله به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} ((x+2)^3 - 6x^2)^2 &= (x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2)^2 = (x^3 + 12x + 8)^2 \\ &= x^6 + 144x^2 + 64 + 24x^4 + 16x^3 + 192x \end{aligned}$$

بنابراین ضرب x^3 در این عبارت برابر ۱۶ است.

راه‌حل

تست

اگر $a^3 + b^3 = 133$ و $a^2b + ab^2 = 70$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله، $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2) = 133 + 3 \times 70 = 343$ ، بنابراین

$$a+b = \sqrt[3]{343} = 7$$

راه‌حل

تست
□□□□

اگر $a + \frac{3}{a} = 5$ ، مقدار عبارت $a^3 + \frac{27}{a^3}$ کدام است؟

۱۷۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۵ (۲)

۴۵ (۱)

طرفین تساوی $a + \frac{3}{a} = 5$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

راه‌حل

$$\left(a + \frac{3}{a}\right)^3 = 125 \Rightarrow a^3 + 3a^2\left(\frac{3}{a}\right) + 3\left(\frac{9}{a^2}\right)a + \frac{27}{a^3} = 125 \Rightarrow a^3 + \frac{27}{a^3} + 9a + \frac{27}{a} = 125 \Rightarrow a^3 + \frac{27}{a^3} + 9\left(a + \frac{3}{a}\right) = 125$$

اگر به جای $a + \frac{3}{a}$ مقدار آن یعنی ۵ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود $a^3 + \frac{27}{a^3} + 9(5) = 125$. بنابراین $a^3 + \frac{27}{a^3} = 80$.

تست
□□□□

حاصل $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}-1$ (۳)

۱ (۲)

$1-\sqrt{2}$ (۱)

توجه کنید که $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\frac{7+5\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^3}}$. از طرف دیگر، $(1+\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2}$. بنابراین صورت و مخرج

راه‌حل

کسر مورد نظر برابر است، یعنی حاصل کسر برابر ۱ است.

نکته

اگر در اتحاد مکعب مجموع دو جمله، از دو جمله وسط $3ab$ را فاکتور بگیریم، به دست می‌آید

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

به همین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

تست
□□□□

اگر $a+b=5$ و $ab=2$ ، مقدار a^3+b^3 کدام است؟

۹۰ (۴)

۹۵ (۳)

۱۰۵ (۲)

۱۱۵ (۱)

بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

راه‌حل

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow 5^3 = a^3 + b^3 + 3 \times 2 \times 5$$

$$a^3 + b^3 = 5^3 - 3 \times 2 \times 5 = 125 - 30 = 95$$

تست
□□□□

اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ ، مقدار $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

± 72 (۴)

± 46 (۳)

± 76 (۲)

± 52 (۱)

ابتدا مقدار $x - \frac{1}{x}$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

راه‌حل

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 4$$

اکنون توجه کنید که $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$. در نتیجه $x^3 - \frac{1}{x^3}$ برابر با ۷۶ یا -۷۶ است.

تست ۷

 اگر $ab=4$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}=4$ ، مقدار $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}$ کدام است؟

- ۸۸ (۴) ۸۴ (۳) ۶۸ (۲) ۶۴ (۱)

راه حل

 اگر دو طرف تساوی $\sqrt{a}-\sqrt{b}=4$ را به توان سه برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3=4^3 \Rightarrow (\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3-3\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})=64 \Rightarrow a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})=64$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3\sqrt{ab}(4)=64 \Rightarrow a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3(2)(4)=64 \Rightarrow a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=88$$

تست ۸

 اگر $\tan x - \cot x = 3$ ، مقدار $\tan^3 x - \cot^3 x$ کدام است؟

- ۳۶ (۴) ۳۴ (۳) ۳۱ (۲) ۲۷ (۱)

راه حل

بنابر اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$(\tan x - \cot x)^3 = \tan^3 x - \cot^3 x - 3 \tan x \cot x (\tan x - \cot x) \Rightarrow 3^3 = \tan^3 x - \cot^3 x - 3 \times 1 \times 3$$

$$\tan^3 x - \cot^3 x = 27 + 9 = 36$$

تست ۹

 اگر $A = \sqrt[3]{4-\sqrt{8}} + \sqrt[3]{4+\sqrt{8}}$ ، مقدار $A^3 - 6A$ کدام است؟

- ۸ (۴) ۱۰ (۳) ۱۲ (۲) ۱۶ (۱)

راه حل

 ابتدا A را به توان سه می‌رسانیم و سپس از اتحاد مکعب مجموع دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$A^3 = (\sqrt[3]{4-\sqrt{8}} + \sqrt[3]{4+\sqrt{8}})^3 = \sqrt[3]{4-\sqrt{8}}^3 + \sqrt[3]{4+\sqrt{8}}^3 + 3\sqrt[3]{4-\sqrt{8}} \times \sqrt[3]{4+\sqrt{8}} (\sqrt[3]{4-\sqrt{8}} + \sqrt[3]{4+\sqrt{8}})$$

$$= 4 - \sqrt{8} + 4 + \sqrt{8} + 3\sqrt{(4-\sqrt{8})(4+\sqrt{8})} \times A = 8 + 3\sqrt{4^2 - (\sqrt{8})^2} A = 8 + 3\sqrt{8} A = 8 + 3 \times 2A = 8 + 6A$$

در نتیجه $A^3 - 6A = 8$.

تست ۱۰

 مقدار عبارت $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$ به ازای $x = 45^\circ$ کدام است؟

- ۱ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

راه حل

 به کمک اتحادهای $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ و $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ صورت و مخرج عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

 بنابراین $A = \frac{1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - 1}{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1} = \frac{-3 \sin^2 x \cos^2 x}{-2 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{3}{2}$ پس مقدار عبارت A به ازای هر مقدار x برابر $\frac{3}{2}$ است.

اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۱۲۱- ضریب x^2 در عبارت $A=(x-2)^3-(2x-1)^3$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

۱۱۲۲- ضریب x^4 در عبارت $(x^2-2x)^3-2x^4$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

۱۱۲۳- اگر $a^2+b^2=2$ ، مقدار $a^6+6a^2b^2+b^6$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

۱۱۲۴- اگر $a-b=20$ و $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=2$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۱۲۵ (۱) ۲۷ (۲) ۶۴ (۳) ۸ (۴)

۱۱۲۵- اگر $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{4}$ و $ab=2$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

۱۱۲۶- اگر $a=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ و $b=\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ، مقدار $a^3-b^3+3ab(b-a)$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۴ (۴)

۱۱۲۷- اگر $a^3-3a^2b=71$ و $b^3-3ab^2=7$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۱۲۸- اگر $a=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ ، حاصل a^3-9a کدام است؟

- ۸ (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۸ (۴)

۱۱۲۹- اگر $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}$ ، حاصل x^2-3x کدام است؟

- ۸ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

سطح ۲

۱۱۳۰- حاصل $(\sqrt{2}+1)\sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}$ کدام است؟

- $\sqrt[3]{3}$ (۱) $\sqrt[3]{6}$ (۲) $\sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴)

۱۱۳۱- اگر $\frac{a^2-1}{a}=5$ ، مقدار $\frac{a^6-1}{a^3}$ کدام است؟

- ۱۲۵ (۱) ۱۳۰ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۵۰ (۴)

۱۱۳۲- اگر $a^2+\frac{1}{a^2}=27$ و $0 < a < 1$ ، مقدار $a^3-\frac{1}{a^3}$ کدام است؟

- ۱۴۰ (۱) -۱۲۰ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۱۱۳۳- اگر $a^3-8b^3=22$ و $a^3-8b^3=7$ ، مقدار $a-2b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کتاب درسی

کتاب درسی

- ۱۱۳۴- اگر $x^2 - y^2 = 45$ و $x^2y = 6 + xy^2$ ، حاصل $x - y$ کدام است؟
- ۱ (۵) ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲)
- ۱۱۳۵- اگر $x^2y + y^2x = 20$ و $x^2 + y^2 = 65$ ، مقدار xy کدام است؟
- ۱ (۱) ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲)
- ۱۱۳۶- اگر $a^2b - ab^2 = -4\sqrt{2}$ و $a^3 - b^3 = -14\sqrt{2}$ ، مقدار ab کدام است؟
- ۴ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)
- ۱۱۳۷- اگر $\sqrt{a+5} - \sqrt{a-5} = 1$ ، حاصل $a^2 - 25$ کدام است؟
- ۱ (۲۷) ۲ (۶۴) ۳ (۶۴) ۴ (۲۷)
- ۱۱۳۸- اگر $(a-b)^3 = 7a^2b - 7b^2a$ ، مقدار $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$ چند برابر مقدار $a-b$ است؟ ($a \neq b$)
- ۱ (۱۰) ۲ (۵) ۳ (۷) ۴ (۴)
- ۱۱۳۹- اگر $2a^3 + 6ab^2 = 11$ و $2b^3 + 6a^2b = 5$ ، مقدار $(a-b)^2 + 4ab$ کدام است؟
- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)
- ۱۱۴۰- اگر $a^3 - 5a^2b - ab^2 = 135$ و $2a^2b + 4ab^2 - b^3 = -108$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)
- ۱۱۴۱- اگر $a^2(a-3b) = 275$ ، $b^2(3a-b) = 68$ و $ab = -10$ ، مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟
- ۱ (۲۴) ۲ (۲۵) ۳ (۲۸) ۴ (۲۹)
- ۱۱۴۲- اگر $a^2 - 3ab = \frac{43}{a}$ و $b^2 - 3ab = -\frac{21}{b}$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)
- ۱۱۴۳- اگر $a^2 = \frac{7}{a-3b}$ و $b^2 = \frac{20}{3a-b}$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۱۱۴۴- اگر $x^2(x-y) = 98 - 2xy^2$ و $y^2(y-x) = 34 - 2x^2y$ ، حاصل $x-y$ کدام است؟
- ۱ (۴) ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۳)
- ۱۱۴۵- عبارت $\sqrt[3]{3+9\sqrt{12}-9\sqrt{18}}$ با کدام یک برابر است؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



- ۱۱۴۶- اگر $a^3 + 3ab^2 = 63$ و $b^3 + 3a^2b = 62$ ، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟
- ۱ (۵) ۲ (۵) ۳ (۳) ۴ (۳)
- ۱۱۴۷- حاصل $(11+4\sqrt{7})^{\frac{3}{2}} + (11-4\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}$ کدام است؟
- ۱ (۵۸) ۲ (۳۸) ۳ (۲۴) ۴ (۳۲)
- ۱۱۴۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ کدام است؟
- ۱ (۱) ۲ (۴) ۳ (۸) ۴ (۷)

			۱۱۴۹- حاصل $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\sqrt[6]{26+15\sqrt{3}}$ کدام است؟	
$\sqrt{3}$ (۴)	$\sqrt{2}$ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)	
			۱۱۵۰- اگر $a^2(3-a)=124+3a$ ، مقدار a^2-1 کدام است؟	
۱۷ (۴)	۱۶ (۳)	۱۵ (۲)	۱۴ (۱)	
			۱۱۵۱- اگر $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=1$ و $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=5$ ، مقدار $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ کدام است؟	
۶ (۴)	۴ (۳)	۳ (۲)	۲ (۱)	
			۱۱۵۲- اگر $ab=1$ و $a^2+b^2=\sqrt{6}$ ، مقدار $a^{12}+b^{12}$ کدام است؟	
۹۶ (۴)	۹۴ (۳)	۵۴ (۲)	۵۲ (۱)	
			۱۱۵۳- اگر $a-1=\sqrt[3]{6a-1}$ و $a \neq 0$ ، مقدار $a-\frac{3}{a}$ کدام است؟	
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)	
			۱۱۵۴- اگر $\tan x + \cot x = 3$ ، مقدار $\tan^3 x + \cot^3 x$ کدام است؟	
۳۰ (۴)	۲۷ (۳)	۱۸ (۲)	۱۵ (۱)	
			۱۱۵۵- حاصل $2(\sin^6 25^\circ + \cos^6 25^\circ) - 3(\sin^4 25^\circ + \cos^4 25^\circ)$ کدام است؟	
-۲ (۴)	۲ (۳)	۱ (۲)	-۱ (۱)	

درس چهارم / بخش ششم: اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌های دو جمله (چاق و لاغر)

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌های دو جمله (چاق و لاغر)

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

این تساوی را اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله می‌نامیم. طبق این اتحاد، مجموع مکعب‌های دو جمله برابر است با حاصل ضرب دو پرانتز که اولی مجموع این دو جمله است و معمولاً آن را پرانتز لاغر می‌نامند و دومی مجموع مربع‌های دو جمله منهای حاصل ضرب آن‌ها است و معمولاً آن را پرانتز چاق می‌نامند. به این ترتیب، این اتحاد را معمولاً اتحاد چاق و لاغر می‌نامند. توجه کنید که

$$\underbrace{a^3 + b^3}_{\text{مجموع مکعب‌های دو جمله}} = \underbrace{(a+b)}_{\text{مجموع دو جمله}} \left(\underbrace{a^2 + b^2}_{\text{مجموع مربع‌های دو جمله}} - \underbrace{ab}_{\text{حاصل ضرب دو جمله}} \right)$$

به همین ترتیب، اتحاد تفاضل مکعب‌های دو جمله به صورت زیر است:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال:

الف) $(a+2)(a^2-2a+4) = a^3 + 2^3 = a^3 + 8$

ب) $(2a-1)(4a^2+2a+1) = (2a)^3 - 1^3 = 8a^3 - 1$

تست



اگر $a = \sqrt[3]{4}$ و $b = \sqrt[3]{9}$ ، حاصل عبارت $(\sqrt{a+\sqrt{b}})(a+b-\sqrt{ab})$ کدام است؟

۱۳ (۴)

$\sqrt[3]{6}$ (۳)

$\sqrt[3]{5}$ (۲)

۵ (۱)

بنابر اتحاد چاق و لاغر.

