نشرالگو

تمام

تمرین امتحان

ریاضی دهم

علی سلامت، حامد معنوی

- درس‌نامهٔ سؤال‌محور
- سؤالات تألیفی
- سؤالات تکمیلی
- سؤالات امتحانی
- پاسخ‌های تشریحی

پیشگفتار

به نام خدا

هدف از نوشتن این کتاب آموزش دقیق و اصولی مطالب و مفاهیم کتاب درسی ریاضی پایهٔ دهم برای تسلط کامل دانش‌آموزان بر تمام موضوعات کتاب درسی و آماده‌سازی ایشان برای شرکت در امتحانات نهایی بوده است.

فصل‌ها و درس‌های این کتاب کاملاً منطبق بر کتاب درسی ریاضی (۱) هستند. در ابتدای هر درس درسنامه‌ای کامل، شامل تعاریف و مفاهیم مورد نظر، به همراه چند مثال برای درک بهتر موضوع قرار داده‌ایم. در ادامه برای پوشش کامل تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و مثال‌های حل شدهٔ کتاب درسی تعدادی مسئله با راه‌حل‌های کاملاً تشریحی آورده‌ایم و تمام قسمت‌های حل مسئله را به طور کامل شرح داده‌ایم. همچنین در پایان هر درس، متناسب با حجم موضوع و تنوع سؤال‌های آن، تعدادی تمرین تشریحی با رعایت میزان سختی در چیدمان آن‌ها به همراه پاسخ آورده شده است. این تمرین‌ها مطالب مطرح شده در درسنامه را به طور کامل پوشش می‌دهند. در پایان هر فصل نیز پنج مسئله با درجهٔ سختی بیشتر با عنوان مسائل تکمیلی برای تسلط بیشتر بر موضوعات آورده شده است و بعد از آن سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده با پاسخ را قرار داده‌ایم که شما به راحتی بتوانید تمام مطالب فصل را یک‌بار به طور کامل مرور کنید. علاوه بر این‌ها، برای آشنایی بیشتر با سؤال‌های مطرح شده در امتحان‌های نوبت اول و نوبت دوم، به ترتیب در انتهای فصل چهارم و فصل هفتم نمونه‌هایی همراه با بارم‌بندی و پاسخ آمده است.

از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر ابوالفضل علی‌بمانی و خانم عاطفه ربیعی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی می‌کنیم.

علی سلامت – حامد معنوی

فهرست مطالب

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

فصل پنجم: تابع

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

فصل هفتم: آمار و احتمال

فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

فصل ششم

فصل هفتم

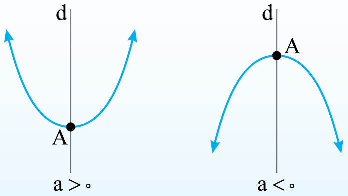
درس دوم

سهمی

سهمی

سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی‌اند و $a\neq ۰$ سـهمی می‌گویند. سـهمی برحسب علامت a در معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$، به یکی از دو شکل زیر است.

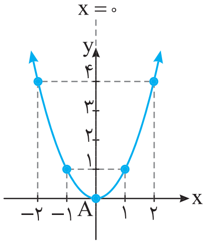


در هر دو نمودار نقطهٔ A را رأس سهمی می‌نامند. اگر $a>۰$، آن‌گاه A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی است و اگر $a<۰$، آن‌گاه A بالاترین نقطهٔ سهمی است. همچنین خط d که از رأس سهمی عبور می‌کند و موازی محور y است، محور تقارن سهمی است.

مثال

سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}$ را با استفاده از نقطه‌یابی به صورت مقابل رسم می‌کنیم:

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴



توجه کنید که نقطهٔ $A(۰,۰)$ رأس سهمی و خط $x=۰$ محور تقارن سهمی است.

مختصات رأس سهمی

برای به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی می‌توانیم از روش‌های زیر استفاده کنیم:

- در سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$، طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ عرض رأس سهمی کافی است طول رأس سهمی را در معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ جایگذاری کنیم یا اینکه از رابطهٔ $y=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{-\Delta}{۴a}$ استفاده کنیم.

مثال

در سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}-۶x+۱۱$، $a=۱$ و $b=-۶$. بنابراین طول رأس سهمی به صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-(-۶)}{۲(۱)}=۳$$

همچنین عرض رأس سهمی با جایگذاری $x=۳$ در معادلهٔ $y=x^{۲}-۶x+۱۱$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=x^{۲}-۶x+۱۱\xrightarrow{x=۳}y=(۳)^{۲}-۶(۳)+۱۱\Rightarrow y=۲$$

بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(۳,۲)$ است.

- معادلهٔ هر سهمی را می‌توان به صورت $y=a(x-h)^{۲}+k$ نیز نوشت $(a\neq ۰)$. در این صورت رأس سهمی نقطهٔ $A(h,k)$ است.

مثال

در سهمی به معادلهٔ $y=-۲(x-۴)^{۲}+۱$، $h=۴$ و $k=۱$. بنابراین نقطهٔ $A(۴,۱)$ رأس سهمی است.

مسئله ۱۲

مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=-۳x^{۲}-۱۲x+۴$ ب) $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۵x$ پ) $y=\frac{۱}{۳}(x+۲)^{۲}+۴$ ت) $y=-\frac{۲}{۵}(x-۷)^{۲}-۱$

راه‌حل الف) چون طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$ محاسبه می‌شود، می‌نویسیم

$$y=-۳x^{۲}-۱۲x+۴\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۱۲)}{۲(-۳)}=-\frac{۱۲}{۶}\Rightarrow x=-۲$$

همچنین عرض رأس سهمی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=-۳x^{۲}-۱۲x+۴\xrightarrow{x=-۲}y=-۳(-۲)^{۲}-۱۲(-۲)+۴\Rightarrow y=۱۶$$

بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(-۲,۱۶)$ است.

ب) توجه کنید که

$$y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۵x\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۵)}{۲(\frac{۱}{۲})}\Rightarrow x=۵$$

$$y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۵x\xrightarrow{x=۵}y=\frac{۱}{۲}(۵)^{۲}-۵(۵)\Rightarrow y=-\frac{۲۵}{۲}$$

پس رأس این سهمی نقطهٔ $A(۵,-\frac{۲۵}{۲})$ است.

پ) دقت کنید که رأس سهمی به معادلهٔ $y=a(x-h)^{۲}+k$ ، نقطهٔ $A(h,k)$ است. بنابراین $y=\frac{۱}{۳}(x+۲)^{۲}+۴=\frac{۱}{۳}(x-(-۲))^{۲}+۴$

واضح است که مختصات رأس این سهمی به صورت $A(-۲,۴)$ است.

ت) مختصات رأس سهمی $y=-\frac{۲}{۵}(x-۷)^{۲}-۱$ برابر با $A(۷,-۱)$ است.

مسئله ۱۳

ابتدا سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}-۱۰x$ را به صورت $y=a(x-h)^{۲}+k$ بنویسید و سپس مختصات رأس آن را مشخص کنید.

راه‌حل دقت کنید که ضریب x در معادلهٔ $y=x^{۲}-۱۰x$ ، برابر با -۱۰ است. پس برای آنکه معادلهٔ داده شده را به صورت مربع کامل بنویسیم، کافی است عدد $\frac{(-۱۰)^{۲}}{۴}=۲۵$ را در سمت راست معادله اضافه و کم کنیم:

$$y=x^{۲}-۱۰x\Rightarrow y=\underbrace{x^{۲}-۱۰x+۲۵}_{(x-۵)^{۲}}-۲۵\Rightarrow y=(x-۵)^{۲}-۲۵$$

واضح است که رأس این سهمی نقطهٔ $A(۵,-۲۵)$ است.

رسم سهمی

برای رسم سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم.

۲) محل برخورد سهمی با محور y را مشخص می‌کنیم. برای این کار کافی است در معادلهٔ سهمی به جای x ، صفر قرار دهیم.

۳) محل برخورد سهمی با محور x را در صورت وجود مشخص می‌کنیم. برای این کار کافی است در معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ به جای y، صفر قرار دهیم و جواب‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ را در صورت وجود به‌دست آوریم.

۴) به کمک نقاط به‌دست آمده و علامت a سهمی را رسم می‌کنیم.

مثال

برای رسم سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}-۶x+۵$ ، ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$y=x^{۲}-۶x+۵ \Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۶)}{۲(۱)}=۳\ , \quad y=x^{۲}-۶x+۵ \xrightarrow{x=۳} y=(۳)^{۲}-۶(۳)+۵=-۴$$

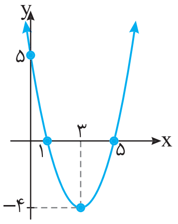
بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(۳,-۴)$ است. برای یافتن محل برخورد سهمی با محور y، در معادلهٔ $y=x^{۲}-۶x+۵$ به جای x صفر قرار می‌دهیم:

$$y=x^{۲}-۶x+۵ \xrightarrow{x=۰} y=(۰)^{۲}-۶(۰)+۵ \Rightarrow y=۵$$

پس محل برخورد سهمی با محور y، نقطهٔ $(۰,۵)$ است. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد این سهمی با محور x در معادلهٔ سهمی به جای y صفر قرار دهیم:

$$y=x^{۲}-۶x+۵ \xrightarrow{y=۰} x^{۲}-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x-۵=۰ \Rightarrow x=۵ \end{cases}$$

در نتیجه نقاط برخورد سهمی با محور x نقاط $(۱,۰)$ و $(۵,۰)$ هستند. با توجه به نقاط به‌دست آمده و اینکه $a=۱>۰$ ، سهمی را به صورت مقابل رسم می‌کنیم.



مسئله ۱۴

هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و معادلهٔ محور تقارن آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y=x^{۲}-۴x$ **ب)** $y=۲(x-۱)^{۲}-۴$ **پ)** $y=-x^{۲}+۳$

راه‌حل الف) توجه کنید که

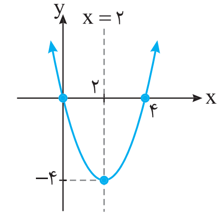
$$y=x^{۲}-۴x \Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(۱)}=۲ \Rightarrow y=(۲)^{۲}-۴(۲)=-۴$$

رأس سهمی نقطهٔ $(۲,-۴)$ است، در نتیجه محور تقارن آن خط $x=۲$ است.

$$y=x^{۲}-۴x \xrightarrow{x=۰} y=۰^{۲}-۴(۰) \Rightarrow y=۰$$

محل برخورد سهمی با محور y نقطهٔ $(۰,۰)$ است.

$$y=x^{۲}-۴x \xrightarrow{y=۰} x^{۲}-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$$



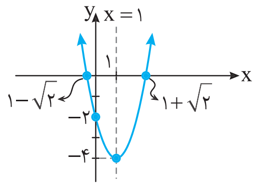
سهمی در نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,۰)$ با محور x برخورد می‌کند. همچنین چون $a=۱>۰$، پس سهمی به شکل ∪ است.

ب) رأس سهمی به معادلهٔ $y=۲(x-۱)^{۲}-۴$ ، نقطهٔ $(۱,-۴)$ است، در نتیجه محور تقارن این سهمی خط $x=۱$ است.

$$y=۲(x-۱)^{۲}-۴ \xrightarrow{x=۰} y=۲(۰-۱)^{۲}-۴ \Rightarrow y=-۲$$

بنابراین محل برخورد سهمی با محور y نقطهٔ $(۰,-۲)$ است.

$$y=۲(x-۱)^{۲}-۴ \xrightarrow{y=۰} ۲(x-۱)^{۲}-۴=۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}=۲ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=\sqrt{۲} \Rightarrow x=۱+\sqrt{۲} \\ x-۱=-\sqrt{۲} \Rightarrow x=۱-\sqrt{۲} \end{cases}$$



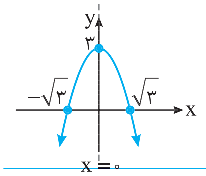
نقاط $(۱+\sqrt{۲},۰)$ و $(۱-\sqrt{۲},۰)$ محل برخورد سهمی با محور x هستند. چون $a=۲>۰$ ، پس سهمی به شکل ∪ است.

