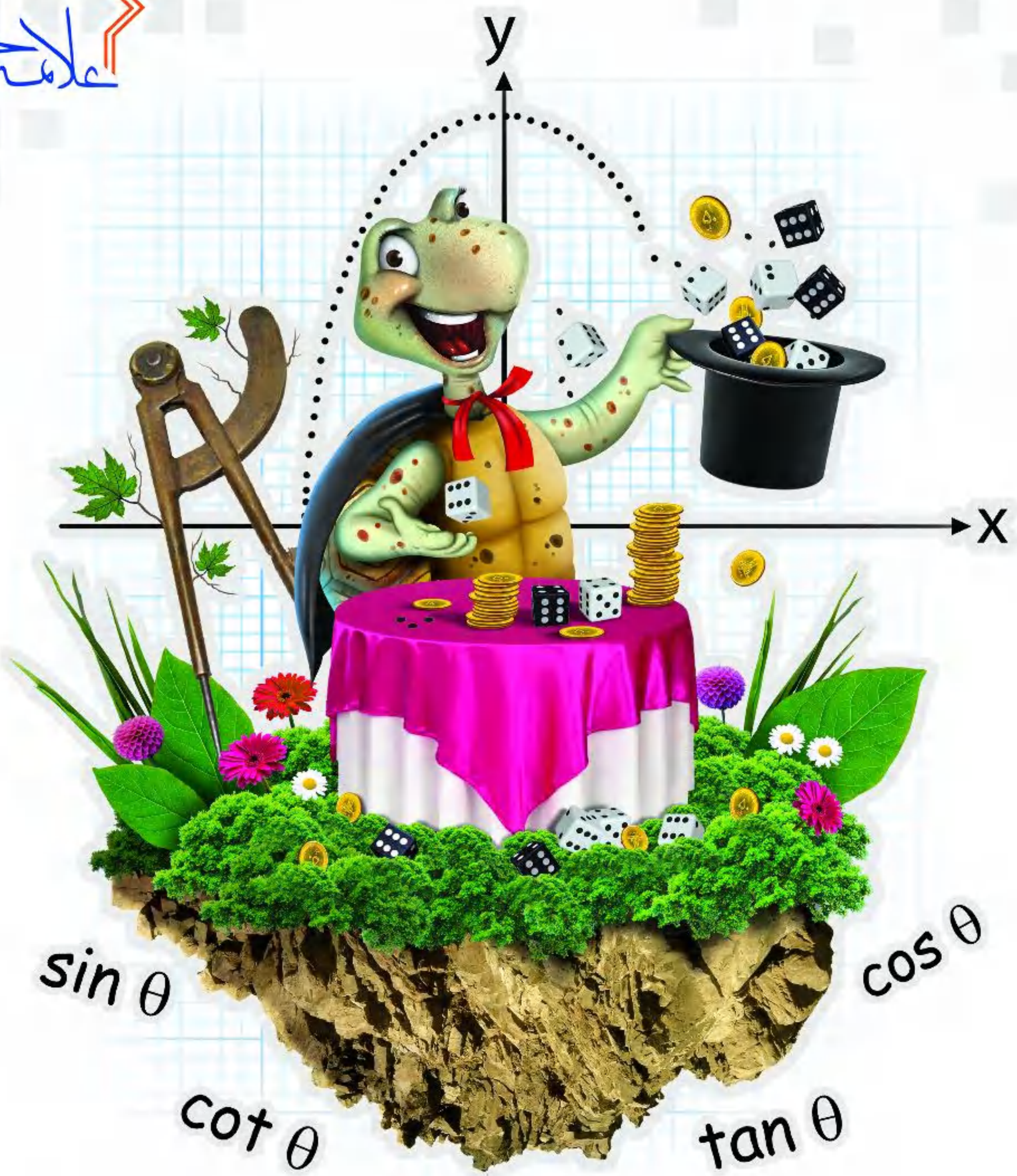


ریاضی دهم

• سیدمحمدصالح ارشاد • حجت انصاری •

مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی دهم

• سید محمدصالح ارشاد

• حجت انصاری

شناسنامه کتاب

عنوان و نام پدیدآور	: ریاضی دهم، ارشاد، محمدصالح
مشخصات نشر	: تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری	: ۳۶۰ ص.: مصور(رنگی)، جدول(رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ۲۲ × ۲۹ س‌م.
فروست	: مجموعه کتاب علامه حلی
شابک	: ۳-۲۰۶-۴۹۶-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: انصاری، حجت
شناسه افزوده	: محمدی، حسام
شماره کتابشناسی ملی	: ۷۳۶۱۹۶۰

علامه حلی

عنوان کتاب	ریاضی دهم
ناشر	انتشارات حلی
مؤلفان	محمدصالح ارشاد، حجت انصاری
صفحه‌آرا	راضیه فرهانیان، عاطفه قلیچ‌خانی
طراح جلد	سعید شمس
تصویرساز	محمدحسین صفدریان
ویراستار علمی	حسام محمدی
مسئول‌هماهنگی	سمیه سادات فاطمی
سال چاپ	۱۴۰۱
نوبت چاپ	سوم
شمارگان	۲۰۰۰ جلد
قیمت	۲۰۶۰۰۰تومان
شماره شابک	۳-۲۰۶-۴۹۶-۶۰۰-۹۷۸

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴
تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

فهرست مطالب

پیشگفتار

به نام خدا

چند سال پیش، تعدادی از معلمان با دغدغه «آموزش استعدادهای درخشان» ، دورهم جمع شدند و موسسه علامه حلی را تأسیس کردند. این معلم‌ها ـ که خودشان از دانش‌آموختگان مدارس استعدادهای درخشان شهر تهران می‌باشند ـ سال‌ها در مدارس سمپاد (سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان)، به دنبال پیاده‌سازی روش‌های جدید و مؤثر آموزش بوده‌اند و درنهایت تصمیم گرفتند تا نتیجه این تجربیات را در موسسه علامه‌حلی در اختیار دیگر فعالان در عرصه آموزش بگذارند.
مجموعه کتاب‌های انتشارات علامه‌حلی، یکی از محصولات این تلاش جمعی است. در این کتاب‌ها تلاش شده است تا علاوه‌بر تأمین محتوای مناسب برای دانش‌آموزان برتر کشور، روش‌های جدیدتر و مؤثرتر آموزشی هم در انتقال این محتوا به کار گرفته شده و پیاده‌سازی شود. در پس این کتاب‌ها، ساعت‌ها کار فکری برای انتخاب ساختار و شیوه تدوین صرف شده است. فعال کردن دانش‌آموز در روند آموزش و ارجاع او به انجام مشاهدات، فعالیت‌ها و آزمایش‌های مناسب برای انتقال مفاهیم آموزشی و همچنین ترغیب دانش‌آموز برای مراجعه به منابع گسترده‌تر چون سایت‌های علمی اینترنتی و نرم‌افزارهای آموزشی، از ویژگی‌های این سیستم آموزشی است. علاوه‌بر این برای کمک به فرایند تدریس معلمین عزیز، محصولات جانبی چون متن راهنمای تدریس کتاب، محتوای الکترونیک و ... در کنار هر کتاب تولید شده است.
مجموعه کتاب‌های علامه‌حلی، با همکاری جمع زیادی از مؤلفین و معلمان باتجربه مدارس سمپاد ـ که به‌دقت انتخاب شده‌اند ـ تألیف و ویرایش گردیده است؛ اما آرزوی ما در این مؤسسه این است که از حضور تمامی معلمان دلسوز و باتجربه مدارس سمپاد و دیگر مراکز آموزشی برتر کشور عزیزمان، در تألیف کتاب‌ها و دیگر محصولات آموزشی، بهره ببریم؛ بنابراین از شما دبیران عزیز خواهشمندیم تجربه‌های خود را در زمینه استفاده از این کتاب و آموزش آن در کلاس، برای ما به آدرس الکترونیک: *book@mhelli.ir* ارسال فرمایید تا ما در چاپ‌های بعدی کتاب، از تجربیات، نظرات و حتی تصاویر ارسالی شما در انجام آزمایش‌ها، فعالیت‌ها، بازدیدها و ... در کتاب ـ و البته با ذکر نام ارسال‌کننده ـ استفاده کنیم. البته دانش‌آموزان خوب و پرتلاش هم می‌توانند در این کار همکاری کنند و با معلمین خود در اجرای این طرح همراه شوند.

