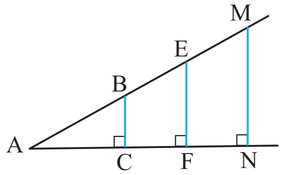
درس ۱

نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات یکی از مباحث شیرین و پرکاربرد ریاضی است که در اولین برخورد کمی با آدم غریبی می‌کند! و در عین حال، تا زمانی که قصد دارید ریاضی بخوانید ول کنتان نیست! پس سعی کنید از همین درس اول، با مثلثات دوست شوید.



کتاب درسی ریاضی ۱، داستان نسبت‌های مثلثاتی را بر مفهوم تشابه بنا کرده است. وقتی دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر دو مثلث با هم برابر است. هنگام صحبت در مورد نسبت‌های مثلثاتی، با مثلث‌های قائم‌الزاویه کار داریم. در شکل مقابل، از نقاط مختلف ضلع بالایی زاویه بر ضلع دیگر این زاویه عمود کرده‌ایم تا مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شود. این مثلث‌ها با هم متشابه‌اند. چون زاویهٔ A در همهٔ آن‌ها مشترک است و علاوه بر آن یک زاویهٔ قائمهٔ مساوی هم دارند. نسبت تشابه را به شکل‌های مختلف می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}=\frac{MN}{AM}=\cdots$$ (نسبت اضلاع مقابل $\hat{A}$ به وتر)

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AE}=\frac{AN}{AM}=\cdots$$ (نسبت اضلاع مجاور $\hat{A}$ به وتر)

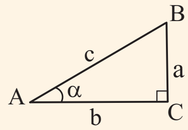
$$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{AF}=\frac{MN}{AN}=\cdots$$ (نسبت اضلاع مقابل $\hat{A}$ به مجاور آن)

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{EF}=\frac{AN}{MN}=\cdots$$ (نسبت اضلاع مجاور $\hat{A}$ به مقابل آن)

در واقع هر یک از چهار نسبت بالا برابر با مقداری ثابت است که آن‌ها را به ترتیب سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ A می‌نامیم.

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

برای زاویه‌ای مانند α از یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:



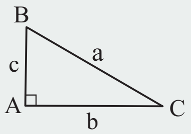
$$\sin\alpha=\frac{\alpha\ \text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{a}{c} \qquad \cos\alpha=\frac{\alpha\ \text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha=\frac{\alpha\ \text{ضلع مقابل}}{\alpha\ \text{ضلع مجاور}}=\frac{a}{b} \qquad \cot\alpha=\frac{\alpha\ \text{ضلع مجاور}}{\alpha\ \text{ضلع مقابل}}=\frac{b}{a}$$

همان‌طور که می‌بینید، تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگر می‌باشند.

یک توضیح گیج‌کننده

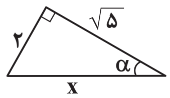
رأس‌های یک مثلث را با حروف بزرگ انگلیسی و طول ضلع‌ها را با حروف کوچک انگلیسی نشان می‌دهیم. a طول ضلع مقابل به رأس A، b طول ضلع مقابل به رأس B و c طول ضلع مقابل به رأس C است.



چون ما آدم‌ها ذاتاً تنبل هستیم، خیلی وقت‌ها حالش را نداریم مثلاً بگوییم «طول ضلع AB» و به جای آن می‌گوییم «ضلع AB». AB یک ضلع است، یک پاره‌خط و طول آن یک عدد مثبت است. (طول ضلع AB را با |AB| نشان می‌دهیم.) در واقع در این‌گونه موارد از صنعت «مَجاز» استفاده می‌کنیم! یعنی مُجازیم که مَجازاً به جای «طول ضلع AB» بگوییم «ضلع AB» و شنونده باید عاقل باشد!!

داستان رأس و زاویه هم این‌طوری است. خیلی وقت‌ها حالش را نداریم زاویهٔ A را با $\hat{A}$ نشان دهیم و با همان A نشان می‌دهیم! A رأس است و $\hat{A}$ زاویه. البته اگر واژهٔ «زاویه» را به کار ببریم همان آی خالی درست است: «زاویهٔ A».

مثال در شکل زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را بیابید.



پاسخ

$$x^۲=۲^۲+(\sqrt{۵})^۲=۹\Rightarrow \text{وتر}: x=۳$$

$$\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۲}{۳}\ ,\ \cos\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال در هر یک از موارد زیر، مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه فرض شده است. با استفاده از جدول و اطلاعات داده شده، مجهول‌ها را بیابید.

الف) $a=۳\ ,\ b=۲\ ,\ \tan\hat{C}=?$

ب) $a=۹\ ,\ c=\sqrt{۱۷}\ ,\ \sin\hat{B}=?$

ج) $b=۱\ ,\ c=۲\ ,\ \sin\hat{B}+\cos\hat{C}=?$

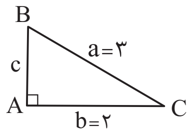
د) $\hat{C}=۲۳^\circ\ ,\ a=۵\ ,\ b=?$

هـ) $\hat{B}=۴۰^\circ\ ,\ a=۵\ ,\ b=?$

و) $\hat{C}=۴۰^\circ\ ,\ b=۵\ ,\ a=?$

	۲۳°	۴۰°
سینوس	۰/۴	۰/۶۴
کسینوس	۰/۹	۰/۷۶
تانژانت	۰/۴	۰/۸۴

پاسخ



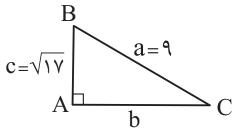
الف) $$\tan\hat{C}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{c}{b}=\frac{c}{۲}$$

c را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$b^۲+c^۲=a^۲\Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۳^۲-۲^۲=۵\Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

پس $\tan\hat{C}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$.

ب)

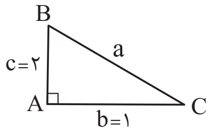


$$\sin\hat{B}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۹}$$

$$b^۲+c^۲=a^۲\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۹^۲-(\sqrt{۱۷})^۲=۸۱-۱۷=۶۴\Rightarrow b=\sqrt{۶۴}=۸$$

پس $\sin\hat{B}=\frac{b}{۹}=\frac{۸}{۹}$.

ج)



$$\sin\hat{B}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{b}{a}=\frac{۱}{a}\qquad \cos\hat{C}=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{b}{a}=\frac{۱}{a}$$

$$\sin\hat{B}+\cos\hat{C}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a}=\frac{۲}{a}$$

از طرفی:

$$a^۲=b^۲+c^۲=۱^۲+۲^۲=۵\Rightarrow a=\sqrt{۵}$$

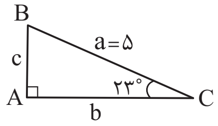
پس:

$$\sin\hat{B}+\cos\hat{C}=\frac{۲}{a}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

یک سؤال: چرا $\sin\hat{B}$ با $\cos\hat{C}$ مساوی شد؟

جواب: چون این دو زاویه متمم‌اند. اگر دو زاویه متمم باشند (جمعشان ۹۰° شود)، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است. همیشه! کمی جلوتر، این مطلب را جدی می‌گیریم!

د)

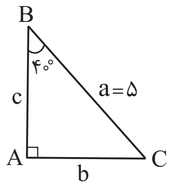


با توجه به جدول، $\cos ۲۳^\circ$ تقریباً ۰/۹ است. پس:

$$\cos\hat{C}=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}\Rightarrow\cos ۲۳^\circ=\frac{b}{a}$$

$$۰/۹=\frac{b}{۵}\Rightarrow b=۴/۵$$

هـ)

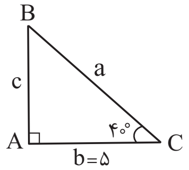


با توجه به جدول، $\sin ۴۰^\circ$ تقریباً ۰/۶۴ است. پس:

$$\sin\hat{B}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}\Rightarrow\sin ۴۰^\circ=\frac{b}{a}$$

$$۰/۶۴=\frac{b}{۵}\Rightarrow b=۳/۲$$

و)



با توجه به جدول، $\cos ۴۰^\circ$ تقریباً با ۰/۷۶ است، پس:

$$\cos\hat{C}=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}\Rightarrow\cos ۴۰^\circ=\frac{b}{a}$$

$$۰/۷۶=\frac{۵}{a}\Rightarrow a=۶/۵۷$$

تغییرات نسبت‌های مثلثاتی

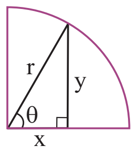
مثال **با رسم شکل‌های مناسب، به سؤالات زیر جواب دهید.**

الف) وقتی اندازهٔ یک زاویهٔ حاده زیاد می‌شود، اندازهٔ هر یک از نسبت‌های مثلثاتی آن چه تغییری می‌کند؟

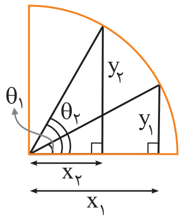
ب) اگر زاویه‌ای به صفر نزدیک شود، هر یک از نسبت‌های مثلثاتی آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

ج) اگر زاویه‌ای به ۹۰ درجه نزدیک شود، هر یک از نسبت‌های مثلثاتی آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پاسخ الف) ربع دایرهٔ مقابل به شعاع ۱ را در نظر بگیرید. ما فعلاً نسبت‌های مثلثاتی را فقط در مثلث قائم‌الزاویه می‌شناسیم، پس برای رسیدن به سینوس و کسینوس θ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای روی شکل می‌سازیم که θ یک زاویهٔ آن باشد. حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده، داریم:



$$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{y}{r}=\frac{y}{۱}=y\quad,\quad\cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{x}{r}=\frac{x}{۱}=x\quad,\quad\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{y}{x}$$



اگر زاویهٔ θ بزرگ شود، ضلع مقابل آن بزرگ‌تر و ضلع مجاورش کوچک‌تر می‌شود. یعنی با افزایش θ، y زیاد و x کم می‌شود. برای درک این مطلب، شکل مقابل را نگاه کنید. اول، $\theta_۱$، $x_۱$ و $y_۱$ را داریم، بعد با افزایش زاویه به $\theta_۲$ و $x_۲$ و $y_۲$ رسیده‌ایم. دقت کنید که چون در ربع دایره قرار داریم، وتر مثلث قائم‌الزاویه ثابت مانده است.

$$\theta_۲>\theta_۱\Rightarrow«y_۲>y_۱\quad,\quad x_۲<x_۱»$$

از طرفی، گفتیم $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. پس با افزایش θ، y و در نتیجه $\sin\theta$ زیاد می‌شود اما x و در نتیجه $\cos\theta$ کم می‌شود.

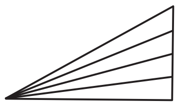
$$\theta\uparrow\Rightarrow y\uparrow\xRightarrow{\sin\theta=y}\sin\theta\uparrow$$

$$\theta\uparrow\Rightarrow x\downarrow\xRightarrow{\cos\theta=x}\cos\theta\downarrow$$

در مورد تانژانت هم، وقتی اندازهٔ زاویهٔ حاده زیاد می‌شود، طول ضلع مقابل آن افزایش می‌یابد و طول ضلع مجاورش کم می‌شود. کسری که صورتش زیاد و مخرجش کم می‌شود، افزایش می‌یابد:

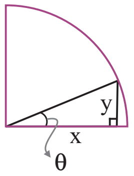
$$\theta\uparrow \Rightarrow «y\uparrow, x\downarrow» \Rightarrow \frac{y}{x}\uparrow \Rightarrow \tan\theta\uparrow$$

یک جور دیگر هم می‌شد فهمید تانژانت زیاد می‌شود؛ شکل روبه‌رو را ببینید:



در این شکل، وقتی اندازهٔ زاویهٔ حاده بزرگ می‌شود، ضلع مجاورش ثابت می‌ماند و ضلع مقابلش زیاد می‌شود. پس چون تانژانت، نسبت ضلع مقابل به مجاور است، تانژانت هم زیاد می‌شود. داستان کتانژانت، برعکس است!

ب) وقتی θ به صفر نزدیک می‌شود، y به صفر و x به شعاع دایره یعنی ۱ نزدیک می‌شود. پس $\sin\theta$ به صفر و $\cos\theta$ به یک نزدیک می‌شود. اگر نزدیک شدن به صفر را با «$\to \circ$» و نزدیک شدن به ۱ را با «$\to ۱$» نشان دهیم، می‌توانیم حرف‌های بالا را این‌طوری بنویسیم:



$$\theta \to \circ \Rightarrow y \to \circ \xRightarrow{\sin\theta = y} \sin\theta \to \circ$$

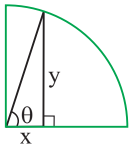
$$\theta \to \circ \Rightarrow x \to ۱ \xRightarrow{\cos\theta = x} \cos\theta \to ۱$$

همچنین وقتی زاویه به صفر نزدیک می‌شود، طول ضلع روبه‌روی آن هم به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین تانژانت زاویه به صفر نزدیک می‌شود.

$$\text{تانژانت} = \frac{\text{ضلع مقابل} \to \text{به سمت صفر}}{\text{ضلع مجاور} \to \text{به سمت ۱}} \Rightarrow \text{حرکت تانژانت به سمت صفر}$$

کتانژانت، هی بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود.

ج) وقتی θ به ۹۰° نزدیک می‌شود، y به شعاع دایره یعنی ۱ و x به صفر نزدیک می‌شود. پس $\sin\theta$ به یک و $\cos\theta$ به صفر نزدیک می‌شود.



$$\theta \to ۹۰^\circ \Rightarrow y \to ۱ \xRightarrow{\sin\theta = y} \sin\theta \to ۱$$

$$\theta \to ۹۰^\circ \Rightarrow x \to \circ \xRightarrow{\cos\theta = x} \cos\theta \to \circ$$

برای تانژانت چه اتفاقی می‌افتد؟ تانژانت به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شود! چون مدام بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و بی‌حد و مرز از هر عددی که فکرش را بکنید، می‌تواند بزرگ‌تر شود، چون ضلع مقابل زاویه بزرگ می‌شود و ضلع مجاورش همین‌طور کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به سمت صفر می‌رود. پس نسبت ضلع مقابل به مجاور هم هی قد می‌کشد! کتانژانت به صفر نزدیک می‌شود.