پ) توجه کنید که در سهمی به معادلهٔ $y=-x^{۲}+۳$ ، $b=۰$. در نتیجه

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۰}{۲(-۱)} \Rightarrow x=۰ \Rightarrow y=-(۰)^{۲}+۳ \Rightarrow y=۳$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $(۰,۳)$ و محور تقارن سهمی خط $x=۰$ است. همچنین محل برخورد سهمی با محور y، نقطهٔ $(۰,۳)$ است.

$$y=-x^{۲}+۳ \xrightarrow{y=۰} -x^{۲}+۳=۰ \Rightarrow x^{۲}=۳ \Rightarrow x=\sqrt{۳}\ ,\ x=-\sqrt{۳}$$

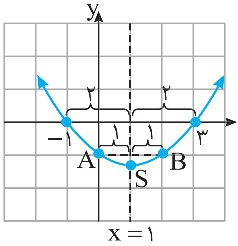


سهمی در نقاط $(\sqrt{۳},۰)$ و $(-\sqrt{۳},۰)$ با محور x برخورد می‌کند. چون $a=-۱<۰$ ، پس سهمی به شکل ∩ است.

نکته

هر دو نقطه روی نمودار سهمی که عرض‌های آن‌ها برابر هستند، از محور تقارن آن به یک فاصله‌اند. با توجه به اینکه محور تقارن سهمی از رأس آن عبور می‌کند، بنابراین طول رأس این سهمی برابر با میانگین طول‌های آن دو نقطه است.

مثال



نمودار سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۲x-۳$ در دستگاه مختصات مقابل رسم شده است. نقاط $A(۰,-۱)$ و $B(۲,-۱)$ از محور تقارن این سهمی یعنی خط $x=۱$ به یک فاصله‌اند. دقت کنید که میانگین طول‌های دو نقطهٔ A و B برابر با طول رأس سهمی است:

$$\begin{cases}A(۰,-۱)\\B(۲,-۱)\end{cases}\Rightarrow \text{طول رأس سهمی}=\frac{۰+۲}{۲}=۱$$

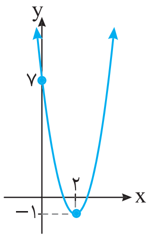
مسئله ۱۵

اگر $A(-۴,۱)$ و $B(۶,۱)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادلهٔ محور تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

راه‌حل چون عرض نقاط A و B با هم برابراند، پس از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول دو نقطهٔ A و B یعنی $\frac{۶+(-۴)}{۲}=۱$ است. بنابراین معادلهٔ محور تقارن این سهمی خط $x=۱$ است.

مسئله ۱۶

نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.



راه‌حل چون رأس سهمی نقطهٔ $A(۲,-۱)$ است، پس معادلهٔ این سهمی به صورت $y=a(x-۲)^۲-۱$ است. همچنین سهمی از نقطهٔ $(۰,۷)$ عبور کرده است، در نتیجه مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

$$y=a(x-۲)^۲-۱\xrightarrow{(۰,۷)}۷=a(۰-۲)^۲-۱\Rightarrow ۴a-۱=۷\Rightarrow ۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت مقابل است: $y=۲(x-۲)^۲-۱\Rightarrow y=۲(x^۲-۴x+۴)-۱\Rightarrow y=۲x^۲-۸x+۷$

با توجه به معادلهٔ به‌دست آمده $a=۲$، $b=-۸$ و $c=۷$.

مسئله ۱۷

نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱- و محور x را در نقاط به طول ۲- و ۴ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

راه‌حل چون سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است، پس مختصات نقطهٔ $(۰,-۱)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند، بنابراین

$$y=ax^۲+bx+c\xrightarrow{(۰,-۱)}-۱=a(۰)^۲+b(۰)+c\Rightarrow c=-۱$$

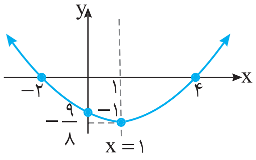
همچنین سهمی محور x را در نقاط به طول ۲- و ۴ قطع کرده است، پس مختصات نقاط $(-۲,۰)$ و $(۴,۰)$ نیز در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

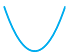
$$\begin{cases}y=ax^۲+bx-۱\xrightarrow{(۴,۰)}۱۶a+۴b-۱=۰\\y=ax^۲+bx-۱\xrightarrow{(-۲,۰)}۴a-۲b-۱=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۶a+۴b=۱\\۴a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱}{۸},\ b=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{۱}{۸}x^۲-\frac{۱}{۴}x-۱$ است. برای رسم سهمی ابتدا مختصات رأس آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-\frac{۱}{۴})}{۲(\frac{۱}{۸})}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۱$$

$$y=\frac{۱}{۸}x^۲-\frac{۱}{۴}x-۱\xrightarrow{x=۱}y=\frac{۱}{۸}(۱)^۲-\frac{۱}{۴}(۱)-۱=\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۹}{۸}$$



بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $(۱,-\frac{۹}{۸})$ است. اکنون با توجه به اطلاعات مسئله نقطهٔ $(۰,-۱)$ محل برخورد سهمی با محور y و نقاط $(-۲,۰)$ و $(۴,۰)$ محل برخورد سهمی با محور x است. از طرف دیگر چون $a=\frac{۱}{۸}>۰$، پس سهمی به شکل  است.

درس دوم

تمرین‌های تشریحی

۱۶۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=-۴x^۲-۴x+۱$ برابر با -۱ است.

ب) رأس سهمی به معادلهٔ $y=-۳(x+۵)^۲+۱$ نقطهٔ $A(۵,۱)$ است.

پ) سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۴x$ از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

ت) خط $x=۰$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۳$ است.

۱۶۲ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) عرض رأس سهمی به معادلهٔ $y=-۲(x-۳)^۲-۴$ برابر با .... است.

ب) سهمی به‌معادلهٔ $y=۵(x-۳)^۲-۱$، محور y را در نقطه‌ای به عرض .... قطع می‌کند.

پ) سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۲x+۳$ از ناحیه‌های .... و .... عبور می‌کند.

۱۶۳ مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=-۲x^۲+۸x-۱$

ب) $y=۷(x+۵)^۲$

۱۶۴ ابتدا سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۴x+۳$ را به صورت $y=a(x-h)^۲+k$ بنویسید و سپس مختصات رأس آن را مشخص کنید.

۱۶۵ محل برخورد هریک از سهمی‌های زیر با محورهای مختصات را مشخص کنید.

الف) $y=-۳x^۲+۸x+۱۱$

ب) $y=-(x+۴)^۲+۱$

۱۶۶ نقاط برخورد سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+۲$ با محور x نقاط $x=-۲$ و $x=۵$ هستند. مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۱۶۷ هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

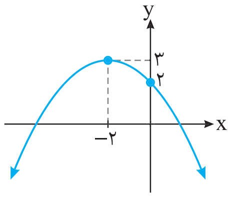
الف) $y=۳x^۲-۱$

ب) $y=-۲(x+۳)^۲+۸$

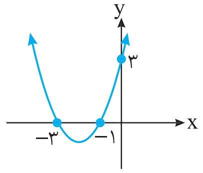
پ) $y=x^۲-x-۱$

۱۶۸ اگر $A(m,۲)$ و $B(-۴,۲)$ دو نقطه از یک سهمی باشند و طول رأس سهمی برابر با -۸ باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۱۶۹ نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.



۱۷۰ اگر نمودار سهمی به معادلهٔ $y=a(x-h)^۲+k$ به صورت شکل مقابل باشد، مختصات رأس سهمی را به‌دست آورید.



۱۷۱ نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ و محور x را در نقاط به طول ۵ و -۱ قطع می‌کند. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.

مسائل تکمیلی

صفحهٔ پاسخ: ۲۳۶

۱ سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ از نقاط $(۱,-۹)$، $(۴,-۱۲)$ و $(۲,-۱۲)$ عبور می‌کند. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.

۲ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^{۲}-۸x+۷<۰$ و نامعادلهٔ $|x-a|<b$ برابر است. مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۳ اگر جدول تعیین علامت عبارت $y=(m^{۲}-۱)x^{۲}+۳mx+n$ به صورت زیر باشد، مقادیر m و n را به‌دست آورید.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	

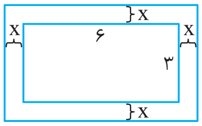
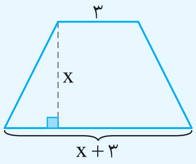
۴ اگر جدول تعیین علامت عبارت $y=x^{۲}-(m+۱)x+(۲m-۱)$ به صورت زیر باشد، مقادیر ممکن برای a را به‌دست آورید.

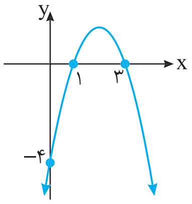
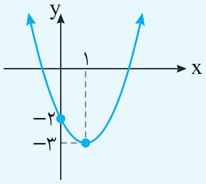
x	$-\infty$		a		$+\infty$
y		$+$	۰	$+$	

۵ اگر $x+۱, x+۴, ۵x+۲$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله را به‌دست آورید.

سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

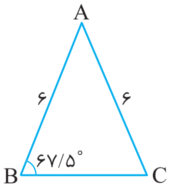
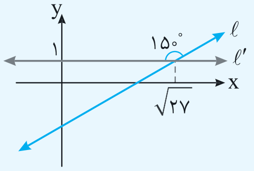
صفحات پاسخ: ۲۳۷ تا ۲۴۲

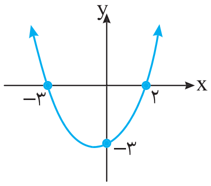
ردیف	سؤالات	بارم
۱	معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید. الف) $\frac{۱}{۲}x^{۲}-۴x=۰$ ب) $۲x^{۲}-۸=۰$ پ) $x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰$ ت) $۲x^{۲}+۲x-۸۴=۰$	۲
۲	جواب هریک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید. الف) $(x-۷)^{۲}=۴۹$ ب) $(۲x-۵)^{۲}+۱=۰$ پ) $(۳x-۴)^{۲}=۴$ ت) $(۴x-۱)^{۲}=۵$	۲
۳	هریک از معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید. الف) $x^{۲}-۸x=-۱۵$ ب) $۳x^{۲}-۹x-۱=۰$	۱/۵
۴	جواب هریک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش Δ به‌دست آورید. الف) $x^{۲}-۴x+\frac{۷}{۴}=۰$ ب) $-۲x^{۲}-۱۰x+۵=۰$ پ) $\frac{۱}{۵}x^{۲}-x+\frac{۵}{۴}=۰$ ت) $x^{۲}-۲x+۷=۰$	۲
۵	به ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $۳x^{۲}-۲ax+۱=۰$ یک جواب حقیقی دارد؟	۱
۶	به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $x^{۲}-۲x+m=۰$ دو جواب حقیقی دارد؟	۱
۷	به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $mx^{۲}+(m-۲)x-m=۰$ جواب حقیقی ندارد؟	۱
۸	اگر $x=-۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+ax-۲=۰$ باشد، جواب دیگر معادله را به‌دست آورید.	۱/۵
۹	در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، فرض کنید $\Delta>۰$. اگر $x=-۳$ یکی از جواب‌های معادله باشد، نشان دهید $۹a+c=۳b$.	۰/۵
۱۰	سه برابر مربع یک عدد حقیقی منفی از دو برابر آن ۲۱ واحد بیشتر است. این عدد را پیدا کنید.	۱
۱۱	مطابق شکل یک عکس به ابعاد ۳ در ۶ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب را به‌دست آورید. 	۱/۵
۱۲	مساحت ذوزنقهٔ شکل مقابل برابر با ۲۰ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ ارتفاع ذوزنقه را به‌دست آورید. 	۱/۵
۱۳	مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورید. الف) $y=-۵x^{۲}+۱۰x-۱$ ب) $y=x^{۲}-۷$ پ) $y=۲x^{۲}-۲x+۳$ ت) $y=-\frac{۱}{۲}(x+۵)^{۲}-۳$	۲

