مقدمه ناشر

یکی از قسمت‌های جذاب ریاضیات، الگوریتم‌ها هستند که به وسیلهٔ اون‌ها شبیه‌سازی انجام می‌شه و با اون شبیه‌سازی می‌شه آینده رو پیش‌بینی کرد.

مشابه این قضیه در علم ستاره‌شناسی هم هست! قدیمیا که هواشناسی نداشتن، آسمون رو که می‌دیدن از طریق جهت باد و وضعیت ستاره‌ها و از این‌جور چیزا پیش‌بینی می‌کردن که کی قراره بارون بیاد و بعد کشاورزی‌شون رو بر همون اساس انجام می‌دادن! این همون قضیهٔ الگوریتمه؛ یعنی براساس یک سری اطلاعاتی که از گذشته داریم میایم آینده رو پیش‌بینی می‌کنیم.

داخل پرانتز بگم که الان کلی الگوریتم‌های عجیب غریب وجود داره و خیلی‌ها دارن بی‌نهایت از این ماجرا پول درمیارن که حتماً می‌گین چه‌طوری؟ مثلاً توی بورس‌های مشهور دنیا میان الگوریتم قیمت‌های گذشتهٔ سهام فلان شرکت رو می‌بینن بعد تعیین می‌کنن که روی چه قیمتی سهام اون شرکت رو بخرن، بعدش قیمت سهام می‌ره بالا و پولدار می‌شن!!!

خلاصه که ریاضیات خوندن علاوه بر همهٔ دشواری‌هاش یه قسمتای جذابی هم داره.

از استاد هاشمی طاهری عزیز و استاد فرشیان گرامی و همهٔ ویراستاران و همکاران خوب واحد تألیف و تولید بابت تولید این کتاب خوب تشکر می‌کنیم.

الگوریتم زندگی‌تون پر از پیش‌بینی‌های پرسود.

مقدمه مـؤلف

وقتی بهمون پیشـــنهاد شـــد تـــا کتابای جیبی ریاضی هر ســـه ســـال تجربیو بنویســـیم، یاد دانش‌آموزایی افتادیم که همش می‌گن:

«آقا درس ریاضی سخته و زیاد، تازه‌شم ما کارای مهم‌تریم داریما یه چیزایی بگین تا نمره‌شو بیاریمو درکشم بکنیم»

پیش خودمون گفتیم دم خیلی‌سبزیا گرم! زدن تو خال.

حالا دُرسته که اینا جوجه کتابن، اما ضرب‌المثلی می‌گه «فلفل نبین چه ...»

شمام بشکنیدش تا نتیجشو ببینین! واسه این ادعامونم سه دلیل عمده داریم:

اولنش: درس‌نامه‌ش کافیه و کامل؛ یعنی هر چه از کتاب درسی بخواین تو اینم هستش، پس یه جزوهٔ درسی کامله.

دومنش: بعد از هر مطلب درسی، مثال یا مثالایی آوردیم که حسابی اون درس حالیمون بشه، تازه سؤالاتشم از ساده می‌ره تا یه کمی سخت.

سومنش: آخرای هر فصل، آزمونایی ده‌سؤاله اومده که می‌تونین خودتونو با اونا بسنجین، پس واسه شرکت تو آزمونام مناسبه.

دیگه چی می‌خواین؟

فهرست

فصل (۱)

مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ اعداد

برخی از مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آن‌ها آشنا شدیم به صورت زیر هستند:

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

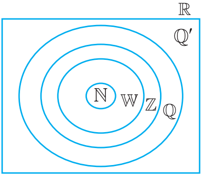
مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح:
- مجموعه اعداد صحیح زوج $=\{\dots,-۲,۰,۲,۴,\dots\}$
- مجموعه اعداد صحیح فرد $=\{\dots,-۱,۱,۳,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=$ مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

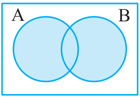
مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$



توجه داشته باشید که رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت‌های $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$ هستند.