عابدی جعفری

مدیر انتشارات حلی

با نرم افزار موبایل »کتاب زنده« دیده شود.

قبل از شروع به مطالعهٔ کتاب این قسمت را بخوانید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هرکدام وجود دارد که هریک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:

درخت دانش: در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

اهداف رفتاری: بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

پاسخگو باش: در این قسمت باید پاسخگوی مطالبی که تا اینجا خوانده‌اید باشید. پاسخگوی سؤالاتی که انتظار می‌رود بعد از خواندن درس تا آن قسمت، بتوانید باکمی فکرکردن به آن‌ها جواب دهید.

فسفر بسوزان: شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سوالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیدها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

دست به کد شو: در اکثر مدارس خوب کشور از پایه هفتم، آموزش برنامه‌نویسی شروع می‌شود. نوشتن برنامه برای حل یک مسئله علاوه بر کمک به یادگیری بهتر برنامه‌نویسی، به فهم عمیق مسئله و نحوه حل آن کمک زیادی می‌کند. در پایان هر فصل بخشی به نام دست به کد شو وجود دارد که با توجه به موضوعات فصل و مهارت‌های برنامه‌نویسی طراحی شده است. اگر برنامه‌نویسی بلد نیستید می‌توانید به کتاب برنامه‌نویسی انتشارات ما رجوع کنید و هرچه سریع‌تر برنامه‌نویسی را یاد بگیرید.

تاریخ علم: در این بخش شخصیتی در متن درس معرفی می‌شود و درکنار صفحه، عکس و مختصری از زندگی وی می‌بینید. حق مسلم ما است که حداقل قیافه این دانشمندان دوست داشتنی را ببینیم، شاید در کتاب‌های آینده عکس شما هم اینجا قرار بگیرد!

جالب است بدانی: برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به‌راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.

جمع‌بندی کن: در انتهای فصل برای یک جمع‌بندی سریع می‌توان از این قسمت کمک گرفت. در این قسمت با هم فصل را جمع می‌کنیم و نکات و مطالب مهم را برای خود تکمیل می‌کنیم.

لغت‌نامه: ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات مهم با معادل انگلیسی آن آورده شده است.

تمرین‌ها: در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید. سوالات سخت با ستاره مشخص شده، اگر این سوالات را نتوانستید حل کنید خیلی به خودتان آسیب نزنید!

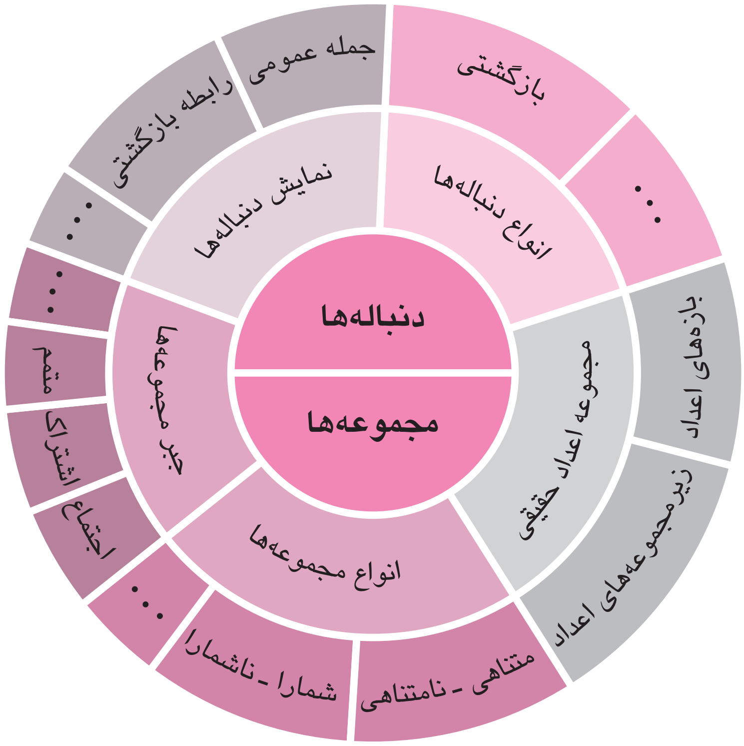
پرسش‌های چهارگزینه‌ای: سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. سؤالات چهارگزینه‌ای با این پیش فرض طراحی شده است که اگر نکات مربوط به سؤال را بلد باشید حداکثر در ۲ دقیقه بتوانید به آن جواب دهید.

پاسخ‌ها: پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای همه فصل‌ها به‌صورت معرفی گزینه درست طراحی شده. جواب‌های نهایی سؤال‌ها هم برای چک کردن درستی راه حل، ارائه شده است. پاسخ تشریحی تمرین‌های زوج به‌طور کامل در وب‌سایت کتاب و همچنین همه پاسخ‌ها به‌طور کامل در کتاب پاسخنامه قابل دسترس است.

فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

بشر تا به حال دنباله‌های زیادی را مورد بررسی قرار داده است. دنباله فیبوناتچی از دنباله‌های شگفت‌انگیز در طبیعت است. هرجا که گذر می‌کنیم رد پایی از آن یافت می‌شود. آیا می‌دانید تناسب اندام اغلب جانداران منطبق بر ویژگی‌های این دنباله است؟



اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی می‌توانی:

- خواص مجموعه‌ها ازجمله متناهی و نامتناهی بودن آن‌ها را بشناسی.
- نمایش دیگری از بعضی از مجموعه‌ها به‌صورت بازه اعداد حقیقی ارائه کنی.
- مجموعه‌های متمم را تشریح نمایی.
- تعاریف مقدماتی دنباله‌ها و دو دنباله معروف حسابی و هندسی را توضیح دهی.

◄ مجموعه اعداد حقیقی

سال گذشته با مجموعه اعداد طبیعی آشنا شدیم:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$$

هر عضو مجموعه اعداد طبیعی از حاصل جمع تعدادی عدد ۱ حاصل می‌شود.

از اجتماع مجموعه اعداد طبیعی و عدد صفر مجموعه اعداد حسابی ایجاد می‌شود:

$$\mathbb{I}=\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$$

از اجتماع مجموعه اعداد حسابی و قرینه‌های آن‌ها اعداد صحیح ایجاد می‌شوند:

$$\mathbb{Z}=\{۰,۱,-۱,۲,-۲,....\}$$

از تقسیم هر عدد صحیح بر عدد صحیح غیر صفر یک عدد گویا داریم:

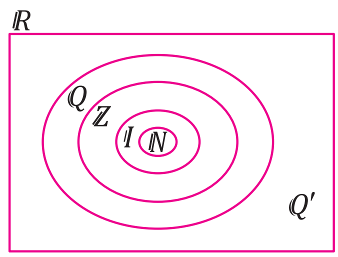
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq ۰\right\}$$

و درنهایت هر عدد حقیقی غیر گویایی یک عدد گنگ است:

$$\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

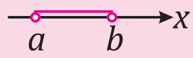
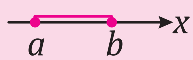
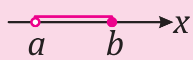
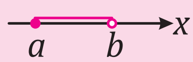
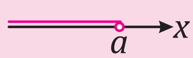
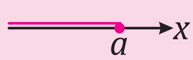
مثال ۱. به کمک نمودار، مجموعه اعداد $\mathbb{N}$، I، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ را نمایش دهید.

پاسخ:



◄ بازه اعداد حقیقی

هر نقطه بر روی محور اعداد حقیقی، متناظر با یک عدد است و برعکس. برای هر عدد حقیقی یک نقطه روی محور اعداد حقیقی نظیر می‌شود. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۱ و ۲ را می‌توانیم با نمادهای ریاضی به‌صورت $A=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ ۱<x<۲\}$ نمایش دهیم. این مجموعه شامل هر عدد گویا و گنگی بین ۱ و ۲ است. مثل ۱/۵، $\frac{۷}{۵}$، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و بی‌نهایت عدد دیگر. این مجموعه را بازه یا فاصله می‌نامیم، آن را با نماد (۲ ، ۱) نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «بازه باز ۱ تا ۲». منظور از کلمهٔ باز این است که خود ۱ و ۲ عضو نیستند. با این مقدمه تعاریف زیر را ارائه می‌کنیم.