۱۴	هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و معادلهٔ محور تقارن آن‌ها را مشخص کنید. الف) $y=x^۲-۶x$ ب) $y=x^۲+x-۶$ پ) $y=۲(x-۱)^۲+۳$	۲/۲۵
۱۵	نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید. 	۲
۱۶	نمودار سهمی به معادلهٔ $y=a(x-h)^۲+k$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a، h و k را به‌دست آورید. 	۱/۵
۱۷	نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ ، محور y را در نقطه‌ای به عرض -۶ و محور x را در نقاط به طول -۱ و ۶ قطع می‌کند. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.	۲
۱۸	هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید. الف) $y=۲x-۱۲$ ب) $y=\frac{۵x-۳}{۴}$ پ) $y=-\frac{۴}{۳}x+۸$ ت) $y=-\sqrt{۶}x+\sqrt{۲۴}$	۲
۱۹	جدول تعیین علامت عبارت $y=(۲-a)x+۱۰$ به صورت زیر است. مقدار a را به‌دست آورید. $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -۴ & & +\infty \\ \hline y & & - & ۰ & + & \end{array}$	۱
۲۰	جدول تعیین علامت عبارت $y=۳ax+a^۲-۷$ به صورت زیر است. مقدار a را به‌دست آورید. $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -۲ & & +\infty \\ \hline y & & - & ۰ & + & \end{array}$	۱/۵
۲۱	هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید. الف) $y=۳x^۲+۴x+۵$ ب) $y=\sqrt{۵}x^۲-x-\sqrt{۸۰}$ پ) $y=۴x^۲-۱۰$ ت) $y=-۲x^۲+x+۳$	۲
۲۲	جدول تعیین علامت عبارت $y=۳x^۲+ax-b$ به صورت زیر است. مقادیر a و b را به‌دست آورید. $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -۴ & & ۲ & & +\infty \\ \hline y & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array}$	۱/۵
۲۳	هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید. الف) $y=(-x+۵)(۳x-۱)$ ب) $y=(۲۵x^۲-۱)(x^۲-۴x+۴)$ پ) $y=\frac{x^۲+x-۱}{x^۲-۹}$ ت) $y=\frac{۴x^۲-۲۵}{x^۲-۸x+۷}$	۳

امتحان نوبت اول (۲)

صفحات پاسخ: ۲۴۴ تا ۲۴۵

ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اشتراک یک مجموعهٔ نامتناهی و یک مجموعهٔ متناهی، یک مجموعهٔ نامتناهی است. ب) حاصل‌ضرب $\tan ۵۲^\circ \times \cot ۵۲^\circ$ برابر با یک است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) گویا شدهٔ عبارت $\frac{۴}{\sqrt[۳]{۲}}$ برابر با .... است. ب) حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۲۰x + ۱۸ = ۰$ برابر با .... است.	۰/۵
۳	با نمایش مجموعهٔ $A = [-۳, \frac{۵}{۲}) \cap (-\frac{۳}{۴}, ۳)$ روی محور اعداد، حاصل آن را به صورت یک بازه بنویسید.	۱
۴	اگر مجموعهٔ اعداد صحیح مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $A = \{۴, ۵, ۶, \dots\}$ را مشخص کنید.	۰/۵
۵	یک شرکت ۳۲ محصول تولید می‌کند به‌طوری که ۱۷ محصول این شرکت دارای استاندارد نوع A و ۱۳ محصول دارای استاندارد نوع B هستند. اگر ۵ محصول این شرکت هیچ‌کدام از استانداردهای A و B را نداشته باشند، مشخص کنید چند محصول این شرکت هر دو نوع استاندارد A و B را دارند.	۰/۷۵
۶	در یک الگوی خطی مجموع جمله‌های اول و دوم برابر با ۳۰ و جملهٔ پنجم برابر با ۱ است. جملهٔ عمومی این الگو را بنویسید.	۰/۷۵
۷	جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجهٔ دوم $۳, ۵, ۸, ۱۲, \dots$ را به‌دست آورید.	۱
۸	در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ دوم برابر با $-\frac{۱}{۲}$ و جملهٔ پنجم برابر با -۳۲ است. قدرنسبت و جملهٔ اول این دنباله را به‌دست آورید.	۰/۷۵
۹	مساحت مثلث ABC در شکل مقابل را به‌دست آورید. 	۱
۱۰	با توجه به شکل مقابل معادلهٔ خط ℓ را بنویسید. 	۱/۵
۱۱	با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۱۰° را با هم مقایسه کنید.	۰/۷۵
۱۲	اگر $\tan \alpha = -۵$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم قرار داشته باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۳	در جاهای خالی علامت > یا < قرار دهید. الف) $\sqrt[۷]{۰/۰۳}$ ○ $\sqrt[۱۰]{۰/۰۳}$ ب) $\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۱۵}}$ ○ $\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۱۵}}$ پ) $\sqrt[۵]{-۰/۲}$ ○ $\sqrt[۵]{-۰/۴}$ ت) $\sqrt[۶]{۴۳}$ ○ $\sqrt[۸]{۴۳}$	۱

۱۴	حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. الف) $A=\sqrt[۶]{(۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲۷})^{۶}}-\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^{۳}}$ ب) $B=\sqrt{\sqrt{۳\sqrt[۳]{۹}}}\times ۳^{\frac{۷}{۱۲}}$	۱/۷۵
۱۵	حاصل عبارت زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید. $C=(\sqrt{x^{۶}+۱}-x^{۳})(\sqrt{x^{۶}+۱}+x^{۳})$	۰/۵
۱۶	عبارت مقابل را تجزیه کنید. $D=x^{۲}y^{۳}-۱۲۵x^{۲}$	۰/۷۵
۱۷	مخرج کسر زیر را گویا کنید. $\frac{۲}{\sqrt[۳]{y}-\sqrt[۳]{۵}}$	۰/۷۵
۱۸	به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $x^{۲}-mx-m=۰$ دو جواب حقیقی دارد؟	۱/۵
۱۹	نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ به صورت شکل زیر است. عرض نقطهٔ به طول ۴ روی سهمی چقدر است؟  	۱/۵
۲۰	عبارت زیر را تعیین علامت کنید. $y=\frac{x^{۲}+۲x+۲}{x^{۲}-۱}$	۱/۷۵
	موفق و پیروز باشید جمع بارم	۲۰

۱۵۷ الف) چون $x=-۱$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند. بنابراین

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{x=-۱} a(-۱)^۲+b(-۱)+c=۰$$

$$a-b+c=۰ \Rightarrow a+c=b$$

ب) برای اینکه $x=\frac{-c}{a}$ جواب دیگر این معادله باشد باید در معادله صدق کند.

یعنی مقدار $y=ax^۲+bx+c$ به ازای $x=\frac{-c}{a}$ برابر با صفر شود:

$$y=ax^۲+bx+c \xrightarrow{x=\frac{-c}{a}}$$

$$y=a(\frac{-c}{a})^۲+b(\frac{-c}{a})+c=\frac{ac^۲}{a^۲}-\frac{bc}{a}+c=\frac{c^۲}{a}-\frac{bc}{a}+c$$

$$=\frac{c^۲-bc+ac}{a}=\frac{c(c-b+a)}{a}=\frac{c(a+c-b)}{a}$$

توجه کنید که با توجه به قسمت (الف)، $a+c=b$. بنابراین

$$y=\frac{c(a+c-b)}{a}=\frac{c(b-b)}{a}=\frac{c\times ۰}{a}=۰$$

در نتیجه $x=\frac{-c}{a}$، جواب دیگر این معادله است.

۱۵۸ اگر این عدد حقیقی مثبت را x فرض کنیم، مربع آن $x^۲$ و هفت برابر آن $۷x$ است. بنابراین

$$x^۲=۷x+۸ \Rightarrow x^۲-۷x-۸=۰ \Rightarrow (x-۸)(x+۱)=۰$$

$$\begin{cases} x-۸=۰ \Rightarrow x=۸ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

چون x یک عدد حقیقی مثبت است، بنابراین فقط $x=۸$ قابل قبول است.

۱۵۹ با توجه به شکل، طول قاب برابر با $۷+۲x$ و عرض آن برابر با $۶+۲x$ است. بنابراین می‌نویسیم:

عرض × طول = مساحت

$$۹۰=(۷+۲x)(۶+۲x) \Rightarrow ۹۰=۴x^۲+۲۶x+۴۲$$

$$۴x^۲+۲۶x-۴۸=۰$$

با تقسیم طرفین معادلهٔ به‌دست آمده بر ۲ و استفاده از روش Δ جواب‌های آن را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$۴x^۲+۲۶x-۴۸=۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲+۱۳x-۲۴=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۱۳)^۲-۴(۲)(-۲۴)=۱۶۹+۱۹۲=۳۶۱$$

$$\begin{cases} x_۱=\frac{-۱۳+\sqrt{۳۶۱}}{۲(۲)}=\frac{-۱۳+۱۹}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \\ x_۲=\frac{-۱۳-\sqrt{۳۶۱}}{۲(۲)}=\frac{-۱۳-۱۹}{۴}=\frac{-۳۲}{۴}=-۸ \end{cases}$$

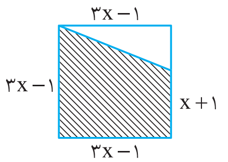
با توجه به اینکه x مقداری مثبت است. بنابراین فقط $x=\frac{۳}{۲}$ قابل قبول است.

پس ابعاد این قاب به صورت زیر هستند:

طول قاب $=۷+۲x=۷+۲(\frac{۳}{۲})=۱۰$

عرض قاب $=۶+۲x=۶+۲(\frac{۳}{۲})=۹$

۱۶۰ شکل هاشورخورده یک ذوزنقه است که مساحت آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:



مساحت ذوزنقه $=\frac{\text{(مجموع دو قاعده)}\times\text{ارتفاع}}{۲}$

مساحت ذوزنقه $=\frac{(۳x-۱+x+۱)(۳x-۱)}{۲}=۲۰ \Rightarrow \frac{۴x(۳x-۱)}{۲}=۲۰$

$$x(۳x-۱)=۱۰ \Rightarrow ۳x^۲-x-۱۰=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۳)(-۱۰)=۱+۱۲۰=۱۲۱$$

$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱+\sqrt{۱۲۱}}{۶}=\frac{۱+۱۱}{۶}=۲$ (ق.ق)

$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱-\sqrt{۱۲۱}}{۶}=\frac{۱-۱۱}{۶}=-\frac{۵}{۳}$ (غ.ق.ق)

دقت کنید که به ازای $x=-\frac{۵}{۳}$ ضلع مربع برابر با یک عدد منفی است. بنابراین فقط $x=۲$ قابل قبول است. در نتیجه طول ضلع مربع برابر است با

طول ضلع مربع $=۳x-۱ \xrightarrow{x=۲}$ طول ضلع مربع $=۳(۲)-۱=۵$

۱۶۱ الف) نادرست است. طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=-۴x^۲-۴x+۱$ برابر با $-\frac{۱}{۲}$ است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow x=-\frac{(-۴)}{۲(-۴)}=-\frac{۱}{۲}$$

ب) نادرست است. رأس سهمی به معادلهٔ $y=a(x-h)^۲+k$ نقطهٔ $A(h,k)$ است. بنابراین رأس سهمی به معادلهٔ $y=-۳(x+۵)^۲+۱$ نقطهٔ $A(-۵,۱)$ است.

پ) درست است. برای رسم سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۴x$، ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

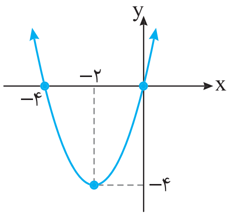
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(۱)}=-۲$$

$$y=x^۲+۴x \xrightarrow{x=-۲} y=(-۲)^۲+۴(-۲)=-۴$$

بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(-۲,-۴)$ است. محل برخورد سهمی با محور x به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=x^۲+۴x \xrightarrow{y=۰} x^۲+۴x=۰ \Rightarrow x(x+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۴ \end{cases}$$

درنتیجه نقاط برخورد سهمی با محور x نقاط $(-۴,۰)$ و $(۰,۰)$ هستند. با توجه به نقاط به‌دست آمده و اینکه $a=۱>۰$، سهمی را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. بنابراین این سهمی از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



ت) درست است. محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۳$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۰}{۲(۱)} \Rightarrow x=۰$ (معادلهٔ محور تقارن)

۱۶۲ الف) عرض رأس سهمی به معادلهٔ $y=a(x-h)^۲+k$ برابر با k است.

بنابراین عرض رأس سهمی $y=-۲(x-۳)^۲-۴$ برابر با -۴ است.