یک‌کم جمع‌بندی

- وقتی زاویهٔ حاده‌ای بزرگ می‌شود (و همچنان حاده می‌ماند)، سینوس و تانژانت آن افزایش و کسینوس آن کاهش می‌یابد.
- وقتی زاویهٔ حاده‌ای به صفر نزدیک می‌شود، سینوس و تانژانت آن به صفر و کسینوس آن به ۱ نزدیک می‌شود.
- وقتی زاویهٔ حاده‌ای به ۹۰° نزدیک می‌شود، سینوس آن به ۱ و کسینوس آن به صفر نزدیک می‌شود اما تانژانت آن سر به فلک می‌گذارد، یعنی خیلی بزرگ می‌شود و به سمت ناکجاآباد (همان بی‌نهایتی که در فصل اول گفتیم) می‌رود.
- نسبت‌های مثلثاتی هر زاویهٔ حاده مثبت است. تانژانت یک زاویهٔ حاده هر عدد مثبتی می‌تواند باشد، اما سینوس و کسینوس آن حتماً بین صفر و یک است. (کلاً سینوس و کسینوس بیشتر از ۱ و کم‌تر از -۱ نمی‌شوند.)
- بیشتر بدانیم:

$\sin\circ^\circ = \circ$، $\cos\circ^\circ = ۱$، $\tan\circ^\circ = \circ$ و $\cot\circ^\circ$ تعریف نشده است. همچنین $\sin ۹۰^\circ = ۱$، $\cos ۹۰^\circ = \circ$، $\tan ۹۰^\circ$ تعریف نشده است و $\cot ۹۰^\circ = \circ$.

این‌ها را گفتم که مطالب بالا را بهتر درک کنید!

مثال **زاویه‌های زیر را در نظر بگیرید.**

$$۱^\circ, ۱۰^\circ, ۲۰^\circ, ۳۵^\circ, ۵۰^\circ, ۷۰^\circ, ۸۵^\circ, ۸۹^\circ$$

الف) زاویه‌ها را برحسب اندازهٔ سینوس آن‌ها (از کوچک به بزرگ) مرتب کنید.

ب) زاویه‌ها را برحسب اندازهٔ کسینوس آن‌ها (از کوچک به بزرگ) مرتب کنید.

ج) زاویه‌ها را برحسب اندازهٔ تانژانت آن‌ها (از کوچک به بزرگ) مرتب کنید.

د) سینوس کدام زاویه به صفر نزدیک‌تر است؟ سینوس کدام زاویه به ۱ نزدیک‌تر است؟

هـ) کسینوس کدام زاویه به صفر نزدیک‌تر است؟ کسینوس کدام زاویه به ۱ نزدیک‌تر است؟

و) سینوس کدام زاویه بزرگ‌تر از ۱ است؟ کسینوس کدام زاویه کوچک‌تر از صفر است؟

پاسخ

الف) زاویه‌ها از چپ به راست برحسب اندازهٔ سینوسشان (از کوچک به بزرگ) مرتب هستند!

ب) باید زاویه‌ها را از بزرگ به کوچک بچینیم:

$$۸۹^\circ, ۸۵^\circ, ۷۰^\circ, ۵۰^\circ, ۳۵^\circ, ۲۰^\circ, ۱۰^\circ, ۱^\circ$$

ج) زاویه‌ها از چپ به راست برحسب اندازهٔ تانژانتشان (از کوچک به بزرگ) مرتب هستند.

د) سینوس ۱° به صفر و سینوس ۸۹° به ۱ نزدیک است.

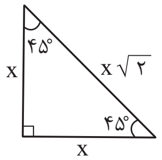
هـ) کسینوس ۸۹° به صفر و کسینوس ۱° به ۱ نزدیک است.

و) سینوس هیچ زاویه‌ای بزرگ‌تر از ۱ نیست! هم‌چنین چون همهٔ زاویه‌ها حاده‌اند، کسینوس همهٔ آن‌ها مثبت است و در بین زاویه‌های داده شده، زاویه‌ای که کسینوسش کوچک‌تر از صفر باشد، یافت می‌نشود! گفت آن‌چه یافت می‌نشود آنم آرزوست!

عجب سؤالی بود! همه‌اش سرکاری!!

سه زاویهٔ معروف!

مثال در یک حرکت ضربتی (!) با رسم شکل‌های مناسب، نسبت‌های مثلثاتی سه زاویهٔ معروف ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه را حساب بفرمایید.

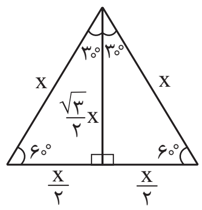


پاسخ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم، یعنی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن با هم مساوی است و به کمک آن نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب می‌کنیم. ما طول هر یک از این دو ضلع را یک عدد دلخواه و مثبت مانند x می‌گیریم. با توجه به رابطهٔ فیثاغورس، مجذور طول وتر می‌شود $x^۲+x^۲=۲x^۲$، پس طول وتر $\sqrt{۲x^۲}=x\sqrt{۲}$ است.

هم‌چنین در هر مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه‌ای که روبه‌روی دو ساق (دو ضلع مساوی) هستند، با یکدیگر مساوی‌اند. ما اندازهٔ هر یک از این زاویه‌ها را α می‌گیریم. حالا چون مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰° است، $\alpha+\alpha+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$. پس هر کدام از زاویه‌های حادهٔ مثلث ۴۵°اند. اطلاعاتی که روی شکل بالا پیاده شده‌اند، با همین استدلال‌ها به‌دست آمده‌اند. حالا می‌رویم سراغ اصل مطلب، یعنی محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° به کمک شکل بالا. فرقی نمی‌کند کدام زاویهٔ ۴۵° را انتخاب کنید. ده بیست سی چهل کنید و یکی را انتخاب نمایید. این هم ادامهٔ داستان:

$$\sin ۴۵^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{x}{x\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۱\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad \cos ۴۵^\circ=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{x}{x\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۱\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{x}{x}=۱$$



و حالا برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه، یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌کشیم؛ سه ضلع هر مثلث متساوی‌الاضلاع با هم مساوی‌اند. طول هر یک از این سه ضلع را عدد دلخواه و مثبت x می‌گیریم. چون ما نسبت‌های مثلثاتی را فعلاً فقط در مثلث قائم‌الزاویه می‌شناسیم، یک ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شود. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه هم هست. پس این ارتفاعی که رسم کردیم ضلع مقابل را که طولش x بود نصف می‌کند و دو پاره‌خط به طول $\frac{x}{۲}$ می‌سازد. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، نیمساز هم است. پس این ارتفاعی که رسم کردیم، زاویهٔ مثلث را که ۶۰° است (در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، هر زاویه ۶۰° است)، نصف می‌کند و دو تا زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. این همه در مورد این ارتفاع بیچاره حرف زدیم، اما هنوز طولش را حساب نکرده‌ایم! برای رسیدن به طول این ارتفاع در یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه، فیثاغورس می‌زنیم:

$$(\text{ارتفاع})^۲+(\frac{x}{۲})^۲=x^۲\Rightarrow(\text{ارتفاع})^۲=x^۲-(\frac{x}{۲})^۲=x^۲-\frac{x^۲}{۴}=\frac{۳x^۲}{۴}\Rightarrow \text{ارتفاع}=\sqrt{\frac{۳x^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$$

اطلاعاتی که روی شکل پیاده شده‌اند، با همین جان‌کندن‌ها به‌دست آمده‌اند. حالا همه چیز برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه آماده است. یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه را انتخاب کنید و داستان زیر را بخوانید!

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\qquad \sin ۳۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{\frac{x}{۲}}{x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{\frac{x}{۲}}{x}=\frac{۱}{۲}\qquad \cos ۳۰^\circ=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}{\frac{۱}{۲}x}=\sqrt{۳}\qquad \tan ۳۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\frac{x}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{\frac{۱}{۲}x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\qquad \cot ۳۰^\circ=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}{\frac{x}{۲}}=\sqrt{۳}$$

نسبت‌های مثلثاتی این سه زاویهٔ معروف را باید حفظ باشیم:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

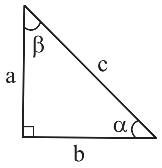
همان‌طور که می‌بینید، سینوس و کسینوس 30° و 60° جابه‌جا شدهٔ یکدیگرند. تانژانت و کتانژانت این دو زاویه نیز همین وضع را دارند. کلاً در مورد هر دو زاویه که جمعشان 90° می‌شود، همین وضعیت برقرار است. مثال روبه‌رو را ببینید.

مثال اگر α و β زاویه‌های حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، نشان دهید:

الف) $\sin\alpha = \cos\beta$ ب) $\cos\alpha = \sin\beta$

ج) $\tan\alpha = \cot\beta$ د) $\cot\alpha = \tan\beta$

پاسخ شکل روبه‌رو را ببینید.



حالا نسبت‌های مثلثاتی لازم در هر قسمت را تشکیل می‌دهیم:

الف) $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\alpha\ \text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \dfrac{a}{c} \\ \cos\beta = \dfrac{\beta\ \text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \dfrac{a}{c} \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$

ب) $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\alpha\ \text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \dfrac{b}{c} \\ \sin\beta = \dfrac{\beta\ \text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \dfrac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta$

ج) $\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\alpha\ \text{طول ضلع مقابل}}{\alpha\ \text{طول ضلع مجاور}} = \dfrac{a}{b} \\ \cot\beta = \dfrac{\beta\ \text{طول ضلع مجاور}}{\beta\ \text{طول ضلع مقابل}} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \cot\beta$

د) $\begin{cases} \cot\alpha = \dfrac{\alpha\ \text{طول ضلع مجاور}}{\alpha\ \text{طول ضلع مقابل}} = \dfrac{b}{a} \\ \tan\beta = \dfrac{\beta\ \text{طول ضلع مقابل}}{\beta\ \text{طول ضلع مجاور}} = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \cot\alpha = \tan\beta$

جمع‌بندی متمم‌ها!

- اگر دو زاویهٔ حاده متمم یکدیگر باشند، یعنی جمعشان 90° شود، آن‌گاه سینوس هر یک با کسینوس دیگری برابر است و تانژانت هر یک با کتانژانت دیگری:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta \\ \tan\alpha = \cot\beta \\ \cot\alpha = \tan\beta \end{cases}$$

- این‌طوری هم می‌توانستم برایتان بگویم که برای هر زاویهٔ حاده مانند α:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$$

مثال درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin 11^\circ = \cos 79^\circ$ ب) $\tan 23^\circ = \cot 77^\circ$

ج) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ د) $\tan 1^\circ . \tan 89^\circ = 1$

پاسخ الف) درست است. 11° و 79° جمعشان می‌شود 90° و در واقع متمم یکدیگرند. پس سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر می‌باشد.

ب) درست نیست. متمم 23° می‌شود 67° نه 77°. باید می‌گفت:

$\tan 23^\circ = \cot 67^\circ$

ج) درست است. 45° متمم خودش است! اصلاً بلدیم که:

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

د) درست است. 1° و 89° جمعشان می‌شود 90° و در واقع متمم یکدیگرند. پس $\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$. از طرفی کتانژانت عکس تانژانت است و می‌توانیم بنویسیم $\cot 89^\circ = \frac{1}{\tan 89^\circ}$، پس $\tan 1^\circ = \frac{1}{\tan 89^\circ}$ و در نتیجه:

$\tan 1^\circ . \tan 89^\circ = 1$

حالا که داستان متمم‌ها را یاد گرفتید، نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30°، 45° و 60° را راحت‌تر می‌توانید حفظ کنید. بد نیست با یک مثال خودتان را محک بزنید!

مثال مقدار عددی عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$ ب) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

پاسخ

الف) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{3}{3}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

- $\sin^n\alpha$ همان $(\sin\alpha)^n$ است. $\cos^n\alpha$ همان $(\cos\alpha)^n$ است.
- $\tan^n\alpha$ همان $(\tan\alpha)^n$ است. $\cot^n\alpha$ همان $(\cot\alpha)^n$ است. تمام!
- $\sin\alpha^n$ همان $(\sin\alpha)^n$ نیست!
- $\cos\alpha^n$، $\tan\alpha^n$ و $\cot\alpha^n$ هم همان $(\cos\alpha)^n$، $(\tan\alpha)^n$ و $(\cot\alpha)^n$ نیستند.
- کلاً هر عملی که روی زاویهٔ جلوی نسبت مثلثاتی (α) انجام می‌شود، روی خود نسبت مثلثاتی انجام نمی‌شود. تمام!

مثال دانش‌آموزی در یک کتاب، این سؤال را دید: «اگر $\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$ و $\cos\beta=\frac{۲}{۳}$ باشد، $\cos(\alpha+\beta)$، $\cos\alpha^۳$، $\cos^۲\beta$ و $\cos۴\beta$ برابر با چه اعدادی هستند؟» این دانش‌آموز، در جواب سؤال بالا نوشت:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}=۱$$

$$\cos\alpha^۳=(\cos\alpha)^۳=(\frac{۱}{۳})^۳=\frac{۱}{۲۷}$$

$$\cos^۲\beta=(\cos\beta)^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\cos۴\beta=۴\cos\beta=۴(\frac{۲}{۳})=\frac{۸}{۳}$$

آیا جواب‌های دانش‌آموز درست هستند؟

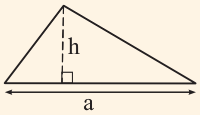
پاسخ فقط یکی از جواب‌های دانش‌آموز درست است:

$$\cos^۲\beta=(\cos\beta)^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

بقیهٔ جواب‌ها جفنگیات مهمل هستند! در حالت کلی، یک نسبت مثلثاتیِ مجموع (یا تفاضل) دو زاویه با مجموع (یا تفاضل) همان نسبت مثلثاتیِ دو زاویه مساوی نیست. نمونه‌اش همین کسینوس؛ در حالت کلی، $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$. مثلاً $\cos(۳۰^\circ+۳۰^\circ)=\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ اما می‌بینید که $\cos(۳۰^\circ+۳۰^\circ)\neq\cos۳۰^\circ+\cos۳۰^\circ$. در مورد $\cos\alpha^۳$ هم باید خدمتتان عرض کنم که این عبارت، $\cos(\alpha^۳)$ است نه $(\cos\alpha)^۳$. یعنی اول زاویهٔ α به توان ۳ می‌رسد، بعد کسینوس زاویهٔ حاصل محاسبه می‌شود. نمایش دیگر $(\cos\alpha)^۳$، $\cos^۳\alpha$ است. $\cos۴\beta$ را هم که نمی‌دانم این دانش‌آموز گُل ما روی چه حسابی نوشته $۴\cos\beta$. مگر شهر هِرت است که عدد از جلوی کسینوس بپرد پشتش؟!