نامگذاری بازه	نمایش هندسی	نمایش با نماد بازه	نمایش به‌صورت مجموعه
بازهٔ باز		(a,b)	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
بازه‌ی بسته		$[a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$
بازهٔ نیم‌باز		$(a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$
بازهٔ نیم‌باز		$[a,b)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$
بازهٔ باز		$(a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$
بازهٔ نیم‌باز		$[a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x\}$
بازهٔ باز		$(-\infty,a)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$
بازهٔ نیم‌باز		$(-\infty,a]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \le a\}$
بازهٔ باز		$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

۱ ـ هر جا از نماد پرانتز استفاده شود، یعنی آن عدد عضو بازه نیست.

۲ ـ هر جا از نماد کروشه استفاده شود، یعنی آن عدد عضو بازه است.

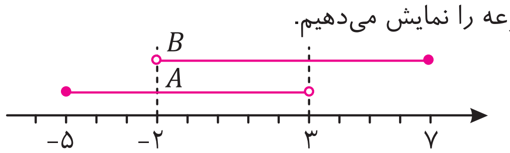
۳ ـ ازآنجاکه $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) یا $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) عدد نیستند و تنها نمادهایی برای نمایش مفهوم بی‌نهایت‌اند؛ برای آن‌ها از پرانتز استفاده می‌کنیم.

۴ ـ بازهٔ $(-\infty \ , \ +\infty)$ همان کل مجموعه اعداد حقیقی است که آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

یک بازه، نمادی برای نمایش یک مجموعه است. درنتیجه بازه‌ها مجموعه‌اند. پس اعمال مجموعه‌ها روی آن‌ها قابل انجام است. یعنی می‌توان دو بازه را اجتماع یا اشتراک گرفت و یا بازه‌ای را از بازه‌ای دیگر کم کرد. برای این کار بهتر است از محور اعداد حقیقی کمک بگیرید.

مثال ۲. اگر $A=[-۵\,,\,۳)$ و $B=(-۲\,,\,۷]$ باشد، مجموعه‌های $A\cap B$ ، $A\cup B$ و $A-B$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا بر روی محور اعداد حقیقی این دو مجموعه را نمایش می‌دهیم.



اشتراک این دو بازه، مجموعه‌ای است که اعضای آن هم در A و هم در B هستند.

$$A\cap B=(-۲\,,\,۳)$$

اجتماع این دو بازه، مجموعه‌ای است که اعضای آن حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B وجود دارند.

$$A\cup B=[-۵\,,\,۷]$$

اگر از بازهٔ مجموعهٔ A آن اعدادی که در اشتراک با مجموعهٔ B هستند حذف کنیم $A-B$ به دست می‌آید.

$$A-B=[-۵\,,\,-۲]$$

◄ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجوعهٔ متناهی: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را بتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، آن مجموعه را مجموعهٔ متناهی می‌گوییم.

مجموعه نامتناهی: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، آن مجموعه را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال ۳. متناهی و نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۵

ب) مجموعهٔ مورچه‌های روی کره زمین

ج) بازهٔ $[1, 5]$

پاسخ: الف) نامتناهی است. زیرا هر عدد صحیح کمتر از ۵ یک عدد صحیح کوچک‌تر از خود دارد. مثلاً قبل از ۰، ۱- است و قبل از ۱-، ۲- و همین روند ادامه دارد. درنتیجه نمی‌توان گفت مثلاً این مجموعه ۱۰۰۰ عضوی است!

ب) متناهی است. درست است که تعداد مورچه‌ها خیلی زیاد هستند و ما نمی‌توانیم همه آن‌ها را پیدا کنیم و بشماریم! اما به‌هرحال تعداد مشخصی مورچه وجود دارد. مثلاً 10^{10} مورچه؛ اما ما نمی‌دانیم دقیقاً چند مورچه روی کره زمین است.

ج) نامتناهی است. ازآنجاکه بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویا و بین هر دو عدد گنگ و هر عدد گویا و گنگ بی‌نهایت عدد گویا و گنگ است؛ تعداد اعضای هر بازه‌ای از اعداد حقیقی نامتناهی است.

جالب است بدانی

از نتایج مهم ریاضی در قرن نوزدهم و بیستم و از موفقیت‌های جالب‌توجه نظریه مجموعه‌ها این بوده است که ریاضیدانان این دوره برای اولین بار توانستند به‌طور دقیق در مورد مفهوم نامتناهی صحبت کنند. این در حالی است که بسیاری از ریاضیدانان این حوزه از ریاضی را نامفهوم می‌دانستند و آن را مورد انتقادات جدی قرار می‌دادند.

به‌عنوان مثالی از کارهای انجام شده در مورد نامتناهی‌ها به مقایسه اندازه چهار مجموعه نامتناهی (اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی) می‌پردازیم.

کانتور نشان داد که اندازه سه مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا برابر است. این حرف شاید کمی عجیب به نظر برسد. چگونه اندازه مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد طبیعی برابر است، درحالی‌که مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه مطلق مجموعه اعداد صحیح است (یعنی عضوی در اعداد صحیح هست که در اعداد طبیعی نیست و نه بالعکس)؟ اما کانتور مدعی است که به‌سادگی نمی‌توان در مورد نامتناهی‌ها قضاوت کرد. در مورد استدلال و روش کانتور در فصل پنجم بیشتر توضیح خواهیم داد.

اما سؤال بسیار مهمی که در دوره کانتور مطرح شد این بود که حالا که اندازه مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا برابر است، آیا مجموعه‌ای بزرگ‌تر از این مجموعه‌ها وجود دارد؟ کانتور نشان داد که اندازه مجموعه اعداد حقیقی از مجموعه اعداد طبیعی بزرگ‌تر است. اینکه آیا مجموعه‌ای با اندازه‌ای مابین اعداد حقیقی و اعداد طبیعی وجود دارد یا خیر از مسائل باز و جذاب ریاضی معاصر است.

شاید بین دو واژهٔ ناشمارا و نامتناهی همیشه دچار تردید شده‌اید. خوب است بدانید که مجموعه‌های شمارا و ناشمارا با مجموعه‌های متناهی و نامتناهی دارای تفاوت‌اند.

مجموعه‌های شمارا: اگر به ازای هر عضو از مجموعهٔ اعداد طبیعی دقیقاً ۱ عضو از مجموعه‌ای موجود بوده که بین آن‌ها تناظر وجود داشته باشد، آن مجموعه را شمارا گوییم. درواقع اگر بتوان به کمک اعداد طبیعی عضوهای یک مجموعه را شماره‌گذاری کرد آن مجموعه شمارا بوده و در غیر این صورت ناشمارا است.

جالب است بدانی

کانتور در سال ۱۸۴۵ در سن‌پترزبورگ به‌دنیا آمد. وی در ۱۸۶۰ با نمره بسیار عالی از دبیرستان فارغ‌التحصیل شد و آموزگارانش به مهارت‌های استثنایی وی در ریاضیات، به‌ویژه در مثلثات، اشاره داشتند. کانتور در ۱۸۶۲ وارد دانشگاه زوریخ شد سپس در دانشگاه برلین به مطالعات خود ادامه داد. در سال ۱۸۶۷ کانتور رساله دکتری خود را، که درباره نظریه اعداد بود، در دانشگاه برلین به پایان رساند. پس از یک دوره کوتاه تدریس در مدرسه‌ای دخترانه در برلین، شغلی در دانشگاه هاله پذیرفت و تمام دوره کاری خود را در همین دانشگاه گذراند.

فسفرسوزان

نشان دهید مجموعه اعداد صحیح شمارا هستند.

◄ عملیات مجموعه‌ها

یادآوری: در سال گذشته با عملیات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه آشنا شده‌ایم.

در زیر این اعمال را یادآوری می‌کنیم.

هر عملگر مجموعه، یک مجموعهٔ جدید ایجاد می‌کند که به‌صورت زیر قابل تعریف‌اند:

اجتماع $(A\bigcup B)$: مجموعه‌ای است که هر عضو آن در حداقل یکی از مجموعه‌های A یا B است.

اشتراک $(A\bigcap B)$: مجموعه است که هر عضو آن هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است.

تفاضل $A-B$: مجموعهٔ همه عضوهایی از A است که در B عضویت ندارد.