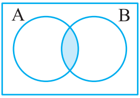
یادآوری اعمال روی مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A یا در B یا در هر دو وجود داشته باشند و با نماد $A \bigcup B$ نمایش می‌دهند.

اشتراک دو مجموعه

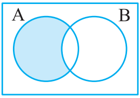


اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم در A و هم در B وجود داشته باشند و با نماد $A \bigcap B$ نمایش می‌دهند.

تفاضل مجموعهٔ B از A

مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A وجود داشته باشند ولی در B وجود نداشته باشند و با نماد $A - B$ نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال، اگر $A = \{۱,۲,۵\}$ و $B = \{۲,۴,۶\}$، آن‌گاه برای پیداکردن عضوهای $A - B$ عضوهای مشترک A و B $(A \bigcap B = \{۲\})$ را پیدا کرده و از مجموعهٔ اول؛ یعنی از A حذف می‌کنیم؛ آن‌چه باقی می‌ماند، عضوهای $A - B$ است؛ پس $A - B = \{۱,۵\}$.



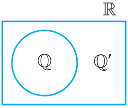
تفاضل مجموعهٔ A از B را به صورت $B - A$ نمایش می‌دهند.

مثال

کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰\}$
۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$
۳) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -۲, -۱\}$
۴) $\mathbb{Z} \bigcap \mathbb{N} = \mathbb{Z}$

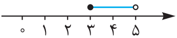
پاسخ **گزینهٔ ۴** می‌دانیم $\mathbb{N}=\{۱,۲,...\}$ و $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,...\}$ برای پیداکردن مجموعهٔ $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ باید عضوهای مشترک $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ را پیدا کرده $(\mathbb{W}\bigcap\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\})$ و از مجموعهٔ اول؛ یعنی از $\mathbb{W}$ حذف کنیم، بنابراین آن‌چه باقی می‌ماند $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$ است. به همین ترتیب در $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$ و $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,...\}$ عضوهای مشترک $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ را پیدا کرده $(\mathbb{Z}\bigcap\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,...\})$ و از مجموعهٔ اول؛ یعنی از $\mathbb{Z}$ حذف می‌کنیم، آن‌چه باقی می‌ماند $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{...,-۲,-۱\}$. در گزینهٔ (۲) برای درک بهتر، از شکل استفاده می‌کنیم؛ می‌دانیم $\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ است. عضوهای مشترک $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ را پیدا می‌کنیم $(\mathbb{R}\bigcap\mathbb{Q}=\mathbb{Q})$، سپس آن را از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم. بنابراین داریم $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$. در گزینهٔ (۴) می‌دانیم $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$ و $\mathbb{N}=\{۱,۲,...\}$، پس عضوهای مشترک آن‌ها به صورت $\mathbb{Z}\bigcap\mathbb{N}=\{۱,۲,...\}=\mathbb{N}$ است.



بازه‌ها

زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم.

به عنوان نمونه؛ مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳\le x<۵\}$ را به صورت $[۳,۵)$ نمایش می‌دهیم و به آن بازهٔ نیم‌باز می‌گوییم. این بازه، شامل تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۵ است که در آن عدد ۵ وجود ندارد و نمایش آن روی محور اعداد به صورت شکل مقابل می‌باشد.



انواع بازه

اگـر a و b دو عـدد حقیقی دلخواه باشـند بـه طوری‌که $a<b$، آن‌گاه خواهیم داشت:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\le x\le b\}$	$[a,b]$	بسته
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, a< x< b\}$	(a,b)	باز
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\le x< b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, a< x\le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\ge a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\le b\}$	$(-\infty,b]$	نیم‌باز
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, x> a\}$	$(a,+\infty)$	باز
	$\{x \mid x\in\mathbb{R}, x< b\}$	$(-\infty,b)$	باز

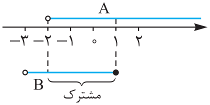
تمرین **حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.**