راه‌حل

$$\begin{aligned} (\sqrt{a+\sqrt{b}})(a+b-\sqrt{ab}) &= (\sqrt{a+\sqrt{b}})(\sqrt{a^2+\sqrt{b}^2}-\sqrt{ab}) = \sqrt{a^3+\sqrt{b}^3} = \sqrt{a^3+\sqrt{b^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3}+\sqrt[3]{9^3}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}} = 2+3=5 \end{aligned}$$

تست



ساده شده عبارت $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ کدام است؟

$x^6 - x^4 + x^2 - 1$ (۴)

$x^6 - x^4 - x^2 + 1$ (۳)

$x^6 - 2x^4 - 1$ (۲)

$x^6 - 1$ (۱)

با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر عبارت را ساده می‌کنیم:

راه‌حل

$$(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^3-1)(x^3+1) = x^6-1$$

تست



اگر $\frac{a-1}{a^2-a+1} \div \frac{a+1}{a^2+a+1} = \frac{7}{9}$ ، مقدار a کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم، سپس سمت چپ تساوی داده شده را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

راه‌حل

$$\frac{a-1}{a^2-a+1} \div \frac{a+1}{a^2+a+1} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{a-1}{a^2-a+1} \times \frac{a^2+a+1}{a+1} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{7}{9} \Rightarrow 9a^3-9=7a^3+7 \Rightarrow 2a^3=16 \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow a=2$$

تست ۴

اگر $a = \sqrt[3]{17}$ ، مقدار $(a-3)^2(a^2+3a+9)^2$ کدام است؟

- ۶۴ (۱) ۸۱ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۲۵ (۴)

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر، $(a-3)(a^2+3a+9) = a^3 - 3^3 = 17 - 27 = -10$. بنابراین

$$(a-3)^2(a^2+3a+9)^2 = (-10)^2 = 100$$

تست ۵

اگر $a-b=12$ ، مقدار a^3-b^3-36ab چقدر است؟

- ۱۷۲۴ (۱) ۱۷۲۶ (۲) ۱۷۲۸ (۳) ۱۷۳۰ (۴)

راه‌حل

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$a^3 - b^3 - 36ab = (a-b)(a^2 + ab + b^2) - 36ab = 12(a^2 + ab + b^2) - 36ab$$

$$= 12(a^2 - 2ab + b^2) = 12(a-b)^2 = 12 \times 12^2 = 1728$$

تست ۶

اگر $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1} = -\frac{3}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{x^2-2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+2x+1}$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

راه‌حل

فرض کنید $a = \sqrt[3]{x-1}$ و $b = \sqrt[3]{x+1}$. می‌خواهیم مقدار عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$A = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = a^2 + ab + b^2$$

طبق فرض مسئله $a-b = -\frac{3}{2}$ ، بنابراین

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = -\frac{3}{2}A \Rightarrow a^3 - b^3 = -\frac{3}{2}A \Rightarrow A = \frac{a^3 - b^3}{-\frac{3}{2}} = \frac{x-1 - (x+1)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

نکته

اتحادهای چاق و لاغر را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab), \quad a^3 - b^3 = (a-b)((a-b)^2 + 3ab)$$

تست ۷

اگر $a+b=2$ و $a^3+b^3=38$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۵ (۱) ۵ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴)

راه‌حل

توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab) \Rightarrow 38 = (2)(4 - 3ab) \Rightarrow 19 = 4 - 3ab \Rightarrow 3ab = -15 \Rightarrow ab = -5$$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌های دو جمله (چاق و لاغر)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

- ۱۱۵۶- حاصل $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+27y^3$ کدام است؟
- (۱) $8x^3$ (۲) $8x^3-x^2y$ (۳) $8x^3-y^3$ (۴) $8x^3-xy^2$
- ۱۱۵۷- اگر $(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)=27-3\sqrt{3}$ مقدار x کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$
- ۱۱۵۸- اگر $a-b=2$ و $ab=3$ ، حاصل a^3-b^3 کدام است؟
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۶
- ۱۱۵۹- اگر $a-b=5$ و $a^2+b^2=17$ ، مقدار a^3-b^3 کدام است؟
- (۱) ۵۶ (۲) ۶۵ (۳) ۷۴ (۴) ۸۵
- ۱۱۶۰- اگر a و b عددهایی مثبت باشند، $ab=10$ و $a^2+b^2=20$ ، مقدار a^3+b^3 کدام است؟
- (۱) ۱۰ (۲) $10\sqrt{10}$ (۳) $20\sqrt{10}$ (۴) $30\sqrt{10}$

۱۱۶۱- مقدار عبارت $\frac{5(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^{-1}}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) ۱

۱۱۶۲- حاصل عبارت $A = \frac{1-a^6}{(a-\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}+1)}$ به ازای $a=\sqrt[6]{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt[3]{4}$ (۲) $-\sqrt[3]{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\sqrt{2}$

۱۱۶۳- اگر $a^3=2$ ، حاصل $\frac{1}{a^2+a+1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}-1$ (۲) $\sqrt[3]{2}-2$ (۳) $\sqrt[3]{2}+1$ (۴) $\sqrt[3]{2}+2$

سطح ۲

۱۱۶۴- مقدار عبارت $A=(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ به ازای $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $2+2\sqrt{2}$ (۴) $3+2\sqrt{2}$

۱۱۶۵- a و b عددهایی مثبت‌اند و $a^3+b^3=2ab(a+b)$. مقدار $a^2b^{-2}+a^{-2}b^2$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۱۶۶- اگر $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=3$ و $ab=9$ ، مقدار $\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}$ کدام است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴) ۲۸

۱۱۶۷- اگر a و b عددهایی منفی باشند، $ab=1$ و $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=7$ ، مقدار a^3+b^3 کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۲۱ (۳) -۲۴ (۴) -۲۸

۱۱۶۸- اگر $a>1$ و $a^2+\frac{1}{a^2}=18$ ، مقدار $a^3-\frac{1}{a^3}$ کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۷۴ (۳) ۷۶ (۴) ۷۸

۱۱۶۹- اگر $ab=10$ و $a^2b+ab^2+a+b=99$ ، مقدار a^3+b^3 کدام است؟

- (۱) ۴۹۵ (۲) ۴۵۹ (۳) ۱۰۰۱ (۴) ۱۱۰۰

۱۱۷۰- اگر $ab=3$ و $\frac{a^3-b^3}{a^2b-ab^2}=15$ ، مقدار $|a-b|$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۱۷۱- اگر $a^3+b^3=12$ و $a^2-ab+b^2=6$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴)

۱۱۷۲- اگر $a+b=18$ و $a^3-b^3=10(a^2+ab+b^2)$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۵۲ (۱) ۵۴ (۲) ۵۶ (۳) ۵۸ (۴)

۱۱۷۳- a و b عددهایی حقیقی و متمایزند، $a^3=2-5a$ و $b^3=2-5a$. مقدار a^2+ab+b^2 کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۱۷۴- اگر $a^6-b^6=63$ و $a^6+a^2b^2+b^6=21$ ، مقدار $|ab|$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۱۷۵- اگر $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ و $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}=18$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۷۶- اگر $a=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ و $b=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ، مقدار $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$ کدام است؟

- ۹۶۰ (۱) ۹۷۰ (۲) ۹۸۰ (۳) ۹۹۰ (۴)

۱۱۷۷- اگر $a=\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{50}$ و $b=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}$ ، مقدار ab کدام است؟

- $-\sqrt[3]{2}$ (۱) -2 (۲) $-2\sqrt[3]{2}$ (۳) $-4\sqrt[3]{2}$ (۴)

۱۱۷۸- اگر $a=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}$ ، حاصل $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}$ برحسب a کدام است؟

- $\frac{4}{a}$ (۱) $\frac{a}{4}$ (۲) $\frac{a}{8}$ (۳) $\frac{a}{8}$ (۴)

۱۱۷۹- اگر $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=\frac{3}{2}$ ، مقدار $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2-4x+4}$ کدام است؟

- $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴)

۱۱۸۰- اگر $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x+2}=\frac{3}{2}$ ، مقدار عبارت $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x^2-4}$ کدام است؟

- $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴)



۱۱۸۱- اگر $a+b=1$ و $a^2+b^2=5$ ، مقدار a^5+b^5 کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۷ (۲) ۲۵ (۳) ۳۱ (۴)

۱۱۸۲- اگر $\frac{a-1}{\sqrt{a}}=\sqrt{3}$ ، مقدار $a^3+\frac{1}{a^3}$ کدام است؟

- ۱۰۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۱۵ (۴)

۱۱۸۳- اگر $a^2-6a+1=0$ ، مقدار $a^3+\frac{1}{a^3}$ کدام است؟

- ۱۲۰ (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۹۸ (۳) ۲۱۶ (۴)

۱۱۸۴- a و b عددهایی حقیقی و متمایزند و $b-a=\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}$. مقدار $\frac{a+b}{b-a}$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۱۸۵- اگر $a^2-a-1=0$ ، مقدار $\frac{a^4-2}{a^3-1}$ کدام است؟

- $\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

درس چهارم / بخش هفتم: تجزیه

♦ اگر یک چند جمله‌ای را به شکل حاصل ضرب چند چند جمله‌ای دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن را **تجزیه** کرده‌ایم.

روش‌های تجزیه

فاکتورگیری

در این روش از عامل‌های مشترک جمله‌ها فاکتور می‌گیریم.

مثال:

الف) $2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$

ب) $(x-1)(x+1) + (3x-3)(x+2) = (x-1)(x+1) + 3(x-1)(x+2) = (x-1)(x+1+3(x+2)) = (x-1)(4x+7)$

استفاده از اتحادها

در این روش عبارت‌ها را با استفاده از اتحادها به صورت ضرب چند عامل می‌نویسیم:

مثال:

الف) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 \xrightarrow{\text{مربع مجموع دو جمله}} (2x+1)^2$

ب) $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (3x-2y)(3x+2y)$

پ) $8a^3 - 27 = (2a)^3 - 3^3 \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (2a-3)((2a)^2 + (2a) \times 3 + 3^2) = (2a-3)(4a^2 + 6a + 9)$

ت) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2+4)x + 2 \times 4 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+2)(x+4)$

ث) $x^6 - 1 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x^3 - 1)(x^3 + 1) \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$

دسته‌بندی

در این روش جمله‌ها را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که بتوانیم با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها عبارت مورد نظر را تجزیه کنیم.

مثال:

الف) $xy + yz - y^2 - xz = (xy - xz) + (yz - y^2) = x(y - z) + y(z - y) = x(y - z) - y(y - z) = (y - z)(x - y)$

ب) $x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2 = (x+1)^2 - y^2 = (x+1-y)(x+1+y)$

شکستن جمله‌ها

در این روش یک یا چند جمله را به صورت مجموع یا تفاضل دو یا چند جمله می‌نویسیم و سپس تجزیه را انجام می‌دهیم.

مثال:

الف) $x^3 + 3x - 4 = x^3 + 3x - 1 - 3 = (x^3 - 1) + (3x - 3) = (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 + 3) = (x-1)(x^2 + x + 4)$$

ب) $4ab - 3a^2 - b^2 = 4ab - 4a^2 + a^2 - b^2 = a^2 - (4a^2 - 4ab + b^2) = a^2 - (2a-b)^2$

$$= (a - (2a-b))(a + (2a-b)) = (a - 2a + b)(a + 2a - b) = (b-a)(3a-b)$$

پ) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

اضافه و کم کردن جمله‌ها

در این روش جمله‌هایی را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم تجزیه را انجام دهیم.

مثال:

$$\begin{aligned} \text{الف) } x^2 + 4 &= x^2 - 4x^2 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } x^4 + 4x^3 - 8x + 4 &= x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 8x + 4 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 8x + 4 + 4x^3 - 4x^2 - 8x \\ &= (x^2)^2 + (2x)^2 + (-2)^2 + 2(x^2)(2x) + 2(x^2)(-2) + 2(2x)(-2) = (x^2 + 2x - 2)^2 \end{aligned}$$

نکته

گاهی لازم است که برای تجزیه کردن از چند روش استفاده کنیم.