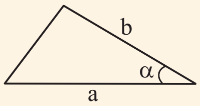
مساحت مثلث

- اگر طول ارتفاع و قاعدهٔ نظیر آن را در یک مثلث بدانیم، مثل آب‌خوردن مساحت مثلث را پیدا می‌کنیم:



$$S=\frac{۱}{۲}a\cdot h$$

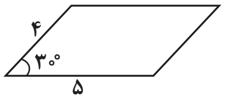
- اگر این‌ها را ندانیم، چه کنیم؟! وقتی طول دو ضلع از یک مثلث و زاویهٔ بین آن‌ها را داریم، باز می‌توانیم مساحت مثلث را مثل آب‌خوردن پیدا کنیم. در شکل زیر، ارتفاع وارد بر ضلع a، برابر می‌شود با $h=b\sin\alpha$ و در نتیجه می‌توانیم بگوییم:



$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$$

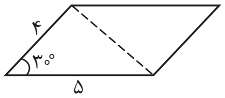
یعنی مساحت مثلث می‌شود نصف حاصل‌ضرب دو ضلع، ضرب در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

مثال مساحت متوازی‌الاضلاع روبه‌رو را بیابید.



پاسخ قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌مساحت قسمت می‌کند:

مساحت یکی از مثلث‌ها، می‌شود:



$$S=\frac{۱}{۲}\times۴\times۵\times\sin۳۰^\circ=۵$$

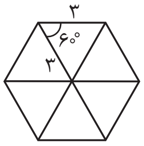
پس مساحت متوازی‌الاضلاع، می‌شود:

$$S_{\text{کل}}=۲\times۵=۱۰$$

کلاً یادمان باشد که مساحت متوازی‌الاضلاع با اضلاع a و b و زاویهٔ حادهٔ α، می‌شود: $S=ab\sin\alpha$

مثال به کمک مثلثات، مساحت ۶ضلعی منتظم با ضلع ۳ واحد را بیابید.

پاسخ در شش‌ضلعی منتظم، تمام اضلاع با هم برابرند و هر یک از زاویه‌های داخلی نیز برابر با ۱۲۰° می‌باشد. دقت کنید که در هر nضلعی محدب، مجموع زاویه‌های داخلی برابر $۱۸۰^\circ\times(n-۲)$ است. با رسم قطرهای شش‌ضلعی منتظم، هر زاویهٔ ۱۲۰° به دو زاویهٔ ۶۰° تقسیم می‌شود و می‌توانیم بگوییم ۶ مثلث ایجاد شده متساوی‌الاضلاع هستند. مساحت یکی از این مثلث‌ها طبق فرمول $\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ می‌شود:



$$\frac{۱}{۲}\times۳\times۳\times\sin۶۰^\circ=\frac{۹}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

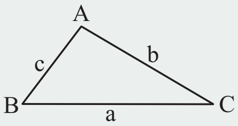
پس مساحت شش‌ضلعی منتظم می‌شود:

$$S=۶\times\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

نکته! در حالت کلی، در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، ارتفاع برابر $h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و مساحت برابر $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است.

قانون سینوس‌ها

در مثلث زیر، مساحت مثلث را به سه طریق می‌توانیم بنویسیم:



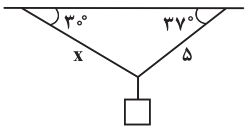
$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

اگر سه عبارت آخر را بر $\frac{۱}{۲}abc$ تقسیم کنیم، رابطهٔ زیبای زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

این قانونِ سینوس‌ها است و می‌گوید نسبت سینوس هر زاویه از مثلث به طول ضلع روبه‌روی آن، مقداری ثابت می‌باشد.

مثال در شکل زیر، دو طناب که یکی از آن‌ها ۵ متر است، وزنه‌ای را در حال تعادل نگه داشته‌اند. طول طناب دیگر چند متر است؟ $(\sin ۳۷^\circ=۰/۶)$



پاسخ رابطهٔ سینوس‌ها می‌گوید:

$$\frac{\sin ۳۰^\circ}{۵}=\frac{\sin ۳۷^\circ}{x}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}}{۵}=\frac{۰/۶}{x}\Rightarrow x=\frac{۰/۶\times ۵}{\frac{۱}{۲}}=۶$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۱

کتاب محترم درسی

۲۴۶ اگر اندازهٔ یک زاویهٔ حاده کم شود و به صفر نزدیک شود، سینوس، کسینوس و تانژانت آن به ترتیب به چه اعدادی نزدیک می‌شوند؟

۱) صفر - صفر - صفر ۲) صفر - یک - صفر ۳) یک - صفر - یک ۴) صفر - صفر - یک

۲۴۷ کدام نادرست است؟

۱) $\sin ۲۵^\circ<\sin ۲۶^\circ$ ۲) $\cos ۲۶^\circ<\cos ۲۷^\circ$ ۳) $\tan ۲۷^\circ<\tan ۲۸^\circ$ ۴) $\sin ۲۸^\circ=\cos ۶۲^\circ$

۲۴۸ کدام نادرست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ<\frac{۱}{۲}$ ۲) $\cos ۸۰^\circ<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\tan ۴۰^\circ<۱$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}<\tan ۲۵^\circ$

۲۴۹ حاصل $\frac{\sin ۷۵^\circ\cos ۴۵^\circ}{\tan ۶۰^\circ\cos ۱۵^\circ}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

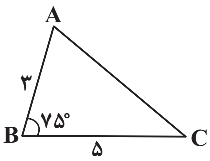
۲۵۰ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin ۱^\circ=\cos ۸۹^\circ$ ۲) $\sin ۴۹^\circ=\cos ۴۱^\circ$ ۳) $\tan ۲^\circ=\tan ۸۸^\circ$ ۴) $\tan ۳^\circ=\frac{۱}{\tan ۸۷^\circ}$

۲۵۱ یک هواپیما در حال فرود آمدن با زاویهٔ ۳۰ درجه نسبت به ابتدای باند یک فرودگاه است. وقتی هواپیما در ۳۴۰۰ متری باند فرودگاه است، تقریباً در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

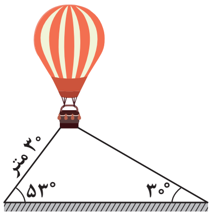
۱) ۵۰۰ متر ۲) ۱۰۰۰ متر ۳) ۲۰۰۰ متر ۴) ۲۵۰۰ متر

۲۵۲ با فرض $\sin ۷۵^\circ=۰/۹۶$، مساحت مثلث ABC در شکل زیر کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۷/۲
۲) ۷/۳
۳) ۱۴/۴
۴) ۱۴/۶

۲۵۳ در شکل مقابل، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر باشد، با فرض $\sin ۵۳^\circ=۰/۸$ طول طناب دوم چند متر است؟ (کتاب درسی)



۱) ۵۵ ۲) ۵۲
۳) ۴۸ ۴) ۴۵

کنکورهای اخیر

۲۵۴ اندازهٔ دو قطر از متوازی الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۲۵۵ مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b=۸$ و $c=۵$ باشد، اندازهٔ ضلع متوسط a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

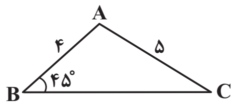
۱) $\sqrt{۳۹}$ ۲) $\sqrt{۴۱}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۲۵۶ ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق ۴۵° و ۴۰° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan ۴۰^\circ = ۰/۸)$ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲

تست‌های بیشتر

۲۵۷ در شکل روبه‌رو، $\tan\hat{C}$ کدام است؟

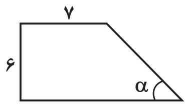


۱) $\sqrt{\frac{۸}{۱۷}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۸}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۵۸ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتی‌متر و تانژانت یکی از زاویه‌های آن ۳ است. مساحت مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۲۵۹ اگر $\sin\alpha = ۰/۶$ باشد، محیط ذوزنقهٔ روبه‌رو کدام است؟



۱) ۳۰ ۲) ۳۸ ۳) ۴۴ ۴) ۵۱

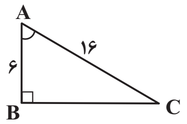
۲۶۰ فردی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر روبه‌روی یک درخت و به فاصلهٔ ۸ متر از آن ایستاده است. اگر او بخواهد بدون حرکت دادن چشمانش (!) نوک درخت را ببیند، باید سرش را ۲۶ درجه از حالتی که به روبه‌رو نگاه می‌کند، به بالا حرکت دهد. ارتفاع درخت تقریباً چند متر است؟ $(\tan ۲۶^\circ \simeq ۰/۴۸)$

۱) ۳/۸۴ ۲) ۴/۸۴ ۳) ۵/۶۴ ۴) ۱۸/۴۶

۲۶۱ اگر $\theta = ۵^\circ$ باشد، کدام‌یک بزرگ‌تر است؟

۱) $\sin\theta^۲$ ۲) $\sin^۲\theta$ ۳) $\sin ۲\theta$ ۴) $\sin\theta$

۲۶۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو، حاصل عبارت $\sin\hat{A}\cos\hat{A} + \tan\hat{A}$ چند برابر $\sqrt{۵۵}$ است؟



۱) $\frac{۷۳}{۱۹۲}$ ۲) $\frac{۷۱}{۱۹۲}$ ۳) $\frac{۵۴}{۱۱۳}$ ۴) $\frac{۵۳}{۱۱۳}$

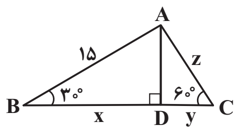
۲۶۳ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۲ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{۳}{۴}$ است. محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

۱) $۱۴+\sqrt{۷}$ ۲) $۱۴+۳\sqrt{۷}$ ۳) $۲۱+\sqrt{۷}$ ۴) $۲۱+۳\sqrt{۷}$

۲۶۴ اگر $(x+y)^۲\sin^۲ ۳۰^\circ - (x-y)^۲\cos^۲ ۶۰^\circ = ۳$ باشد، مقدار xy کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۵ در مثلث روبه‌رو، کدام گزینه درست است؟



۱) $x=۷/۵$ ۲) $y=۷/۵\sqrt{۳}$ ۳) $z=۵\sqrt{۳}$ ۴) $x+z=۱۲\sqrt{۳}$

۲۶۶ اگر $A=\sin ۱۲^\circ$ ، $B=\cos ۷۰^\circ$ و $C=\tan ۵۰^\circ$ باشد، کدام مطلب درست است؟

۱) $A<B<C$ ۲) $A<C<B$ ۳) $C<B<A$ ۴) $B<A<C$

۲۶۷ α و β دو زاویه هستند. بیشترین مقدار عبارت $۲\sin\alpha + ۳\cos\beta$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

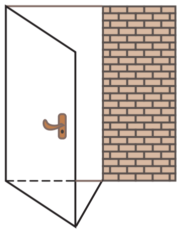
۲۶۸ حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{۲\cos^۲(۳۰^\circ) - ۲\sin(۳۰^\circ)}{۲\tan(۴۵^\circ) + ۳\cos^۲(۶۰^\circ)}$ ۲) $\frac{\tan(۶۰^\circ) - \tan(۳۰^\circ)}{۱+\tan(۶۰^\circ)\tan(۳۰^\circ)}$ ۳) $\frac{\sin^۲(۷۰^\circ) - \cos^۲(۷۰^\circ)}{\tan^۲(۶۰^\circ)}$ ۴) $\cos^۲(۷۰^\circ) - \sin^۲(۷۰^\circ)$

تست‌های بیشتر‌تر!