ب) برای پیدا کردن محل برخورد سهمی به معادلهٔ $y=۵(x-۳)^۲-۱$ با محور y در معادلهٔ آن به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$y=۵(x-۳)^۲-۱\xrightarrow{x=۰}y=۵(۰-۳)^۲-۱\Rightarrow y=۴۴$$

بنابراین سهمی به معادلهٔ $y=۵(x-۳)^۲-۱$، محور y را در نقطه‌ای به عرض ۴۴ قطع می‌کند.

پ) برای رسم سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۲x+۳$، ابتدا مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

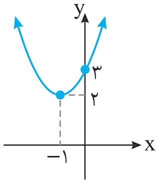
$$x=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x=-\frac{۲}{۲(۱)}=-۱$$

$$y=x^۲+۲x+۳\xrightarrow{x=-۱}y=(-۱)^۲+۲(-۱)+۳\Rightarrow y=۲$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $A(-۱,۲)$ است. برای به‌دست آوردن محل برخورد سهمی با محور y در معادلهٔ سهمی به جای x، صفر قرار می‌دهیم.

$$y=x^۲+۲x+۳\xrightarrow{x=۰}y=(۰)^۲+۲(۰)+۳\Rightarrow y=۳$$

بنابراین سهمی در نقطهٔ $(۰,۳)$ با محور y برخورد می‌کند. اکنون با توجه به نقاط به‌دست آمده و اینکه $a=۱>۰$، سهمی $y=x^۲+۲x+۳$ را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. بنابراین سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۲x+۳$ از ناحیه‌های اول و دوم عبور می‌کند.



۱۶۳ الف) در سهمی به معادلهٔ $y=-۲x^۲+۸x-۱$، $a=-۲$ و $b=۸$.

بنابراین طول رأس سهمی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۸}{۲(-۲)}\Rightarrow x=۲$$

همچنین عرض رأس سهمی با جایگذاری $x=۲$ در معادلهٔ سهمی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=-۲x^۲+۸x-۱\xrightarrow{x=۲}y=-۲(۲)^۲+۸(۲)-۱\Rightarrow y=۷$$

بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(۲,۷)$ است.

ب) رأس سهمی به معادلهٔ $y=a(x-h)^۲+k$ نقطهٔ $A(h,k)$ است.

بنابراین رأس سهمی $y=۷(x+۵)^۲$ نقطهٔ $(-۵,۰)$ است.

۱۶۴ دقت کنید که ضریب x در معادلهٔ $y=x^۲-۴x+۳$ برابر با -۴ است. پس برای آنکه معادلهٔ داده شده را به صورت مربع کامل بنویسیم، کافی است عدد $\frac{(-۴)^۲}{۴}=۴$ را در سمت راست معادله اضافه و کم کنیم:

$$y=x^۲-۴x+۳=\underbrace{x^۲-۴x+۴}_{(x-۲)^۲}-۴+۳\Rightarrow y=(x-۲)^۲-۱$$

واضح است که رأس این سهمی نقطهٔ $A(۲,-۱)$ است.

۱۶۵ الف) برای پیدا کردن محل برخورد سهمی به معادلهٔ $y=-۳x^۲+۸x+۱۱$ با محور y در معادلهٔ سهمی به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$y=-۳x^۲+۸x+۱۱\xrightarrow{x=۰}y=-۳(۰)^۲+۸(۰)+۱۱\Rightarrow y=۱۱$$

بنابراین محل برخورد سهمی با محور y نقطهٔ $A(۰,۱۱)$ است. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادلهٔ سهمی به جای y، صفر قرار می‌دهیم:

$$y=-۳x^۲+۸x+۱۱\xrightarrow{y=۰}-۳x^۲+۸x+۱۱=۰$$

برای حل این معادله از روش Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۸^۲-۴(-۳)(۱۱)=۶۴+۱۳۲\Rightarrow\Delta=۱۹۶$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۸+\sqrt{۱۹۶}}{-۶}\Rightarrow x_۱=-۱$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۸-\sqrt{۱۹۶}}{-۶}\Rightarrow x_۲=\frac{۱۱}{۳}$$

بنابراین سهمی محور x را در نقاط $(-۱,۰)$ و $(\frac{۱۱}{۳},۰)$ قطع می‌کند.

ب) محل برخورد سهمی با محور y به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=-(x+۴)^۲+۱\xrightarrow{x=۰}y=-(۰+۴)^۲+۱\Rightarrow y=-۱۵$$

بنابراین سهمی در نقطهٔ $A(۰,-۱۵)$ با محور y برخورد می‌کند. همچنین محل برخورد سهمی با محور x به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=-(x+۴)^۲+۱\xrightarrow{y=۰}-(x+۴)^۲+۱=۰\Rightarrow(x+۴)^۲=۱$$

$$\begin{cases}x+۴=۱\Rightarrow x=-۳\\x+۴=-۱\Rightarrow x=-۵\end{cases}$$

در نتیجه محل برخورد سهمی با محور x نقاط $(-۳,۰)$ و $(-۵,۰)$ است.

۱۶۶ با توجه به اینکه سهمی محور x را در نقاطی به طول -۲ و ۵ قطع می‌کند، بنابراین از نقاط $(-۲,۰)$ و $(۵,۰)$ عبور می‌کند. در نتیجه مختصات این نقاط باید در معادلهٔ آن صدق کنند. پس می‌نویسیم:

$$\begin{cases}y=ax^۲+bx+۲\xrightarrow{(-۲,۰)}۴a-۲b+۲=۰\\y=ax^۲+bx+۲\xrightarrow{(۵,۰)}۲۵a+۵b+۲=۰\end{cases}$$

$$\frac{۵}{۲}\times\begin{cases}۴a-۲b=-۲\\۲۵a+۵b=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۰a-۵b=-۵\\۲۵a+۵b=-۲\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۵},b=\frac{۳}{۵}$$

۱۶۷ الف) ابتدا مختصات رأس سهمی $y=۳x^۲-۱$ را مشخص می‌کنیم:

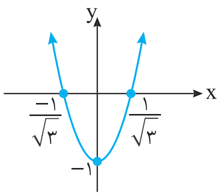
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۰}{۲(۳)}\Rightarrow x=۰$$

$$y=۳x^۲-۱\xrightarrow{x=۰}y=۳(۰)^۲-۱\Rightarrow y=-۱$$

بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(۰,-۱)$ است. برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادلهٔ سهمی به جای y، صفر قرار می‌دهیم:

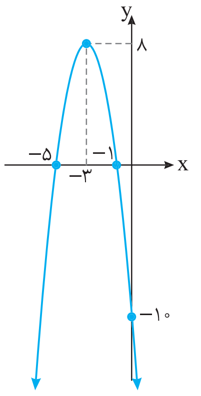
$$y=۳x^۲-۱\xrightarrow{y=۰}۳x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\\x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\end{cases}$$

پس این سهمی در نقاط $(\frac{۱}{\sqrt{۳}},۰)$ و $(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},۰)$ با محور x برخورد می‌کند.



اکنون با توجه به اینکه $a=۳>۰$، سهمی به شکل  است.

ب) رأس سهمی $y=-۲(x+۳)^۲+۸$ نقطهٔ $A(-۳,۸)$ است. همچنین محل برخورد سهمی با محور y به صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$y=-۲(x+۳)^۲+۸\xrightarrow{x=۰}$$

$$y=-۲(۰+۳)^۲+۸\Rightarrow y=-۱۰$$

بنابراین نقطهٔ برخورد سهمی با محور y نقطهٔ $(۰,-۱۰)$ است. دقت کنید که محل برخورد سهمی با محور x به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=-۲(x+۳)^۲+۸\xrightarrow{y=۰}-۲(x+۳)^۲+۸=۰\Rightarrow ۲(x+۳)^۲=۸$$

$$(x+۳)^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}x+۳=۲\Rightarrow x=-۱\\x+۳=-۲\Rightarrow x=-۵\end{cases}$$

بنابراین سهمی در نقاط $(-۱,۰)$ و $(-۵,۰)$ با محور x برخورد می‌کند.

دقت کنید که $a=-۲<۰$، بنابراین سهمی به شکل  است.

پ) ابتدا رأس سهمی $y=x^۲-x-۱$ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱}{۲(۱)}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$y=x^۲-x-۱\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}$$

$$y=(\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۲}-۱\Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}$$

بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $A(\frac{۱}{۲},-\frac{۵}{۴})$ است. برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور y در معادلهٔ سهمی به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$y=x^۲-x-۱\xrightarrow{x=۰}y=(۰)^۲-۰-۱\Rightarrow y=-۱$$

بنابراین سهمی در نقطهٔ $A(۰,-۱)$ با محور y برخورد می‌کند. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادلهٔ سهمی به جای y، صفر قرار می‌دهیم:

$$y=x^۲-x-۱\xrightarrow{y=۰}x^۲-x-۱=۰$$

برای حل این معادله از روش Δ استفاده می‌کنیم:

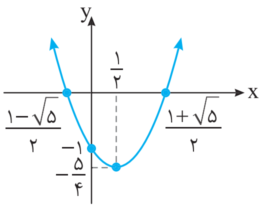
$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۱)(-۱)\Rightarrow\Delta=۵$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},\quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین سهمی محور x را در نقاط $(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},۰)$ و $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲},۰)$ قطع می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه $a=۱>۰$، این سهمی را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



۱۶۸ دقت کنید که طول رأس سهمی برابر با ۸− است. بنابراین معادلهٔ محور تقارن این سهمی $x=-۸$ است. از طرف دیگر چون عرض دو نقطهٔ $A(m,۲)$ و $B(-۴,۲)$ با هم برابر است، بنابراین این دو نقطه از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. در نتیجه میانگین طول‌های دو نقطهٔ A و B برابر با ۸− است. پس

$$\frac{m+(-۴)}{۲}=-۸\Rightarrow m-۴=-۱۶\Rightarrow m=-۱۲$$

۱۶۹ چون رأس سهمی نقطهٔ $A(-۲,۳)$ است، پس معادلهٔ این سهمی به صورت $y=a(x+۲)^۲+۳$ است. همچنین سهمی از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور کرده است. در نتیجه مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

$$y=a(x+۲)^۲+۳\xrightarrow{(۰,۲)}۲=a(۰+۲)^۲+۳\Rightarrow ۴a+۳=۲$$

$$۴a=-۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y=-\frac{۱}{۴}(x+۲)^۲+۳\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}(x^۲+۴x+۴)+۳\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x^۲-x+۲$$

با توجه به معادلهٔ به‌دست آمده $a=-\frac{۱}{۴}$، $b=-۱$ و $c=۲$.

۱۷۰ دقت کنید که سهمی از نقاط $(-۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ عبور کرده است. چون عرض این دو نقطه برابر است، بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول‌های این دو نقطه است. پس

$$x=\frac{-۳+(-۱)}{۲}=\frac{-۴}{۲}\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x+۲)^۲+k$ است. اکنون با توجه به اینکه سهمی از نقاط $(-۱,۰)$ و $(۰,۳)$ عبور کرده است، مقادیر a و k را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=a(x+۲)^۲+k\xrightarrow{(-۱,۰)}۰=a(-۱+۲)^۲+k\Rightarrow a+k=۰\quad(۱)\\y=a(x+۲)^۲+k\xrightarrow{(۰,۳)}۳=a(۰+۲)^۲+k\Rightarrow ۴a+k=۳\quad(۲)\end{cases}$$

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}a+k=۰\\۴a+k=۳\end{cases}\Rightarrow a=۱,k=-۱$$

درنتیجهٔ معادلهٔ سهمی به صورت $y=(x+۲)^۲-۱$ و رأس سهمی نقطهٔ $A(-۲,-۱)$ است.