الف) $(-۲,+\infty)\cap(-۳,۱]$ **ب)** $(۱,۴]-[۲,+\infty)$

پ) $(-\infty,۱]-(۰,۴)$ **ت)** $[-۲,۱)\cup(۰,۲)$

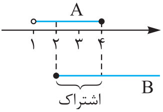
پاسخ الف) ابتدا اعداد داخل بازه‌ها را روی محور اعداد نمایش می‌دهیم. $(-۲,+\infty)$ را بازهٔ A و $(-۳,۱]$ را بازهٔ B می‌نامیم، سپس بخش‌های

مشترک روی بازه‌ها را تعیین می‌کنیم. عدد (-۲) در بازهٔ A وجود ندارد اما در بازهٔ B وجود دارد؛ پس عدد ۲− در اشتراک این دو بازه نیست؛ در نتیجه بازه از طرف عدد (-۲) بازهٔ باز است. اما عدد ۱ در هر دو بازه وجود دارد و در اشتراک این دو بازه وجود دارد، پس از سمت راست، بسته می‌شود

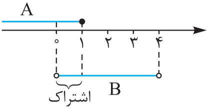


بنابراین: $A \cap B = (-۲,۱]$

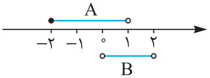
ب) بازهٔ نیم‌باز $A = (۱,۴]$ و بازهٔ نیم‌باز $B = [۲,+\infty)$ را داریم. اشتراک A و B را پیدا می‌کنیم $(A \cap B = [۲,۴])$ و آن را از مجموعهٔ اول؛ یعنی از A حذف می‌کنیم. فاصلهٔ باقی‌مانده بین عدد ۱ و ۲ خواهد بود. چون عدد ۲ هم در A و هم در B وجود دارد، پس نباید در $A - B$ باشد، در نتیجه بازه در عدد (۲) باز است؛ بنابراین: $A - B = (۱,۲)$



پ) بازهٔ $A = (-\infty,۱]$ و $B = (۰,۴)$ را در نظر می‌گیریم. اشتراک A و B را پیدا می‌کنیم $(A \cap B = (۰,۱])$ و آن را از مجموعهٔ اول؛ یعنی A حذف می‌کنیم. فاصلهٔ باقی‌مانده بین $-\infty$ تا صفر است. چون صفر در مجموعهٔ A (اولی) وجود دارد و در دومی (B) وجود ندارد، پس در $A - B$ صفر باید باشد، بنابراین: $A - B = (-\infty,۰]$



ت) اگر $A = [-۲,۱)$ و $B = (۰,۲)$ را در نظر بگیریم، برای یافتن $A \cup B$ از ابتدای مجموعهٔ A؛ یعنی عدد (-۲) شروع می‌شود (یعنی عدد کوچک‌تر) تا عدد بزرگ‌تر؛ یعنی ۲،



بنابراین: $A \cup B = [-۲,۲)$

مجموعهٔ متناهی و مجموعهٔ نامتناهی

مجموعه‌هایی را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم. مانند مجموعهٔ برگ‌های درختان تهران، زیرا تعداد آن‌ها یک عدد حسابی است، پس متناهی است. چون تعداد عضوهای مجموعهٔ تهی برابر صفر است، پس مجموعهٔ تهی نیز مجموعه‌ای متناهی است.

◁ مجموعهٔ نامتناهی

مجموعه‌هایی که نتوان تعداد اعضای آن‌ها را با یک عدد حسابی بیان نمود، مجموعهٔ نامتناهی می‌نامیم. مانند مجموعهٔ $B=(۲,۳)$؛ به طور کلی تمام بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی هستند.