مجموعهٔ جهانی (مادر)

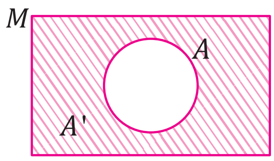
مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های موردبحث، زیرمجموعهٔ آن هستند مجموعه جهانی یا مادر نامیده و معمولاً با نماد M و U نمایش داده می‌شود.

مثلاً وقتی در مورد هر زیرمجموعه اعداد حقیقی صحبت می‌کنیم مجموعه مرجع ما معمولاً اعداد حقیقی‌اند.

متمم یک مجموعه

مجموعه‌ای که شامل عضوهای مجموعه مرجع به‌غیراز مجموعه A باشد را متمم مجموعه A گوییم و با A' نمایش می‌دهیم:

$$A'=\{x\in M \mid x\notin A\}$$



$$A'=M-A$$

مثال ۴. اگر مجموعه اعداد طبیعی ۱ رقمی مجموعه مرجع باشد و آن را M بنامیم

و $A=\{x\in M \mid x=۲k\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$، $B=\{۲\,,۳\,,۵\,,۷\}$ و $C=\{x\in M \mid x=۳k,k\in\mathbb{Z}\}$ مجموعه‌های زیر را به کمک اعضا نمایش دهید.

الف) A' ب) B' ج) C' د) $A\bigcap C'$

پاسخ:

الف) $A=\{۲,۴,۶,۸\}\to A'=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

ب) $B=\{۲,۳,۵,۷\}\to B'=\{۱,۴,۶,۸,۹\}$

ج) $C=\{۳,۶,۹\}\to C'=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸\}$

د) $A\cap C'=\{۲,۴,۸\}$

مثال ۵. هریک از مجموعه‌های زیر مساوی چه مجموعه‌ای هستند؟

الف) $(A')'$ ب) M' ج) ϕ'

پاسخ:

الف) $(A')'=A$ ب) $M'=\phi$ ج) $\phi'=M$

جالب است بدانی

کل ریاضی در قالب مجموعه‌ها

یکی از تحولات اساسی ریاضیات در دوره معاصر با ارائه نظریه مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور در اواخر قرن نوزدهم رخ داد. مفهوم مجموعه و احکام آن نقش بسیار بنیادی در ریاضیات دارد، به‌نحوی‌که نظریه مجموعه‌ها پایه و اساس ریاضیات معاصر محسوب می‌شود.

در ابتدای قرن بیستم تلاش برای فرو کاستن کل ریاضیات به نظریه مجموعه‌ها آغاز شد. منظور از فرو کاستن در اینجا این است که بتوان کلیه احکام ریاضی در شاخه‌های مختلف مثل هندسه، جبر و آنالیز را از اصول نظریه مجموعه‌ها استخراج کرد. برای درک بهتر این موضوع یکی از شیوه‌های فرو کاستن اعداد طبیعی به مجموعه‌ها در زیر نمایش داده شده است:

$۰\triangleq\varnothing$

$۱\triangleq\{\varnothing\}$

$۲\triangleq\{\{\varnothing\},\varnothing\}$

$۳\triangleq\{\{\{\varnothing\},\varnothing\},\{\varnothing\},\varnothing\}$

و به همین ترتیب سایر اعداد بر اساس مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. با اندکی دقت در تعریف اعداد داده شده می‌توان الگویی برای تعریف "جمع با ۱" پیدا کرد:

$\boldsymbol{n}+۱\triangleq\boldsymbol{n}\cup\{\boldsymbol{n}\}$

که در آن n یک عدد طبیعی است. به‌این‌ترتیب اعداد چیزی نیستند به‌جز مجموعه‌هایی که بر اساس تعریف جمع ساخته می‌شوند. ارنست زرملو، ریاضیدان آلمانی در قرن بیستم، به‌طور موفقیت‌آمیز نظریه مجموعه‌ها را اصل موضوعی کرد و درنهایت، جوزپه پئانو، ریاضیدان ایتالیایی، کل جبر و آنالیز را با تکیه به چند اصل موضوع متکی بر نظریه مجموعه‌ها بازسازی کرد. از نکات مهم این اصول موضوعه این است که این اصول هیچ تناقضی به بار نمی‌آورند و می‌توان نشان داد که اصل موضوع‌ها باهم سازگاری دارند. به‌این‌ترتیب این ادعا که همچنان موردتوجه ریاضیدانان است مطرح شد که تنها چیزی که از ریاضیات لازم داریم نظریه مجموعه‌هاست و سایر شاخه‌ها ریاضی بر آن تکیه دارند.

◄ جبر مجموعه‌ها (محتوای تکمیلی)

با رسم نمودارهای وِن مناسب درستی روابط زیر بین مجموعه‌ها را می‌توان نشان دهید و آن‌ها را به خاطر بسپارید.

۱) $\begin{cases}(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)\\(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)\end{cases}$ (خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها)

۲) $\begin{cases}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{cases}$ (خاصیت توزیع‌پذیری)

۳) $\begin{cases}A\cap(A\cup B)=A\\A\cup(A\cap B)=A\end{cases}$ (خاصیت جذب)

۴) $A-B=A\cap B'$

تذکر: رابطه ۴ نشان می‌دهد هر تفاضلی را می‌توان به اشتراک و هر اشتراکی را می‌توان به تفاضل تبدیل کرد.
به عنوان مثال:

$$\begin{cases}A-B'=A\cap(B')'=A\cap B\\A'-B=A'\cap B'\end{cases}$$

تذکر: رابطه ۴ نشان می‌دهد هرگاه بخواهیم اشتراک دو مجموعه را حساب کنیم می‌توانیم هریک از مجموعه‌ها را از متمم مجموعهٔ دیگر کم کنیم:

$$\begin{cases}A\cap B=A-B'\\A\cap B=B-A'\end{cases}$$

۵) $\begin{cases}(A\cap B)'=A'\cup B'\\(A\cup B)'=A'\cap B'\end{cases}$ (قوانین دمورگان)

مثال ۶. به کمک جبر مجموعه‌ها، تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=B-A$

ب) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=B$

ج) $[A'\cap(A'\cup B)]\cup A=M$

پاسخ:

الف) $A-B=A\cap B' \Rightarrow (A-B)'=(A\cap B')' \Rightarrow A'\cup(B')'=A'\cup B$

$$\Rightarrow (A'\cup B)\cap(A\cup B)=B\cup(\underbrace{A'\cap A}_{\phi})=B\cup\phi=B$$

$$\Rightarrow (A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=B\cap A'=B-(A')'=B-A$$

ب) $\begin{cases}A\cap(A'\cup B)=(\underbrace{A\cap A'}_{\phi})\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B\\B\cap(A'\cup B')=(B\cap A')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\phi})=(B\cap A')\cup\phi=B\cap A'\end{cases}$

$$\Rightarrow (A\cap B)\cup(B\cap A')=B\cap(\underbrace{A\cup A'}_{M})=B\cap M=B$$

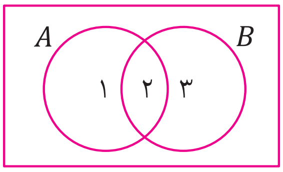
ج) $A'\cap(A'\cup B)=A' \Rightarrow [A'\cap(A'\cup B)]\cup A=A'\cup A=M$

◄ شمارش اعضای مجموعه‌ها

تعداد اعضای مجموعه A را با نماد $n\,(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

۱) شمارش اعضای اجتماع دو مجموعه

برای شمارش اعضای اجتماع دو مجموعه کافی است تعداد عضوهای دو مجموعه را جمع کنیم و سپس تعداد اعضای مشترک دو مجموعه را کم کنیم؛ زیرا هر عضو مشترک دو بار شمارش شده است:



$$n(A\bigcup B)=\underbrace{n(A)}_{۱,۲}+\underbrace{n(B)}_{۲,۳}-\underbrace{n(A\bigcap B)}_{۲}=۱,۲,۳$$

برای ۳ مجموعه A و B و C داریم:

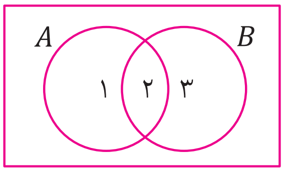
$$n(A\bigcup B\bigcup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

پاسخگوباش

به کمک نمودار وِن درستی رابطه بالا را نشان دهید.