مثال:

$$\text{الف) } x^2 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x-2)(x+2)$$

$$\text{ب) } x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 &= (x(x+3))((x+1)(x+2)) + 1 = (x^2 + 3x)((x^2 + 3x) + 2) + 1 \\ &= (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = ((x^2 + 3x) + 1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2 \end{aligned}$$

تست ۱

کدام گزینه عاملی از $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$ است؟

x-y (۴)

x-y+z (۳)

x+y-z (۲)

x+y+z (۱)

توجه کنید که

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = x^2 + y^2 - 2xy - z^2 = (x-y)^2 - z^2 = (x-y-z)(x-y+z)$$

بنابراین در تجزیه عبارت عامل $x-y+z$ وجود دارد.

راه‌حل

تست ۲

کدام یک از عبارات‌های زیر عامل $x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7$ است؟

x-y+7 (۴)

x+y+7 (۳)

x+y-1 (۲)

x+y+1 (۱)

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7 &= (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 8y + 16) = (x-3)^2 - (y+4)^2 \\ &= (x-3-(y+4))(x-3+(y+4)) = (x-y-7)(x+y+1) \end{aligned}$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

راه‌حل

تست ۳

در تجزیه عبارت $3a^2 - 7ab + 2b^2$ کدام عامل وجود دارد؟

3a-b (۴)

a-2b (۳)

a+2b (۲)

3a+b (۱)

عبارت را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$3a^2 - 7ab + 2b^2 = 3a^2 - ab - 6ab + 2b^2 = a(3a-b) - 2b(3a-b) = (3a-b)(a-2b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت عامل $3a-b$ وجود دارد.

راه‌حل

تست ۴

عبارت $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ را به صورت $(x+a)(x^2+bx+1)(x^2-bx+c)$ تجزیه می‌کنیم. مقدار $a-b^2+c$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۲

راه‌حل

عبارت را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$(x^5 + x^4 + x^3) + (x^2 + x + 1)$$

$$x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

اگر در پرانتز اول از x^3 فاکتور بگیریم، به عبارت روبه‌رو می‌رسیم

حالا با فاکتورگیری از $x^2 + x + 1$ نتیجه می‌شود:

بنابراین $a=1$ ، $b=\pm 1$ و $c=1$ و در نتیجه $a-b^2+c=1$.

نکته

اگر مقدار یک چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر شود، در تجزیه این چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود دارد.

مثال: در تجزیه عبارت $x^3 + x - 2$ عامل $x-1$ وجود دارد، زیرا مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=1$ برابر صفر است:

$$1^3 + 1 - 2 = 0$$

نکته

• اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر است.

• اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $ax+b$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=-\frac{b}{a}$ برابر صفر است.

مثال: الف) می‌خواهیم بدانیم در تجزیه چندجمله‌ای $x^4 + x^3 + x + 1$ عامل $x+1$ وجود دارد یا خیر. توجه کنید که مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=-1$ برابر صفر است:

$$(-1)^4 + (-1)^3 + (-1) + 1 = 0$$

پس در تجزیه چندجمله‌ای مورد نظر عامل $x+1$ وجود دارد.

ب) می‌خواهیم بدانیم در تجزیه چندجمله‌ای $x^5 + 5x - 3$ عامل $x-2$ وجود دارد یا خیر. توجه کنید که مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=2$ برابر صفر نیست:

$$2^5 + 5 \times 2 - 3 = 12 \neq 0$$

پس در تجزیه این چندجمله‌ای عامل $x-2$ وجود ندارد.

پ) می‌خواهیم بدانیم در تجزیه چندجمله‌ای $8x^4 - 4x^2 - x + 1$ عامل $2x-1$ وجود دارد یا خیر. توجه کنید که مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=\frac{1}{2}$ برابر صفر است:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

پس در تجزیه این چندجمله‌ای عامل $2x-1$ وجود دارد.

تست ۵

کدام یک از عبارتهای زیر عامل $x^6 - 5x^2 + 4$ نیست؟

۱ (۱) $x-3$ ۲ (۲) $x-2$ ۳ (۳) $x-1$ ۴ (۴) $x+1$

راه‌حل

راه‌حل اول می‌توان نوشت $(x^6 - 5x^2 + 4) = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$. بنابراین $x-3$ ، عامل $x^6 - 5x^2 + 4$ نیست.

راه‌حل دوم گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم. توجه کنید که اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر می‌شود.

گزینه (۱): مقدار چندجمله‌ای مورد نظر به ازای $x=3$ برابر است با $3^6 - 5 \times 3^2 + 4 = 40$ ، پس عامل $x-3$ در تجزیه چندجمله‌ای مورد نظر وجود ندارد.

از طرف دیگر، عامل‌های $x-2$ ، $x-1$ و $x+1$ در تجزیه عبارت مورد نظر وجود دارند، زیرا مقدار این عبارت به ازای $x=2$ ، $x=1$ و $x=-1$ برابر صفر می‌شود.

تست
□□□□

۶

کدام عامل در تجزیه عبارت $A = x^3 - 13x^2 + 10x + 24$ وجود ندارد؟

$x+2$ (۴)

$x-12$ (۳)

$x+1$ (۲)

$x-2$ (۱)

راه‌حل

چاق و لاغر، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A = (x-2)(x^2 + 2x + 4) - 13x(x-2) - 16(x-2) = (x-2)(x^2 + 2x + 4 - 13x - 16) = (x-2)(x^2 - 11x - 12)$$

و به کمک اتحاد جمله مشترک، پرانتز دوم را هم تجزیه می‌کنیم: $A = (x-2)(x-12)(x+1)$

راه‌حل دوم گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم. توجه کنید که اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر می‌شود.

گزینه (۴): مقدار چندجمله‌ای مورد نظر به ازای $x=-2$ برابر است با $x^3 - 13x^2 + 10x + 24 = -56$ ، پس عامل $x+2$ در تجزیه چندجمله‌ای مورد نظر وجود ندارد.

از طرف دیگر، عامل‌های $x-2$ ، $x+1$ و $x-12$ در تجزیه عبارت مورد نظر وجود دارند، زیرا مقدار این عبارت به ازای $x=2$ ، $x=-1$ و $x=12$ برابر صفر می‌شود.

تست
□□□□

۷

عدد $1-53^6$ بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

۵۴ (۴)

۵۲ (۳)

۵ (۲)

۹ (۱)

راه‌حل

به کمک اتحاد مزدوج می‌توانیم عدد $1-53^6$ را به صورت $A = (53^3 - 1)(53^3 + 1)$ بنویسیم. به کمک اتحاد چاق و لاغر، هر یک از پرانتزها را تجزیه می‌کنیم. بنابراین $A = (53^2 - 53 + 1)(53^2 + 53 + 1)(53^3 - 1) = 52 \times 2863 \times 54 \times 2757$

بخش پذیر است. از طرف دیگر 2757 و 54 بر 5 بخش پذیر هستند. پس A بر 9 بخش پذیر است. ولی هیچ یک از اعداد 52 ، 54 ، 2863 و 2757 بر 5 بخش پذیر نیستند، پس A بر 5 بخش پذیر نیست.

استفاده از تجزیه در محاسبات

گاهی لازم است برای محاسبه مقدار یک عبارت، ابتدا آن را تجزیه کنیم.

تست
□□□□

۸

اگر $a+b=3$ و $b+2=c$ ، حاصل عبارت $a^2 + ab + bc + ca$ کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

راه‌حل

با توجه به اتحاد جمله مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم: $a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a(b+c) + bc = (a+b)(a+c)$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $3 \times 5 = 15$.

تست
□□□□

۹

حاصل عبارت $(a-4)^3 + 3(a-4)^2 + 3(a-4) + 1$ به ازای $a = \frac{y}{3}$ چقدر است؟

$\frac{1}{27}$ (۴)

$-\frac{1}{27}$ (۳)

$\frac{27}{4}$ (۲)

$-\frac{27}{4}$ (۱)

راه‌حل

اگر فرض کنیم $a-4=x$ ، آن‌گاه

$$(a-4)^3 + 3(a-4)^2 + 3(a-4) + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = (a-4+1)^3 = (a-3)^3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر به ازای $a = \frac{y}{3}$ برابر است با $(\frac{y}{3}-3)^3 = (-\frac{y}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

تست
□□□□

۱۰

اگر $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4}$ ، حاصل عبارت $(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ کدام است؟

$-6\sqrt{2}$ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

-8 (۲)

4 (۱)

راه‌حل

ابتدا به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha^6 - \beta^6$$

بنابراین مقدار این عبارت برابر است با $3\sqrt{2}-4 - (3\sqrt{2}+4) = -8$.

تجزیه

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

$3x-2$ (۴)

$2x-3$ (۳)

$3x-1$ (۲)

$3x+1$ (۱)

 ۱۱۸۶- در تجزیه عبارت $6x^2+7x-3$ کدام عامل وجود دارد؟

کتاب درسی

x^2+2 (۴)

x^2+4 (۳)

$x+2$ (۲)

$x-2$ (۱)

 ۱۱۸۷- در تجزیه عبارت x^5-16x کدام عامل وجود ندارد؟

کتاب درسی

$4x^2-12x+9$ (۴)

$4x^2-6x+9$ (۳)

$4x^2+6x+9$ (۲)

$2x-3$ (۱)

 ۱۱۸۸- کدام عبارت در تجزیه $8x^3+27$ وجود دارد؟

کتاب درسی

x^2+1 (۴)

x^2+x-1 (۳)

x^2-x-1 (۲)

x^2-x+1 (۱)

 ۱۱۸۹- در تجزیه عبارت x^6-1 کدام عامل وجود دارد؟

کتاب درسی

$a+b$ (۴)

$a-2b$ (۳)

$2a-b$ (۲)

$a+2b$ (۱)

 ۱۱۹۰- در تجزیه عبارت $2a^2-3ab-2b^2$ کدام عامل وجود دارد؟

 ۱۱۹۱- کدام گزینه عاملی از $x^2-2x+4y-y^2-3$ است؟

$x-y-3$ (۴)

$x+y+3$ (۳)

$x-y-1$ (۲)

$x-y+1$ (۱)

 ۱۱۹۲- کدام یک از عبارت‌های زیر عامل $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$ نیست؟

$x-2$ (۴)

$x+2$ (۳)

$x-3$ (۲)

$x+3$ (۱)

 ۱۱۹۳- کدام گزینه عاملی از x^3-x^2+9x-9 است؟

x^2+9 (۴)

x^2+4 (۳)

x^2+3 (۲)

x^2+2 (۱)

 ۱۱۹۴- در تجزیه عبارت $2a^3-2ab^2-3a^2b+3b^3$ کدام عامل وجود دارد؟

$2a-3b$ (۴)

$2a-b$ (۳)

$a-2b$ (۲)

$3a-2b$ (۱)

 ۱۱۹۵- عدد 169^4-171^4 بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

19 (۴)

17 (۳)

8 (۲)

5 (۱)

سطح ۲

 ۱۱۹۶- کدام گزینه عاملی از x^4-x^2-6x-9 است؟

x^2+x+3 (۴)

x^2+2x+3 (۳)

x^2+x-3 (۲)

x^2-2x+3 (۱)

 ۱۱۹۷- کدام گزینه عاملی از x^4+3x^2+4 است؟

x^2+x+1 (۴)

x^2-x+2 (۳)

x^2-x-2 (۲)

x^2+x-2 (۱)

 ۱۱۹۸- کدام گزینه عاملی از x^4-x^2+16 است؟

x^2+3x+4 (۴)

x^2+3x-4 (۳)

x^2+2x-4 (۲)

x^2+2x+4 (۱)

۱۱۹۹- کدام گزینه عاملی از $9x^6 + 11x^2 + 4$ است؟

- (۱) $3x^2 + x + 2$ (۲) $3x^2 + x - 2$ (۳) $3x^2 - x - 1$ (۴) $3x^2 + x + 1$

۱۲۰۰- عبارت $x^3 - 3x^2 - x + 3$ را به صورت $(x+a)(x+b)(x+c)$ تجزیه می‌کنیم که در آن $a < b < c$. مقدار $a - b + c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲۰۱- در تجزیه عبارت $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $2x - 1$ (۲) $2x + 1$ (۳) $x + 2$ (۴) $x - 1$

۱۲۰۲- در تجزیه عبارت $6x^3 - x^2 - 5x + 2$ کدام عبارت وجود ندارد؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $2x - 1$ (۳) $3x - 2$ (۴) $x + 1$

۱۲۰۳- کدام عامل در تجزیه عبارت $2x^2 + 8xy + 8y^2 + x + 2y - 1$ وجود دارد؟

- (۱) $x + 2y - 1$ (۲) $x + 2y + 1$ (۳) $2x + y + 1$ (۴) $2x + y - 1$

۱۲۰۴- در تجزیه عبارت $A = x^2 + y^2 + x^2y^2$ کدام عبارت وجود دارد؟

- (۱) $x^2 - y^2 + xy$ (۲) $x^2 - y^2 - xy$ (۳) $x^2 + y^2 - xy$ (۴) $x^2 + y^2$

۱۲۰۵- کدام گزینه عاملی از $x^4 + y^4 - 7x^2y^2$ است؟

- (۱) $x^2 - y^2 - xy$ (۲) $x^2 - y^2 + 3xy$ (۳) $x^2 + y^2 - 3xy$ (۴) $x^2 - y^2 + xy$