مثال

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

۱) اعداد گویا بین ۰ و ۱
۲) مقسوم‌علیه‌های زوج عدد ۱۵
۳) مضرب مشترک اعداد ۳ و ۵
۴) $[۱,۳]$

پاسخ **گزینهٔ ۲** گزینهٔ (۱) نامتناهی است، زیرا بین دو عدد متمایز، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. در گزینهٔ (۲) مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۵ عبارت‌اند از $\{\pm۱,\pm۳,\pm۵,\pm۱۵\}$. همان‌طور که مشاهده می‌شود عدد ۱۵ مقسوم‌علیه زوج ندارد، پس تهی است و مجموعهٔ تهی یک مجموعهٔ متناهی است. در گزینهٔ (۳) مضرب‌های مشترک اعداد ۳ و ۵ عبارت‌اند از $\{۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,...\}$ که نامتناهی است. در گزینهٔ (۴) هم می‌دانیم تمام بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی هستند.

جدول اعمال روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

A	B	$A\cup B$	$A\cap B$	$A-B$
متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
نامتناهی	نامتناهی	نامتناهی	معلوم نیست.	معلوم نیست.
نامتناهی	متناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی

مثال

اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعهٔ متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $B-A$ ۳) $A-B$ ۴) $\varnothing-A$

پاسخ گزینهٔ ۳ در گزینهٔ (۱) که اشتراک یک مجموعهٔ متناهی و یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد و الزاماً متناهی است؛ به عنوان مثال:

$$\begin{aligned}A&=\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}\\B&=\{-۱,۳,۵\}\end{aligned}\Rightarrow A\cap B=\{۳,۵\}$$ متناهی

گزینهٔ (۲): تفاضل مجموعهٔ نامتناهی (A) از مجموعهٔ متناهی (B)، الزاماً متناهی است؛ مانند:

$$\begin{aligned}A&=\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}\\B&=\{-۱,۳,۵\}\end{aligned}\Rightarrow B-A=\{-۱\}$$ متناهی

گزینهٔ (۳): تفاضل مجموعهٔ متناهی (B) از مجموعهٔ نامتناهی (A)، الزاماً مجموعهٔ نامتناهی است؛ مانند:

$$\begin{aligned}A&=\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}\\B&=\{-۱,۳,۵\}\end{aligned}\Rightarrow A-B=\{۱,۲,۴,۶,\dots\}$$ نامتناهی

گزینهٔ (۴): $\varnothing-A=\varnothing$ و می‌دانیم تهی، مجموعه‌ای متناهی است.

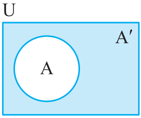
درس ۲

متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ متمم



هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد $(A \subseteq U)$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم؛ به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

روابط بین مجموعه‌ها

۱ $A \cup A' = U$

۲ $A \cap A' = \varnothing$

۳ $A - B = A \cap B'$

۴ $A - (A \cap B) = A - B$

۵ $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$ قوانین دمورگان

۶ $(A')' = A$

۷ $\varnothing' = U$

۸ $U' = \varnothing$

تمرین **اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ در این صورت اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید:**

الف) $(A \cap B)'$

ب) $A' \cup B'$

پاسخ الف) $A \cap B = \{۲,۳\}$، متمم $A \cap B$ شامل عضوهایی است که در مجموعهٔ مرجع (U) باشد ولی در $A \cap B$ نباشد. یا به عبارتی

عضوهای $A\cap B$ را از مجموعهٔ U حذف می‌کنیم، آن‌چه در U باقی می‌ماند متمم $A\cap B$ است، بنابراین: $(A\cap B)'=\{۱,۴,۵\}$

ب) برای پیداکردن متمم مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$، عضوهای A را از مجموعهٔ مرجع U حذف می‌کنیم. آن‌چه در U باقی می‌ماند، متمم A است. بنابراین: $B'=\{۱\}$ و $A'=\{۴,۵\}$

در این صورت: $A'\cup B'=\{۱,۴,۵\}$

مثال

اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، آن‌گاه حاصل $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})'\cap\mathbb{N}'$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{N}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** ابتدا $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ را به دست می‌آوریم:

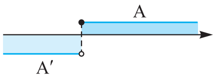
$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,\dots\}$ و $\mathbb{Z}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$