۲) شمارش اعضای تفاضل دو مجموعه

برای شمارش تعداد عضوهای مجموعهٔ $A-B$ کافی است تعداد عضوهای مجموعه A را منهای تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\bigcap B$ کنیم:



$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$۱,۲\ -\ ۲\ \rightarrow\ ۱$$

مثال ۷. اگر A مجموعه‌ای ۱۰ عضوی و B مجموعه‌ای ۱۲ عضوی باشد و اجتماع آن‌ها ۱۷ عضو داشته باشد، تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را حساب کنید.

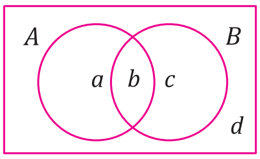
الف) $A-B$ ب) $A'\bigcap B$

پاسخ:

الف) $n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$

$\Rightarrow\ ۱۷=۱۰+۱۲-n(A\bigcap B)\ \Rightarrow\ n(A\bigcap B)=۵$

$\Rightarrow\ n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)=۱۰-۵=۵$



ب) برای محاسبه تعداد اعضای این مجموعه از نمودار وِن کمک می‌گیریم:
می‌توان تعداد اعضای مناطق a، b، c و d را به دست آورد.
می‌دانیم $n(A\bigcap B)=۵$ است. درنتیجه منطقه b، ۵ عضوی است.

از طرفی چون B دارای ۱۲ عضو است درنتیجه منطقه c، ۷ عضوی است. A' شامل مناطق c و d است که اشتراک آن با مجموعه B منطقه C است. درنتیجه مجموعه $A'\bigcap B$ دارای ۷ عضو است.

تذکر: در قسمت قبل نشان دادیم، $A'\bigcap B=B\bigcap A'=B-A$ است.

درنتیجه:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\bigcap B)=۱۲-۵=۷$$

مثال ۸. یک مدرسه ۱۱۷ دانش‌آموز دارد. از این ۱۱۷ نفر، ۵۵ نفر علاقه‌مند به فوتبال، ۴۶ نفر علاقه‌مند به والیبال و ۴۰ نفر هم به بسکتبال علاقه‌مند هستند. ۱۱ نفر هم به فوتبال و هم به والیبال، ۱۰ نفر هم به فوتبال و هم به بسکتبال و ۱۳ نفر هم به والیبال و هم به بسکتبال علاقه دارند. اگر بدانیم ۴ نفر به، هیچ ورزشی علاقه‌ای ندارند:

الف) چند نفر به هر سه ورزش علاقه‌مندند؟

ب) چند نفر فقط به فوتبال علاقه‌مندند؟

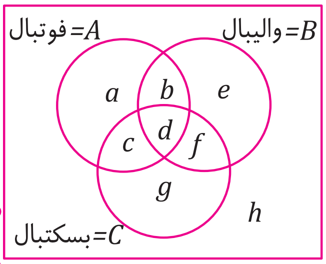
ج) چند نفر حداقل به ۲ ورزش علاقه‌مندند؟

پاسخ: الف) به کمک رابطهٔ زیر می‌توان تعداد اعضای منطقه d که همان کسانی هستند که به هر سه ورزش علاقه‌مند هستند را به دست آورد:

$$n(A\bigcup B\bigcup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

$$۱۱۷-۴=۵۵+۴۶+۴۰-۱۱-۱۰-۱۳+n(A\bigcap B\bigcap C)\ \Rightarrow\ n(A\bigcap B\bigcap C)=۶$$

ب) با توجه به نمودار وِن زیر، تعداد اعضایی که عضو مناطق a، e، g هستند فقط به یک ورزش علاقه‌مند می‌باشند. اشتراک مجموعه A و B دو منطقه b و d بوده که دارای n عضو است. ازآنجاکه منطقه d دارای ۶ عضو است پس منطقه b، ۵ عضوی می‌باشد. اشتراک مجموعه‌های A و C دو منطقهٔ d و c بوده که دارای ۱۰ عضو است. ازآنجاکه منطقه d، ۶ عضوی است پس منطقه c، ۴ عضوی می‌باشد. اشتراک مجموعه‌های B و C دو منطقهٔ d و f است از آن‌جا که منطقه d، ۶ عضوی است. منطقه f، ۷ عضوی است. بنابراین:



$$n(A)=n(a)+n(b)+n(c)+n(d)$$
$$\downarrow$$
$$۵۵=n(a)+۵+۴+۶\ \Rightarrow\ n(a)=\ ۴۰$$

ج) کافی است مجموع تعداد اعضای b، c، d، f را جمع کنیم:

$$n(b)+n(c)+n(d)+n(f)=۵+۴+۶+۷=۲۲$$

◄ دنباله‌ها

تعریف: به هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد گوییم. هر عددی که در یک دنباله قرار گرفته باشد، یک جملهٔ آن دنباله نام دارد. مثلاً اعداد روبه‌رو یک دنباله را تشکیل می‌دهند:
۱، ۳، ۵، ۷

در دنبالهٔ فوق اعداد ۱، ۳، ۵ و ۷ به ترتیب جملات اول، دوم، سوم و چهارم دنباله نامیده می‌شوند.

مفهوم دنباله به‌عنوان یک ماشین: یک دنباله - اعداد درواقع دستگاهی است که ورودی‌های آن اعداد طبیعی و خروجی‌های آن اعداد حقیقی‌اند. حال اگر خروجی‌های این دستگاه را به ترتیب پشت سر هم قرا دهیم، به عدد نخست نوشته شده جملهٔ اول دنباله، به عدد دوم نوشته شده جملهٔ دوم دنباله و به‌طورکلی به عدد n اُم حاصل از این دنباله، جملهٔ nاُم این دنباله گوییم.

مثال ۹. فرض کنید دستگاهی داریم که مجموعهٔ اعداد طبیعی را به ترتیب از ۱ دریافت و عملیات خاصی بر روی آن انجام می‌دهد. این دستگاه عدد دریافتی را به توان ۲ می‌رساند و یک واحد از آن کم می‌کند و سپس عدد حاصل را به‌عنوان خروجی به ما تحویل می‌دهد.

الف) ۵ خروجی اول این دستگاه را به‌عنوان دنباله‌ای از اعداد بنویسید.

ب) جمله‌های ۱۵اُم و ۱۶اُم این دنبالهٔ اعداد را مشخص کنید.

پ) جملهٔ nاُم این دنباله را بنویسید.

ت) جملهٔ چندم این دنباله ۳۶۰ است؟

پاسخ: الف)

عدد ورودی	۱	۲	۳	۴	۵
عدد خروجی	$۱^۲-۱=۰$	$۲^۲-۱=۳$	$۲^۳-۱=۷$	$۴^۲-۱=۱۵$	$۵^۲-۱=۲۴$

درنتیجه دنبالهٔ روبه‌رو حاصل می‌شود: ۰، ۳، ۷، ۱۵، ۲۴

ب) می‌دانیم ورودی ۱۵اُم عدد ۱۵ و ورودی ۱۶اُم عدد ۱۶ است، پس هرکدام را به توان ۲ می‌رسانیم و از آن‌ها یک واحد کم می‌کنیم:

$$\text{جملهٔ ۱۵اُم} = ۱۵^۲ - ۱ = ۲۲۴$$

$$\text{جملهٔ ۱۶اُم} = ۱۶^۲ - ۱ = ۲۵۵$$

پ) $$\text{ورودی } n\text{اُم} = n \Rightarrow \text{خروجی } n\text{اُم} = \text{جملهٔ } n\text{اُم} = n^۲ - ۱$$

ت) فرض کنید خروجی nاُم این دنباله ۳۶۰ است. این خروجی برحسب n، عدد $n^۲-۱$ است، پس داریم:

$$n^۲ - ۱ = ۳۶۰ \Rightarrow n^۲ = ۳۶۱ \Rightarrow n = ۱۹ \;,\; n = -۱۹$$

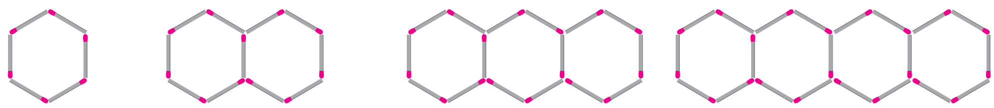
در معادلهٔ بالا جواب ۱۹- قابل‌قبول نیست. چون شمارهٔ جمله نمی‌تواند منفی باشد!