۱۲۰۶- کدام عامل در تجزیه عبارت $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$ وجود دارد؟

- (۱) $x^2 - xy + y^2$ (۲) $x^2 + 2xy + 3y^2$ (۳) $x^2 + 3xy + 3y^2$ (۴) $x^2 - xy - 3y^2$

۱۲۰۷- کدام گزینه عاملی از عبارت $a^4 - 8a^2b^2 + 9b^4$ است؟

- (۱) $a^2 + ab\sqrt{2} + b^2$ (۲) $a^2 + 3\sqrt{2}ab + 3b^2$ (۳) $a^2 - ab\sqrt{2} - 3b^2$ (۴) $a^2 + 3b^2 + ab\sqrt{2}$

۱۲۰۸- کدام عامل در تجزیه عبارت $x^2 - y^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{64}$ وجود دارد؟

- (۱) $x + y + \frac{3}{8}$ (۲) $x - y + \frac{1}{8}$ (۳) $x - y - \frac{1}{4}$ (۴) $x + y - \frac{3}{16}$

۱۲۰۹- عبارت $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ را به صورت $(x^2 - bx + c)(x^2 + bx + 1)(x + a)$ تجزیه کرده‌ایم. مقدار $2a - b^2 + c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲۱۰- مقدار عبارت $(x-5)^3 + 3(x-5)^2 + 3(x-5) + 1$ به ازای $x = \frac{1}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{27}{2}$ (۴) $-\frac{1}{27}$

۱۲۱۱- اگر $a = \sqrt[3]{5} + 2$ ، مقدار $a^3 - 6a^2 + 12a + 18$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۳۱ (۴) ۳۷

۱۲۱۲- اگر $a + b = 4$ و $b + c = 6$ ، مقدار عبارت $\frac{b^2 + ab + bc + ca}{c^2 + bc - ab - ac}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۱۳- اگر $x - y = 2$ و $y - z = 4$ ، حاصل عبارت $xy - y^2 - xz + yz + x - z$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۱۲۱۴- اگر $ab=1$ و $a-b=76$ ، مقدار $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۲۱۵- حاصل عبارت $A=\sqrt{6+2\sqrt{6+2\sqrt{2+2\sqrt{3}}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴)

۱۲۱۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^2 \alpha \sin \alpha} - \tan \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\cos \alpha$ (۲) $\tan \alpha$ (۳) ۱ (۴)

۱۲۱۷- اگر $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = 5$ ، حاصل عبارت $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۲۱۸- اگر $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{22}{27}$ (۲) $\frac{24}{27}$ (۳) $\frac{25}{27}$ (۴)

درس چهارم / بخش هشتم: ساده کردن عبارتها

روش‌های ساده کردن عبارتها

ضرب و تقسیم کسرها

ابتدا صورت و مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم، سپس عبارتهای مشترک را ساده می‌کنیم.

الف)
$$\frac{x^2-1}{x+2} \times \frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \times \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x+2}$$

مثال:

ب)
$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} \div \frac{x^2-9}{x^2+x} = \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} \times \frac{x^2+x}{x^2-9} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x-3}$$

جمع و تفریق کسرها

ابتدا مخرج‌ها را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم، سپس با استفاده از مخرج مشترک گرفتن عبارت را ساده می‌کنیم.

الف)
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

مثال:

ب)
$$\frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{1-x}{x^2-4x-5} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{1-x}{(x+1)(x-5)} = \frac{x(x-5)+(1-x)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2-5x+x+2-x^2-2x}{(x+1)(x+2)(x-5)} = \frac{-6x+2}{(x+1)(x+2)(x-5)} = \frac{2(1-3x)}{(x+1)(x+1)(x-5)}$$

تست ۱ حاصل عبارت $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1} \div \frac{3x-1}{x-1}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۱+x (۲)

۱+۳x (۱)

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$3x^2+2x-1=(x^2-1)+(2x^2+2x)=(x-1)(x+1)+2x(x+1)=(x+1)(x-1+2x)=(x+1)(3x-1)$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1} \div \frac{3x-1}{x-1} = \frac{(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x-1}{3x-1} = 1$

تست ۲ ساده شده عبارت $\frac{2x^2+10xy}{x^2+3xy-10y^2} \times \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy}$ کدام است؟

۲ (۴)

۲x (۳)

x+2y (۲)

x-2y (۱)

توجه کنید که

راه حل

$$2x^2+10xy=2x(x+5y), \quad x^2-4y^2=(x-2y)(x+2y), \quad x^2+2xy=x(x+2y)$$

$$x^2+3xy-10y^2=x^2+5xy-2xy-10y^2=x(x+5y)-2y(x+5y)=(x+5y)(x-2y)$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{2x^2+10xy}{x^2+3xy-10y^2} \times \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy} = \frac{2x(x+5y)}{(x+5y)(x-2y)} \times \frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x+2y)} = 2$$

تست

 مقدار $\frac{999^3+1}{999^2-998}$ کدام است؟

- ۹۹۸ (۱) ۹۹۹ (۲) ۱۰۰۰ (۳) ۱۰۰۱ (۴)

بنابر اتحاد جاق و لاغر، $(999^2 - 998)(999^2 - 999 + 1) = (999 + 1)(999^2 - 999 + 1) = 999^3 + 1$. بنابراین $\frac{999^3 + 1}{999^2 - 998} = 1000$.

راه حل
تست

 اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{5}$ ، مقدار $\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴)

می توان نوشت

$$\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2} = \frac{(a^2)^3 - 1}{a^2(a^2 - 1)} = \frac{(a^2 - 1)((a^2)^2 + a^2 + 1)}{a^2(a^2 - 1)} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = \frac{a^4}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 + 1 = \sqrt{5}^2 + 3 = 8$$

راه حل

دامنه تعریف عبارت های گویا

یک عبارت گویا به ازای مقادیری از x که یکی از مخرج ها را صفر می کنند، تعریف نمی شود.

مثال: عبارت گویای $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$ به ازای $x=1$ و $x=0$ تعریف نمی شود.

پیدا کردن دامنه تعریف عبارت های گویا

برای پیدا کردن مقادیری از x که به ازای آن ها یک عبارت گویا تعریف نمی شود، مخرج ها را برابر صفر قرار می دهیم و معادله های حاصل را حل می کنیم.

تست

 عبارت گویای $\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-2}{x+1}}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی شود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

عبارت های x ، $x+1$ و $\frac{x-2}{x+1}$ در مخرج کسرها قرار دارند. هر یک از این ها را برابر صفر قرار می دهیم و معادله ها را حل می کنیم:

$$x=0, \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad \frac{x-2}{x+1}=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

بنابراین عبارت گویای مورد نظر به ازای سه مقدار صفر، -1 و 2 برای x تعریف نمی شود.

راه حل

ساده کردن عبارت‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱۲۱۹- اگر $a = \sqrt[3]{2-1}$ ، مقدار $\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) ۸ (۴) $2\sqrt[3]{4}$

۱۲۲۰- اگر $a = 3^{\frac{1}{2}} + 1$ ، حاصل عبارت $\frac{(3^{\frac{1}{2}}-1)(3^{\frac{1}{2}}+1)}{(3^{\frac{1}{2}}-1)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{a}$ (۲) $-a$ (۳) $\frac{1}{a}$ (۴) a

۱۲۲۱- اگر $a = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ ، مقدار $\frac{a^6-1}{a^2(a^2+1)+1}$ کدام است؟

- (۱) $1-\sqrt{2}$ (۲) $1-\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (۴) $-2\sqrt{3}$

۱۲۲۲- اگر $a-b=3$ و $a^3-b^3=9$ ، مقدار $|a^3+ab^2+a^2b+b^3|$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۲۲۳- ساده شده عبارت $\frac{x^3+27}{x^2-2x-3} \times \frac{(x-3)(x^2-1)}{x^2-3x+9}$ کدام است؟

- (۱) $(x+1)(x-3)$ (۲) $(x-1)(x+3)$ (۳) $(x-1)(x-3)$ (۴) $(x-2)(x-3)$

۱۲۲۴- ساده شده عبارت $\frac{x^3+1}{x^2-1} \div \frac{x^2-x+1}{x^2+2x-3}$ کدام است؟

- (۱) $x+2$ (۲) $x+3$ (۳) $x-2$ (۴) $x-3$

۱۲۲۵- ساده شده عبارت $\frac{x^3+x^2-2x}{x^2+2x} \div \frac{x-x^2}{x}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-x$ (۳) $-\frac{1}{x}$ (۴) x

۱۲۲۶- حاصل عبارت $\frac{x^2-4x-5}{x^2-5x-6} \times \frac{x^2-7x+6}{x^2-6x+5}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{6-x}{6+x}$ (۳) $\frac{x-6}{x-1}$ (۴) $\frac{5+x}{5-x}$

۱۲۲۷- حاصل عبارت $\frac{a(b+c)+c(b-a)}{a^2+ab+bc+ca}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{a+b}$ (۲) $\frac{b}{a+b}$ (۳) $\frac{c}{a+c}$ (۴) $\frac{b}{b+c}$

۱۲۲۸- ساده شده عبارت $\frac{x^2-11xy+30y^2}{x^2-9xy+20y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x+6y}{x+4y}$ (۲) $\frac{x-6y}{x-4y}$ (۳) $\frac{x-5y}{x-4y}$ (۴) $\frac{x-4y}{x-5y}$

۱۲۲۹- حاصل عبارت $\frac{ab^r+a^r b^r}{a^r b-ab^r}$ کدام است؟

$\frac{b}{a+b}$ (۴)	$\frac{1}{a-b}$ (۳)	$\frac{a}{a-b}$ (۲)	$\frac{b}{a-b}$ (۱)
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

۱۲۳۰- ساده شده عبارت $A = \frac{x^r+2xz+4yz-4y^r}{x-2y+2z}$ کدام است؟

$x+2y$ (۴)	$x+z$ (۳)	$x-2y$ (۲)	$x-z$ (۱)
------------	-----------	------------	-----------

۱۲۳۱- حاصل عبارت $\frac{x^r-y^r-x+y}{x+y-1}$ کدام است؟

$x+y$ (۴)	$x-y+1$ (۳)	$x-y-1$ (۲)	$x-y$ (۱)
-----------	-------------	-------------	-----------

۱۲۳۲- عبارت گویای $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

صفر (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
---------	-------	-------	-------

۱۲۳۳- عبارت گویای $\frac{x+2}{x(x-1)} - \frac{x-2}{x(x+1)}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

کتاب درسی

کتاب درسی



۱۲۳۴- اگر $a+b=\sqrt{5}$ ، حاصل عبارت $\frac{a^f+a^r b^r+b^f}{a^r+ab+b^r}+3ab$ کدام است؟

$\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (۴)	$2\sqrt{5}$ (۳)	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (۲)	۵ (۱)
---------------------------	-----------------	---------------------------	-------

۱۲۳۵- اگر $x+y=4$ ، حاصل عبارت $\frac{x^r-y^r+4x+4}{x^r+2x+2y-y^r}$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)	$\frac{5}{2}$ (۳)	$\frac{3}{2}$ (۲)	۱ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------

۱۲۳۶- حاصل عبارت $\frac{a^6-a^f-a^r+1}{a^r-a^r-a+1}$ به ازای $a=\sqrt{2}$ کدام است؟

$3\sqrt{2}-3$ (۴)	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ (۳)	$3\sqrt{2}+3$ (۲)	$2\sqrt{2}+2$ (۱)
-------------------	-------------------------------------	-------------------	-------------------

۱۲۳۷- مقدار عبارت $\frac{a^6-1}{a^6-a^f+a^r-1} \div (a^r+a)$ به ازای $a=-\frac{2}{3}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)	$-\frac{3}{2}$ (۳)	$-\frac{4}{3}$ (۲)	$-\frac{3}{4}$ (۱)
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

۱۲۳۸- ساده شده عبارت $(\frac{1}{x^r}+x) \div (\frac{4}{x^r}-\frac{2}{x}+1)$ کدام است؟

$2x+3$ (۴)	$3x-2$ (۳)	$2x-1$ (۲)	$x+2$ (۱)
------------	------------	------------	-----------

۱۲۳۹- اگر $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، مقدار $(\frac{a}{b^r}-\frac{b}{a^r}) \div (\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1)$ کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)	$-2\sqrt{3}$ (۳)	$2\sqrt{2}$ (۲)	$-2\sqrt{2}$ (۱)
-----------------	------------------	-----------------	------------------

۱۲۴۰- حاصل عبارت $(\sqrt{2}-1) \cdot \frac{\sqrt{7+1}+\sqrt{14}+\sqrt{2}}{\sqrt{7+1}}$ چقدر است؟

$\sqrt{14}$ (۴)	$\sqrt{7}$ (۳)	$\sqrt{2}$ (۲)	۱ (۱)
-----------------	----------------	----------------	-------