بنابراین $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-۲,-۱\}$. چون $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ مرجع است اعضای $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ را از $\mathbb{Z}$ برمی‌داریم، آن‌چه باقی می‌ماند متمم $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ است؛ یعنی $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})'=\{۰,۱,۲,\dots\}=\mathbb{W}$. متمم مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است با: $\mathbb{N}'=\{\dots,-۲,-۱,۰\}$

بنابراین: $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})'\cap\mathbb{N}'=\mathbb{W}\cap\mathbb{N}'=\{۰\}$

تمرین **اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ و $A=[۱,+\infty)$ باشد، در این صورت A' را بیابید.**

پاسخ با توجه به شکل، داریم:



$A'=\mathbb{R}-A=(-\infty,۱)$

مثال

اگر U مجموعهٔ مرجع و $A'\cup B=A'\cap B'$ باشد، کدام مورد درست است؟

(سراسری ریاضی)

۱) $A=B$ ۲) $A=\varnothing$

۳) $B=U$ ۴) $B=\varnothing$

پاسخ گزینهٔ ۴ **روش اول**

$$A'\cup B=A'\cap B'$$

$$\xrightarrow[\text{اشتراک می‌گیریم}]{\text{از دو طرف با } B} (A'\cup B)\cap B=(A'\cap B')\cap B$$

$$\Rightarrow\ B=A'\cap(B'\cap B)\ \Rightarrow\ B=A'\cap\varnothing\ \Rightarrow\ B=\varnothing$$

روش دوم می‌توان گزینه‌ها را بررسی نمود:

اگر $A=B$ باشد، آن‌گاه $A'=B'$، پس:

$A'\cup B=A'\cap B'\Rightarrow B'\cup B=B'\cap B'\Rightarrow U=B'$ نادرست

اگر $A=\varnothing$، آن‌گاه $A'=U$، پس:

$A'\cup B=A'\cap B'\ \Rightarrow\ U\cup B=U\cap B'\ \Rightarrow\ U=B'$ نادرست

اگر $B=U$، آن‌گاه $B'=\varnothing$، پس:

$A'\cup B=A'\cap B'\Rightarrow A'\cup U=A'\cap\varnothing\Rightarrow U=\varnothing$ نادرست

اگر $B=\varnothing$، آن‌گاه $B'=U$، پس:

$A'\cup B=A'\cap B'\Rightarrow A'\cup\varnothing=A'\cap U\Rightarrow A'=A'$ درست

مثال

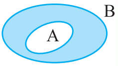
اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A\subset B$ باشند، آن‌گاه کدام رابطه نادرست است؟

(سراسری ریاضی)

۱) $B-A'=A$ ۲) $A-B'=A$

۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $B\cap A'=\varnothing$

پاسخ **گزینهٔ ۴** هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. فقط باید توجه داشته باشیم که از شرط $A \subset B$ نتیجه می‌شود $A \cap B = A$ و $A - B = \varnothing$:



گزینهٔ (۱): $B - A' = B \cap (A')' = B \cap A = A$ ✓

گزینهٔ (۲): $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = A$ ✓

گزینهٔ (۳): $A \cap B' = A - (B')' = A - B = \varnothing$ ✓

گزینهٔ (۴): $B \cap A' = B - (A')' = B - A \neq \varnothing$ ×

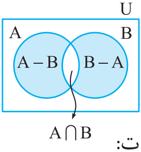
دو مجموعهٔ جدا از هم

به هر دو مجموعه مانند A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم $(A \cap B = \varnothing)$.

تعداد اعضای اجتماع، تفاضل و متمم دو مجموعه

اگر تعداد اعضای مجموعهٔ مرجع را با $n(U)$ نمایش دهیم و A و B دو مجموعهٔ متناهی دلخواه باشند، آن‌گاه:

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$؛ یعنی تعداد عضوهایی که در A یا در B هستند.