اگر دنباله‌ای را a بنامیم، جملهٔ اول آن را با نماد $a_۱$، جملهٔ دوم آن را با نماد $a_۲$ و به‌همین ترتیب جملهٔ nاُم را با نماد a_n نمایش می‌دهیم. مثلاً در مثال قبلی دنبالهٔ روبه‌رو را داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ & \ldots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۰ & ۳ & ۷ & ۱۵ & ۲۴ & \ldots & n^۲-۱ \end{array}$$

در این دنباله، جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n = n^۲ - ۱$ بیان می‌شود که در آن جملهٔ nاُم دنباله با قرار دادن شمارهٔ جملهٔ موردنظر به‌جای n حاصل می‌شود.

مثال ۱۰. با استفاده از چوب‌کبریت شکل‌های زیر ساخته شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، در هر مرحله نسبت به مرحله قبل چند چوب‌کبریت اضافه می‌شود؟

ب) با توجه به قسمت «الف» تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در ۵ شکل اول را به‌صورت دنباله‌ای از اعداد بنویسید.

پ) تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در مرحلهٔ nاُم را به‌دست آورید.*

پاسخ: الف) در هر مرحله برای ایجاد یک ۶ضلعی جدید، ۵ چوب‌کبریت به کنار ۶ ضلعی قبلی اضافه می‌شود.

ب)

$$a_۱ = ۶ \Rightarrow a_۲ = \underbrace{۶+۵}_{\text{جمله اول}} = ۱۱ \Rightarrow a_۳ = \underbrace{۱۱+۵}_{\text{جمله دوم}} = ۱۶ \Rightarrow a_۴ = \underbrace{۱۶+۵}_{\text{جمله سوم}} = ۲۱$$

$$\Rightarrow a_۵ = \underbrace{۲۱+۵}_{\text{جمله چهارم}} = ۲۶ \Rightarrow ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱, ۲۶$$

* جملهٔ عمومی یک دنباله که تنها چند جملهٔ آن را در اختیار داریم، معمولاً منحصربه‌فرد نیست و ما در اینجا ساده‌ترین چیزی که به ذهن اغلب دانش‌آموزان می‌رسد را ارائه کرده‌ایم.

تمرین‌ها

۱. درستی و نادرستی موارد زیر را بنویسید.

۱) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
۲) $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$
۳) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
۴) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}$
۵) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$
۶) $\mathbb{R} \cap \mathbb{W} = \mathbb{R}$
۷) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
۸) $\varnothing \subset \{\ \}$
۹) $\varnothing \subset A$
۱۰) $\{\{\ \}\} = \{\varnothing\}$
۱۱) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$

بازه‌ها

۲. جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش به صورت مجموعه	نمایش با بازه	نوع بازه
		$(۲,۷)$	
	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, ۲ < x \leq ۳\}$		
			
	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, ۰ \leq x\}$		
		$(-\infty, ۳]$	
		$[۲,۴)$	
			

۳. مجموعهٔ $\mathbb{R} - [۲, ۵)$ را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید و روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

۴. مجموعهٔ $A\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, -۲ < \frac{x+۱}{۲} \leq ۳\right\}$ را به‌صورت بازه نمایش دهید.

۵. اگر $A = [-۳, ۶)$ و $B = [۱, +\infty)$ و $C = (-\infty, ۴)$ مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه نمایش دهید.

الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A - B$
ت) $B \cap C$ ث) $A \cap B \cap C$ ج) $(A - C) \cap B$

۶. دو بازه مانند A و B مثال بزنید که $A\cap B=[-۱,۱)$ باشد.

۷. دو بازه مانند A و B مثال بزنید که $A\cap B=\{-۱\}$ باشد.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۸. در هر مورد متناهی و نامتناهی بودن هر مجموعهٔ داده شده را مشخص کنید.

۱) مجموعهٔ حیوانات روی کرهٔ زمین.

۲) مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۵.

۳) بازهٔ $[۵,۱-)$.

۴) $\left\{\frac{۱}{x}\middle|x\in\mathbb{Z}, -۵\le x\le ۱۰۰\right\}$

۵) $\left\{\frac{۱}{x}\middle|\frac{۱}{x}\in\mathbb{N}\,,\,۰<x\le ۲\right\}$

۹. الف) مجموعه‌ای متناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ و کوچک‌ترین عضو آن ۳- باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ و کوچک‌ترین عضو آن ۳- باشد.

ج) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۶ باشد.

د) مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که بزرگ‌ترین عضو آن ۶ باشد و کوچک‌ترین عضو برای آن تعریف نشده باشد ولی همه اعضای آن مجموعه از ۱- بزرگ‌تر باشند.

عملیات روی مجموعه‌ها

۱۰. اگر $A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ و $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $C=\{۲,۳,۵,۷\}$ و $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ باشد و بدانیم مجموعهٔ M مجموعه مرجع است، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۱) $A'=$

۲) $B'=$

۳) $C'=$

۴) $A\cup B=$

۵) $A\cap B=$

۶) $A\cup C=$

۷) $A\cap C=$

۸) $B\cup C=$

۹) $B\cap C=$

۱۰) $(B\cap C)'=$

۱۱) $A\cup(B\cap C)=$

۱۲) $(A\cup B)\cap(B\cup C)=$

۱۳) $(A'\cap B)\cap C'=$

۱۴) $A'\cap B'\cap C'=$

۱۵) $(A'\cup B')\cap C=$

۱۶) $M\cap(A'\cap C)=$

دنباله

۳۶. چهار جملهٔ اول هریک از دنباله‌های زیر که جملهٔ عمومی آن‌ها داده شده است را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$ ب) $a_n = ۳n^۲ - \frac{۱}{n}$ ج) $a_n = ۲^n - n^۲$

۳۷. جملهٔ پنجم دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{(-۱)^n}{۲n-۱}$ چند برابر جملهٔ چهاردهم آن است؟

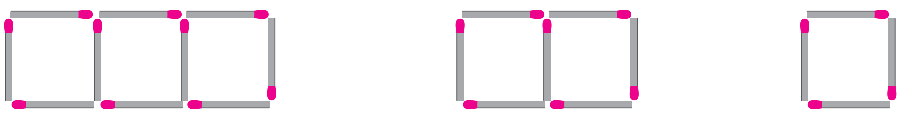
۳۸. یک جملهٔ عمومی برای هریک از دنباله‌های داده‌شده پیشنهاد کنید.

الف) $۵, ۷, ۹, ۱۱, \ldots$ ب) $۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۸}{۴}, \frac{۱۶}{۵}, \ldots$ پ) $-۱, ۴, -۹, ۱۶, \ldots$

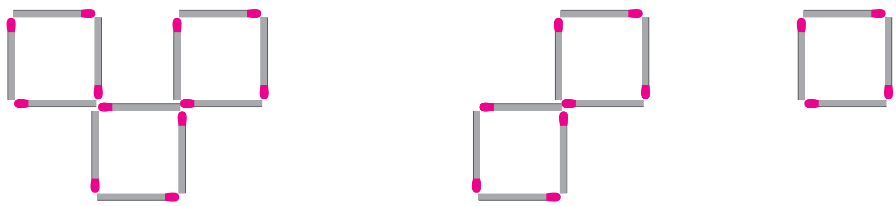
ت) $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۱۲}, \frac{۱}{۲۰}, \ldots$ ث) $۹, ۹۹, ۹۹۹, ۹۹۹۹, \ldots$

۳۹. در هریک از شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در مرحلهٔ nاُم را حدس بزنید.