۱۲۴۱- ساده شده عبارت $(2^{-n} + 3^{-n}) \div \frac{8^n + 27^n}{4^n - 6^n + 9^n}$ کدام است؟

(۱) $2^n + 3^n$ (۲) $2^n - 3^n$ (۳) $4^n + 6^n$ (۴) 6^n

۱۲۴۲- اگر $ab = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3}$ ، حاصل عبارت $a^2 + b^2 + \frac{9a^2b^2 - a^4 - b^4}{a^2 + b^2 + 3ab}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6}$ (۴) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

۱۲۴۳- اگر $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ و $b = \sqrt{6} + 2 - \sqrt{10}$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{10}}$

۱۲۴۴- ساده شده عبارت $\frac{x^3 + x + 13}{x^2 - 25} \div \frac{x^2 - 5x + 26}{x - 5}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) x (۳) $\frac{x+5}{x-5}$ (۴) $\frac{x}{x+5}$

۱۲۴۵- ساده شده عبارت $\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x} \div \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x}$ (۲) x (۳) $\frac{1}{2-x}$ (۴) $\frac{2}{1+x}$

۱۲۴۶- ساده شده عبارت $\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 + x} + \frac{3}{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{x^2 - 2x}$ (۲) $\frac{3}{x^2 + x}$ (۳) $\frac{1}{x^2 - x - 2}$ (۴) $\frac{1}{x^3 - x^2 - 2x}$

۱۲۴۷- ساده شده عبارت $\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^3 + x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x}$ (۲) $\frac{1}{x^2 + 1}$ (۳) $\frac{2}{x}$ (۴) $\frac{2}{x^2 + 1}$

۱۲۴۸- ساده شده عبارت $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x + 1}$ (۲) $\frac{2}{x^2 - 1}$ (۳) $-\frac{2}{x + 1}$ (۴) $\frac{2}{x - 1}$

۱۲۴۹- مقدار عبارت $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3} - 1} + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3} + 1} - \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\sqrt[4]{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۱

۱۲۵۰- ساده شده عبارت $\frac{2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2x}{x - 4}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2}$ (۳) $\frac{-1}{\sqrt{x} + 2}$ (۴) $\frac{8}{x - 4}$

۱۲۵۱- ساده شده عبارت $\frac{1}{a - b} - \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2} - \frac{3a^2}{a^3 - b^3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{a}{a^3 - b^3}$ (۲) $\frac{b}{a^3 - b^3}$ (۳) $\frac{3b}{a^2 + ab + b^2}$ (۴) $-\frac{3a}{a^2 + ab + b^2}$

۱۲۵۲- عبارت گویای $\frac{1}{x - 3} + \frac{1}{4x + a}$ فقط به ازای یک مقدار x تعریف نمی‌شود. مقدار a کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

کتاب درسی

کتاب درسی

۱۲۵۳- عبارت گویای $\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{2}{x+1}}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۲۵۴- عبارت گویای $\frac{\frac{1}{2x-4}+1}{\frac{x}{2x+6}}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۱۲۵۵- ساده شده عبارت $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x+1}}$ کدام است؟

۱ (۱) $\sqrt{x}+\sqrt{x}$ ۲ (۲) $\sqrt{x}-\sqrt{x}$ ۳ (۳) $\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}$ ۴ (۴) $\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}$

۱۲۵۶- اگر $a=\sqrt[3]{5}$ ، مقدار $\frac{(a-1)(a^3+a^2+1)}{a^2-a+1}$ کدام است؟

۱ (۱) ۴ ۲ (۲) ۵ ۳ (۳) ۶ ۴ (۴) ۸

۱۲۵۷- اگر $x=\sqrt{3}$ ، مقدار عبارت $\frac{(x^2-x-1)^3+(x^2+x+1)^3-2x^6}{x^2+2x+1}$ کدام است؟

۱ (۱) ۱۲ ۲ (۲) ۱۵ ۳ (۳) ۱۸ ۴ (۴) ۲۴

۱۲۵۸- ساده شده عبارت $\frac{\sqrt[3]{9a^5}-4a}{\sqrt[3]{3a^2}-2\sqrt[3]{a}}-\frac{2}{a^{-\frac{2}{3}}}$ کدام است؟

۱ (۱) $\sqrt[3]{9a}$ ۲ (۲) $\sqrt[3]{9a^2}$ ۳ (۳) $\sqrt[3]{3a}$ ۴ (۴) $\sqrt[3]{3a^2}$

۱۲۵۹- ساده شده عبارت $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos x - \sin x} + \sin x \cos x$ کدام است؟

۱ (۱) $(\sin x + \cos x)^2$ ۲ (۲) -1 ۳ (۳) 1 ۴ (۴) $\frac{1}{2}$

درس چهارم / بخش نهم: گویا کردن مخرج‌های گنگ

مفهوم گویا کردن مخرج

محاسبات با کسرهایی که مخرج آن‌ها عددی گویاست، ساده‌تر است. بنابراین بهتر است کسرها را به صورتی بنویسیم که مخرج آن‌ها عددی گویا باشد. تغییر مخرج کسر از عددی گنگ به عددی گویا را **گویا کردن مخرج کسر** می‌نامند. برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج کسر را در عاملی مناسب ضرب می‌کنیم و مخرج را ساده می‌کنیم.

روش‌های گویا کردن مخرج‌های گنگ

از بین بردن ریشه

اگر مخرج کسر شامل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، که در آن $m < n$ ، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ب) } \frac{1^0}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1^0}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1^0 \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{1^0 \sqrt[3]{25}}{5} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\text{پ) } \frac{2}{\sqrt{x^3}} = \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}^2} = \frac{2\sqrt{x}}{x \times x} = \frac{2\sqrt{x}}{x^2}$$

تست

برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{6}{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2}}$ کوچک‌ترین عدد مثبتی که باید در صورت و مخرج این کسر ضرب کنیم، کدام است؟

$$\sqrt[3]{2^{11}} \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (3)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{2^5} \quad (1)$$

ابتدا مخرج کسر را به صورت یک ریشه می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2 \times 2 = 2^4 \times 2^3 = (2^3)^4 \times 2^3 = 2^4 \times 2^3 = 2^4 \times 2^3 = 2^7 = 2^{12} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین صورت و مخرج کسر را باید در $\sqrt[3]{2^{12-1}}$ ، یعنی $\sqrt[3]{2^{11}}$ ضرب کنیم.

راه‌حل

استفاده از اتحاد مزدوج

اگر در مخرج کسری یکی از عبارت‌های $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

مثال:

تست

۲

 حاصل $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) 10 (۴) 5

مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

راه‌حل

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 5 = \frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 5 = \frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1} - 5 = \frac{10+6\sqrt{3}}{2} - 5 = 5+3\sqrt{3}-5 = 3\sqrt{3}$$

تست

۳

 حاصل $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) 1 (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $1-\sqrt{3}$

ابتدا هر یک از دو کسر را گویا می‌کنیم:

راه‌حل

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}-1, \quad \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با ۱ است.

تست

۴

 اگر $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) 272 (۲) 275 (۳) 277 (۴) 279

 چون مخرج را می‌توان به صورت $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ نوشت، پس می‌توان برای گویا کردن مخرج از اتحاد مزدوج استفاده کرد. بنابراین

راه‌حل

$$A = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

اکنون برای گویا کردن مخرج این کسر صورت و مخرج آن را یک بار دیگر در مزدوج مخرجش ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{25}+\sqrt{9}) = \sqrt{125} + \sqrt{45} + \sqrt{75} + \sqrt{27}$$

 بنابراین $a+b+c+d = 125+45+75+27 = 272$.

تست

۵

 حاصل $\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (۲) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (۳) $1+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (۴) $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

 صورت و مخرج کسر داده شده را در $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

راه‌حل

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

 اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم: $\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$

تست ۶

حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{7}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{7}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۷

راه‌حل

کسر $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ را به صورت $\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}}$ می‌نویسیم و مخرج آن را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{9+2+6\sqrt{2}}{9-2}} = \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{7}}$$

بنابراین عبارت A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A = \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{7}} \times \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})}}{\sqrt{7 \times 7}} = \frac{\sqrt{121-36 \times 2}}{7} = \frac{\sqrt{49}}{7} = 1$$

استفاده از اتحاد جاق و لاغر

- اگر در مخرج کسری یکی از عبارت‌های $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ و $\sqrt{a^2+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.
- اگر در مخرج کسری یکی از عبارت‌های $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a^2-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.

مثال:

الف) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}+1}}{\sqrt{4+\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}+1}}{2-1} = \sqrt{4+\sqrt{2}+1}$

ب) $\frac{6}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} = \frac{6}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{16-\sqrt{8}+\sqrt{4}}}{\sqrt{16-\sqrt{8}+\sqrt{4}}} = \frac{6(\sqrt{16-\sqrt{8}+\sqrt{4}})}{4+2} = \frac{2(\sqrt{16-\sqrt{8}+\sqrt{4}})}{2} = \sqrt{16-\sqrt{8}+\sqrt{4}} = 2\sqrt{2}-2+\sqrt{4}$

تست ۷

حاصل $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \sqrt{4+\sqrt{9}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{4}-\sqrt{9}$ (۴) $\sqrt{9}-\sqrt{4}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد جاق و لاغر،

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{9}}}{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{9}}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{9}}}{2-3} = -\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{9}}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-\sqrt{6}$.

تست ۸

حاصل $\frac{2}{\sqrt{9+\sqrt{3}+1}} + 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{9}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{9}}{3}$

راه‌حل

می‌توان نوشت

$$\frac{2}{\sqrt{9+\sqrt{3}+1}} = \frac{2}{\sqrt{3^2+\sqrt{3}+1}} \times \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3-1}} = \frac{2(\sqrt{3-1})}{3-1} = \sqrt{3-1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{9+\sqrt{3}+1}} + 1 = \sqrt{3}$$

گویا کردن مخرج‌های گنگ

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



کتاب درسی

 ۱۲۶۰- برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{8}}$ ، کوچک‌ترین عدد مثبتی که باید در صورت و مخرج این کسر ضرب کنیم، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $\sqrt[3]{8}$ (۴) $\sqrt[3]{16}$

کتاب درسی

 ۱۲۶۱- حاصل $\frac{2}{\sqrt{3+1}}+2$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}-1$ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{3}+2$ (۴) $\sqrt{3}+1$

کتاب درسی

 ۱۲۶۲- عبارت $A = \frac{1}{2\sqrt{2}-3} + 2\sqrt{2}$ با کدام برابر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) -۳

 ۱۲۶۳- حاصل عبارت $\frac{3\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-3\sqrt{3}$ (۲) $-4/5$ (۳) $4/5$ (۴) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

 ۱۲۶۴- حاصل $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} - \sqrt[4]{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

 ۱۲۶۵- اگر $y = 3 - \sqrt{3}$ ، حاصل $-\sqrt{3} + 6y^{-1}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) $3 + 2\sqrt{3}$ (۴) $3 - 2\sqrt{3}$

 ۱۲۶۶- اگر $a = 2 - \sqrt{5}$ ، حاصل عبارت $\frac{2a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{5}$ (۲) $-2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}-3$ (۴) $2+\sqrt{5}$

 ۱۲۶۷- اگر $a = \sqrt[4]{5}$ ، مقدار $(a^2-2)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $1+\sqrt{5}$ (۲) $2+\sqrt{5}$ (۳) $1+2\sqrt{5}$ (۴) $1+\sqrt[4]{5}$

 ۱۲۶۸- عبارت $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

 ۱۲۶۹- معکوس عدد $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{4-\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}}{2}$ (۳) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (۴) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$

 ۱۲۷۰- مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{18+8\sqrt{2}}{y}$ (۲) $-2-4\sqrt{2}$ (۳) $-6-2\sqrt{2}$ (۴) $-6\sqrt{2}-10$

۱۲۷۱- عبارت $\frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3+1}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}-1$ (۴) $\sqrt{3}+1$

۱۲۷۲- حاصل $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{7}{3+\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۴

۱۲۷۳- حاصل $\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}+1} - \sqrt{\frac{5}{4}-1}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

۱۲۷۴- حاصل $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2}-2}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (۴) ۴

۱۲۷۵- مقدار $\frac{7}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$ (۳) $2\sqrt[3]{5}$ (۴) $2\sqrt[3]{2}$

۱۲۷۶- اگر $a = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} + a$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1-\sqrt[3]{3}}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1+\sqrt[3]{3}}{4}$

کتاب درسی



۱۲۷۷- مقدار $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۱۲۷۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\sqrt{2}+1$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

۱۲۷۹- اگر $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}$ و $b = 1+\sqrt{2}$ ، حاصل $\frac{ab-1}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) -۲ (۴) $-2\sqrt{2}$

۱۲۸۰- حاصل عبارت $\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۸۱- اگر $a < 0$ و $ab < 0$ ، حاصل عبارت $\frac{1}{|a-b-3\sqrt{2}|-|b-a+\sqrt{3}|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{12}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{18}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{12}$