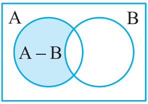
یا از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

و اگر دو مجموعهٔ A و B جدا از هم باشند در این صورت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



توجه داشته باشیم که $n(A - B)$ به این معنی است که تعداد عضوهایی که فقط در A هستند.

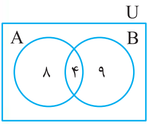
پ) $n(A') = n(U) - n(A)$؛ یعنی تعداد عضوهایی که در A نیستند.

مثال

اگر $n(A-B)=۸$ ، $n(A\cap B)=۴$ و $n(B-A)=۹$ ، آن‌گاه تعداد اعضای B کدام است؟

۱) ۱۳ ‏ ‏ ۲) ۱۲ ‏ ‏ ۳) ۲۱ ‏ ‏ ۴) ۹

پاسخ گزینهٔ ۱ برای حل این نوع مسائل بهتر است از نمودار وِن استفاده کنیم. دو مجموعهٔ A و B را طوری رسم می‌کنیم که با یکدیگر اشتراک داشته باشند و ابتدا در قسمت اشتراک تعداد عضوهای آن را قرار می‌دهیم، (این تعداد برابر با ۴ است)، سپس $n(A-B)=۸$ را جای‌گذاری می‌کنیم و سرانجام $n(B-A)=۹$ را در شکل می‌گذاریم.



در این صورت تعداد عضوهای مجموعهٔ B با توجه به شکل، برابر است با $n(B)=۹+۴=۱۳$.

مثال

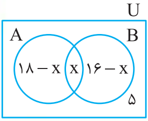
در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۶ نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر ۵ نفر عضو هیچ‌یک از دو تیم نباشند، چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

۱) ۷ ‏ ‏ ۲) ۹ ‏ ‏ ۳) ۱۱ ‏ ‏ ۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ ۳ اگر مجموعهٔ تیم فوتبال را A و بسکتبال را B بنامیم و تعداد اعضای مشترک آن‌ها x باشد؛ یعنی $n(A\cap B)=x$ ، آن‌گاه $n(A-B)=۱۸-x$. یعنی افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند و $n(B-A)=۱۶-x$ ، یعنی افرادی که فقط بسکتبال بازی می‌کنند و

۵ نفر عضو هیچ دو تیمی نیستند، بنابراین: $n(A\cup B)=۳۲-۵=۲۷$

بنابراین: $n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$



$$۲۷=۱۸-x+x+۱۶-x$$

$$\Rightarrow\ x=۳۴-۲۷=۷$$

فقط عضو فوتبال $n(A-B)=۱۸-۷=۱۱$

پرسش های تستی

۱- متمم مجموعهٔ $[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) A ۲) B' ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

۲- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، مجموعهٔ $(A\cap(A'\cup B))\cup(B\cap(A'\cup B'))$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$ ۳) B ۴) A

۳- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامهٔ هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامهٔ علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر از آن‌ها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر از آن‌ها در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟

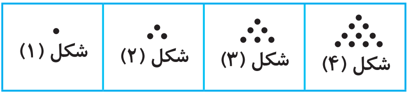
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته، مضرب ۵ باشد. عدد اول دستهٔ پنجاهم کدام است؟

$\underbrace{\{۱,۳,۵\}}_{\text{دستهٔ اول}},\underbrace{\{۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}}_{\text{دستهٔ دوم}},\underbrace{\{۱۷,۱۹,۲۱,۲۳,۲۵\}}_{\text{دستهٔ سوم}},\dots$

۱) ۴۸۷ ۲) ۴۹۷ ۳) ۴۷۷ ۴) ۴۶۷

۵- با توجه به الگوی زیر، چندمین شکل دارای ۱۰۵ نقطه می‌باشد؟



۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۶- بین دو عدد ۵ و x تعداد ۸ واسطهٔ حسابی مثبت با قدرنسبت ۴ قرار داده‌ایم. x کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۷ ۳) ۴۱ ۴) ۴۵