۲۶۹ فردی با قد ۲ متر می‌خواهد میله‌ای به طول ۳ متر را که روی زمین قرار دارد، با زاویهٔ α درجه بلند کند. او یک سر میله را روی زمین به دیوار تکیه می‌دهد و سر دیگر میله را تا قد خود بالا می‌آورد. سپس آن‌قدر به سمت دیوار حرکت می‌کند تا زاویهٔ میله با سطح زمین α درجه شود. او چند متر به سمت دیوار حرکت کرده است؟

۱) $۵-\frac{\sqrt{۲}}{\tan\alpha}$ ۲) $۳-\frac{\sqrt{۵}}{\tan\alpha}$ ۳) $\sqrt{۵}-\frac{۲}{\tan\alpha}$ ۴) $\sqrt{۵}-\frac{۳}{\tan\alpha}$



۲۷۰ میله‌ای فلزی داریم که می‌خواهیم برای باز نگه داشتن یک در طبق شکل روبه‌رو از آن استفاده کنیم. اگر زاویهٔ بین در و دیوار α شده باشد، نسبت طول میله به عرض در، کدام است؟

۱) $\sin\alpha$ ۲) $\sin\frac{\alpha}{۲}$ ۳) $۲\sin\alpha$ ۴) $۲\sin\frac{\alpha}{۲}$

۲۷۱ اگر $\sin ۲\alpha < \frac{۱}{۲}$ و $\tan ۵\alpha > ۱$ باشد، α کدام‌یک از مقدارهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲۰° ۲) ۱۶° ۳) ۱۲° ۴) ۸°

۲۷۲ حاصل $\tan ۱^\circ \tan ۲^\circ \tan ۳^\circ ... \tan ۸۹^\circ$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۲۷۳ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمه که بزرگ‌تر است، ۵ می‌باشد. اگر تانژانت یکی از زاویه‌های حادهٔ این مثلث ۸ باشد، طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمه چند است؟

۱) ۰/۱۲۵ ۲) ۰/۶۲۵ ۳) ۰/۸۲۵ ۴) ۱/۲۵

۲۷۴ اگر $\sin\theta = \frac{۲}{۳}$ باشد، زاویهٔ θ بین کدام زاویه‌ها قرار دارد؟

۱) صفر و ۳۰ درجه ۲) ۳۰ و ۴۵ درجه ۳) ۴۵ و ۶۰ درجه ۴) ۶۰ و ۹۰ درجه

۲۷۵ اگر $\alpha+\beta+\gamma = ۹۰^\circ$ باشد و $\sin\gamma = \frac{۲}{۳}$، مقدار $\cos(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۲۷۶ اگر $۵۰^\circ < \alpha < ۸۰^\circ$ باشد، حاصل کدام گزینه بزرگ‌تر است؟

۱) $\sin\alpha$ ۲) $\cos\alpha$ ۳) $\sqrt{\sin\alpha}$ ۴) $\sqrt{\cos\alpha}$

۲۷۷ اگر $۱۰^\circ < \alpha < ۴۰^\circ$ باشد، حاصل کدام گزینه بزرگ‌تر است؟

۱) $\sin\alpha$ ۲) $\cos\alpha$ ۳) $\sqrt{\cos\alpha}$ ۴) $\sin^۲\alpha$

۲۷۸ α و β دو زاویهٔ حاده‌اند. اگر $\sin\alpha < ۰/۷$ و $\cos\beta > ۰/۸$ باشد، کدام مطلب درست است؟

۱) $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ ۲) $۴۵^\circ < \beta < ۹۰^\circ$ ۳) $\alpha+\beta > ۹۰^\circ$ ۴) $\alpha+\beta$ هیچ‌وقت قائمه نمی‌شود.

۲۷۹ یک شناگر در حال نزدیک شدن به ساحل است. وقتی او در یک نقطه برای استراحت توقف می‌کند، بالای یک برج را که نزدیک ساحل است، تحت زاویهٔ ۳۰ درجه می‌بیند و هنگامی که ۳۴ متر دیگر به طرف ساحل شنا می‌کند، بالای برج را تحت زاویهٔ ۶۰ درجه می‌بیند. ارتفاع برج تقریباً چند متر است؟ (پایین برج، هم‌سطح با دریاست.)

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۳۰ ۴) ۳۴

۲۸۰ نردبانی به دیوار تکیه داده شده طوری‌که زاویهٔ آن با سطح زمین ۴۵ درجه است. از قضا (!) پای نردبان می‌لغزد و ۳۰ سانتی‌متر از دیوار دور می‌شود. اگر در این حالت، زاویهٔ نردبان با سطح زمین ۳۰ درجه باشد، طول نردبان تقریباً چند متر است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۳

۲۸۱ از درون یک قایق نزدیک ساحل، دو ساختمان که در راستای ساحل و به فاصلهٔ ۲۰۰ متری از یکدیگر قرار دارند، دیده می‌شود. اگر خطوطی که هر کدام از آن دو ساختمان را به قایق وصل می‌کنند، با راستای ساحل، زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه بسازند، فاصلهٔ قایق تا ساحل تقریباً چه‌قدر است؟

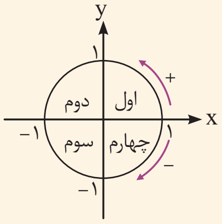
۱) ۶۸ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

دایرهٔ مثلثاتی

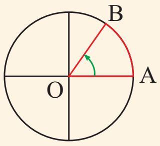
با دایرهٔ مثلثاتی دوست شوید! با دایرهٔ مثلثاتی دوست باشید! دایرهٔ مثلثاتی را دوست داشته باشید! آن وقت است که دایرهٔ مثلثاتی هم شما را دوست خواهد داشت!

دایرهٔ مثلثاتی

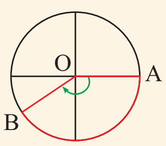
دایره‌ای است که: اولاً شعاع آن **۱ واحد** است، ثانیاً **جهت‌دار** است. جهت مثبت این دایره (**جهت مثلثاتی**)، برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، راستی، ما عادت داریم دایرهٔ مثلثاتی را ببریم در دستگاه مختصات و مرکز آن را روی مبدأ مختصات قرار دهیم. با این کار، دایره ۴ ناحیه (ربع) پیدا می‌کند.



مبدأ حرکت برای ایجاد زاویه‌های مثلثاتی، نقطهٔ $A(1,0)$ است. اگر از این نقطه، حول مرکز دایره O دوران کنیم و به نقطه‌ای مثل B برسیم، زاویهٔ $A\hat{O}B$ ایجاد می‌شود. حالا اگر گردش ما **پادساعتگرد** بوده باشد، این زاویه **مثبت** و اگر گردش ما **ساعتگرد** بوده باشد، این زاویه **منفی** است. راستی، بیش از یک دور هم می‌توانیم بچرخیم!

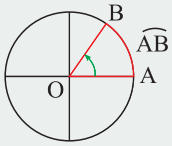


زاویهٔ مثبت

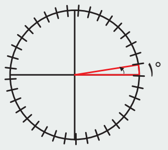


زاویهٔ منفی

زاویهٔ $A\hat{O}B$ کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کند. این زاویه که اضلاع آن شعاع‌هایی از دایره است و رأس آن روی مرکز دایره قرار دارد، یک **زاویهٔ مرکزی** محسوب می‌شود.



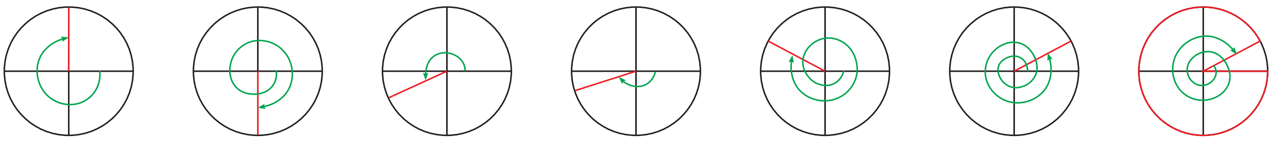
اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها ۱ درجه است: 1°.



اندازهٔ هر کمان، با زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.

مثال زاویه‌های ۲۷۰-، ۴۵۰-، ۱۶۵-، ۲۱۰، ۵۶۰-، ۷۶۵ و ۷۱۰- درجه را نشان دهید.

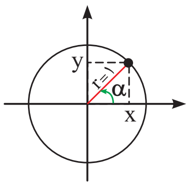
پاسخ از چپ به راست، ببینید:



$-(3\times 90)$	$-(5\times 90)$	$180+30$	$-180+15$	$-360-180-20$	$(2\times 360)+45$	$-(2\times 360)+10$
سه ربع دور ساعتگرد	پنج ربع دور ساعتگرد	نیم دور + ۳۰ درجه پادساعتگرد	نیم دور ساعتگرد + ۱۵ درجه پادساعتگرد	یک دور + نیم دور + ۲۰ درجه ساعتگرد	دو دور + ۴۵ درجه پادساعتگرد	دو دور ساعتگرد + ۱۰ درجه پادساعتگرد

نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای حاده (بین صفر و ۹۰ درجه) تعریف کردیم. برای بقیهٔ زاویه‌ها چه کنیم؟ اگر زاویه‌های حادهٔ ربع اول را در نظر بگیریم، می‌توانیم تعریف قبلی را معادل‌سازی کنیم. مثلاً در شکل روبه‌رو، $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ که چون شعاع دایره ۱ است $r=1$، به $\sin\alpha=y$ می‌رسیم یا $\cos\alpha=\frac{x}{r}$ که چون $r=1$، به $\cos\alpha=x$ می‌رسیم.



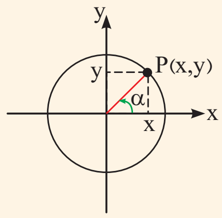
اگر مختصات نقطهٔ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α به‌صورت $P(x,y)$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی α به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$\sin\alpha=y$

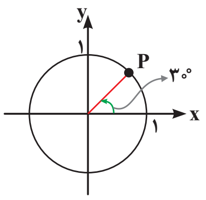
$\cos\alpha=x$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}$



مثال در شکل روبه‌رو، مختصات نقطهٔ P را بیابید.



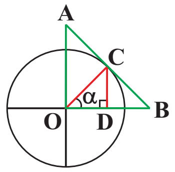
پاسخ عرض نقطهٔ P با سینوس زاویهٔ $\alpha=30^\circ$ و طول نقطهٔ P با کسینوس زاویهٔ $\alpha=30^\circ$ برابر است با:

$x_P=\cos\alpha \quad , \quad y_P=\sin\alpha$

$P(x,y)=P(\cos 30^\circ,\sin 30^\circ)=P(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

اگر نقطهٔ $A(1,0)$ را حول مرکز دایرهٔ مثلثاتی، α درجه پادساعتگرد دوران دهیم، مختصات نقطهٔ جدید به‌صورت $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ خواهد بود.

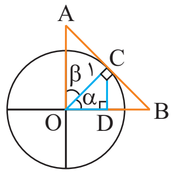
مثال شعاع دایرهٔ زیر، ۱ است. مشخص کنید هر یک از عبارت‌های زیر، با طول کدام‌یک از پاره‌خط‌هایی که در شکل مشاهده می‌شود، مساوی است؟



الف) $\sin\alpha$ ب) $\cos\alpha$ ج) $\tan\alpha$

د) $\dfrac{۱}{\sin\alpha}$ ه) $\dfrac{۱}{\cos\alpha}$ و) $\dfrac{۱}{\tan\alpha}$

پاسخ ابتدا دقت کنید که OC بر AB عمود است، چون AB مماس بر دایره و OC شعاع است. همیشه اگر خطی بر دایره مماس کنیم، شعاعی که به نقطهٔ تماس وارد می‌شود، بر خط مماس عمود است. حالا از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ روی شکل، نهایت استفاده را می‌کنیم.



الف) مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD: $\sin\alpha = \dfrac{CD}{OC} = \dfrac{CD}{۱} \Rightarrow \sin\alpha = CD$

ب) مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD: $\cos\alpha = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OD}{۱} \Rightarrow \cos\alpha = OD$

ج) مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC: $\tan\alpha = \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{BC}{۱} \Rightarrow \tan\alpha = BC$

د) مثلث قائم الزاویهٔ OAC: $\cos\beta = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{۱}{OA} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{۱}{OA} \Rightarrow \dfrac{۱}{\sin\alpha} = OA$

دقت کنید که α و β متمم‌اند و در نتیجه سینوس یکی با کسینوس دیگری مساوی است.

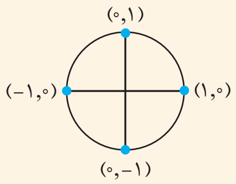
ه) مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC: $\cos\alpha = \dfrac{OC}{OB} = \dfrac{۱}{OB} \Rightarrow \dfrac{۱}{\cos\alpha} = OB$

و) مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC: $\tan\beta = \dfrac{AC}{OC} = \dfrac{AC}{۱} = AC \Rightarrow \dfrac{۱}{\tan\alpha} = AC$

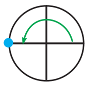
دقت کنید که α و β متمم‌اند و در نتیجه تانژانت یکی با کتانژانت یا عکس تانژانت دیگری مساوی است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرزی

لطفن، خواهشن، التماسن، جون هر کی دوست دارین، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مرزی (مضارب صحیح ۹۰ درجه) را حفظ نکنید! با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی و مختصات نقطه‌هایی که انتهای کمان روی آن واقع شده، در کم‌تر از ۵ ثانیه می‌توان نسبت مثلثاتی موردنظر را پیدا کرد!



مثال نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۰° را بیابید.



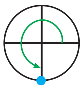
پاسخ انتهای کمان روبه‌روی ۱۸۰° این‌جاست: مختصات این نقطه $(−۱,۰)$ است. پس:

$\sin ۱۸۰^\circ = y = ۰$, $\cos ۱۸۰^\circ = x = −۱$

$\tan ۱۸۰^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{۰}{−۱} = ۰$, $\cot ۱۸۰^\circ = \dfrac{−۱}{۰}$ تعریف نشده

مثال نسبت‌های مثلثاتی ۲۷۰° را بیابید.

پاسخ انتهای کمان روبه‌روی ۲۷۰° این‌جاست:



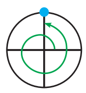
مختصات این نقطه $(۰,−۱)$ است، پس:

$\sin ۲۷۰^\circ = y = −۱$, $\cos ۲۷۰^\circ = x = ۰$

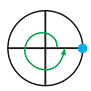
$\tan ۲۷۰^\circ = \dfrac{y}{x} = \dfrac{−۱}{۰}$ تعریف نشده , $\cot ۲۷۰^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{۰}{−۱} = ۰$

مثال حاصل عبارت $A = \sin ۹۰^\circ + (\cos ۵۴۰^\circ)(\cos ۳۶۰^\circ) + \cot ۴۵۰^\circ$ را بیابید.

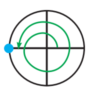
پاسخ با توجه به شکل‌های زیر، $A = ۱ + (−۱)(۱) + ۰ = ۰$.



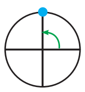
$\cot ۴۵۰^\circ = \dfrac{۰}{۱} = ۰$



$\cos ۳۶۰^\circ = x = ۱$



$\cos ۵۴۰^\circ = x = −۱$



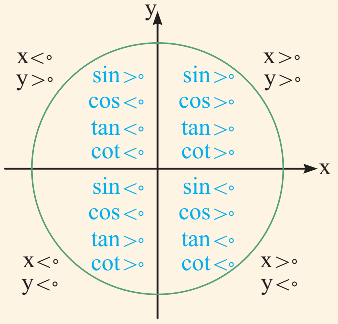
$\sin ۹۰^\circ = y = ۱$

علامت نسبت‌های مثلثاتی

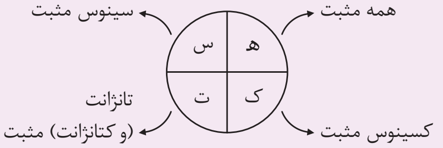
x در سمت راست محور y ها (نواحی اول و چهارم) مثبت و در سمت چپ آن (نواحی دوم و سوم) منفی است.

y در بالای محور x ها (نواحی اول و دوم) مثبت و پایین آن (نواحی سوم و چهارم) منفی است.