پاسخ مسائل تکمیلی

۱ ابتدا توجه کنید که نقاط $(۴,-۱۲)$ و $(۲,-۱۲)$ دارای عرض‌های برابرند. بنابراین از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. در نتیجه طول رأس این سهمی برابر با میانگین طول‌های این دو نقطه است:

$$x=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

دقت کنید که چون طول رأس سهمی برابر با ۳ است، پس می‌توان معادلهٔ آن را به صورت $y=a(x-۳)^۲+h$ نوشت و مقادیر a و h را به صورت زیر حساب کرد:

$$y=a(x-۳)^۲+h\xrightarrow{(۴,-۱۲)}a(۴-۳)^۲+h=-۱۲\Rightarrow a+h=-۱۲$$

$$y=a(x-۳)^۲+h\xrightarrow{(۱,-۹)}a(۱-۳)^۲+h=-۹\Rightarrow ۴a+h=-۹$$

$$\begin{cases}a+h=-۱۲\\ ۴a+h=-۹\end{cases}\Rightarrow a=۱,h=-۱۳$$

با توجه به مقادیر a و h معادلهٔ این سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$y=۱(x-۳)^۲-۱۳\Rightarrow y=x^۲-۶x+۹-۱۳\Rightarrow y=x^۲-۶x-۴$$

بنابراین $a=۱$، $b=-۶$ و $c=-۴$.

۲ ابتدا برای مشخص کردن مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲-۸x+۷<۰$، عبارت $y=x^۲-۸x+۷$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲-۸x+۷=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x-۷=۰\Rightarrow x=۷\end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۱,۷)$ است.

x	$-\infty$		۱		۷		$+\infty$
$x^۲-۸x+۷$		+	۰	−	۰	+	

اکنون باید نامعادله‌ای به صورت $\vert x-a\vert<b$ بنویسیم که مجموعهٔ جواب‌های آن بازهٔ $(۱,۷)$ باشد. توجه کنید که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\vert x-a\vert<b$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|x-a|<b\Rightarrow -b<x-a<b\Rightarrow a-b<x<a+b$$

با توجه به اینکه $۱<x<۷$، مقادیر a و b به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}a-b=۱\\ a+b=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۳\end{cases}$$

۳ با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که عبارت $y=(m^۲-۱)x^۲+۳mx+n$ یک عبارت درجهٔ اول است. زیرا مقدار این عبارت فقط به ازای $x=۲$ برابر با صفر است و در دو طرف $x=۲$ علامت این عبارت یکسان نیست. بنابراین با توجه به اینکه چندجمله‌ای $(m^۲-۱)x^۲+۳mx+n$ باید یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد، می‌نویسیم:

$$m^۲-۱=۰\Rightarrow m^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\ m=-۱\end{cases}$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای m عبارت داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$y=(m^۲-۱)x^۲+۳mx+n\xrightarrow{m=۱}y=۳x+n\ \text{(ق.ق)}$$

$$y=(m^۲-۱)x^۲+۳mx+n\xrightarrow{m=-۱}y=-۳x+n\ \text{(غ.ق.ق)}$$

با توجه به اینکه در جدول تعیین علامت برای $x>۲$ علامت عبارت مثبت است، پس باید ضریب x مثبت باشد. بنابراین فقط $y=۳x+n$ قابل قبول است. از طرف دیگر چون مقدار y به ازای $x=۲$ برابر صفر است، می‌نویسیم:

$$y=۳x+n\xrightarrow[y=۰]{x=۲}۰=۳(۲)+n\Rightarrow n=-۶\Rightarrow y=۳x-۶$$

۴ با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که معادلهٔ $x^۲-(m+۱)x+(۲m-۱)=۰$ دارای یک جواب حقیقی (ریشهٔ مضاعف) است، بنابراین باید Δ برابر با صفر باشد.

$$\Delta=۰\Rightarrow b^۲-۴ac=۰\Rightarrow(m+۱)^۲-۴(۱)(۲m-۱)=۰$$

$$m^۲+۲m+۱-۸m+۴=۰\Rightarrow m^۲-۶m+۵=۰$$

$$(m-۱)(m-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\ m=۵\end{cases}$$

دقت کنید که $x=a$ جواب معادلهٔ $x^۲-(m+۱)x+(۲m-۱)=۰$ است. بنابراین برای پیدا کردن مقدار a کافی است مقادیر به‌دست آمده برای m را در معادله جایگذاری کنیم و جواب معادله را به‌دست آوریم.

$$x^۲-(m+۱)x+(۲m-۱)=۰\xrightarrow{m=۱}x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۰$$

$$x=۱\Rightarrow a=۱$$

$$x^۲-(m+۱)x+(۲m-۱)=۰\xrightarrow{m=۵}x^۲-۶x+۹=۰\Rightarrow(x-۳)^۲=۰$$

$$x=۳\Rightarrow a=۳$$

۵ اگر a,b,c به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه بین آن‌ها رابطهٔ $b^۲=ac$ برقرار است. بنابراین اگر $x+۱,x+۴,۵x+۲$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه

$$(x+۴)^۲=(x+۱)(۵x+۲)\Rightarrow x^۲+۸x+۱۶=۵x^۲+۲x+۵x+۲$$

$$۴x^۲-x-۱۴=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۴)(-۱۴)=۲۲۵$$

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱+\sqrt{۲۲۵}}{۸}=\frac{۱+۱۵}{۸}=۲$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱-\sqrt{۲۲۵}}{۸}=\frac{۱-۱۵}{۸}=-\frac{۷}{۴}$$

دقت کنید که به ازای $x=۲$ دنبالهٔ هندسی $x+۱,x+۴,۵x+۲$ به صورت $۳,۶,۱۲$ خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با ۲ است. همچنین به ازای $x=-\frac{۷}{۴}$ دنبالهٔ هندسی $x+۱,x+۴,۵x+۲$ به صورت $-\frac{۳}{۴},\frac{۹}{۴},-\frac{۲۷}{۴}$ خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با -۳ است.

پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

۱ الف)

$$\frac{۱}{۲}x^۲-۴x=۰\Rightarrow x(\frac{۱}{۲}x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ \frac{۱}{۲}x-۴=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}x=۴\Rightarrow x=۸\end{cases}\quad(۰/۵)$$

ب)

$$۲x^۲-۸=۰\Rightarrow ۲(x^۲-۴)=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۲)=۰$$

$$\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\end{cases}\quad(۰/۵)$$

پ)

$$x^۲-۱۱x+۱۸=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ x-۹=۰\Rightarrow x=۹\end{cases}\quad(۰/۵)$$

ت)

$$۲x^۲+۲x-۸۴=۰\Rightarrow ۲(x^۲+x-۴۲)=۰\Rightarrow(x+۷)(x-۶)=۰$$

$$\begin{cases}x+۷=۰\Rightarrow x=-۷\\ x-۶=۰\Rightarrow x=۶\end{cases}\quad(۰/۵)$$

۲ الف)

$$(x-۷)^۲=۴۹\Rightarrow\begin{cases}x-۷=۷\Rightarrow x=۱۴\\ x-۷=-۷\Rightarrow x=۰\end{cases}\quad(۰/۵)$$

ب) $(۲x-۵)^۲+۱=۰\Rightarrow(۲x-۵)^۲=-۱$ (معادله جواب ندارد) (۰/۵)

پ)

$$(۳x-۴)^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}۳x-۴=۲\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\\ ۳x-۴=-۲\Rightarrow ۳x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\end{cases}\quad(۰/۵)$$

ت)

$$(۴x-۱)^۲=۵\Rightarrow\begin{cases}۴x-۱=\sqrt{۵}\Rightarrow ۴x=۱+\sqrt{۵}\Rightarrow x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴}\\ ۴x-۱=-\sqrt{۵}\Rightarrow ۴x=۱-\sqrt{۵}\Rightarrow x=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۴}\end{cases}\quad(۰/۵)$$

۳ الف)

$$x^۲-۸x=-۱۵\Rightarrow x^۲-۸x+۱۶=-۱۵+۱۶$$

$$(x-۴)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۱\Rightarrow x=۵\\ x-۴=-۱\Rightarrow x=۳\end{cases}\quad(۰/۷۵)$$

ب)

$$۳x^۲-۹x-۱=۰\xrightarrow{\div ۳}x^۲-۳x-\frac{۱}{۳}=۰\Rightarrow x^۲-۳x=\frac{۱}{۳}$$

$$x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۳}+\frac{۹}{۴}\Rightarrow(x-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۳۱}{۱۲}\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{۳}{۲}=\frac{\sqrt{۳۱}}{\sqrt{۱۲}}\\ x-\frac{۳}{۲}=-\frac{\sqrt{۳۱}}{\sqrt{۱۲}}\end{cases}$$

$$x=\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۳۱}}{\sqrt{۱۲}},\quad x=\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۳۱}}{\sqrt{۱۲}}\quad(۰/۷۵)$$

۴ الف)

$$x^۲-۴x+\frac{۷}{۴}=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۱)(\frac{۷}{۴})=۱۶-۷=۹$$

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴+\sqrt{۹}}{۲}=\frac{۷}{۲}\quad(۰/۲۵)$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴-\sqrt{۹}}{۲}=\frac{۱}{۲}\quad(۰/۲۵)$$

ب)

$$-۲x^۲-۱۰x+۵=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۱۰)^۲-۴(-۲)(۵)$$

$$=۱۰۰+۴۰=۱۴۰$$

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۰+\sqrt{۱۴۰}}{-۴}=\frac{۱۰+۲\sqrt{۳۵}}{-۴}=\frac{-۵-\sqrt{۳۵}}{۲}\quad(۰/۲۵)$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۰-\sqrt{۱۴۰}}{-۴}=\frac{۱۰-۲\sqrt{۳۵}}{-۴}=\frac{-۵+\sqrt{۳۵}}{۲}\quad(۰/۲۵)$$

پ)

$$\frac{۱}{۵}x^۲-x+\frac{۵}{۴}=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(\frac{۱}{۵})(\frac{۵}{۴})=۱-۱=۰$$

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۱)}{۲(\frac{۱}{۵})}=\frac{۱}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۵}{۲}\quad(۰/۵)$$

ت)

$$x^۲-۲x+۷=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۷)=۴-۲۸=-۲۴<۰$$

(معادله جواب ندارد) (۰/۵)

۵

$$۳x^۲-۲a+۱=۰$$

$$\overbrace{\Delta=۰}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow b^۲-۴ac=(-۲a)^۲-۴(۳)(۱)=۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۲=۰\quad(۰/۲۵)$$

$$۴a^۲=۱۲\Rightarrow a^۲=۳\Rightarrow a=\pm\sqrt{۳}\quad(۰/۵)$$

۶

$$x^۲-۲x+m=۰$$

$$\overbrace{\Delta>۰}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(m)>۰\quad(۰/۲۵)$$

$$۴-۴m>۰\Rightarrow-۴m>-۴\Rightarrow m<۱\quad(۰/۵)$$

۷

$$mx^۲+(m-۲)x-m=۰$$

$$\overbrace{\Delta<۰}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow b^۲-۴ac=(m-۲)^۲-۴(m)(-m)<۰$$

$$m^۲-۴m+۴+۴m^۲<۰\Rightarrow ۵m^۲-۴m+۴<۰\quad(۰/۵)$$

برای حل نامعادلهٔ فوق جدول تعیین علامت عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$۵m^۲-۴m+۴=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۵)(۴)=۱۶-۸۰<۰$$

(معادله جواب ندارد)

m	$-\infty$ $+\infty$
$۵m^۲-۴m+۴$	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $۵m^۲-۴m+۴$ واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۵m^۲-۴m+۴<۰$ تهی است. بنابراین هیچ مقداری برای m وجود ندارد که به ازای آن معادلهٔ $mx^۲+(m-۲)x-m=۰$ جواب حقیقی نداشته باشد. (۰/۵)

درس دوم

جایگشت

جایگشت

فاکتوریل

اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل‌ضرب $۱\times۲\times۳\times\cdots\times n$ را با $n!$ نشان می‌دهیم (بخوانید n فاکتوریل). قرارداد می‌کنیم که $۰!=۱$.

مثال

الف) $۳!=۳\times۲\times۱$

ب) $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

پ) $۱۰!=۱۰\times۹\times۸\times\cdots\times۳\times۲\times۱$

نکته

$n!$ را می‌توانیم به‌صورت $n\times(n-۱)!$ بنویسیم.