۷- در دنبالهٔ حسابی ۵ جمله‌ای، مجموع تمام جملات ۱۲۰ و مجموع سه جملهٔ بزرگ‌تر، سه برابر مجموع دو جملهٔ کوچک‌تر است. بزرگ‌ترین جمله کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۲

۸- اگر $a,۲,b,۷,...$ چهار جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی باشند، جملهٔ دهم کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۳/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۲

۹- به ازای کدام مقدار a، سه عدد $\sqrt{۳},a,۶-۴\sqrt{۳}$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند؟

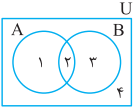
۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۳-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) هیچ مقدار a

۱۰- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و دوم برابر ۲ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۵۴ است. جملهٔ ششم دنباله کدام است؟

۱) ۱۲۱/۵ ۲) ۳۶۴/۵ ۳) ۲۴۳ ۴) ۴۸۶

پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۴» ابتدا نمودار ون را می‌کشیم و نواحی مختلف را شماره‌گذاری می‌کنیم. مطابق شکل زیر $U=\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ در نتیجه:



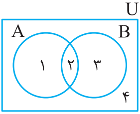
$$A-B=\{۱\}$$
$$A-(A-B)=\{۱,۲\}-\{۱\}=\{۲\} \quad (I)$$

از طرفی $A\cap B=\{۲\}$ ، در نتیجه $(A\cap B)'=\{۱,۳,۴\} \quad (II)$ از (I) و (II) داریم:

$$[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'=\{۲\}\cup\{۱,۳,۴\}=\{۱,۲,۳,۴\}=U$$

و متمم U برابر است با: $U'=\varnothing$

۲- گزینهٔ «۳» ابتدا نمودار ون را می‌کشیم و نواحی مختلف را شماره‌گذاری می‌کنیم. مطابق نمودار داریم: $U=\{۱,۲,۳,۴\}$ ، $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$



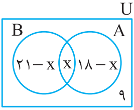
مطابق صورت مسئله $A'=\{۳,۴\}$ و $B'=\{۱,۴\}$ و سپس داخل پرانتزها را به دست می‌آوریم:

$$A'\cup B=\{۲,۳,۴\} \Rightarrow A\cap(A'\cup B)=\{۲\} \quad (I)$$
$$A'\cup B'=\{۱,۳,۴\} \Rightarrow B\cap(A'\cup B')=\{۳\} \quad (II)$$

از طرفی:

$$(I)\cup(II) \Rightarrow (A\cap(A'\cup B))\cup(B\cap(A'\cup B'))=\{۲,۳\}=B$$

۳- گزینهٔ «۴» اگر اعضای فوق برنامهٔ هنری را A و علمی را B بنامیم، چنان‌چه تعداد عضوهایی که در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند را x بگیریم، آن‌گاه:



$n(B-A)=۲۱-x$ و $n(A-B)=۱۸-x$ و $n(A\cap B)=x$

و چون ۹ نفر در فوق برنامه‌ها شرکت نکرده‌اند، پس داریم:

$$n(A\cup B)=۴۰-۹=۳۱$$

بنابراین:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

$$۳۱=(۲۱-x)+(۱۸-x)+x \Rightarrow x=۸=n(A\cap B)$$

۴- گزینهٔ «۱» عددهای آخر هر دسته را به صورت یک دنباله از اعداد می‌نویسیم:

$$۵ \underset{۱۰}{,} ۱۵ \underset{۱۰}{,} ۲۵,\ldots$$

جملهٔ عمومی این دنبالهٔ خطی به صورت $t_n=an+b$ است. میزان افزایش جملات متوالی ضریب n می‌باشد؛ یعنی $a=۱۰$ و از طرفی:

$b=$ جملهٔ اول $-$ (a)n ضریب

پس $b=۵-۱۰=-۵$ در نتیجه $t_n=۱۰n-۵$. عدد آخر دستهٔ چهل و نهم برابر است با:

$$t_{۴۹}=۱۰\times۴۹-۵=۴۸۵$$

پس عدد اول دستهٔ پنجاهم عدد فرد بلافاصله بعد از ۴۸۵ یعنی برابر ۴۸۷ است.