۱۲۸۲- اگر $x = \frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 3^{\frac{1}{2}}$ ، حاصل $(x-1)^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۸۳- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ (۴)	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۳)	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (۲)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ (۱)
-----------------------------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------------------

۱۲۸۴- حاصل عبارت $\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt{3}+1$ (۳)	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۲)	$\sqrt{3}-1$ (۱)
-------------------------	------------------	-------------------------	------------------

۱۲۸۵- حاصل $A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟

۴ (۴)	$\sqrt[3]{4}$ (۳)	۲ (۲)	$\sqrt[3]{2}$ (۱)
-------	-------------------	-------	-------------------

۱۲۸۶- اگر $a+b+c = \frac{4}{\sqrt[4]{5}-1} - 1 = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}$ مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱۵۷ (۴)	۱۵۵ (۳)	۱۵۳ (۲)	۱۵۱ (۱)
---------	---------	---------	---------



۱۲۸۷- حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ کدام است؟

$2-\sqrt{3}$ (۴)	$2+\sqrt{3}$ (۳)	$\sqrt{3}$ (۲)	۱ (۱)
------------------	------------------	----------------	-------

۱۲۸۸- حاصل $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ کدام است؟

۱۱ (۴)	$10-\sqrt{2}$ (۳)	۱۰ (۲)	۹ (۱)
--------	-------------------	--------	-------

۱۲۸۹- حاصل عبارت $\frac{2}{\sqrt[3]{9+\sqrt{3}+1}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4-\sqrt{2}+1}}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ (۴)	$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ (۳)	$\sqrt[3]{6}$ (۲)	$\sqrt[3]{5}$ (۱)
-------------------------------	-------------------------------	-------------------	-------------------

۱۲۹۰- اگر $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ و $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ حاصل عبارت $x^3 + 12xy + y^3$ کدام است؟

۵۵ (۴)	۶۵ (۳)	۶۴ (۲)	۵۲ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۲۹۱- اگر $x = \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ حاصل $(x+\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2}$ کدام است؟

۳ (۴)	۲ (۳)	۱ (۲)	$\sqrt{2}$ (۱)
-------	-------	-------	----------------

۱۲۹۲- اگر $a = \sqrt{2}-1$ ، $b = \sqrt{5}-2$ و $c = \sqrt{10}-3$ ، کدام گزینه درست است؟

$b < c < a$ (۴)	$c < b < a$ (۳)	$a < c < b$ (۲)	$a < b < c$ (۱)
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

۱۲۹۳- حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}$ چند است؟

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۴)	$-1+\sqrt{3}$ (۳)	$-1+\sqrt{2}$ (۲)	۱ (۱)
-------------------------	-------------------	-------------------	-------

۱۲۹۴- اگر a_n جمله عمومی دنباله‌ای حسابی و d قدرنسبت دنباله باشد، مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{d}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_r}} + \frac{d}{\sqrt{a_r} + \sqrt{a_p}} + \dots + \frac{d}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$$

$\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}$ (۴)	$\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}$ (۳)	$n\sqrt{a_n}$ (۲)	$\sqrt{a_n}$ (۱)
-------------------------------	-------------------------------	-------------------	------------------

کنکور سراسری

ریاضی ۹۳

۱۲۹۵- حاصل عبارت $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 2\sqrt{3} & (4) & 1+\sqrt{2} & (3) \\ & & 2 & (2) \\ & & \sqrt{3} & (1) \end{array}$$

ریاضی ۹۵

۱۲۹۶- اگر $\alpha=\sqrt{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta=\sqrt{3\sqrt{2}+4}$ ، حاصل عبارت $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 7\sqrt{2} & (4) & 6\sqrt{2} & (3) \\ & & 8 & (2) \\ & & 6 & (1) \end{array}$$

تجربی ۹۹

۱۲۹۷- حاصل عبارت $(\sqrt{8+\sqrt{27}}-2(\sqrt{9}-1))^{-1}$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \sqrt{2}-2\sqrt{3} & (4) & 1-\sqrt{2} & (3) \\ & & -1+\sqrt{2} & (2) \\ & & 1+\sqrt{3} & (1) \end{array}$$

تجربی خارج ۹۹

۱۲۹۸- حاصل عبارت $(\sqrt{27}-1)+2(\sqrt{3}-1)^{-1}$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 1 & (4) & 1+\sqrt{3} & (3) \\ & & 2\sqrt{3} & (2) \\ & & 1+2\sqrt{3} & (1) \end{array}$$

تجربی ۱۴۰۰

۱۲۹۹- فرض کنید $a=\sqrt{6-2}$ و $b=\sqrt{6+2}$ ، مقدار $(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 16(2-\sqrt{3}) & (4) & 16(2+\sqrt{3}) & (3) \\ & & 4(2-\sqrt{3}) & (2) \\ & & 4(2+\sqrt{3}) & (1) \end{array}$$

تجربی خارج ۱۴۰۰

۱۳۰۰- فرض کنید $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 49 & (4) & 25 & (3) \\ & & 16 & (2) \\ & & 9 & (1) \end{array}$$

تجربی ۱۴۰۱

۱۳۰۱- حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}}\sqrt{1+\sqrt{7}}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 2\sqrt{2} & (4) & 2 & (3) \\ & & \sqrt{2} & (2) \\ & & 1 & (1) \end{array}$$

تجربی خارج ۱۴۰۱

۱۳۰۲- حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2}})(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \sqrt{2} & (4) & 1 & (3) \\ & & -\sqrt{2} & (2) \\ & & -1 & (1) \end{array}$$

ریاضی ۱۴۰۱

۱۳۰۳- اگر $\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^3-1}=2$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3+1}})^{1401}$ چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} -1 & (4) & 1 & (3) \\ & & -2 & (2) \\ & & 2 & (1) \end{array}$$

تجربی ۱۴۰۲ (نوبت اول)

۱۳۰۴- ریشه هفتم عدد مثبت a ، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{15}{7}$ است. $(\frac{1}{a}-3)$ چند برابر $(1+\sqrt{3})$ است؟

$$\begin{array}{llll} 6+3\sqrt{3} & (4) & 6 & (3) \\ & & 3 & (2) \\ & & 6-3\sqrt{3} & (1) \end{array}$$

آزمون فصل سوم ۱

۱۳۰۵- مقدار $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^8$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۶ (۲) $\sqrt{8}$ (۳) ۴ (۴)

۱۳۰۶- اگر $0 < a < 1$ ، آن گاه حاصل عبارت $A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

- $2\sqrt{a}$ (۱) $2\sqrt[3]{a}$ (۲) $2a$ (۳) صفر (۴)

۱۳۰۷- اگر $a = \sqrt{3}$ ، $b = \sqrt[3]{9}$ و $c = \sqrt[5]{27}$ ، کدام درست است؟

- $c < b < a$ (۱) $b < a < c$ (۲) $a < c < b$ (۳) $a < b < c$ (۴)

۱۳۰۸- حاصل $9^{\frac{2}{3}} \times 18^{\frac{1}{3}} \times (\frac{1}{54})^{\frac{4}{3}}$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴)

۱۳۰۹- اگر $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ ، حاصل $\frac{b}{a} - \frac{a}{b}$ چقدر است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴)

۱۳۱۰- اگر $a - b - c = 2$ و $ab + ac - bc = 3$ ، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

۱۳۱۱- حاصل عبارت $\frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2b(3a^2 + b^2)} + 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $\frac{a}{b}$ (۳) ab (۴)

۱۳۱۲- مقدار عبارت $(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴)

۱۳۱۳- در تجزیه عبارت $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ کدام عبارت وجود ندارد؟

- $x - 1$ (۱) $x + 1$ (۲) $2x - 1$ (۳) $2x + 1$ (۴)

۱۳۱۴- معکوس کدام یک از عددهای زیر برابر $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ است؟

- $3 + \sqrt{2}$ (۱) $3 - \sqrt{2}$ (۲) $3 + 2\sqrt{2}$ (۳) $3 - 2\sqrt{2}$ (۴)

آزمون فصل سوم ۲

۱۳۱۵- اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^3} + 2\sqrt[4]{a^4}$ کدام است؟

- (۱) $3a$ (۲) $-a$ (۳) $-2a$ (۴) $-3a$

۱۳۱۶- اگر $a > \sqrt{a}$ ، آن‌گاه کدام یک درست نیست؟

- (۱) $a^3 > a^2$ (۲) $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$ (۳) $\sqrt[3]{a^2} > a$ (۴) $\sqrt[4]{a^3} > \sqrt{a}$

۱۳۱۷- اگر $x^2 = 48$ ، مقدار $\frac{x}{3} - \frac{2}{x}$ بر حسب x برابر کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) x^3 (۳) x^4 (۴) x

۱۳۱۸- اگر $0 < a < 1$ ، کدام درست است؟

- (۱) $a^2 < a^4 < a$ (۲) $a^4 < a^3 < a$ (۳) $a < a^4 < a^3$ (۴) $a < a^3 < a^4$

۱۳۱۹- مقدار $\sqrt{2\sqrt{2+1}} \times \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) $3-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴) 7

۱۳۲۰- اگر $x^2 + 5x = 7$ ، حاصل عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ کدام است؟

- (۱) 130 (۲) 140 (۳) 143 (۴) 144

۱۳۲۱- اگر $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ ، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۳۲۲- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}{1-\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳۲۳- حاصل عبارت $\frac{3y^3+3}{y-x} \div \frac{x-xy+y^2x}{xy-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $y-x$ (۲) $y+x$ (۳) $3(y+1)$ (۴) $y+1$

۱۳۲۴- اگر $\frac{3}{(\sqrt[3]{2+1})^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) 2 (۲) -4 (۳) 4 (۴) -2

۱ ۸۳۲ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{(0.0016)^{-1}} = \sqrt[4]{\left(\frac{16}{10^4}\right)^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{10^4}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{10}{2}\right)^4} = 5$$

 بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{2}{100} \times 5 = 0.1$
۱ ۸۳۳ توجه کنید که

$$\sqrt{0.18} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \frac{\sqrt{18}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{10}, \quad \sqrt{0.98} = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{\sqrt{98}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{7\sqrt{2}}{10} \right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{10\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

۴ ۸۳۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10}, \quad \sqrt[4]{0.256} = \sqrt[4]{\frac{256}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{4}{10}$$

$$\sqrt[5]{0.00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{\sqrt[5]{100000}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$$

 بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $9 \times \frac{1}{10} = 0.9$
۲ ۸۳۵ هر یک از ریشه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[4]{0.0004} = \sqrt[4]{\frac{4}{10^4}} = \frac{2}{100}$$

$$\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{\frac{8}{10^3}} = \frac{2}{10}$$

$$\sqrt[4]{0.0016} = \sqrt[4]{\frac{16}{10^4}} = \frac{2}{10}$$

$$\sqrt[5]{0.00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{10^5}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\frac{2}{100} + \frac{2}{10}}{10} = \frac{2}{200} = \frac{1}{100}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

۱ ۸۳۶ ابتدا ریشه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[5]{0.00032} = \sqrt[5]{\frac{32}{10^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{10}\right)^5} = \frac{2}{10}$$

$$\left(\sqrt[4]{0.0016}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{0.0016}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{16}{10^4}}} = \frac{1}{\frac{2}{10}} = 5$$

 بنابراین حاصل ضرب مورد نظر برابر $5 \times \frac{2}{10} = 1$ است.