مثال

الف) $۶!=۶\times۵!$

ب) $۵!=۵\times۴!$

مسئله ۹

هریک از عددهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۸!}{۷!}$

ب) $\frac{۶!}{۴!}$

پ) $\frac{۹!}{۷!۲!}$

ت) $\frac{۴!\times۰!}{۲!\times۱!}$

راه‌حل الف) توجه کنید که $۸!=۸\times۷!$، بنابراین

$$\frac{۸!}{۷!}=\frac{۸\times۷!}{۷!}=۸$$

ب) با توجه به اینکه $۶!=۶\times۵!=۶\times۵\times۴!$، پس

$$\frac{۶!}{۴!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۴!}=۶\times۵=۳۰$$

پ) توجه کنید که $۲!=۲\times۱$ و $۹!=۹\times۸!=۹\times۸\times۷!$، پس

$$\frac{۹!}{۷!۲!}=\frac{۹\times۸\times۷!}{۷!\times۲\times۱}=\frac{۹\times۸}{۲}=۹\times۴=۳۶$$

ت) چون $۰!=۱$ و $۱!=۱$، پس

$$\frac{۴!\times۰!}{۲!\times۱!}=\frac{۴!\times۱}{۲!\times۱}=\frac{۴!}{۲!}=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲!}=۴\times۳=۱۲$$

مسئله ۱۰

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{n!}{(n-۱)!}$

ب) $\frac{n!}{(n-۳)!}$

پ) $\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}$

راه‌حل الف) چون $n!=n(n-۱)!$، پس

$$\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!}=n$$

ب) توجه کنید که

$$\frac{n!}{(n-۳)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)$$

پ) می‌توان نوشت

$$\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}=\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)!}{(n+۱)!}=(n+۳)(n+۲)$$

مسئله ۱۱

حاصل‌ضرب‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل بنویسید.

الف) ۵×۴ **ب)** $۱۰\times۹\times۸$ **پ)** $n(n-۱)$

راه‌حل الف) برای اینکه حاصل‌ضرب ۵×۴ را به‌صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $۳\times۲\times۱$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$۵\times۴=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳\times۲\times۱}=\frac{۵!}{۳!}$$

ب) روش اول: حاصل‌ضرب $۱۰\times۹\times۸$ را در $۷\times۶\times\cdots\times۱$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$۱۰\times۹\times۸=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times\cdots\times۱}{۷\times۶\times\cdots\times۱}=\frac{۱۰!}{۷!}$$

روش دوم: می‌توان نوشت

$$۱۰\times۹\times۸=(۲\times۵)\times(۳\times۳)\times(۲\times۲\times۲)=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۶!$$

پ) باید عبارت $n(n-۱)$ را در $(n-۲)(n-۳)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$n(n-۱)=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)\times\cdots\times۳\times۲\times۱}{(n-۲)(n-۳)\times\cdots\times۳\times۲\times۱}=\frac{n!}{(n-۲)!}$$

مسئله ۱۲

در هر قسمت، مقدار n را به‌دست آورید.

الف) $\frac{(n+۲)!}{n!}=۱۲$ **ب)** $\frac{n!}{(n-۲)!۲!}=۱۰$ **پ)** $\frac{(n-۴)!}{۲۰}=۳!$

راه‌حل الف) چون $(n+۲)!=(n+۲)(n+۱)n!$، پس

$$\frac{(n+۲)!}{n!}=۱۲\Rightarrow\frac{(n+۲)(n+۱)n!}{n!}=۱۲\Rightarrow(n+۲)(n+۱)=۱۲$$

$$n^۲+۳n+۲=۱۲\Rightarrow n^۲+۳n-۱۰=۰\Rightarrow(n+۵)(n-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}n+۵=۰\Rightarrow n=-۵\\ n-۲=۰\Rightarrow n=۲\end{cases}$$

دقت کنید که n عددی طبیعی است، پس فقط $n=۲$ قابل قبول است.

ب) دقت کنید که $n!=n(n-۱)(n-۲)!$، پس

$$\frac{n!}{(n-۲)!۲!}=۱۰\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!\times۲\times۱}=۱۰\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۱۰$$

$$n(n-۱)=۲۰\Rightarrow n^۲-n=۲۰\Rightarrow n^۲-n-۲۰=۰\Rightarrow(n-۵)(n+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}n-۵=۰\Rightarrow n=۵\ (\text{ق.ق})\\ n+۴=۰\Rightarrow n=-۴\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

پ) چون $۵\times۴=۲۰$، بنابراین

$$\frac{(n-۴)!}{۲۰}=۳!\Rightarrow\frac{(n-۴)!}{۵\times۴}=۳!\Rightarrow(n-۴)!=۵\times۴\times۳!\Rightarrow(n-۴)!=۵!\Rightarrow n-۴=۵\Rightarrow n=۹$$

جایگشت‌های n شیء متمایز

به هر حالت چیدن n شیء متمایز در یک ردیف کنار هم یک جایگشت از این اشیا می‌گوییم. تعداد این جایگشت‌ها برابر با $n!$ است.

مثال

حروف A، B و C را در نظر بگیرید. به هر حالت کنار هم قرار گرفتن این حروف یک جایگشت می‌گوییم که این جایگشت‌ها عبارت‌اند از

ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA

تعداد این جایگشت‌ها برابر با $۳!=۶$ است.

مسئله ۱۳

با رقم‌های ۱، ۲، ۵ و ۷، چند عدد چهاررقمی با رقم‌های متمایز می‌توان ساخت؟

راه‌حل با توجه به اصل ضرب تعداد عددهای چهاررقمی با رقم‌های متمایز که می‌توان با رقم‌های ۱، ۲، ۵ و ۷ ساخت برابر است با

۴ × ۳ × ۲ × ۱

توجه کنید که حاصل ۱×۲×۳×۴ برابر با ۲۴=!۴ است که همان تعداد جایگشت‌های ۴ شیء متمایز است.

مسئله ۱۴

شش کتاب متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد؟

راه‌حل تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن این شش کتاب متمایز، همان تعداد جایگشت‌های آن‌ها است که برابر با ۷۲۰=!۶ است.

مسئله ۱۵

با حروف کلمهٔ hamed، چند کلمهٔ پنج‌حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به‌طوری که

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) با حرف h شروع و به حرف d ختم شود؟

پ) دو حرف h و m کنار هم باشند؟

راه‌حل الف) چون این کلمه پنج حرف متمایز دارد، پس تعداد کلمات پنج‌حرفی‌ای که می‌توان با حروف آن ساخت، برابر با ۱۲۰=!۵ است.

ب) مطابق شکل زیر، سه جایگاه در نظر می‌گیریم، حرف h را در جایگاه اول و حرف d را در جایگاه سوم قرار می‌دهیم. همچنین سه حرف باقی‌مانده را در جایگاه دوم قرار می‌دهیم. در این حالت تعداد جایگشت‌ها برابر است با

h | a, m, e | d ⇒ تعداد جایگشت‌ها = ۳! = ۶
۱ | ۳! | ۱

پ) ابتدا دو حرف h و m را در یک جایگاه کنار هم قرار داده و برای هر کدام از حروف a، e و d نیز یک جایگاه در نظر می‌گیریم. بنابراین چهار جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با !۴ است. همچنین دو حرف h و m نیز به !۲ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.

a | $\overbrace{\text{h, m}}^{2!}$ | e | d ⇒ تعداد جایگشت‌ها = ۴!×۲! = ۲۴×۲ = ۴۸
(۴! زیر کل)

مسئله ۱۶

با حروف کلمهٔ «گل میخک» چند کلمهٔ شش‌حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که

الف) به «م» ختم شود؟

ب) به «گل» ختم شود؟

پ) حروف کلمهٔ «میخ» کنار هم باشند؟

ت) با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

راه‌حل الف) اگر حرف «م» را در انتهای کلمه قرار دهیم، پنج حرف دیگر به !۵ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند، بنابراین

گ، ل، ی، خ، ک | م ⇒ تعداد جایگشت‌ها = ۵! = ۱۲۰
۵! | ۱

ب) کافی است کلمهٔ «گل» را در انتها قرار داده و تعداد جایگشت‌های چهار حرف دیگر را به‌دست آوریم:

م، ی، خ، ک | گل ⇒ تعداد جایگشت‌ها = ۴!
۴! | ۱

پ) برای سه حرف «م»، «ی» و «خ» یک جایگاه و برای هر کدام از حروف «گ» ، «ک» و «ل» یک جایگاه در نظر می‌گیریم. بنابراین چهار جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با !۴ است. همچنین سه حرف «م»، «خ» و «ی» نیز به !۳ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند. بنابراین

گ | م،ی،خ (۳!) | ک | ل ⇒ تعداد جایگشت‌ها = ۴!×۳! = ۲۴×۶ = ۱۴۴
(۴! زیر کل)

ت) کافی است یکی از دو حرف نقطه‌دار «یـ» یا «خ» را در ابتدا قرار داده و تعداد جایگشت‌های پنج حرف دیگر را به‌دست بیاوریم:

گ، ل، م، خ، ک | یـ
۵! | ۱
گ، ل، م، ی، ک | خ
۵! | ۱
⇒ تعداد جایگشت‌ها = ۵!+۵! = ۲×۵!

جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز

به هر حالت قرار گرفتن r شیء از n شیء متمایز در کنار یکدیگر در یک ردیف یک جایگشت r تایی از n شیء متمایز می‌گوییم. توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن این اشیا کنار هم اهمیت دارد.

مثال

فرض کنید می‌خواهیم با حروف کلمهٔ math یک کلمهٔ دوحرفی بدون تکرار حروف بسازیم. برای این‌کار کافی است جایگشت‌های دوتایی از چهار حرف m، a، t و h را بنویسیم. این جایگشت‌ها به‌صورت زیر هستند:

ma , mt , mh , am , at , ah , tm , ta , th , hm , ha , ht

ملاحظه می‌کنید که با هر دو حرف متمایز، دو کلمه ساخته شده است. مانند ma و am. در نتیجه در جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ترتیب کنار هم قرار گرفتن اشیا اهمیت دارد.

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز را که با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم برابر است با

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\qquad (۰\le r\le n)$$

مثال

تعداد کلمات دوحرفی با حروف متمایز که با ۴ حرف کلمهٔ math می‌توانیم بسازیم، همان تعداد جایگشت‌های ۲ تایی از ۴ شیء متمایز است که برابر است با

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow{n=۴,r=۲}P(۴,۲)=\frac{۴!}{(۴-۲)!}=\frac{۴!}{۲!}=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲!}=۴\times۳=۱۲$$

مسئله ۱۷

از بین ۶ نفر اعضای هیئت رئیسهٔ یک شرکت می‌خواهیم ۳ نفر را به‌ترتیب به عنوان رئیس هیئت مدیره، مدیر عامل و معاون انتخاب کنیم. چند حالت برای انتخاب این اعضا وجود دارد؟

راه‌حل چون ترتیب قرار گرفتن افراد در این سمت‌ها اهمیت دارد، بنابراین باید تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز را به‌دست آوریم.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow{n=۶,r=۳}P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$$

مسئله ۱۸

با حروف کلمهٔ «نشر الگو» و بدون تکرار حروف،

الف) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان ساخت که با حروف «ل» شروع شود؟

پ) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان ساخت که شامل حرف «ل» باشد؟

راه‌حل الف) توجه کنید که کلمهٔ «نشر الگو» از هفت حرف تشکیل شده است. پس کافی است تعداد جایگشت‌های ۴ تایی این ۷ حرف را به‌دست آوریم.

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۸۴۰$$

ب) حرف «ل» را در ابتدای کلمه قرار می‌دهیم. سپس باید سه حرف از شش حرف باقی‌مانده را بعد از حرف «ل» قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز است. بنابراین

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$$

پ) حرف «ل» می‌تواند حرف اول، دوم، سوم یا چهارم باشد. پس برای قرار دادن حرف «ل» در کلمهٔ مورد نظر ۴ حالت داریم. سپس باید سه حرف از شش حرف باقی‌مانده را کنار حرف «ل» قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز است. بنابراین طبق اصل ضرب می‌نویسیم:

$$۴\times P(۶,۳)=۴\times\frac{۶!}{(۶-۳)!}=۴\times\frac{۶!}{۳!}=۴\times\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۴\times۱۲۰=۴۸۰$$

درس دوم

تمرین‌های تشریحی

۲۶۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $۲!+۳!$ برابر با $۵!$ است.

ب) ۶ شیء متمایز را به ۷۲۰ حالت می‌توان کنار یکدیگر قرار داد.