۵- گزینهٔ «۲» اگر تعداد نقطه‌های هر دسته را به صورت دنبالهٔ اعداد بنویسیم، خواهیم داشت:

$$۱,۳,۶,۱۰,\ldots$$

این دنبالهٔ اعداد مثلثی است که جملهٔ عمومی آن $a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، بنابراین:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=۱۰۵ \Rightarrow n(n+۱)=۲۱۰$$

$$=۳\times۷\times۲\times۵ \Rightarrow (n+۱)\times n=۱۵\times۱۴ \Rightarrow n=۱۴$$

۶- گزینهٔ «۳» تعداد واسطه‌ها ۸، قدرنسبت ۴، $a=۵$ و $b=x$ است.

از رابطهٔ $d=\frac{b-a}{m+۱}$ خواهیم داشت $۴=\frac{x-۵}{۹}$، در نتیجه:

$$x-۵=۳۶ \Rightarrow x=۴۱$$

۷- گزینهٔ «۱» اگر این ۵ عدد را به صورت $x-2d, x-d, x, x+d, x+2d$ در نظر بگیریم که در آن $x+2d$ بزرگ‌ترین جمله است، خواهیم داشت:

$$x-2d+x-d+x+x+d+x+2d=120$$

$$\Rightarrow 5x=120 \Rightarrow x=24$$

$$x+x+d+x+2d=3(x-d+x-2d)$$

$$\Rightarrow 3x+3d=3(2x-3d)$$

$$\Rightarrow 3x+3d=6x-9d \Rightarrow 12d=3x$$

$$\Rightarrow x=4d \xrightarrow{x=24} 24=4d \Rightarrow d=6$$

بزرگ‌ترین جمله $=x+2d=24+2\times 6=36$

۸- گزینهٔ «۴» ابتدا باید قدرنسبت را پیدا کنیم بنابراین $d=2-a=b-2$، در نتیجه $a+b=4$ (I). از طرفی در سه جملهٔ $2,b,7$ عدد b واسطهٔ حسابی است، بنابراین $b=\frac{2+7}{2}=\frac{9}{2}$. اگر، این مقادیر را در (I) قرار دهیم، داریم: $a+\frac{9}{2}=4 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

بنابراین، دنبالهٔ اعداد به صورت: $-\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},7,\dots$ که $d=2-(-\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$ است و جملهٔ دهم برابر است با:

$$t_{10}=a_1+9d=-\frac{1}{2}+9\times\frac{5}{2}=\frac{44}{2}=22$$

۹- گزینهٔ «۴» اگر $x=6-4\sqrt{3}$، $y=a$ و $z=\sqrt{3}$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، باید داشته باشیم $y^2=xz$، در نتیجه:

$$a^2=\sqrt{3}(6-4\sqrt{3}) \Rightarrow a^2=6\sqrt{3}-12$$

$\xrightarrow[6\sqrt{3}-12<0]{\sqrt{3}\simeq 1/7}$ a وجود ندارد

۱۰- گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_4 + t_5 = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 r = 2 & \text{(I) رابطهٔ} \\ t_1 r^3 + t_1 r^4 = 54 & \text{(II) رابطهٔ} \end{cases}$$

اگر در رابطهٔ (II) از r^3 فاکتور بگیریم، خواهیم داشت:

$$r^3(t_1 + t_1 r) = 54 \xrightarrow[t_1+t_1r=2]{(I)} 2r^3 = 54$$

$$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$

و اگر در رابطهٔ (I) به جای r عدد ۳ را قرار دهیم a_1 به دست می‌آید.

$$t_1 + 3t_1 = 2 \Rightarrow 4t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$t_6 = t_1 r^5 \Rightarrow t_6 = \frac{1}{2} \times (3)^5 = \frac{243}{2} = 121/5$$