۴ ۸۳۷ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{(0.27)^{-2}} = (0.27)^{-2/3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(0.27)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{27}{100}\right)^{2/3}} = 0.27$$

$$\sqrt[5]{(0.32)^{-5}} = (0.32)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{(0.32)^5}} = \frac{1}{0.32} = 0.32$$

 بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $0.27 - 0.32 = -0.05 = -\frac{1}{20}$
۲ ۸۳۸ می‌توان نوشت $\sqrt[4]{8\sqrt{16}} = \sqrt[4]{8 \times 2} = \sqrt[4]{16} = 2$
۱ ۸۳۹ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{6\sqrt[3]{22\sqrt[4]{27\sqrt{9}}}} &= \sqrt[4]{6\sqrt[3]{22\sqrt[4]{27 \times 3}}} = \sqrt[4]{6\sqrt[3]{22\sqrt[4]{81}}} = \sqrt[4]{6\sqrt[3]{22\sqrt[4]{3^4}}} \\ &= \sqrt[4]{6\sqrt[3]{22 \times 3}} = \sqrt[4]{6\sqrt[3]{2^3 \times 3^2 \times 3}} = \sqrt[4]{6\sqrt[3]{2^3 \times 3^3}} \\ &= \sqrt[4]{6\sqrt[3]{6^3}} = \sqrt[4]{6 \times 6} = \sqrt[4]{36} = 6 \end{aligned}$$

۴ ۸۴۰ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(-3)^4} &= |-3| = 3, \quad \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{-4^3} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \\ \sqrt[5]{5^2} &= 5, \quad \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{-2^5} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \end{aligned}$$

 بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $3 - 4 + 5 - (-2) = 6$
۴ ۸۴۱ می‌دانیم اگر $a < 0$ آن‌گاه $\sqrt[4]{a^4} = -a$ ، بنابراین

$$1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(1 - \sqrt{2})^4} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

$$1 - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(1 - \sqrt{3})^4} = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^4} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با

$$\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{3} - 1) + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0$$

۲ ۸۴۲ توجه کنید که اگر $0 < a < b$ ، آن‌گاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ، بنابراین

$$0 < 9 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{5} < 3 \Rightarrow \sqrt{5} - 3 < 0$$

 در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} = |\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}$ از طرف دیگر،

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3} = \sqrt{3} - 2$$

$$4 < 5 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} - 2 > 0$$

 بنابراین $\sqrt[4]{(\sqrt{5} - 2)^4} = |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$ به این ترتیب عبارت مورد

 نظر برابر است با $3 - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{3} - 1$
۲ ۸۴۳ توجه کنید که $x = 2 - \sqrt{7} < 0$ ، بنابراین

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x, \quad \sqrt[5]{(-x)^5} = -x, \quad \sqrt[4]{(-x)^4} = |-x| = -x$$

 بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $(-x) + (-x) - (-x) = -x$
۲ ۸۴۴ چون a منفی است، پس

$$\sqrt[4]{a^4} = |a| = -a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = -a$$

همچنین،

$$\sqrt[5]{a^5} = a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

 پس عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{a}{-a} + \frac{a}{-a} = -2$
۲ ۸۴۵ توجه کنید که $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ ، بنابراین

$$\sqrt{-a\sqrt[3]{(-a)^2}\sqrt{a^2}} = \sqrt{-a\sqrt[3]{(-a)^2}(-a)} = \sqrt{-a\sqrt[3]{(-a)^3}}$$

$$= \sqrt{-a(-a)} = \sqrt{a^2} = -a$$

۴ ۸۴۶ توجه کنید که $a + b < 0$ ، در نتیجه

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b| = -(a+b)$$

 همچنین $\sqrt[5]{(a+b)^5} = a+b$ ، بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

۸۴۷ ۱ چون $a < -b$ ، پس a مثبت است، b منفی است و $a+b$ هم منفی است. بنابراین

$$\sqrt[3]{-a^3} + \sqrt[3]{b^3} - \sqrt{(a+b)^2} = -a + |b| - |a+b| = -a - b - (-(a+b)) = 0$$

۸۴۸ ۲ چون $a \leq 1$ ، پس $1-a \geq 0$. اکنون توجه کنید که

$$(1-a)^3 = \underbrace{(1-a)}_{\geq 0} \underbrace{(1-a)^2}_{\geq 0}$$

بنابراین $\sqrt{(1-a)^3} = |1-a| \sqrt{1-a} = (1-a) \sqrt{1-a}$.

۸۴۹ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{2} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[3]{54}$$

۸۵۰ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = 8\sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2}$$

۸۵۱ ۱ ریشه‌های چهارم عدد a برابر $\sqrt[4]{a}$ و $-\sqrt[4]{a}$ هستند. بنابراین

$$\sqrt[4]{a} - (-\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a} = 2\sqrt[4]{a}$$

$$2\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \sqrt[4]{a} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \Rightarrow (\sqrt[4]{a})^4 = \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)^4 \Rightarrow a = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{16}$$

بنابراین $\sqrt[4]{\frac{a}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ پس $\frac{a}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

۸۵۲ ۴

$$\sqrt[4]{-x^9} = \sqrt[4]{(-x)x^8} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{x^8} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt{(x^2)^4} = \sqrt[4]{-x} \times x^2 = x^2 \sqrt[4]{-x}$$

۸۵۳ ۳ چون $x < 0$ ، پس

$$\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = -x^3, \quad \sqrt[3]{x^9} = \sqrt[3]{(x^3)^3} = x^3$$

$$\sqrt[4]{x^{12}} = \sqrt[4]{(x^3)^4} = |x^3| = -x^3$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-x^3$.

۸۵۴ ۳ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود $\frac{2}{x} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}}$ یعنی

$$\frac{2}{x} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 5$$

$$\sqrt[3]{6x-3} = \sqrt[3]{30-3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

۸۵۵ ۲ با توجه به تعریف ریشه دوم،

$$x - \sqrt{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9 + \sqrt{x}$$

بنابراین $\frac{9 + \sqrt{x}}{x} = 1$

۸۵۶ ۲ توجه کنید که $0.000027 = 27 \times 10^{-6}$. در نتیجه

$$a = \sqrt[3]{27 \times 10^{-6}} = 3 \times 10^{-2} = 0.03$$

بنابراین $3 = 10 \cdot a \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{10 \cdot a} = 10 \sqrt{a}$

۸۵۷ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{3 \times 4} = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{2^5} = 2 \sqrt[5]{3} = 2a$$

۸۵۸ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad (1-\sqrt{2} < 0 \text{ چون})$$

$$\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}$.

۸۵۹ ۱ چون $\sqrt{-x}$ در معادله وجود دارد، پس x عددی منفی است.

توجه کنید که x نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در این صورت مخرج کسر برابر صفر خواهد بود. بنابراین $\sqrt{x^2} = x$ ، $\sqrt[3]{x^3} = x$ ، $(\sqrt{-x})^4 = -x$ و در نتیجه

$$\frac{(\sqrt{-x})^4 - 2\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x^2}}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{-x - 2x + x}{x^2} = 1$$

$$-\frac{2x}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

۸۶۰ ۲ چون $-1 < x < 0$ ، پس x و $x-1$ هر دو منفی‌اند. بنابراین

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x, \quad \sqrt{|x-1|} = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{1-x}$$

پس

$$\sqrt{1+\sqrt{x^2}} \times \sqrt{|x-1|} = \sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x} = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x$$

۸۶۱ ۲ چون $x < 0$ و $y > 0$ ، پس $xy < 0$ و در نتیجه $xy-1 < 0$.

پس عبارت‌ها به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\sqrt{x^3 y^3} = xy, \quad \sqrt[4]{16x^4 y^4} = \sqrt[4]{(2xy)^4} = 2xy$$

$$\sqrt{(xy-1)^2} = -xy+1$$

بنابراین $A = xy - 2xy - (-xy+1) = -1$

۸۶۲ ۱ ابتدا هر عبارت رادیکالی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{a^3 b^3} = \sqrt[3]{(ab)^3} = ab, \quad \sqrt[5]{(-a)^5 b^5} = \sqrt[5]{(-ab)^5} = -ab$$

$$b\sqrt{a^2} = b|a| = -ab \quad (a < 0 \text{ چون})$$

$$a\sqrt[4]{(-b)^4} = a|b| = ab \quad (b > 0 \text{ چون})$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $ab - (-ab) + (-ab) + ab = 2ab$

۸۶۳ ۳ ابتدا ریشه‌ها را ساده‌تر می‌کنیم (توجه کنید که چون $a < 0$ ،

پس $|a| = -a$)

$$\sqrt[4]{a^4} = |a| = -a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt{-3a^3} = \sqrt{a^2} \sqrt{-3a} = |a| \sqrt{-3a} = -a \sqrt{-3a}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$-a \sqrt{-3a} - a - (-a) = -a \sqrt{-3a}$$

۱ ۸۷۳ چون $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ ، پس دست کم یکی از عددهای a ، b و c قرینه دیگری است. فرض کنیم $b=-a$. در این صورت $abc=-a^2 \times c < 0$ ، بنابراین $c > 0$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{a}{\sqrt{a^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2}} = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} \xrightarrow{b=-a} \frac{a}{|a|} + \frac{-a}{|a|} + 1 = 1$$

۲ ۸۷۴ توان چهارم هریک از گزینه‌ها را حساب می‌کنیم، تا معلوم شود کدام یک به ۳ نزدیک‌تر است.

گزینه (۱): $(2/2)^4 = 2^3/4$ ، $3^0 - 2^3/4 = 6/6$

گزینه (۲): $(2/3)^4 = 2^4/9$ ، $3^0 - 2^4/9 = 2/1$

گزینه (۳): $(2/4)^4 = 3^3/1$ ، $3^3/1 - 3^0 = 3/1$

گزینه (۴): $(2/5)^4 = 3^9/6$ ، $3^9/6 - 3^0 = 9/6$

بنابراین $2/3$ تقریب بهتری برای $\sqrt[3]{3}$ است.

۳ ۸۷۵ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): $3^2 < 1^3 < 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{1^3} < 4$

گزینه (۲): $3^3 < 3^1 < 4^3 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{3^1} < 4$

گزینه (۳): $4^4 < 3^1 < 5^4 \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{3^1} < 5$

گزینه (۴): $3^5 < 3^0 < 4^5 \Rightarrow 3 < \sqrt[5]{3^0} < 4$

بنابراین $\sqrt[4]{3^1}$ بین ۳ و ۴ قرار ندارد.

۱ ۸۷۶ چون مقدار ریشه چهارم مثبت عددهای توان چهارم کامل را می‌دانیم، پس ابتدا دو عدد توان چهارم کامل متوالی پیدا می‌کنیم که 4^5 بین آن‌هاست. توجه کنید که $4^4 = 256$ و $5^4 = 625$. بنابراین

$$4^4 < 4^5 < 5^4 \Rightarrow \sqrt[4]{4^4} < \sqrt[4]{4^5} < \sqrt[4]{5^4} \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{4^5} < 5$$

۴ ۸۷۷ معلوم است که a باید نامنفی باشد تا \sqrt{a} معنی داشته باشد. اگر $0 \leq a \leq 1$ ، آن‌گاه $\sqrt{a} \leq \sqrt[3]{a}$ ، که خلاف فرض است. بنابراین $a > 1$. در این حالت، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. اما $\sqrt[3]{a} < a < \sqrt{a}$. پس گزینه (۴) درست نیست.

۴ ۸۷۸ ابتدا عبارت مورد نظر را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|a - \sqrt{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| - |a - \sqrt[3]{a}|$$

اکنون توجه کنید که چون $0 < a < 1$ ، پس $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$. بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{a} - a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - (\sqrt[3]{a} - a) = 0$.

۳ ۸۷۹ چون $\sqrt{a} > \sqrt{a}$ ، پس $0 < a < 1$ و در نتیجه واضح است که $\sqrt{a} > a$ و $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$. همچنین از $0 < a < 1$ نتیجه می‌شود $a^8 > a^9$ و در نتیجه $\sqrt[8]{a^8} > \sqrt[9]{a^9}$ ، یعنی $\sqrt[8]{a} > \sqrt[9]{a}$ ، ولی $\sqrt[8]{a^8} > \sqrt[9]{a^8}$ درست نیست، زیرا $0 < a < 1 \Rightarrow a^8 < a^9 \Rightarrow \sqrt[8]{a^8} < \sqrt[9]{a^8} \Rightarrow \sqrt[8]{a} < \sqrt[9]{a}$.

۳ ۸۸۰ دو طرف نابرابری $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$ را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[3]{a})^6 < (\sqrt{a})^6 \Leftrightarrow a^2 < 6^2 \Leftrightarrow a^2 < 36 \Rightarrow a < 6$$

بنابراین همه عددهای طبیعی مانند a که $a^2 < 36$ ویژگی مورد نظر را دارند. چون ۱۴ بزرگ‌ترین مربع کاملی است که از ۲۱۶ کوچک‌تر است، پس ۱۴ عدد طبیعی ویژگی مورد نظر را دارند.

۳ ۸۶۴ ابتدا توجه کنید که

$$A = |x||y| + |y|x + |xy| - |xy| = |xy| + |y|x$$

می‌دانیم $xy < 0$ و $x < 0$. در نتیجه $|x| = -x$ و $|xy| = -xy$. بنابراین

$$A = -2xy$$

۲ ۸۶۵ توجه کنید که $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ در نتیجه

$$a^2 - 7a + 16 + \sqrt{a^2} = a^2 - 7a + 16 + (-a) = (a-4)^2$$

بنابراین $\sqrt{a^2 - 7a + 16 + \sqrt{a^2}} = \sqrt{(a-4)^2} = |a-4|$. چون a منفی است، پس $a-4 < 0$ ، در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $4-a$ است.

۲ ۸۶۶ توجه کنید که

$$a^9 = 16 \Rightarrow (a^3)^3 = 16 \Rightarrow a^3 = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} \times 2 = 2\sqrt[3]{2}$$

$$b^3 = -54 \Rightarrow b = \sqrt[3]{-54} = -\sqrt[3]{3^3 \times 2} = -3\sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\frac{a^3 + b}{a^3 - b} = \frac{2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}} = \frac{-\sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{5}$$

۳ ۸۶۷ توجه کنید که $xy = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$. همچنین $x^3 = 2$ و

$$y^3 = 4 \text{ در نتیجه}$$

$$xy^4 = (xy)y^3 = 2(4) = 8, \quad x^4y = (xy)x^3 = 2(2) = 4$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $(8-1)(4+2+1) = 49$.