پ) تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۷ شیء متمایز برابر با ۲۱۰ است.

ت) حاصل $P(۵,۴)$ دو برابر $P(۵,۳)$ است.

۲۶۴ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) حاصل $\frac{(n+۱)!}{n!}$ برابر با .... است.

ب) تعداد جایگشت‌های .... شیء متمایز برابر با ۱۲۰ است.

پ) با حروف کلمهٔ sheyda، .... کلمهٔ ۵حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت به‌طوری که حروف s و h کنار هم باشند.

ت) تعداد کلمه‌های ۳ حرفی بدون تکرار حروف که می‌توان با حروف کلمهٔ «کولرگازی» ساخت برابر با .... است.

۲۶۵ هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۵!۰!}{۳!}$

ب) $\frac{۱۰!}{۴!۷!}$

پ) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$

ت) $\frac{(n-۳)!}{n!}$

ث) $\frac{n!}{(n-m)!}(n\geq m)$

۲۶۶ حاصل‌ضرب‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل بنویسید.

الف) ۲۰×۱۹

ب) $۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰$

پ) $(n+۱)(n)$

ت) $(n-۲)(n-۳)(n-۴)$

۲۶۷ در هریک از تساوی‌های زیر، مقدار n را به‌دست آورید.

الف) $\frac{(n-۱)!}{n!}=\frac{۱}{۷}$

ب) $\frac{(n+۵)!}{(n+۳)!}=۱۱۰$

پ) $\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!۲!}=۳۶$

ت) $\frac{n!}{(n-۳)!}=۲۱۰$

۲۶۸ اگر $P(n,۲)=۳۰$، مقدار n را به‌دست آورید.

۲۶۹ اگر $P(۸,k)=۵۶$، مقدار k را به‌دست آورید.

۲۷۰ ۱۵ دانش‌آموز یک کلاس به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند؟

۲۷۱ ۷ نفر که ۳ نفر از آن‌ها برادرند،

الف) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند؟

ب) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند به‌طوری که ۳ برادر کنار هم باشند؟

پ) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند به‌طوری که ۳ برادر کنار هم و ۴ نفر دیگر نیز کنار هم باشند؟

ت) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند به‌طوری که ۳ برادر و ۴ نفر دیگر یکی در میان باشند؟

۲۷۲ در یک همایش علمی ۴ مهندس برق، ۳ مهندس مکانیک و ۲ مهندس عمران به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند، به‌طوری که

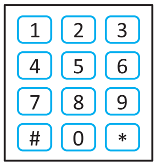
الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) ابتدا مهندسان برق، سپس مهندسان مکانیک و در انتها مهندسان عمران سخنرانی کنند؟

پ) مهندسان هم‌رشته، پشت سر هم سخنرانی کنند؟

۲۷۳ در یک مسابقهٔ شطرنج با ۱۰ شرکت‌کننده، نفرات اول، دوم و سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

۲۷۴ صفحهٔ کلید یک رمز کامپیوتری به صورت مقابل است. با این کلیدها چند رمز مختلف ۴رقمی می‌توان ساخت، به‌طوری که در ساخت این رمز از هر کلید حداکثر یک بار استفاده کنیم؟



۲۷۵ با حروف کلمهٔ «چیستان» و بدون تکرار حروف چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که

الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم؟

ب) با حرف «چ» شروع شود و به حرف «ن» ختم شود؟

۲۷۶ با حروف کلمهٔ «خوشهٔ گندم» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان ساخت که به «گندم» ختم شود؟

پ) چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۲۵۹ الف) چون محدودیتی نداریم، برای هر گزینه ۱۲ انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب با اعداد و حروف داده شده می‌توان $۱۲\times۱۲\times۱۲=۱۷۲۸$ رمز سه‌گزینه‌ای ساخت.

ب) دقت کنید که تعداد حروف فارسی ۴ تا، تعداد حروف انگلیسی ۳ تا و تعداد رقم‌ها ۵ تا است. بنابراین برای گزینهٔ اول، دوم و سوم به‌ترتیب ۴، ۳ و ۵ انتخاب داریم. پس تعداد رمزهای سه گزینه‌ای که در این حالت می‌توان ساخت برابر است با

$$\underline{\;۴\;}\times\underline{\;۳\;}\times\underline{\;۵\;}=۶۰$$

پ) دقت کنید که از حروف انگلیسی فقط در گزینهٔ اول یا فقط در گزینهٔ دوم یا فقط در گزینهٔ سوم می‌توان استفاده کرد. همچنین در هر یک از این حالت‌ها برای دو گزینهٔ دیگر ۹ انتخاب داریم. در نتیجه

حالت اول:

$$\underset{\text{A یا B یا C}}{\underline{\;۳\;}}\times\underline{\;۹\;}\times\underline{\;۹\;}=۲۴۳$$

حالت دوم:

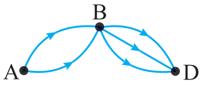
$$\underline{\;۹\;}\times\underset{\text{A یا B یا C}}{\underline{\;۳\;}}\times\underline{\;۹\;}=۲۴۳$$

حالت سوم:

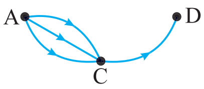
$$\underline{\;۹\;}\times\underline{\;۹\;}\times\underset{\text{A یا B یا C}}{\underline{\;۳\;}}=۲۴۳$$

دقت کنید که در این حالت با توجه به اصل جمع به $۲۴۳+۲۴۳+۲۴۳=۷۲۹$ طریق می‌توان رمز سه‌گزینه‌ای ساخت.

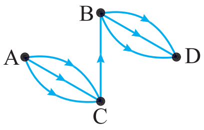
۲۶۰ برای رفتن از شهر A به شهر D سه حالت وجود دارد.



حالت اول: از شهر A به شهر B و سپس از شهر B به شهر D برویم. با توجه به تعداد جاده‌ها انجام این کار به $۲\times۳=۶$ طریق امکان‌پذیر است.



حالت دوم: از شهر A به شهر C و سپس از شهر C به شهر D برویم. با توجه به تعداد جاده‌ها انجام این‌کار به $۳\times۱=۳$ طریق امکان‌پذیر است.



حالت سوم: از شهر A به شهر C و سپس از شهر C به شهر B و در انتها از شهر B به شهر D برویم. با توجه به تعداد جاده‌ها انجام این‌کار به $۳\times۱\times۳=۹$ طریق امکان‌پذیر است.

در نتیجه طبق اصل جمع به $۶+۳+۹=۱۸$ طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت.

۲۶۱ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: همهٔ رقم‌ها زوج باشند. دقت کنید که از ۵ رقم داده شده فقط دو رقم ۶ و ۸ زوج هستند. بنابراین برای هر کدام از جایگاه‌های یکان، دهگان و صدگان ۲ انتخاب داریم. پس

$$\underset{\text{۶ یا ۸}}{\underline{\;۲\;}}\times\underset{\text{۶ یا ۸}}{\underline{\;۲\;}}\times\underset{\text{۶ یا ۸}}{\underline{\;۲\;}}=۸$$

حالت دوم: همهٔ رقم‌ها فرد باشند. دقت کنید که از ۵ رقم داده شده فقط سه رقم ۱، ۳ و ۵ فرد هستند. بنابراین برای هر کدام از جایگاه‌های یکان، دهگان و صدگان ۳ انتخاب داریم. پس

$$\underset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\underline{\;۳\;}}\times\underset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\underline{\;۳\;}}\times\underset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\underline{\;۳\;}}=۲۷$$

در نتیجه طبق اصل جمع تعداد عددهای سه‌رقمی که می‌توان ساخت به‌طوری‌که همهٔ رقم‌های آن زوج یا همهٔ رقم‌های آن فرد باشد برابر با $۸+۲۷=۳۵$ است.

۲۶۲ دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: همهٔ رقم‌ها زوج باشند. برای ساختن عدد سه‌رقمی که تمام رقم‌های آن زوج باشند، باید از رقم‌های ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم. دقت کنید که رقم صفر نمی‌تواند در جایگاه صدگان قرار گیرد. همچنین تکرار رقم‌ها مجاز نیست. بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی که در این حالت می‌توان ساخت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\underset{\text{۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸}}{\underline{\;۴\;}}\times\underline{\;۴\;}\times\underline{\;۳\;}=۴۸$$

حالت دوم: همهٔ رقم‌ها فرد باشند. برای ساختن عدد سه‌رقمی که تمام رقم‌های آن فرد باشند باید از رقم‌های ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده کنیم. دقت کنید که تکرار رقم‌ها مجاز نیست. بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی که در این حالت می‌توان ساخت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\underset{\text{۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}}{\underline{\;۵\;}}\times\underline{\;۴\;}\times\underline{\;۳\;}=۶۰$$

بنابراین طبق اصل جمع تعداد عددهای سه‌رقمی با رقم‌های غیرتکراری که همهٔ رقم‌های آن زوج یا همهٔ رقم‌های آن فرد باشد برابر با $۴۸+۶۰=۱۰۸$ است.

۲۶۳ الف) نادرست است. دقت کنید که $۲!+۳!=۲\times۱+۳\times۲\times۱=۴+۶=۱۰$.

از طرف دیگر $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$. بنابراین واضح است که $۲!+۳!\neq۵!$.

ب) درست است. ۶ شیء متمایز را به $۶!=۷۲۰$ حالت می‌توان کنار یکدیگر قرار داد.

پ) درست است. تعداد جایگشت‌های ۳تایی از ۷ شیء متمایز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۲۱۰$$

ت) درست است. توجه کنید که

$$P(۵,۴)=\frac{۵!}{(۵-۴)!}=\frac{۵!}{۱!}=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$$

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱}=۶۰$$

۲۶۴ الف) عبارت $\frac{(n+۱)!}{n!}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n+۱)!}{n!}=\frac{(n+۱)\times n!}{n!}=n+۱$$

بنابراین حاصل $\frac{(n+۱)!}{n!}$ برابر با $n+۱$ است.

ب) تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز برابر با $۵!=۱۲۰$ است.

پ) ابتدا دو حرف s و h را در یک جایگاه کنار هم قرار داده و برای هر کدام از حروف e، y، d و a نیز یک جایگاه در نظر می‌گیریم. بنابراین ۵ جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $۵!$ است. همچنین دو حرف h و s نیز به $۲!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار گیرند.

$$\underbrace{\underline{\;e\;}\ \overbrace{\underline{\;sh\;}}^{۲!}\ \underline{\;y\;}\ \underline{\;d\;}\ \underline{\;a\;}}_{۵!}$$

تعداد جایگشت‌ها $=۵!\times۲!=۱۲۰\times۲=۲۴۰$

بنابراین با حروف کلمهٔ sheyda، ۲۴۰ کلمهٔ ۵ حرفی با حروف متمایز ساخت به‌طوری که حروف s و h کنار هم باشند.

ت) کلمهٔ «کولرگازی» ۸ حرف متمایز دارد. بنابراین تعداد کلمه‌های سه‌حرفی که می‌توان با این ۸ حرف ساخت برابر است با تعداد جایگشت‌های ۳تایی از ۸ شیء متمایز که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(۸,۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۵!}=۸\times۷\times۶=۳۳۶$$

بنابراین تعداد کلمه‌های ۳ حرفی بدون تکرار حروف که می‌توان با حروف کلمهٔ «کولرگازی» ساخت برابر با ۳۳۶ است.