حالا با در نظر گرفتن تعریف نسبت‌های مثلثاتی و علامت x و y در هر ناحیه، علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه به‌دست می‌آید.



به‌کمک واژهٔ مخفف **هستک**، می‌توانیم علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ناحیه حفظ باشیم!



مثال **اگر $\sin\alpha\cdot\tan^۳\alpha<۰$ و $\sin\alpha+\cos\alpha>۰$ باشد، نقطهٔ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟**

پاسخ علامت $\tan^۳\alpha$ همان علامت $\tan\alpha$ است. پس $\sin\alpha\tan^۳\alpha<۰$ به این معنی است که سینوس و تانژانت مختلف‌العلامت‌اند. یعنی α در ناحیهٔ دوم یا سوم قرار دارد. از طرفی جمع سینوس و کسینوس مثبت شده است. این در حالی است که در ناحیهٔ سوم، $\sin\alpha+\cos\alpha$ حتماً منفی می‌شود (هر دو منفی‌اند)، پس α باید در ربع دوم باشد که در آن $\sin\alpha+\cos\alpha$ می‌تواند مثبت شود.

روش مثلث خوشگل

بعضی وقت‌ها مقدار یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای را داریم و مقدار بقیهٔ نسبت‌های مثلثاتی آن را می‌خواهیم. یک راه برای این کار، استفاده از اتحادهای مثلثاتی است که جلوتر می‌خوانیم. در این‌جا یک روش ساده‌تر یاد می‌گیریم.

گام ۱: اگر نسبت داده شده منفی بود، موقتاً علامت منفی آن را بی‌خیال می‌شویم. سپس یک مثلث قائم‌الزاویهٔ خوشگل می‌کشیم و طول دو ضلع آن را طوری انتخاب می‌کنیم که دادهٔ مسئله تأمین شود.

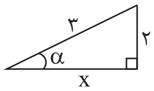
گام ۲: با فیثاغورس، ضلع سوم مثلث را پیدا می‌کنیم و هر نسبتی را که خواستیم می‌نویسیم.

گام ۳: با توجه به این‌که انتهای کمان در کدام ناحیه قرار دارد، علامت نسبت‌های مثلثاتی موردنظر را اصلاح می‌کنیم.

مثال **اگر $\sin\alpha=-\frac{۲}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌روی α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.**

پاسخ

گام ۱: علامت منفی را در $-\frac{۲}{۳}$ بی‌خیال می‌شویم. سینوس، ضلع مقابل به وتر است. پس یک مثلث قائم‌الزاویه می‌کشیم طوری‌که وتر آن ۳ و ضلع مقابل α در آن ۲ واحد باشد.



گام ۲: با فیثاغورس، ضلع سوم مثلث را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+۲^۲=۳^۲\Rightarrow x=\sqrt{۵}$$

حالا در شکل بالا داریم:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\ ,\ \tan\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

گام ۳: چون α در ناحیهٔ سوم قرار دارد، کسینوس آن منفی است: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و تانژانت و کتانژانت آن مثبت است. یعنی همان مقادیری که نوشته‌ایم.

مضارب زوج ۱۸۰° در کمان

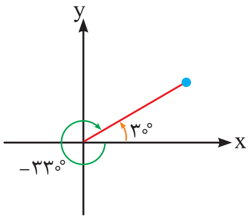
دو زاویهٔ α و β را **هم‌انتها** گوییم هرگاه اضلاع انتهایی آن‌ها بر هم منطبق شود، در این‌صورت، هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با یکدیگر مساوی است. اما از کجا بفهمیم دو زاویه هم‌انتها هستند یا نه؟

اختلاف زاویه‌های هم‌انتها، مضرب زوجی از ۱۸۰° است. در واقع، برای به‌دست آوردن زاویه‌های هم‌انتها با زاویهٔ α، کافی است مضارب زوج ۱۸۰° را به α اضافه کنیم. دقت کنید که مضارب زوج ۱۸۰°، همان مضرب‌های صحیح ۳۶۰° هستند.

گفتیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های هم‌انتها، با یکدیگر مساوی‌اند. این مطلب را این‌گونه هم می‌توانیم بگوییم: اگر در یک زاویه، مضارب صحیح ۳۶۰° با زاویهٔ دیگری جمع یا تفریق شده بود، می‌توانیم آن مضارب را حذف کنیم.

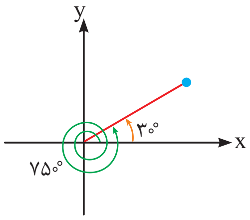
مثلاً:

$$\sin ۴۰۵^\circ=\sin(\underbrace{۳۶۰^\circ}_{\text{حذف}}+۴۵^\circ)=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



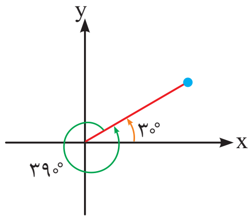
$-۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ = -۳۳۰^\circ$

$\cos(-۳۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ$



$(۲ \times ۳۶۰^\circ) + ۳۰^\circ = ۷۵۰^\circ$

$\tan ۷۵۰^\circ = \tan ۳۰^\circ$

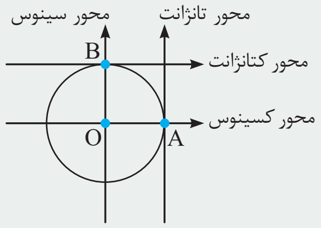


$۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ = ۳۹۰^\circ$

$\sin ۳۹۰^\circ = \sin ۳۰^\circ$

محورهای مثلثاتی

محورهای مثلثاتی را ببینید:



مبدأ محورهای سینوس و کسینوس: مرکز دایره

مبدأ محور تانژانت: $A(۱,۰)$

مبدأ محور کتانژانت: $B(۰,۱)$

چگونه به کمک محورهای مثلثاتی، سینوس و کسینوس یک کمان مثل α را مشخص کنیم؟

از انتهای کمان α، بر محور سینوس (یا کسینوس) عمود می‌کنیم. فاصلهٔ پای عمود تا مبدأ محور یعنی مرکز دایره، اندازهٔ $\sin\alpha$ (یا $\cos\alpha$) را بدون در نظر گرفتن علامت مشخص می‌کند. اگر پای عمود بالای مبدأ (یا سمت راست آن) باشد، علامت $\sin\alpha$ (یا $\cos\alpha$) مثبت و در غیر این‌صورت منفی است.

چگونه به کمک محورهای مثلثاتی، تانژانت (یا کتانژانت) یک کمان مثل α را مشخص کنیم؟

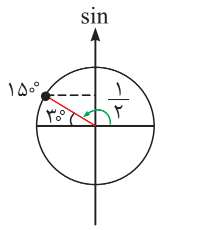
از انتهای کمان α به مرکز دایره وصل می‌کنیم و خط حاصل را امتداد می‌دهیم تا به محور تانژانت (یا کتانژانت) برسیم. بقیهٔ داستان مثل محورهای سینوس و کسینوس است!

مثال **به کمک محورهای مثلثاتی، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.**

الف) $\sin ۱۵۰^\circ$ ب) $\sin ۳۰۰^\circ$ ج) $\cos ۲۴۰^\circ$ د) $\cos ۶۹۰^\circ$

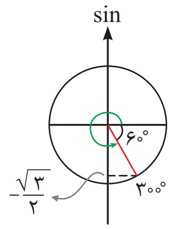
ه) $\tan ۲۲۵^\circ$ و) $\tan ۱۳۵^\circ$ ز) $\cot ۱۵۰^\circ$ ح) $\cot ۲۴۰^\circ$

پاسخ همه چیز را روی شکل‌ها به وضوح ببینید! در این مثال‌ها از زاویهٔ ضلع انتهایی زاویه‌ها با جهت مثبت یا منفی محور x ها نیز کمک گرفته شده است.



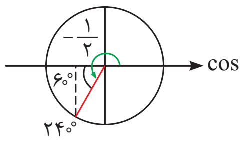
$\sin ۱۵۰^\circ = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

(الف)



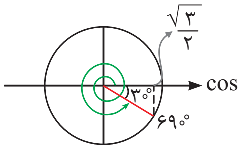
$\sin ۳۰۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(ب)



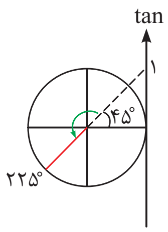
$\cos ۲۴۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$

(ج)



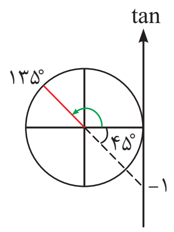
$\cos ۶۹۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(د)



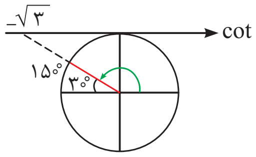
$\tan ۲۲۵^\circ = ۱$

(ه)



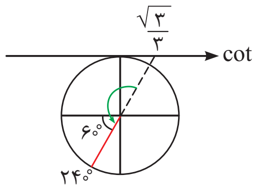
$\tan ۱۳۵^\circ = -۱$

(و)



$\cot ۱۵۰^\circ = -\sqrt{۳}$

(ز)



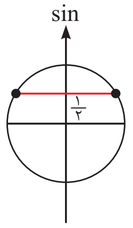
$\cot ۲۴۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(ح)

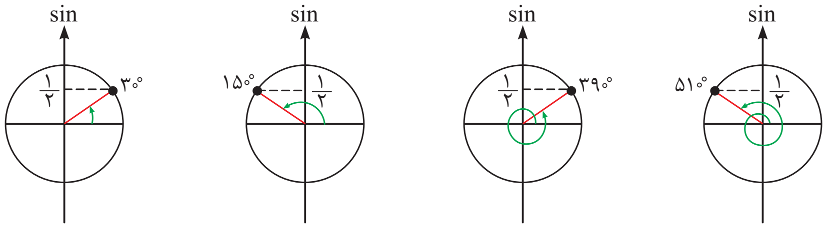
به کمک محورهای مثلثاتی، می‌توان فهمید که در یک بازهٔ مشخص، چند زاویه وجود دارد که یک نسبت مثلثاتی موردنظر برابر با عددی مشخص بشود. مثال‌ها را ببینید.

مثال در فاصلهٔ ۰ تا ۵۴۰ درجه، چند زاویه وجود دارد که سینوس آن برابر $\frac{۱}{۲}$ شود؟

پاسخ عدد $\frac{۱}{۲}$ را روی محور سینوس‌ها مشخص و از آن عمودی بر این محور رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه، محل انتهای کمان‌هایی را نشان می‌دهد که سینوس آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ است. بازهٔ ۰ تا ۵۴۰ درجه شامل یک دور کامل پادساعتگرد (۰ تا ۳۶۰ درجه) و یک نیم‌دور پادساعتگرد (۳۶۰ تا ۵۴۰ درجه) می‌باشد.

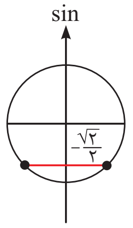


در این ۱/۵ دور، ۴ بار از نقاط مشخص شده می‌گذریم. یعنی ۴ زاویه! حتی می‌توانیم خود زاویه‌ها را مشخص کنیم:



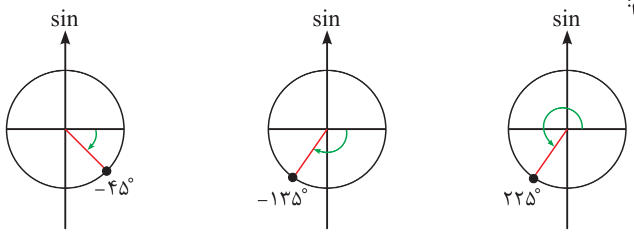
مثال در فاصلهٔ ۱۸۰- تا ۲۷۰ درجه، چند زاویه وجود دارد که سینوس آن برابر $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ شود؟

پاسخ عدد $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را روی محور سینوس‌ها مشخص و از آن عمودی بر این محور رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه، محل انتهای کمان‌هایی را نشان می‌دهد که سینوس آن‌ها $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. بازهٔ ۱۸۰- تا ۲۷۰ درجه، شامل یک نیم‌دور ساعتگرد (۱۸۰- تا ۰ درجه) و سه ربع دور پادساعتگرد (۰ تا ۲۷۰ درجه) می‌باشد.

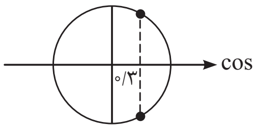


در نیم دور منفی، ۲ بار و در سه ربع دور مثبت، ۱ بار از این نقاط می‌گذریم. یعنی ۳ زاویه!

می‌توانیم خود زاویه‌ها را نیز مشخص کنیم:



مثال در فاصلهٔ ۰ تا ۳۶۰ درجه، چند زاویه وجود دارد که کسینوس آن‌ها برابر ۰/۳ باشد؟

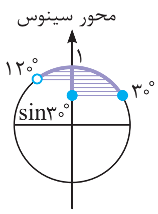


پاسخ عدد ۰/۳ را روی محور کسینوس‌ها مشخص و از آن عمودی بر این محور رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه، محل انتهای کمان‌هایی را نشان می‌دهد که کسینوس آن‌ها ۰/۳ می‌شود. در فاصلهٔ ۰ تا ۳۶۰ درجه یعنی یک دور کامل پادساعتگرد، ۲ بار از این نقاط می‌گذریم و این یعنی ۲ زاویه!

در این مثال، زاویه‌ها معروف نیستند و نمی‌توانیم مقدارشان را مشخص کنیم.

به کمک محورهای مثلثاتی، می‌توانیم مشخص کنیم که با تغییر زاویه در یک بازه، یک نسبت مثلثاتی موردنظر، چه مقادیری را اختیار می‌کند. مثال‌ها را ببینید.