۴ ۸۶۸ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} - \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2-2}{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{2}} = 0$$

۴ ۸۶۹ با مخرج مشترک گیری معلوم می‌شود که

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{8}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8}}{2\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{32}}{2\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2+2}{2\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{2}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{2}}\right)^{60} = \frac{2^{60}}{(\sqrt[3]{16})^{60} \times (\sqrt[3]{2})^{60}} = \frac{2^{60}}{16^{20} \times 2^{20}} = \frac{2^{60}}{2^{36} \times 2^{20}} = \frac{2^{60}}{2^{56}} = 2^4$$

۱ ۸۷۰ دقت کنید که $\frac{x^3}{y}, \frac{y^3}{x} > 0$ در نتیجه

$$\sqrt{\frac{x^3}{y}} \div \sqrt{\frac{y^3}{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{y}} \times \sqrt{\frac{x}{y^3}} = \sqrt{\frac{x^4}{y^4}} = \frac{x^2}{y^2}$$

۴ ۸۷۱ اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{2} = a$ ، آن‌گاه $2 = a^3$. همچنین،

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = a^3$$

$$\frac{2 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8+1}} = \frac{a^3 + a}{a^3 + 1} = \frac{a(a^2 + 1)}{a^3 + 1} = a = \sqrt[3]{2}$$

۲ ۸۷۲ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}, \quad \dots, \quad \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{25}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{12} + \dots + \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{4}(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{25}) = \sqrt[3]{4}a$$

۸۸۷ ۱ با توجه به $0 < a < 1$ نتیجه می‌شود $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$. با توجه به $b > 1$ نتیجه می‌شود $\sqrt{b} > \sqrt[3]{b}$. همچنین از $a < b$ نتیجه می‌شود $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ و $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$. بنابراین

$$A = \frac{-(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})+\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}-(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})} = \frac{-\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}-\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = 1$$

۸۸۸ ۲ چون $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$ پس $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

۸۸۹ ۳ چون $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$ پس $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

۸۹۰ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = 3\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^3 \times 2} = 5\sqrt[3]{2}$$

بنابراین $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{25} = 8\sqrt[3]{2}$. به این ترتیب

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{8\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$= \sqrt[3]{2^9} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{25}}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$

۸۹۱ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \times 5} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^4}$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 5$

۸۹۲ ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{3^2}$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 \times 3} = \sqrt[5]{9}$

۸۹۳ ۲ ابتدا توجه کنید که $2\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4} \times 2 = \sqrt[4]{2^6}$. بنابراین $\sqrt[4]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{2^6}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^6}$

۸۹۴ ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{3^2 \sqrt[4]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^2 \times 3^4} \times 3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^6} \times 3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^6} \times 3^1} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^6} \times 3^1}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt[4]{(3^3)^2} \times 3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^3} \times 3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$$

۸۹۵ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\sqrt[12]{2} - \sqrt[12]{2} = 0$

۸۹۶ ۱ ابتدا توجه کنید که چون n عددی فرد است، پس $n+1$ عددی زوج است. بنابراین، چون a عددی منفی است، پس

$$\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n+1]{a^{n+1}} = a - |a| = a - (-a) = a + a = 2a$$

۸۸۱ ۳ اگر طرفین نابرابری‌ها را به توان شش برسانیم، به دست می‌آید $(\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{n})^6 < (\sqrt{3})^6 \Rightarrow 2^3 < n^2 < 3^3 \Rightarrow 8 < n^2 < 27$. توجه کنید که فقط عددهای طبیعی ۳، ۴ و ۵ در این نابرابری‌ها صدق می‌کنند.

۸۸۲ ۲ اگر ریشه سوم عدد a در بازه $(2, 3)$ قرار داشته باشد، می‌توان نوشت $2 < \sqrt[3]{a} < 3$ یعنی $2^3 < a < 3^3$ و در نتیجه $8 < a < 27$. اعداد طبیعی ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ را می‌توان در نابرابری فوق به جای a قرار داد. پس ۱۸ عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت که ریشه سوم آن‌ها در بازه $(2, 3)$ قرار دارد.

۸۸۳ ۴ اولاً واضح است که $\sqrt[4]{0} = 0$ و ریشه چهارم عدد صفر در بازه مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت است که ریشه چهارم مثبت آن در بازه $(0, 3)$ قرار دارد. یعنی

$$0 < \sqrt[4]{a} < 3 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{a})^4 < 3^4 \Rightarrow 0 < a < 81$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت است که ریشه چهارم منفی آن در بازه $(-4, 0)$ قرار دارد. یعنی

$$-4 < -\sqrt[4]{b} < 0 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{b} < 4 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{b})^4 < 4^4 \Rightarrow 0 < b < 256$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشه چهارم در بازه $(-4, 3)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ است.

۸۸۴ ۴ فرض کنید n یکی از این عددها باشد. در این صورت

$$3 < \sqrt[4]{n} < 4 \xrightarrow{\text{توان ۴}} 3^4 < n < 4^4 \Rightarrow 81 < n < 256 \quad (1)$$

$$2 < \sqrt[5]{n} < 3 \xrightarrow{\text{توان ۵}} 2^5 < n < 3^5 \Rightarrow 32 < n < 243 \quad (2)$$

چون n باید در هر دو شرط (۱) و (۲) صدق کند، پس $81 < n < 243$. چون n عددی طبیعی است، پس $82 \leq n \leq 242$. بنابراین n یکی از عددهای ۸۲، ۸۳، ... و ۲۴۲ است، که تعداد آن‌ها برابر است با $242 - 82 + 1 = 161$.

نکته: اگر m و n عددهایی طبیعی باشند و $m < n$ ، تعداد عددهای طبیعی از m تا n (خود این دو عدد را هم حساب می‌کنیم) برابر است با $n - m + 1$.

۸۸۵ ۳ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): توجه کنید که

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > 1, \quad 1 < a < 2 \Rightarrow 0 < a - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{a-1} < 1$$

بنابراین $\sqrt{a-1} < \sqrt[3]{a}$ ، یعنی گزینه (۱) درست است.

گزینه (۲): توجه کنید که

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[4]{a} > 1, \quad 1 < a < 2 \Rightarrow 0 < a - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a-1} < 1$$

بنابراین $\sqrt[3]{a-1} < \sqrt[4]{a}$ ، یعنی گزینه (۲) درست است.

گزینه (۳): توجه کنید که

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[5]{a} > 1, \quad 1 < a < 2 \Rightarrow 0 < a - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{a-1} < 1$$

بنابراین $\sqrt[5]{a} > \sqrt{a-1}$ ، یعنی گزینه (۳) درست نیست.

گزینه (۴): چون $a > 1$ ، پس $\sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$ ، یعنی گزینه (۴) درست است.

۸۸۶ ۴ ابتدا a ، b و c را ساده‌تر می‌کنیم:

$$a = \sqrt{2} + 3\sqrt{5}, \quad b = \sqrt{5} + 3\sqrt{2}, \quad c = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

بنابراین $a - c = \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0$ ، همچنین $c > b$ ، پس $b - c = \sqrt{2} - \sqrt{5} < 0$. در نتیجه $a > c > b$.

۹۱۴ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3^3} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3^{1+2+3}} = 3$$

$$\sqrt[n]{9} = 3 \Rightarrow n = 2 \quad \text{در نتیجه}$$

۹۱۵ ۲ عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{3^6}, \quad \sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{3^3}, \quad \sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{3^2}$$

بنابراین $\sqrt[n]{3} \times \sqrt[n]{3} \times \sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{3^6} \times \sqrt[n]{3^3} \times \sqrt[n]{3^2} = \sqrt[n]{3^{11}}$ پس تساوی داده شده به صورت $\sqrt[n]{3^{11}} = \sqrt[n]{3^a}$ است و در نتیجه $a = 11$.

۹۱۶ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{3^2 \times 2} = \sqrt[4]{3^2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[4]{18} = b\sqrt[4]{a} \quad \text{بنابراین} \quad \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{a}$$

۹۱۷ ۱ عبارت‌ها را با فرجه ۲۰ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[20]{(\sqrt{3}-2)^3} = -\sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^3} = -\sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^{12}}$$

$$\sqrt[20]{2-\sqrt{3}} = \sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^5}$$

بنابراین

$$A = -\sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^{12}} \times \sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^5} \times \sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$= -\sqrt[20]{(2-\sqrt{3})^{20}} = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$$

۹۱۸ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{3a} = \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{3a} = \sqrt[4]{3a^5} = \sqrt[4]{3}a = \sqrt[4]{3}(1-\sqrt[4]{3})$$

$$\text{بنابراین} \quad a-b = 1 - \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3} = 1 \quad \text{در نتیجه} \quad b = \frac{\sqrt[4]{3}(1-\sqrt[4]{3})}{\sqrt[4]{3}-1}$$

۹۱۹ ۴ توجه کنید که

$$a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3} \sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^2} \times \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3} \times \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

بنابراین $a^{12} = 3$ ، یعنی a^{12} عددی صحیح است. توجه کنید که بقیه گزینه‌ها عددهایی صحیح نیستند.

۹۲۰ ۴ توجه کنید که $\sqrt{a} \sqrt{a} = \sqrt{a^2 a} = \sqrt{a^3} = \sqrt{a}$ بنابراین

عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{a} \sqrt{a}}{\sqrt{a} \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$$

۹۲۱ ۱ ابتدا عبارت‌ها را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{a^4 \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4} \times a} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}} = \sqrt[3]{a^5}$$

$$\sqrt[3]{a^6 \sqrt{a^{-2}}} = \sqrt[3]{a^6 \times a^{-1}} = \sqrt[3]{a^5}$$

بنابراین عبارت‌های مورد نظر برابرند.

۹۲۲ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{a \sqrt{\frac{1}{a}}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^2} \times \frac{1}{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\text{بنابراین} \quad \sqrt[3]{a \sqrt{\frac{1}{a}}} \times \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[2]{a} = \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a} \quad \text{پس} \quad \sqrt[3]{a} = 3$$

$$\text{در نتیجه} \quad a = 3^3 = 27$$

۹۲۳ ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{3}} = \sqrt[3]{2 \times \sqrt[5]{3}}$$

$$3 \times \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{3} \Rightarrow \sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{3} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x = 3^3$$

۹۲۴ ۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\sqrt{4x}} = \sqrt[3]{4x} \Rightarrow (\sqrt[3]{3})^{12} = (\sqrt[3]{4x})^{12}$$

$$3^3 = (4x)^2 \Rightarrow 3\sqrt{3} = 4x \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

۹۲۵ ۲ می‌توان نوشت

$$\sqrt[5]{16^3 a} = 2\sqrt[5]{2} \Rightarrow \sqrt[5]{16^3 a} = \sqrt[5]{2^3 \times 2} \Rightarrow \sqrt[5]{16^3 a} = \sqrt[5]{2^4}$$

$$\sqrt[5]{16^3 a} = 16 \Rightarrow (\sqrt[5]{16^3 a})^5 = 16^5 \Rightarrow 16^3 a = 16^5 \Rightarrow a = 16^2$$

۹۲۶ ۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt[4]{a+2}} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[4]{a+2}} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[4]{a+2}} = 2$$

$$a+2 = 2^6 \Rightarrow a = 62$$

۹۲۷ ۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \sqrt{x}} \times \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{3} \times \sqrt{x} = \sqrt[3]{\sqrt{2x} \times x}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[3]{\sqrt{2x}} \Rightarrow 3^3 = 2x \Rightarrow x = \frac{27}{2}$$

۹۲۸ ۳ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم. توجه کنید که

$$5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n} = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{6^n + 15^n + 10^n}{30^n}$$

$$\text{در نتیجه} \quad \frac{10^n + 15^n + 6^n}{5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n}} = \frac{10^n + 15^n + 6^n}{\frac{6^n + 15^n + 10^n}{30^n}} = 30^n$$

عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[30]{30^n} = 30$.

۹۲۹ ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر

$$\sqrt[3]{x} \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{x^2} \times x} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$$

$$\text{بنابراین} \quad x = 4 \quad \text{و در نتیجه} \quad \sqrt{x} \sqrt[3]{x} = \sqrt{4} \sqrt[3]{4} = \sqrt{4} \sqrt[3]{2^2} = 2 \sqrt[3]{2} = 2 \sqrt[3]{2}$$

۹۳۰ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a \sqrt{\frac{1}{a}}} = \sqrt{\sqrt{a^2} \times \frac{1}{a}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} = 5$$

بنابراین $a = 5^4$. اکنون می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{a \sqrt{\frac{1}{a}}} \sqrt{a} = \sqrt[3]{a \sqrt{\frac{a}{a^2}}} = \sqrt[3]{a \sqrt{\frac{1}{a}}} = \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a}} = \sqrt[3]{a^4 \times \frac{1}{a}} = \sqrt[3]{a^3} = 5$$

۹۳۱ ۲ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم

$$n + \sqrt[3]{\sqrt[4]{4 \sqrt{4^n}}} = n + \sqrt[3]{\sqrt[4]{4 \times 2^n}} = n + \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{n+2}}} = 2$$

$$\text{در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با} \quad \sqrt[3]{\frac{2^{n+1}}{2}} = \sqrt[3]{2^n} = 2$$

$$\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$$

۹۳۲ ۲ توجه کنید که

$$3^2 < 10 < 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4$$

از طرف دیگر،