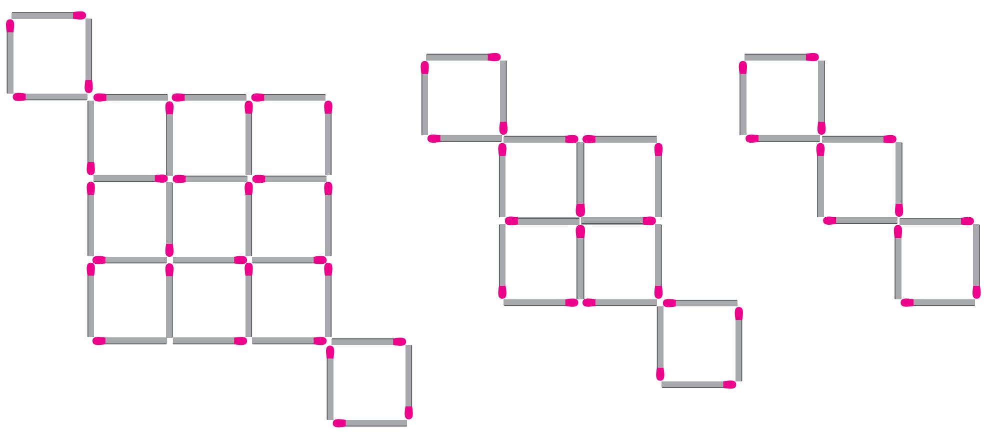
الف)



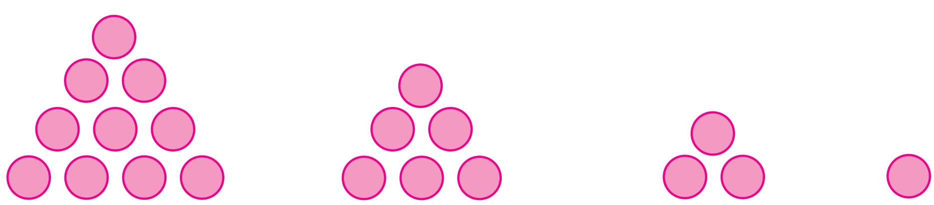
ب)

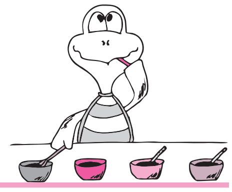


پ)



۴۰. در شکل زیر، جملهٔ عمومی تعداد توپ‌های به‌کاررفته در هر مرحله را حدس بزنید.





پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مجموعه‌ها

۱. اگر $A=\{x|x\in \mathbb{R},۲\le x<۶\}$ و $A\cap B=(۳,۶)$ و $A\cup B=[۲,۷]$ باشند، مجموعهٔ B کدام است؟

۱) $(۳,۷)$ ۲) $(۳,۷]$ ۳) $[۳,۷]$ ۴) $(۲,۷)$

۲. اگر $A=[۱,۴]$ و $B=(-۲,۳]$ و $C=[۱,۵)$ حاصل $B\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $(-۲,۳]$ ۲) $(-۲,۴]$ ۳) $(-۲,۵]$ ۴) $[۱,۳]$

۳. عدد ۳ در بازهٔ $(m+۱,۲m+۵)$ قرار دارد . حدود m کدام است؟

۱) $m>-۴$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) $m<۲$ ۴) $-۴<m<۲$

۴. مجموعهٔ $\{x\mid x\in\mathbb{R},x^۲\le ۴,x-۱>-۲\}$ بیانگر کدام بازه است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $(-۱,۲]$ ۴) $[-۱,۲]$

۵. اگر $A=[-۳,۴)$ و $B=\{x|-x\in A\}$ آنگاه مجموعهٔ $A-B$ کدام بازه است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(-۴,-۳)$ ۳) $(-۳,۳)$ ۴) $(-۴,۴)$

۶. اگر $A\cap B=\{۱,۲\}$ و $A\cap B'=\{۳,۴\}$ باشند،آنگاه مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $\{۳,۴\}$ ۳) ϕ ۴) $\{۱,۲,۳,۴\}$

۷. اگر $A\subset B$ و $C'\subset B'$ باشد، آنگاه:

۱) $A\subset C$ ۲) $C\subset A$ ۳) $C\subset B$ ۴) $B\subset A$

۸. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند، حاصل مجموعهٔ زیر برابر کدام است؟

$$[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]$$

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$ ۳) A' ۴) $\varnothing$

۹. اگر A و B دو مجموعه باشند، $A'-B$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A-B'$ ۲) $A'\cap B$ ۳) $A\cup B'$ ۴) $B'-A$

۱۰. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $(A'-B)'$ برابر کدام است؟

۱) $A\cup B'$ ۲) $A'\cup B$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۱۱. اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعهٔ $A'\cap[(B\cup A)\cup B]$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A'\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A'\cap B'$

۱۲. مجموعهٔ $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

آزمون محتوای تکمیلی

۱. در یک دنباله‌ی هندسی داریم $S_n = \frac{۲(۳^n - ۲)}{۳}$ در این صورت جمله‌ی چهارم کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲

۲. وسط‌های اضلاع یک مربع به ضلع ۴ سانتی‌متر را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا یک مربع و چهار مثلث به وجود آید و چهار مثلث را رنگ می‌کنیم. سپس در مربع جدید نیز وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده و مانند قبل عمل می‌کنیم. بعد از چند مرحله بیش از ۹۶ درصد مربع اولیه رنگ خواهد شد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳. مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله عمومی a_n برابر $n^۲ - n$ است. در این صورت حاصل $a_۲ + a_۴ + \ldots + a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۵۰۵۰ ۳) ۵۵۰۰ ۴) ۵۰۰۵

۴. صد جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را در نظر می‌گیریم. اگر مجموع چهار جمله‌ی اول با مجموع چهار جمله‌ی آخر برابر ۶۰ باشد، مجموع این صد جمله چه‌قدر است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۷۵۰ ۳) ۹۵۰ ۴) ۱۲۵۰

۵. در یک دنباله‌ی حسابی با جمله عمومی a_n اگر $a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶ = ۳۸$ و $a_۴ a_۵ = ۸۸$ باشد، آن‌گاه مجموع بیست جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۷۵۰ ۳) ۵۵۰ ۴) ۴۵۰

۶. در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۱۲ و مجموع شش جمله‌ی اول برابر ۱۲۶ است. در این صورت جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

۷. اگر جملات اول و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب $\frac{۷}{۳}$ و ۱۸۹ باشند، مجموع شش جمله اول آن چقدر است؟ (در دنباله جملات منفی نیز حضور دارند!)

۱) $-\frac{۱۲۷۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲۵۸۴}{۳}$ ۳) $-\frac{۲۵۸۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۲۷۴}{۳}$

۸. مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی ۴۰ و مجموع سه جمله بعدی آن ۵۱ است. جمله اول کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ نهایی تمرین‌های فصل ۱

۸. ۱) متناهی ۲) نامتناهی ۳) نامتناهی
۴) متناهی ۵) نامتناهی

۱۰.
۱۰) $\{۱,۲,۴,۶,۸,۹,۱۰\}$
۱۱) $\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۱۰\}$
۱۲) $\{۱,۲,۳,۵,۷,۹\}$
۱۳) $\{۱,۹\}$ ۱۴) $\varnothing$
۱۵) C ۱۶) $\{۳,۵,۷\}$

۱۱.
۴) $\{۳,۶,۸,۱۰,۱۱\}$ ۵) $\{۳,۷,۱۱\}$
۶) $\{۵,۹\}$ ۷) $\{۲,۶,۱۳\}$

۱۵. ج) $(A\cup B)-C$

۱۶.
$(A-C)\cup[(B\cap C)-A-D]\cup[(C\cap D)-B]\cup[A\cap D]\cup(A\cup B\cup C\cup D)'$

۱۷.
۱۰) A ۱۱) A

۱۸.
۱) از خاصیت جابه‌جایی استفاده کنید.
۲) از خاصیت پخشی استفاده کنید.
۳) از خاصیت پخشی استفاده کنید.
۴) از $A-B=A\cap B'$ استفاده کنید.

۱۹.
۱) راهنمایی. $\varnothing'=M$, $M'=\varnothing$
۲) از عکس پخش استفاده کنید.
۳) راهنمایی. $A'\cap B=(A\cup B')'$

۲۰. راهنمایی. $A\cup\varnothing=A$

۲۱. راهنمایی. $A\cap M=A$

۲۲.
۱) راهنمایی: از عکس پخش استفاده کنید.
۲) $A-B=A\cap B'$ از خاصیت پخشی استفاده کنید.
۳) از خاصیت جذب استفاده کنید.
۴) از خاصیت جذب استفاده کنید.
۵) از خاصیت پخشی استفاده کنید.
۶) از خاصیت جذب استفاده کنید.