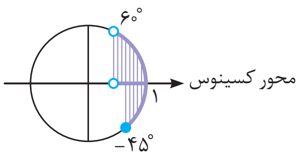
مثال اگر $۳۰° \le x < ۱۲۰°$ باشد، حدود $\sin x$ را بیابید.



پاسخ انتهای کمان‌های فاصلهٔ ۳۰ تا ۱۲۰ درجه را روی دایره پررنگ می‌کنیم. سپس قسمت پررنگ شده را روی محور سینوس‌ها تصویر می‌کنیم. تصویر روی محور سینوس‌ها، حدود $\sin x$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل روبه‌رو، $\sin ۳۰° \le \sin x \le ۱$، یعنی $\frac{۱}{۲} \le \sin x \le ۱$.

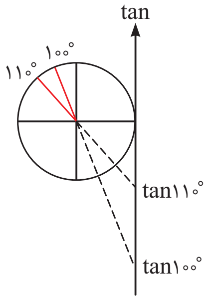
مثال اگر $-۴۵° \le x < ۶۰°$ باشد، حدود $\cos x$ را بیابید.

پاسخ انتهای کمان‌های فاصلهٔ $[-۴۵°, ۶۰°)$ را که اجتماع $[-۴۵°, ۰)$ و $[۰, ۶۰°)$ است، روی دایره پررنگ و آن را روی محور کسینوس‌ها تصویر می‌کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو، $\cos ۶۰° < \cos x \le ۱$، یعنی $\frac{۱}{۲} < \cos x \le ۱$.



محورهای مثلثاتی، برای مقایسهٔ نسبت‌های مثلثاتی نیز مفید است! مثال را ببینید.

مثال $\tan 100^\circ$ بزرگ‌تر است یا $\tan 110^\circ$؟

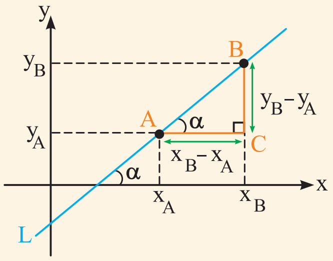


پاسخ با توجه به شکل مقابل، $\tan 110^\circ$ بزرگ‌تر است. تمام!

شیب و تانژانت

در بین نسبت‌های مثلثاتی، تانژانت یک ویژگی خوشگلی دارد و آن هم این است که یک‌جورهایی با شیب خط ارتباط دارد!

در شکل زیر، خط L را می‌بینید که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α ساخته است. A و B دو نقطهٔ دلخواه روی این خط‌اند. شیب خط L برابر است با:



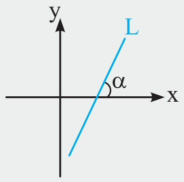
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

که x_A و y_A به ترتیب طول و عرض نقطهٔ A، x_B و y_B به ترتیب طول و عرض نقطهٔ B هستند. حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نگاه کنید، چون AC موازی محور xهاست، زاویهٔ BAC مساوی α می‌باشد. در این مثلث، $\tan\alpha$ برابر است با نسبت طول BC به طول AC. با توجه به شکل، طول BC، همان $y_B - y_A$ و طول AC همان $x_B - x_A$ است. یعنی:

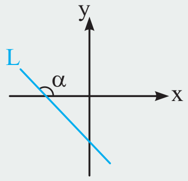
$$\tan\alpha = \frac{\text{طول } BC}{\text{طول } AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

خلاصه این‌که:

- شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، مساوی است.



۱) شیب خط L برابر است با $\tan\alpha$. چون شیب L مثبت است، $\tan\alpha$ هم مثبت است. در این حالت، α حاده است.



۲) شیب خط L برابر است با $\tan\alpha$. چون شیب L منفی است، $\tan\alpha$ هم منفی است. در این حالت، α منفرجه است.

- شیب هر خط موازی محور xها صفر است. زاویه‌ای هم که این خطوط با محور xها می‌سازند، صفر است. پس $\tan 0^\circ = 0$.

همچنین شیب هر خط موازی محور yها بی‌نهایت است. زاویه‌ای هم که این خطوط با محور xها می‌سازند، 90° است. پس $\tan 90^\circ$ بی‌نهایت است و همان‌طور که قبلاً گفتیم به عنوان عددی حقیقی تعریف نمی‌شود.

مثال هر یک از خطوط زیر با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازند؟

الف) خط به معادلهٔ $y = \sqrt{3}x - 2$ **ب) خط به معادلهٔ $y - x - \sqrt{3} = 0$** **ج) خطی که از دو نقطهٔ $(1,0)$ و $(4,\sqrt{3})$ می‌گذرد.**

پاسخ

الف) شیب این خط $\sqrt{3}$ (ضریب x) است. یعنی تانژانت زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، $\sqrt{3}$ است. تانژانت چه زاویه‌ای $\sqrt{3}$ بود؟ آفرین! 60°.

ب) y را یک طرف تساوی نگه می‌داریم و بقیهٔ جملات را به طرف دیگر می‌بریم: $y = x + \sqrt{3}$. حالا شیب این خط ضریب x است، یعنی ۱. بنابراین تانژانت زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، ۱ است. تانژانت چه زاویه‌ای ۱ بود؟ آفرین! 45°.

ج) شیب این خط برابر است با: $\frac{\sqrt{3}-0}{4-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. این همان تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. تانژانت چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{3}}{3}$ بود؟ آفرین! 30°.

- اگر شیب یک خط برابر m باشد و نقطهٔ (x_0, y_0) نیز روی آن خط قرار داشته باشد، معادلهٔ خط به‌صورت روبه‌رو خواهد بود: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- اگر شیب یک خط برابر m و عرض از مبدأ آن b باشد، معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + b$ خواهد بود.

مثال **معادلهٔ خط‌های زیر را بنویسید.**

الف) خطی که از نقطهٔ $(2,\sqrt{3})$ بگذرد و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 30° بسازد.

ب) خطی که از مبدأ مختصات بگذرد و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° بسازد.

ج) خطی که از نقطه‌ای روی محور yها با عرض ۳ بگذرد و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 60° بسازد.

پاسخ الف) معادلهٔ خط را $y=mx+b$ می‌گیریم. m شیب خط است و تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. یعنی $m=\tan ۳۰^\circ$. تانژانت ۳۰° هم که $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. پس $m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و معادلهٔ خط به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$ می‌باشد. حالا باید b (عرض از مبدأ) را به‌دست آوریم. چون خط از نقطهٔ $(\sqrt{۳},۲)$ می‌گذرد، اگر در معادلهٔ خط به جای x، $\sqrt{۳}$ بگذاریم، y باید ۲ شود:

$$y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b \xrightarrow[y=۲]{x=\sqrt{۳}} ۲=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳}+b \Rightarrow ۲=\frac{۳}{۳}+b \Rightarrow b=۲-۱=۱$$

بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۱$ است.

ب) معادلهٔ خط را $y=mx+b$ می‌گیریم:

$$m=\tan ۴۵^\circ=۱$$

$$y=mx+b \xrightarrow{m=۱} y=x+b$$

حالا باید b را به‌دست آوریم. خط از مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد:

$$y=x+b \xrightarrow[y=۰]{x=۰} ۰=۰+b \Rightarrow b=۰$$

بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $y=x$ است.

ج) معادلهٔ خط را $y=mx+b$ می‌گیریم.

$$m=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

$$y=mx+b \xrightarrow{m=\sqrt{۳}} y=\sqrt{۳}x+b$$

حالا باید b را به‌دست بیاوریم. خود سؤال می‌گوید $b=۳$. چون b عرض از مبدأ است و خط هم از نقطهٔ $(۰,۳)$ می‌گذرد:

$$y=\sqrt{۳}x+b \xrightarrow[y=۳]{x=۰} ۳=\sqrt{۳}\times ۰+b \Rightarrow b=۳$$

بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $y=\sqrt{۳}x+۳$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۲

کتاب محترم درسی

۲۸۲ شیب کدام خط از بقیه بیشتر است؟

۱) خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۷° می‌سازد.
۲) خطی که با جهت مثبت محور yها زاویهٔ ۵۳° می‌سازد.
۳) خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۳° می‌سازد.
۴) خطی که با جهت منفی محور xها زاویهٔ ۱۳۰° می‌سازد.

۲۸۳ اگر $\cos\alpha=-\frac{۲}{۵}$ باشد، کدام مطلب در مورد α حتماً درست است؟ (کتاب درسی)

۱) انتهای کمان مقابل α در ربع دوم قرار دارد.
۲) اگر α منفرجه باشد، آن‌گاه $۹۰^\circ<\alpha<۱۲۰^\circ$.
۳) انتهای کمان مقابل α در ربع سوم قرار دارد.
۴) اگر α منفرجه باشد، آن‌گاه $۱۲۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$.

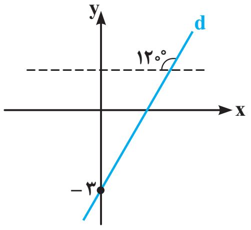
۲۸۴ کدام گزینه برای هر زاویهٔ دلخواه مانند θ درست است؟ (کتاب درسی)

۱) در ربع سوم، $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم‌علامت‌اند.
۲) اگر $\sin\theta<۰<\cos\theta$ باشد، θ در ربع چهارم است.
۳) اگر $\sin\theta\cos\theta<۰$ باشد، θ در ربع چهارم است.
۴) در صورت وجود $\tan\theta$ و $\cot\theta$ مقدار $\tan\theta$ بزرگ‌تر است.

۲۸۵ کدام‌یک از نقاط زیر، روی خطی قرار دارد که با عبور از نقطهٔ $(-۱,\sqrt{۳})$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰° می‌سازد؟ (کتاب درسی)

۱) $(-\sqrt{۳},۱)$
۲) $(۱,-۲\sqrt{۳})$
۳) $(۰,۲)$
۴) $(-۲,۰)$

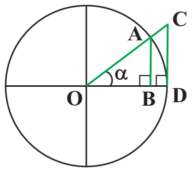
۲۸۶ در شکل مقابل، معادلهٔ خط d کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $y+۳=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$
۲) $y+۳=\sqrt{۳}x$
۳) $y-\sqrt{۳}x=۳$
۴) $y-\frac{\sqrt{۳}}{۳}x=۳$

تست‌های بیشتر

۲۸۷ در شکل مقابل، شعاع دایره ۱ واحد است. طول کدام‌یک از پاره‌خط‌های زیر، برابر با هیچ‌یک از نسبت‌های مثلثاتی (سینوس، کسینوس، تانژانت) زاویهٔ α نیست؟



۱) AB ۲) OB ۳) OC ۴) CD

۲۸۸ تابلویی در جاده نصب شده است که شیب جاده را به‌صورت (۱/۷ : ۳) نشان می‌دهد. یعنی هر ۳ متر که به‌طور افقی جلو برویم، ۱/۷ متر به ارتفاع جاده افزوده می‌شود. زاویه‌ای که جاده با افق می‌سازد، تقریباً چه‌قدر است؟

۱) ۱۵° ۲) ۳۰° ۳) ۴۵° ۴) ۶۰°

۲۸۹ زاویهٔ کدام خط با جهت مثبت محور x ها بزرگ‌تر از بقیه است؟

۱) $۲x-۲y=۵۱$ ۲) $\sqrt{۳}x-y=۱۷$ ۳) $۱۸x-۱۰y=۱$ ۴) $۳x-\sqrt{۳}y=۳$

۲۹۰ کدام خط با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۳ قطع می‌کند؟

۱) $۳y-\sqrt{۳}x=۹$ ۲) $y-\sqrt{۳}x=۳$ ۳) $۳y-\sqrt{۳}x=۳$ ۴) $y+\sqrt{۳}x=۳$

۲۹۱ شیب خطی که با جهت مثبت محور y ها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ یا $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ یا $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$ یا $-\sqrt{۳}$

۲۹۲ اگر $\cos ۲\alpha > \frac{۱}{۲}$ و $\tan ۳\alpha > ۱$ باشد، کدام‌یک از مقادیر زیر برای α مناسب است؟

۱) ۱۰° ۲) ۱۲° ۳) ۲۰° ۴) ۳۰°

۲۹۳ اگر $a=\sin ۱^\circ$ ، $b=\cos ۱^\circ$ و $c=\tan ۱^\circ$، آن‌گاه:

۱) $a<b<c$ ۲) $a<c<b$ ۳) $b<c<a$ ۴) $c<b<a$

تست‌های بیشترتر!

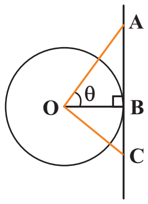
۲۹۴ کدام نقطه روی هیچ کدام از خط‌هایی که از مبدأ گذشته و با خط $y=x$ زاویهٔ ۱۵° می‌سازد، قرار ندارد؟

۱) $(\sqrt{۳},۳)$ ۲) $(\sqrt{۳},۱)$ ۳) $(۳,\sqrt{۳})$ ۴) $(۳,۱)$

۲۹۵ چند زاویهٔ حاده (بین ۰ و ۹۰ درجه) مانند α وجود دارد طوری‌که $(۴\sin^۲\alpha-۱)(۴\sin^۲\alpha-۳)(۴\sin^۲\alpha-۹)=۰$ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۹۶ در شکل زیر، شعاع دایره ۱ و مرکز آن O است. هم‌چنین مثلث AOC در رأس O قائمه است. اگر طول پاره‌خط‌های OA و OC به ترتیب m و n باشد، آن‌گاه:



۱) $m\cos\theta+n\sin\theta=۱$

۲) $n\cos\theta+m\sin\theta=۱$

۳) $m\cos\theta+n\sin\theta=۲$

۴) $m\tan\theta=n$

۲۹۷ α و β وجود دارند طوری‌که $\sin ۲\alpha\cos ۳\beta=m^۲+۱$. برای m چند مقدار مختلف وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۹۸ اگر $۰^\circ\le\alpha\le۹۰^\circ$ ، $۰^\circ\le\beta\le۹۰^\circ$ و $\frac{۷}{۱۲}=\frac{\sin\alpha}{۳}+\frac{\cos\beta}{۴}$، آن‌گاه $\sin(\alpha+\beta)$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) مقادیر مختلفی می‌تواند داشته باشد.