۲۶۵ الف) دقت کنید که $۰!=۱$. بنابراین

$$\frac{۵!۰!}{۳!}=\frac{۵×۴×۳×۲×۱}{۳×۲×۱}=۲۰$$

ب) توجه کنید که

$$\frac{۱۰!}{۴!۷!}=\frac{۱۰×۹×۸×۷!}{۴×۳×۲×۱×۷!}=۳۰$$

پ) دقت کنید که

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!}=(n+۱)(n)=n^۲+n$$

ت) توجه کنید که

$$\frac{(n-۳)!}{n!}=\frac{(n-۳)!}{(n)(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}=\frac{۱}{(n)(n-۱)(n-۲)}$$

$$=\frac{۱}{n^۳-۳n^۲+۲n}$$

ث) دقت کنید که

$$\frac{n!}{(n-m)!}=\frac{(n)(n-۱)(n-۲)\cdots(n-m+۱)!(n-m)!}{(n-m)!}$$

$$=(n)(n-۱)(n-۲)\cdots(n-m+۱)!$$

۲۶۶ الف) برای اینکه حاصل‌ضرب $۲۰×۱۹$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $۱۸×۱۷×\cdots×۲×۱$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$۲۰×۱۹=\frac{۲۰×۱۹×۱۸×۱۷×\cdots×۲×۱}{۱۸×۱۷×\cdots×۲×۱}=\frac{۲۰!}{۱۸!}$$

ب) برای اینکه حاصل‌ضرب $۱۳×۱۲×۱۱×۱۰$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $۹×۸×\cdots×۲×۱$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$۱۳×۱۲×۱۱×۱۰=\frac{۱۳×۱۲×۱۱×۱۰×۹×۸×\cdots×۲×۱}{۹×۸×\cdots×۲×۱}=\frac{۱۳!}{۹!}$$

پ) برای اینکه حاصل‌ضرب $(n+۱)(n)$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $(n-۱)(n-۲)×\cdots×۲×۱$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$(n+۱)(n)=\frac{(n+۱)n(n-۱)(n-۲)×\cdots×۲×۱}{(n-۱)(n-۲)×\cdots×۲×۱}=\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$$

ت) برای اینکه حاصل‌ضرب $(n-۲)(n-۳)(n-۴)$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $(n-۵)(n-۶)×\cdots×۲×۱$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$(n-۲)(n-۳)(n-۴)=\frac{(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)(n-۶)×\cdots×۲×۱}{(n-۵)(n-۶)×\cdots×۲×۱}$$

$$=\frac{(n-۲)!}{(n-۵)!}$$

۲۶۷ الف) دقت کنید که $n!=n(n-۱)!$. بنابراین

$$\frac{(n-۱)!}{n!}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow\frac{(n-۱)!}{n(n-۱)!}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow n=۷$$

ب) توجه کنید که $(n+۵)!=(n+۵)(n+۴)(n+۳)!$، پس

$$\frac{(n+۵)!}{(n+۳)!}=۱۱۰\Rightarrow\frac{(n+۵)(n+۴)(n+۳)!}{(n+۳)!}=۱۱۰$$

$$(n+۵)(n+۴)=۱۱۰\Rightarrow n^۲+۹n+۲۰=۱۱۰\Rightarrow n^۲+۹n-۹۰=۰$$

$$(n+۱۵)(n-۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۱۵\\ n=۶\end{cases}$$

دقت کنید که n عددی طبیعی است. پس فقط $n=۶$ قابل‌قبول است.

پ) دقت کنید که $(n-۲)!=(n-۲)(n-۳)(n-۴)!$، بنابراین

$$\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!۲!}=۳۶\Rightarrow\frac{(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!×۲×۱}=۳۶$$

$$(n-۲)(n-۳)=۷۲\Rightarrow n^۲-۵n+۶=۷۲\Rightarrow n^۲-۵n-۶۶=۰$$

$$(n-۱۱)(n+۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۱۱\\ n=-۶\ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

با توجه به اینکه n عددی طبیعی است، بنابراین فقط $n=۱۱$ قابل‌قبول است.

ت) توجه کنید که $n!=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!$، پس

$$\frac{n!}{(n-۳)!}=۲۱۰\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۲)!}=۲۱۰$$

$$n(n-۱)(n-۲)=۲۱۰$$

دقت کنید که n، $n-۱$ و $n-۲$ سه عدد طبیعی متوالی هستند. در نتیجه برای پیدا کردن n عدد ۲۱۰ را نیز به صورت حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی می‌نویسیم. پس

$$n(n-۱)(n-۲)=۲۱۰\Rightarrow ۷×۶×۵=۲۱۰\Rightarrow n=۷$$

۲۶۸ دقت کنید که $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$. بنابراین

$$P(n,۲)=۳۰\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!}=۳۰\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=۳۰\Rightarrow n^۲-n=۳۰$$

$$n^۲-n-۳۰=۰\Rightarrow(n+۵)(n-۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۵\ \text{(غ.ق.ق.)}\\ n=۶\ \text{(ق.ق.)}\end{cases}$$

۲۶۹ توجه کنید که $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$. بنابراین

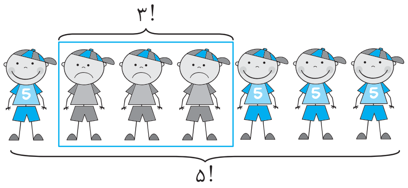
$$P(۸,k)=۵۶\Rightarrow\frac{۸!}{(۸-k)!}=۵۶\Rightarrow ۵۶(۸-k)!=۸!$$

$$۸×۷×(۸-k)!=۸×۷×۶!\Rightarrow(۸-k)!=۶!\Rightarrow ۸-k=۶\Rightarrow k=۲$$

۲۷۰ تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۱۵ دانش‌آموز در یک صف همان تعداد جایگشت‌های آن‌ها است که برابر با $۱۵!$ است.

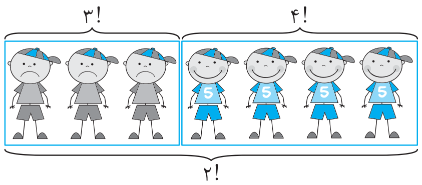
۲۷۱ الف) تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن این ۷ نفر، همان تعداد جایگشت‌های آن‌ها است که برابر با $۷!=۵۰۴۰$ است.

ب) ابتدا ۳ برادر را در یک جایگاه کنار هم قرار داده و برای هر کدام از ۴ نفر دیگر نیز ۴ جایگاه در نظر می‌گیریم. بنابراین ۵ جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $۵!$ است. همچنین ۳ برادر نیز $۳!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



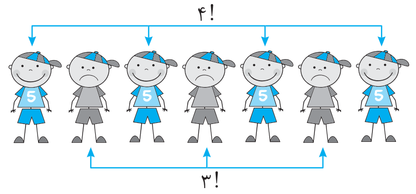
$۵!×۳!=۱۲۰×۶=۷۲۰$ = تعداد جایگشت‌ها

پ) ۳ برادر را در یک جایگاه کنار هم و ۴ نفر دیگر را نیز در یک جایگاه کنار هم قرار می‌دهیم. بنابراین ۲ جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $۲!$ است. همچنین ۳ برادر به $۳!$ حالت و ۴ نفر دیگر به $۴!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



$۲!×۳!×۴!=۲۸۸$ = تعداد جایگشت‌ها

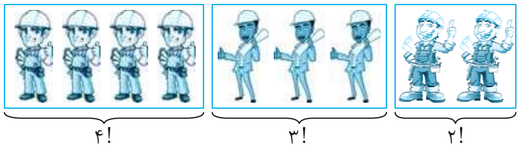
ت) توجه کنید که برای یکی در میان ایستادن ۳ برادر و ۴ نفر دیگر لازم است که ۳ برادر در ابتدا و انتهای ردیف نباشند.



تعداد جایگشت‌ها $=۳!\times۴!=۱۴۴$

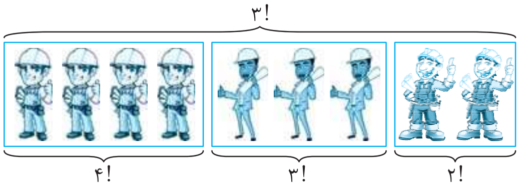
۲۷۲ الف) تعداد مهندسان برابر با ۹ نفر است. بنابراین آن‌ها می‌توانند به ۹! حالت در این همایش سخنرانی کنند.

ب) برای مهندسان هر رشته یک جایگاه در نظر می‌گیریم و این ۳ جایگاه را به‌ترتیب سخنرانی آن‌ها از چپ به راست قرار می‌دهیم. واضح است که مهندسان برق به ۴! حالت، مهندسان مکانیک به ۳! حالت و مهندسان عمران به ۲! حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



تعداد جایگشت‌ها $=۲!\times۳!\times۴!=۲۸۸$

پ) برای مهندسان هر رشته یک جایگاه در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این ۳ جایگاه می‌توانند به ۳! حالت کنار هم قرار گیرند. همچنین مهندسان برق به ۴! حالت، مهندسان مکانیک به ۳! حالت و مهندسان عمران به ۲! حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



تعداد جایگشت‌ها $=۳!\times۴!\times۳!\times۲!=۱۷۲۸$

۲۷۳ چون ترتیب قرار گرفتن نفرات در رتبه‌های اول، دوم و سوم اهمیت دارد، بنابراین باید تعداد جایگشت‌های ۳تایی از ۱۰ شیء متمایز را به‌دست آوریم:

$$P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۱۰\times۹\times۸=۷۲۰$$

۲۷۴ چون ترتیب انتخاب کلیدها اهمیت دارد و از هر کلید حداکثر یک بار می‌توانیم استفاده کنیم، بنابراین باید تعداد جایگشت‌های ۴تایی از ۱۲ شیء متمایز را به‌دست آوریم:

$$P(۱۲,۴)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۴)!}=\frac{۱۲!}{۸!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹=۱۱۸۸۰$$

۲۷۵ الف) چون کلمهٔ «چیستان» شش حرف متمایز دارد، بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از ۶ شیء متمایز است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$$

ب) حرف «چ» را در ابتدای کلمه و حرف «ن» را در انتهای آن قرار می‌دهیم. سپس باید دو حرف از چهار حرف باقی‌مانده را بین «چ» و «ن» قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این‌کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۲تایی از ۴ شیء متمایز است. بنابراین

$$P(۴,۲)=\frac{۴!}{(۴-۲)!}=\frac{۴!}{۲!}=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲!}=۴\times۳=۱۲$$

۲۷۶ الف) چون کلمهٔ «خوشهٔ گندم» هشت حرف متمایز دارد، بنابراین تعداد کلمات پنج‌حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد جایگشت‌های ۵ تایی از ۸ شیء متمایز است. بنابراین می‌نویسیم:

$$P(۸,۵)=\frac{۸!}{(۸-۵)!}=\frac{۸!}{۳!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۸\times۷\times۶\times۵\times۴=۶۷۲۰$$

ب) کافی است کلمهٔ «گندم» را در انتها قرار داده و سپس از چهار حرف باقی‌مانده سه حرف را قبل از آن قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این‌کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۳تایی از ۴شیء متمایز است. بنابراین

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{(۴-۳)!}=\frac{۴!}{۱!}=۲۴$$

پ) حرف اول می‌تواند یکی از حروف «خ» یا «ش» یا «ن» باشد، بنابراین برای قرار دادن حرف نقطه‌دار در ابتدای این کلمه ۳ حالت داریم. دقت کنید که بعد از قرار دادن حرف اول باید پنج حرف از هفت حرف باقی‌مانده را بعد از حرف نقطه‌دار قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۵ تایی از ۷ شیء متمایز است. بنابراین طبق اصل ضرب می‌نویسیم:

$$۳\times P(۷,۵)=۳\times\frac{۷!}{(۷-۵)!}=۳\times\frac{۷!}{۲!}=۳\times\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۷۵۶۰$$

۲۷۷ الف) نادرست است. تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء متمایز که در آن‌ها ترتیب انتخاب مهم نیست، برابر با $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ است.

ب) درست است. توجه کنید که

$$P(۸,۳)-C(۸,۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}-\frac{۸!}{۳!(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۵!}-\frac{۸!}{۳!۵!}$$

$$=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}-\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳\times۲\times۱\times۵!}=۳۳۶-۵۶=۲۸۰$$

پ) نادرست است. دقت کنید که چون ترتیب انتخاب افراد اهمیت ندارد، بنابراین باید تعداد ترکیب‌های ۲تایی از ۱۰ شیء متمایز را به‌دست آوریم:

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۲!۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲\times۱\times۸!}=۴۵$$

ت) درست است. با توجه به رابطهٔ $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$، رابطهٔ داده شده برقرار است.

۲۷۸ الف) چون در ساختن یک مجموعه ترتیب انتخاب اعضا اهمیت ندارد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ ۶ عضوی برابر است با تعداد ترکیب‌های ۳تایی از ۶ شیء متمایز. پس می‌نویسیم:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳\times۲\times۱\times۳!}=۲۰$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ ۶ عضوی برابر با ۲۰ است.