۲۳. ۴

۲۴. ۴۲

۲۵. ۸

۲۶. $n(B)=۱۶\,,\,n(A-B)=۴\,,\,n(B-A)=۹$

۲۷. $n(B)=۷$

۲۸. ۲

۲۹. ۱۹

۳۰.
الف) ۵ ب) ۱۹ ج) ۲۶

۳۱.
الف) ۷ ب) ۲۳ ج) ۶۱
د) ۶۸ هـ) ۷۳

۳۲. ۴

۳۳. حداکثر علاقه‌مندان به هر سه رشته= ۶
حداکثر علاقه‌مندان به ریاضی و زیست= ۱۴

۳۴. ۲

۳۵.
الف) ۸ ب) ۴۳

۳۷. ۳-

۳۸.
ت) $\dfrac{۱}{n^۲+n}$ ث) $a_n=۱۰^n-۱$

۳۹.
پ) $a_n=۲n(n+۱)+۸$

۴۰. $a_n=\dfrac{n(n+۱)}{۲}$

۴۱. مرحله ۲۱

۴۲. $a_{۱۱}=۱۰+(۶-۱)\times ۲۴=۱۳۰$

۴۳. $t_{۱۱}=۱۱^۲+۱=۱۲۲$

۴۴. $a_{۱۱}==۱۱^۲+۲=۱۲۳$

۴۵. $t_۷+t_{۱۳}-t_{۱۶}=۱۰+۴۴-۷۰=-۱۶$

۴۶. $n=۲۴$

۴۷. غ ق ق $n=-\dfrac{۵}{۲}$ / ق ق $n=۶$

۴۸. $a_۷=۱۶\,,\,a_۵=۷$

۵۱. $a_{n+۱}=\dfrac{a_n+۱۶۰۰}{۲}$

۵۲. ۵ راهنمایی: مخرج کسر را گویا کنید.

۵۳. $\dfrac{۲۰}{۲۱}$

۵۴.
الف) حسابی نیست
ب) حسابی است. $a_n=-۳n-۱۲$
پ) حسابی است. $a_n=\sqrt{۳}n-\sqrt{۳}$
ت) حسابی است. $a_n=-۲$

۵۵.
الف) بله ـ ۳ ب) خیر
پ) بله ـ $\frac{۱}{۲}$ ت) خیر

۵۶.
ب) ۹۸ پ) ۲۷۹ ت) خیر

۵۷. ۷

۵۸. $a_n=۳n+۱$

۳۲. $\frac{۵۵}{۲۱۶}$

۳۳. $\frac{۲۰}{۲۱۶}$

۳۴. $\frac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۱۸}{۱}}{\binom{۲۲}{۸}}$

۳۵. $\frac{\binom{۱۰}{۴}\binom{۱۲}{۴}}{\binom{۲۲}{۸}}$

۳۶. الف) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ب) $\frac{۱۱}{۱۲}$

۳۷. $\frac{۳}{۷}$

۳۸. $\frac{۳}{۴}$

۳۹. $\frac{۲}{۹}$

۴۰.

الف) $\frac{\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۵}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۶}}$ ب) $۱-\frac{\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۵}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۶}}$

۴۱. الف) ۰/۱ ب) ۰/۵

۴۲. الف) $\frac{۵}{۸}$ ب) $\frac{۳}{۸}$

ج) $\frac{۱}{۸}$ د) $\frac{۳}{۸}$

۴۳. الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$

ج) $\frac{۱}{۶}$ د) $\frac{۵}{۶}$

۴۴. الف) $\frac{۲}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۳}$

۴۵. $\frac{۱}{۸}$

۴۶. ۰/۶۱

۴۷. الف) ۰/۳۳ ب) ۰/۲

ج) ۰/۴۷ د) ۰/۲۷

هـ) ۰/۵۳ و) ۰/۴۱

۴۸. ۰/۷۴

۴۹. ۰/۵۳۳

۵۰. ۰/۱۷۲

۵۱. الف) ۰/۰۵ ب) ۰/۷

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول

۱. ۲	۲. ۲	۳. ۲	۴. ۳	۵. ۱	۶. ۴	۷. ۱	۸. ۱	۹. ۴	۱۰. ۴	۱۱. ۱	۱۲. ۱	۱۳. ۴	۱۴. ۴	۱۵. ۴
۱۶. ۲	۱۷. ۱	۱۸. ۳	۱۹. ۱	۲۰. ۴	۲۱. ۱	۲۲. ۲	۲۳. ۴	۲۴. ۴	۲۵. ۳	۲۶. ۳	۲۷. ۱	۲۸. ۲	۲۹. ۲	۳۰. ۳
۳۱. ۲	۳۲. ۳	۳۳. ۳	۳۴. ۴	۳۵. ۳	۳۶. ۴	۳۷. ۴	۳۸. ۲	۳۹. ۴	۴۰. ۳	۴۱. ۲	۴۲. ۴	۴۳. ۳	۴۴. ۱	۴۵. ۲
۴۶. ۲	۴۷. ۲	۴۸. ۱	۴۹. ۲	۵۰. ۳	۵۱. ۲	۵۲. ۴	۵۳. ۲	۵۴. ۳	۵۵. ۴	۵۶. ۳	۵۷. ۱	۵۸. ۳	۵۹. ۱	۶۰. ۴
۶۱. ۴	۶۲. ۲	۶۳. ۲	۶۴. ۲	۶۵. ۲	۶۶. ۳	۶۷. ۱	۶۸. ۴	۶۹. ۲	۷۰. ۲	۷۱. ۴	۷۲. ۳	۷۳. ۲	۷۴. ۳	۷۵. ۳
۷۶. ۳	۷۷. ۲	۷۸. ۲	۷۹. ۳	۸۰. ۲	۸۱. ۱	۸۲. ۳	۸۳. ۴	۸۴. ۱	۸۵. ۱	۸۶. ۱	۸۷. ۱	۸۸. ۲	۸۹. ۴	۹۰. ۱
۹۱. ۱	۹۲. ۳	۹۳. ۳	۹۴. ۴	۹۵. ۲	۹۶. ۴									

پاسخ آزمون فصل اول

۱. ۱	۲. ۱	۳. ۳	۴. ۳	۵. ۲	۶. ۲	۷. ۴	۸. ۲	۹. ۱	۱۰. ۲	۱۱. ۳
۱۲. ۲	۱۳. ۳	۱۴. ۲	۱۵. ۲	۱۶. ۲	۱۷. ۴	۱۸. ۲	۱۹. ۱	۲۰. ۳	۲۱. ۱	

پاسخ آزمون محتوای تکمیلی فصل اول

۱. ۳	۲. ۲	۳. ۱	۴. ۲	۵. ۳	۶. ۲	۷. ۱	۸. ۴		

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم

۱. ۱	۲. ۲	۳. ۲	۴. ۴	۵. ۲	۶. ۲	۷. ۲	۸. ۲	۹. ۲	۱۰. ۲	۱۱. ۳	۱۲. ۱	۱۳. ۳	۱۴. ۴	۱۵. ۱
۱۶. ۱	۱۷. ۳	۱۸. ۲	۱۹. ۳	۲۰. ۲	۲۱. ۱	۲۲. ۲	۲۳. ۳	۲۴. ۲	۲۵. ۱	۲۶. ۲	۲۷. ۲	۲۸. ۳	۲۹. ۲	۳۰. ۴
۳۱. ۲	۳۲. ۲	۳۳. ۲	۳۴. ۴	۳۵. ۴	۳۶. ۱	۳۷. ۱	۳۸. ۲	۳۹. ۴	۴۰. ۱	۴۱. ۳	۴۲. ۱	۴۳. ۲	۴۴. ۲	۴۵. ۴
۴۶. ۴	۴۷. ۳	۴۸. ۱	۴۹. ۳	۵۰. ۲	۵۱. ۴	۵۲. ۱	۵۳. ۳	۵۴. ۳	۵۵. ۱	۵۶. ۱	۵۷. ۲	۵۸. ۱	۵۹. ۳	۶۰. ۲
۶۱. ۳	۶۲. ۱	۶۳. ۳	۶۴. ۴	۶۵. ۲	۶۶. ۱	۶۷. ۱	۶۸. ۳	۶۹. ۳	۷۰. ۳	۷۱. ۴	۷۲. ۱	۷۳. ۴	۷۴. ۳	۷۵. ۴
۷۶. ۴	۷۷. ۱	۷۸. ۲	۷۹. ۲	۸۰. ۱	۸۱. ۴	۸۲. ۲	۸۳. ۱	۸۴. ۱	۸۵. ۴	۸۶. ۴	۸۷. ۱	۸۸. ۴	۸۹. ۴	۹۰. ۱
۹۱. ۴	۹۲. ۲	۹۳. ۱												