۲۴۶ | ۲ اگر اندازهٔ یک زاویهٔ حاده کم و به صفر نزدیک شود، سینوس و تانژانت زاویه هم کم شده و به صفر نزدیک می‌شوند اما کسینوس زاویه زیاد شده و به ۱ نزدیک می‌شود.

۲۴۷ | ۲ در زاویه‌های حاده، با افزایش مقدار زاویه، سینوس و تانژانت زیاد می‌شوند اما کسینوس کم می‌شود. پس:

$$۲۵^\circ < ۲۶^\circ \Rightarrow \sin ۲۵^\circ < \sin ۲۶^\circ$$

$$۲۶^\circ < ۲۷^\circ \Rightarrow \cos ۲۶^\circ > \cos ۲۷^\circ$$

$$۲۷^\circ < ۲۸^\circ \Rightarrow \tan ۲۷^\circ < \tan ۲۸^\circ$$

گزینهٔ چهارم هم درست است، چون ۲۸° و ۶۲° متمم‌اند و در نتیجه سینوس یکی با کسینوس دیگری مساوی است.

۲۴۸ | ۴

$$\sin ۲۰^\circ < \sin ۳۰^\circ \Rightarrow \sin ۲۰^\circ < \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۸۰^\circ < \cos ۳۰^\circ \Rightarrow \cos ۸۰^\circ < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۰^\circ < \tan ۴۵^\circ \Rightarrow \tan ۴۰^\circ < ۱$$

$$\tan ۲۵^\circ < \tan ۳۰^\circ \Rightarrow \tan ۲۵^\circ < \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۴۹ | ۱ ۷۵° متمم ۱۵° است و $\sin ۷۵^\circ = \cos ۱۵^\circ$:

$$\frac{\sin ۷۵^\circ \cos ۴۵^\circ}{\tan ۶۰^\circ \cos ۱۵^\circ} = \frac{(\cos ۱۵^\circ)(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{(\sqrt{۳})(\cos ۱۵^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sqrt{۳}}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

۲۵۰ | ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

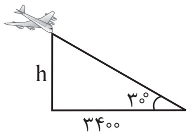
۱) درست است: $۱^\circ + ۸۹^\circ = ۹۰^\circ$، پس $\sin ۱^\circ = \cos ۸۹^\circ$.

۲) درست است: $۴۹^\circ + ۴۱^\circ = ۹۰^\circ$، پس $\sin ۴۹^\circ = \cos ۴۱^\circ$.

۳) نادرست است: $۲^\circ + ۸۸^\circ = ۹۰^\circ$، پس $\tan ۲^\circ = \frac{۱}{\tan ۸۸^\circ}$.

۴) درست است: $۳^\circ + ۸۷^\circ = ۹۰^\circ$، پس $\tan ۳^\circ = \frac{۱}{\tan ۸۷^\circ}$.

۲۵۱ | ۳ بفرمایید:



$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{h}{۳۴۰۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{h}{۳۴۰۰} \Rightarrow h = \frac{۳۴۰۰\sqrt{۳}}{۳}$$

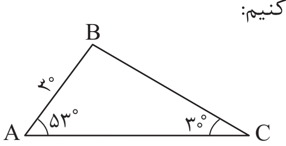
$$۳۴۰۰ = ۱/۷ \times ۲۰۰۰ \xRightarrow{\sqrt{۳} \simeq ۱/۷} \simeq ۲۰۰۰\sqrt{۳}$$

$$h = \frac{۲۰۰۰\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲۰۰۰ \times ۳}{۳} = ۲۰۰۰$$

۲۵۲ | ۱ خب با استفاده از فرمول $S = ab\sin\theta$، مساحت مثلث می‌شود:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۷۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۰/۹۶ = ۱۵ \times ۰/۴۸ = ۷/۲$$

۲۵۳ | ۳ شکل ساده‌تری از مسئله رسم کنیم:



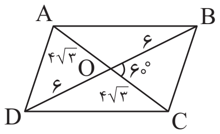
باید طول BC را پیدا کنیم.

طبق قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB} \Rightarrow \frac{\sin ۵۳^\circ}{BC} = \frac{\sin ۳۰^\circ}{۳۰} \Rightarrow \frac{۰/۸}{BC} = \frac{۰/۵}{۳۰}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{۳۰ \times ۰/۸}{۰/۵} = \frac{۳۰ \times ۸}{۵} = ۶ \times ۸ = ۴۸m$$

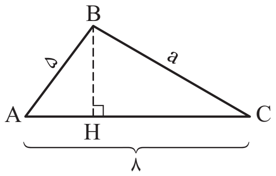
۲۵۴ | ۴ قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند و شکل زیر را داریم. مساحت مثلث OBC برابر است با:



$$\frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۸$$

وقتی دو قطر متوازی‌الاضلاع را می‌کشیم، ۴ مثلث با مساحت یکسان ایجاد می‌شود. پس مساحت متوازی‌الاضلاع برابر می‌شود با: $۴ \times ۱۸ = ۷۲$

۲۵۵ | ۲ شکل مثلث را رسم می‌کنیم:



مساحت این مثلث ۱۶ واحد سطح شده، پس:

$$S = ۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲} bc\sin A = ۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۵ \sin A = ۱۶ \Rightarrow \sin A = \frac{۴}{۵}$$

اگر ارتفاع BH را رسم کنیم، در مثلث ABH داریم:

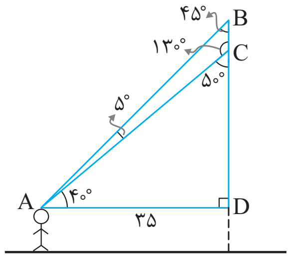
$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{BH}{۵} \Rightarrow BH = ۴$$

با در نظر گرفتن اعداد فیثاغورسی در مثلث ABH، متوجه می‌شویم که $AH = ۳$. پس $HC = AC - AH = ۸ - ۳ = ۵$.

حالا در مثلث BHC فیثاغورس می‌زنیم:

$$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲ \Rightarrow a^۲ = ۴^۲ + ۵^۲ = ۱۶ + ۲۵ = ۴۱ \Rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

۲۵۶ | ۳ در شکل زیر، دنبال BC هستیم! تمامی زاویه‌ها را مشخص کرده‌ایم و این کار به ما فهماند که مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD متساوی‌الساقین نیز هست:



$$\hat{A} = \hat{B} = ۴۵^\circ \Rightarrow BD = AD = ۳۵$$

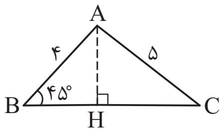
سؤال چیز خوبی گفته: $\tan ۴۰^\circ = ۰/۸$. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC می‌نویسیم:

$$\tan ۴۰^\circ = \frac{CD}{AD} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{CD}{۳۵} \Rightarrow CD = ۲۸$$

بنابراین ارتفاع مجسمه برابر است با:

$$BD - CD = ۳۵ - ۲۸ = ۷$$

۲۵۷ | ۱ بفرمایید:

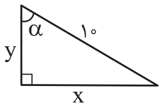


$$AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \xRightarrow{AH=BH} ۲AH^۲ = ۴^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۸$$

$$AH^۲ + CH^۲ = AC^۲ \Rightarrow ۸ + CH^۲ = ۵^۲ \Rightarrow CH = \sqrt{۱۷}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AH}{CH} = \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۱۷}} = \sqrt{\frac{۸}{۱۷}}$$

۲۵۸ | ۲ کاری ندارد که:



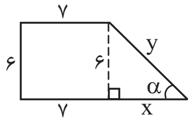
$$\tan\alpha=۳\Rightarrow \frac{x}{y}=۳\Rightarrow x=۳y$$

$$x^۲+y^۲=۱۰^۲\Rightarrow (۳y)^۲+y^۲=۱۰۰\Rightarrow ۱۰y^۲=۱۰۰\Rightarrow y=\sqrt{۱۰}$$

$$x=۳y=۳\sqrt{۱۰}$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۱۰})(\sqrt{۱۰})=۱۵$$

۲۵۹ | ۲ بفرمایید:

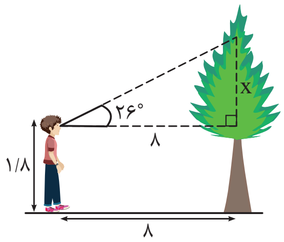


$$\sin\alpha=\frac{۶}{y}\Rightarrow ۰/۶=\frac{۶}{y}\Rightarrow y=۱۰$$

$$x^۲+۶^۲=۱۰^۲\Rightarrow x^۲=۶۴\Rightarrow x=۸$$

$$\text{محیط}=۶+۷+y+x+۷=۲۰+y+x=۲۰+۱۰+۸=۳۸$$

۲۶۰ | ۳ این‌جا را ببینید:



$$\tan ۲۶^\circ=\frac{x}{۸}\Rightarrow ۰/۴۸\simeq\frac{x}{۸}\Rightarrow x\simeq ۳/۸۴$$

$$\text{ارتفاع درخت}\simeq ۱/۸+۳/۸۴=۵/۶۴$$

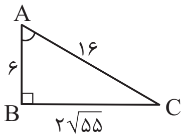
۲۶۱ | ۱ خب اگر $\theta=۵^\circ$ باشد، $۲\theta=۱۰^\circ$ و همچنین $\theta^۲=۲۵^\circ$ خواهد بود، پس $\sin\theta<\sin ۲\theta<\sin\theta^۲$. در مورد $\sin^۲\theta$ هم، چون $\sin\theta$ بین صفر و یک است، وقتی به توان ۲ می‌رسد، کوچک‌تر می‌شود، یعنی $\sin^۲\theta<\sin\theta$. پس $\sin\theta^۲$ از همه بزرگ‌تر است.

۲۶۲ | ۱ اول، به کمک جناب فیثاغورس، طول ضلع BC را حساب می‌کنیم تا خیالمان راحت شود که همه چیز را داریم. طبق رابطهٔ فیثاغورس:

$$(AB)^۲+(BC)^۲=(AC)^۲\Rightarrow (BC)^۲=(AC)^۲-(AB)^۲=۱۶^۲-۶^۲$$

$$=۲۵۶-۳۶=۲۲۰\Rightarrow BC=\sqrt{۲۲۰}=\sqrt{۴\times ۵۵}=۲\sqrt{۵۵}$$

حالا، اصل مطلب:



$$\sin\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل }A}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}=\frac{۲\sqrt{۵۵}}{۱۶}=\frac{\sqrt{۵۵}}{۸}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{\text{ضلع مجاور }A}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

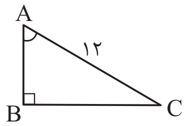
$$\tan\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل }A}{\text{ضلع مجاور }A}=\frac{BC}{AB}=\frac{۲\sqrt{۵۵}}{۶}=\frac{\sqrt{۵۵}}{۳}$$

بنابراین:

$$\sin\hat{A}\cos\hat{A}+\tan\hat{A}=\frac{\sqrt{۵۵}}{۸}\times\frac{۳}{۸}+\frac{\sqrt{۵۵}}{۳}=\frac{۳\sqrt{۵۵}}{۶۴}+\frac{\sqrt{۵۵}}{۳}$$

$$=\frac{۷۳}{۱۹۲}\sqrt{۵۵}$$

۲۶۳ | ۴



$$\text{سینوس}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{۱۲}\Rightarrow \text{ضلع مقابل}=\frac{۳\times ۱۲}{۴}=۹$$

یعنی یکی از ضلع‌های مثلث، ۹ سانتی‌متر است. حالا طبق رابطهٔ فیثاغورس، اگر طول ضلع دیگر را x بگیریم، $x^۲+۹^۲=۱۲^۲$ و در نتیجه $x^۲=۱۴۴-۸۱=۶۳$؛ پس $x=\sqrt{۶۳}=\sqrt{۹\times ۷}=۳\sqrt{۷}$. سه ضلع مثلث لو رفت! محیط آن می‌شود:

$$۹+۱۲+۳\sqrt{۷}=۲۱+۳\sqrt{۷}$$

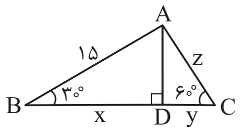
۲۶۴ | ۳

$$(x+y)^۲\sin^۲ ۳۰^\circ-(x-y)^۲\cos^۲ ۶۰^\circ=(x+y)^۲(\frac{۱}{۲})^۲-(x-y)^۲(\frac{۱}{۲})^۲$$

$$=(\frac{۱}{۲})^۲((x+y)^۲-(x-y)^۲)=\frac{۱}{۴}(۴xy)=xy$$

سؤال گفته حاصل عبارت بالا می‌شود ۳، پس $xy=۳$.

۲۶۵ | ۳ محاسبهٔ x: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، می‌نویسیم:



$$\cos\hat{B}=\frac{\text{ضلع مجاور }B}{\text{وتر}}\Rightarrow\cos ۳۰^\circ=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{x}{۱۵}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}=۷/۵\sqrt{۳}$$

محاسبهٔ y: اول، AD را حساب می‌کنیم! در همان مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD:

$$\sin\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل }B}{\text{وتر}}\Rightarrow\sin ۳۰=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AD}{۱۵}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD:

$$\tan\hat{C}=\frac{\text{ضلع مقابل }C}{\text{ضلع مجاور }C}\Rightarrow\tan ۶۰^\circ=\frac{AD}{CD}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{۷/۵}{y}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۷/۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۷/۵\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{۷/۵\sqrt{۳}}{۳}=۲/۵\sqrt{۳}$$

محاسبهٔ z: در همان مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD:

$$\sin\hat{C}=\frac{\text{ضلع مقابل }C}{\text{وتر}}\Rightarrow\sin ۶۰^\circ=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۷/۵}{z}$$

$$\Rightarrow z=\frac{۷/۵\times ۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۱۵\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۳}=۵\sqrt{۳}$$

فقط گزینهٔ (۳) حرف درستی می‌زند!

۲۶۶ | ۱ چون ۷۰° و ۲۰° متمم هستند، پس $\cos ۷۰^\circ=\sin ۲۰^\circ$. می‌دانیم با افزایش زاویهٔ حاده، سینوس هم زیاد می‌شود، پس بین $A=\sin ۱۲^\circ$ و $B=\sin ۲۰^\circ$، B بزرگ‌تر است. برای C می‌دانیم $\tan ۵۰^\circ>\tan ۴۵^\circ$ (چون تانژانت زاویهٔ حادهٔ بزرگ‌تر، بیشتر است) و $\tan ۴۵^\circ$ را هم می‌دانیم: $\tan ۴۵^\circ=۱$، پس $C>۱$. سینوس که هرگز بیشتر از یک نمی‌شود، پس C از A و B بیشتر است. خلاصه این‌که $C>B>A$.

۲۶۷ | ۳ sin و cos حداکثر می‌توانند ۱ باشند، پس بیش‌ترین مقدار این عبارت $2(1)+3(1)$ یعنی ۵ است.

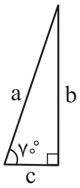
۲۶۸ | ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) $$\frac{2\cos^2 30° - 2\sin 30°}{2\tan 45° + 3\cos^2 60°} = \frac{2(\frac{\sqrt3}{2})^2 - 2(\frac12)}{2(1)+3(\frac12)^2} = \frac{\frac32 - 1}{2+\frac34}$$
$$= \frac{6-4}{8+3} = \frac{2}{11} \simeq 0.2$$

۲) $$\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1+\tan 60° \tan 30°} = \frac{\sqrt3 - \frac{\sqrt3}{3}}{1+(\sqrt3)(\frac{\sqrt3}{3})} = \frac{\frac{2\sqrt3}{3}}{1+1}$$
$$= \frac{\sqrt3}{3} \simeq \frac{1.7}{3} \simeq 0.6$$

۳) نسبت‌های مثلثاتی $70°$ را در صورت کسر بلد نیستیم اما لازمش هم نداریم. $\sin^2 70°$ از $\cos^2 70°$ بزرگ‌تر است و اختلاف این دو، عددی بین ۰ و ۱ می‌باشد. این اختلاف، نزدیک به $\sin^2 60° - \cos^2 60° = (\frac{\sqrt3}{2})^2 - (\frac12)^2 = \frac12 = 0.5$ می‌باشد. مخرج کسر هم برابر $(\sqrt3)^2 = 3$ است. پس کل کسر تقریباً $\frac{0.5}{3} \simeq 0.2$ می‌باشد و به هر حال از ۰/۶ موجود در گزینهٔ (۲) کوچک‌تر است.

۴) حاصل این گزینه عددی منفی است. چون $0 < \cos 70° < \sin 70°$.

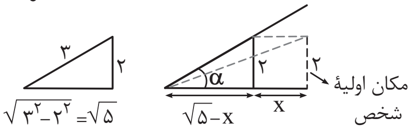


$b > c$

$\sin 70° = \frac{b}{a}$

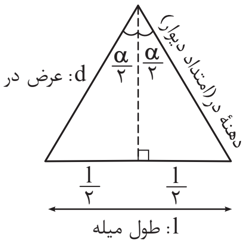
$\cos 70° = \frac{c}{a}$

۲۶۹ | ۳ بفرمایید:



$$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt5 - x} \Rightarrow \sqrt5 - x = \frac{2}{\tan\alpha} \Rightarrow x = \sqrt5 - \frac{2}{\tan\alpha}$$

۲۷۰ | ۴



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac12}{d} = \frac{1}{2d} \Rightarrow \frac1d = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

۲۷۱ | ۳

$$\sin 2\alpha < \frac12 \Rightarrow \sin 2\alpha < \sin 30° \Rightarrow 2\alpha < 30° \Rightarrow \alpha < 15°$$
$$\tan 5\alpha > 1 \Rightarrow \tan 5\alpha > \tan 45° \Rightarrow 5\alpha > 45° \Rightarrow \alpha > 9°$$

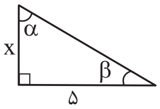
$9° < \alpha < 15°$، پس α نمی‌تواند ۸، ۱۶ یا ۲۰ درجه باشد.

۲۷۲ | ۲ تانژانت زاویه‌هایی که متمم یکدیگرند، عکس هم است:

$$\tan 1° = \frac{1}{\tan 89°} \quad , \quad \tan 2° = \frac{1}{\tan 88°}$$
$$\tan 3° = \frac{1}{\tan 87°} \quad , \cdots , \quad \tan 44° = \frac{1}{\tan 46°}$$

پس حاصل عبارت موردنظر می‌شود تعدادی ۱ ضرب در $\tan 45°$ که می‌شود ۱.

۲۷۳ | ۲ طول ضلع کوچک‌تر زاویهٔ قائمه را x می‌گیریم. α و β هم زاویه‌های حادهٔ مثلث‌اند. سؤال گفته تانژانت یکی از زاویه‌های حاده ۸ است، یعنی $\tan\alpha = 8$ یا $\tan\beta = 8$. از طرفی:



$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{5}{x} = 8 \Rightarrow x = \frac58$$
$$\tan\beta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x}{5} = 8 \Rightarrow x = 40$$

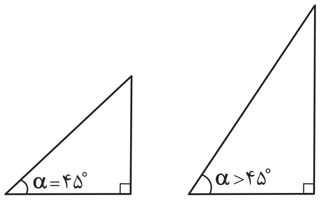
اما $x = 40$ قابل قبول نیست. چون x طول ضلع کوچک‌تر زاویهٔ قائمه است و باید از طول ضلع بزرگ‌تر زاویهٔ قائمه یعنی ۵ کوچک‌تر باشد. $\frac58 < 5$، پس $x = \frac58$ قابل قبول بوده و طول دو ضلع زاویهٔ قائمه، ۵ و $\frac58$ است. ما $\frac58$ را می‌خواهیم که همان ۰/۶۲۵ است.

۲۷۴ | ۲ می‌دانیم $\frac{\sqrt2}{2} \simeq 0.707$ و $\frac{\sqrt3}{2} \simeq 0.866$. بنابراین، $\frac23$ بین $\frac{\sqrt2}{2}$ و $\frac12$ قرار دارد: $0.5 < \frac23 < 0.707$، پس زاویهٔ θ بین $30°$ و $45°$ است.

θ	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$	$\frac12$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$

۲۷۵ | ۳ $\alpha+\beta$ را یک زاویه بگیرید، مثلاً فرض کنید $\theta = \alpha+\beta$. در این‌صورت $\theta+\gamma = 90°$ و در نتیجه θ و γ متممند. پس سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است، یعنی $\cos\theta = \sin\gamma = \frac23$. پس $\cos(\alpha+\beta) = \frac23$ چون θ همان $\alpha+\beta$ بود!

۲۷۶ | ۳ وقتی $45° < \alpha < 90°$، داریم:



ضلع مقابل α از ضلع مجاور آن بزرگ‌تر است. — ضلع مقابل α با ضلع مجاور آن مساوی است.

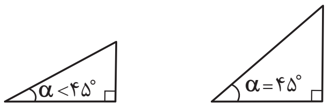
$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} > \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \cos\alpha$$

همچنین با توجه به اینکه $0 < \sin\alpha < 1$، داریم: $\sin\alpha < \sqrt{\sin\alpha}$. بنابراین:

$$\cos\alpha < \sin\alpha < \sqrt{\sin\alpha}$$

حواستان باشد که وقتی از اعداد بین صفر و ۱ جذر می‌گیریم، بزرگ‌تر می‌شوند. در مورد $\sqrt{\cos\alpha}$ هم‌چون $\cos\alpha < \sin\alpha$ قطعاً $\sqrt{\cos\alpha} < \sqrt{\sin\alpha}$.

۲۷۷ | ۳ وقتی $0° < \alpha < 45°$، داریم:



ضلع مقابل α با ضلع مجاور آن مساوی است. — ضلع مقابل α از ضلع مجاور آن کوچکتر است.

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} < \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \cos\alpha$$

همچنین با توجه به اینکه $0 < \cos\alpha < 1$، داریم: $\cos\alpha < \sqrt{\cos\alpha}$.

و با توجه به اینکه $0 < \sin\alpha < 1$، داریم $\sin^2\alpha < \sin\alpha$. بنابراین:

$$\sin^2\alpha < \sin\alpha < \cos\alpha < \sqrt{\cos\alpha}$$

۲۷۸ | ۴ اول یک چیز جالب: $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq \frac{۱/۴}{۲} = ۰/۷$

البته $\sqrt{۲}$ از ۱/۴ بزرگ‌تر است، پس $\sin ۴۵^\circ$ از ۰/۷ بزرگ‌تر است، اما به ۰/۸ نمی‌رسد. حالا با توجه به حاده بودن α و β، داریم:

$$\sin\alpha < ۰/۷ \Rightarrow \sin\alpha < \sin ۴۵^\circ \Rightarrow ۰ < \alpha < ۴۵^\circ$$

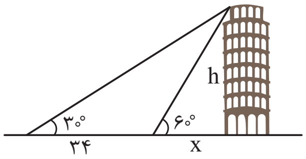
$$\cos\beta > ۰/۸ \Rightarrow \cos\beta > \cos ۴۵^\circ \Rightarrow ۰ < \beta < ۴۵^\circ$$

دقت کنید که در زوایای حاده، با افزایش اندازهٔ زاویه، سینوس بیش‌تر و کسینوس کم‌تر می‌شود. حالا:

$$۰ < \alpha < ۴۵^\circ \quad , \quad ۰ < \beta < ۴۵^\circ \xRightarrow{\oplus} ۰ < \alpha + \beta < ۹۰^\circ$$

یعنی $\alpha + \beta$ همیشه حاده است و هیچ‌وقت قائمه (مساوی با ۹۰ درجه) نمی‌شود.

۲۷۹ | ۳ صورت مسئله، شکل زیر را می‌دهد. h ارتفاع برج است و x فاصلهٔ شناگر تا برج پس از توقف دوم. دوتا مثلث قائم‌الزاویه هم در شکل دیده می‌شود که برج ضلع مشترک هر دو است، پس می‌توانیم دو رابطه برحسب دو مجهول x و h به‌دست آوریم:



$$\tan ۶۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{۳}}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{h}{۳۴+x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{h}{۳۴+x} \Rightarrow \sqrt{۳}(۳۴+x) = ۳h$$

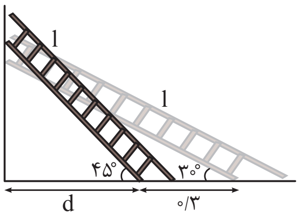
حالا نتیجهٔ رابطهٔ اول را در رابطهٔ دوم به‌کار می‌گیریم، یعنی در رابطهٔ دوم، به جای x قرار می‌دهیم $\frac{h}{\sqrt{۳}}$، پس رابطهٔ دوم این شکلی می‌شود:

$$\sqrt{۳}(۳۴ + \frac{h}{\sqrt{۳}}) = ۳h \Rightarrow ۳۴\sqrt{۳} + h = ۳h \Rightarrow ۳۴\sqrt{۳} = ۲h$$

$$\Rightarrow h = ۱۷\sqrt{۳}$$

می‌توانیم به جای $\sqrt{۳}$ مقدار تقریبی‌اش یعنی ۱/۷ را قرار دهیم و بگوییم ارتفاع برج تقریباً $۲۸/۹ = ۱/۷ \times ۱۷$ متر است؛ یا حتی می‌توانیم بگوییم برج تقریباً ۳۰ متر است!

۲۸۰ | ۳ صورت مسئله، شکل زیر را می‌دهد: l طول نردبان است و d فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار، قبل از لغزش. در ضمن، ما واحدها را برحسب متر در نظر گرفتیم و همین تصمیم باعث شد ۳۰ سانتی‌متر لغزش را روی شکل با ۰/۳ نشان دهیم. حالا از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در شکل می‌بینیم (وتر هر دو، نردبانی به طول l است!)، دو رابطه به‌دست می‌آوریم. (فهمیدن این‌که برای دست‌یابی به این رابطه‌ها، باید به کسینوس پناه ببریم سخت نیست، چون ما اطلاعاتی از سطح زمین داریم (۰/۳,d) و زمین ضلع مجاور زوایای ۴۵ و ۳۰ درجه است.)



$$\cos ۴۵^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{d}{l} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{d}{l} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{۲}}{۲} l$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{d+۰/۳}{l} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{d+۰/۳}{l} \Rightarrow \sqrt{۳}l = ۲d + ۰/۶$$

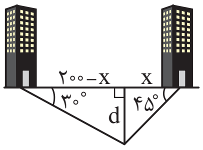
نتیجهٔ رابطهٔ اول را در رابطهٔ دوم می‌گذاریم؛ یعنی در رابطهٔ دوم، به جای d می‌گذاریم $\frac{\sqrt{۲}}{۲}l$:

$$\sqrt{۳}l = ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}l) + ۰/۶ \Rightarrow \sqrt{۳}l = \sqrt{۲}l + ۰/۶ \Rightarrow \sqrt{۳}l - \sqrt{۲}l = ۰/۶$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})l = ۰/۶ \Rightarrow l = \frac{۰/۶}{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$$

$\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ و $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$، پس: $l \simeq \frac{۰/۶}{۱/۷ - ۱/۴} = \frac{۰/۶}{۰/۳} = ۲$

۲۸۱ | ۲ ما به دنبال d هستیم (شکل زیر را ببینید). چاره‌ای نداریم جز این‌که در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که می‌بینیم، تانژانت‌ها را بنویسیم:



$$\tan ۴۵^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{d}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{d}{x} \Rightarrow x = d$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{d}{۲۰۰-x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{d}{۲۰۰-x} \xRightarrow{x=d} \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{d}{۲۰۰-d}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰\sqrt{۳} - \sqrt{۳}d = ۳d \Rightarrow ۲۰۰\sqrt{۳} = \sqrt{۳}d + ۳d$$

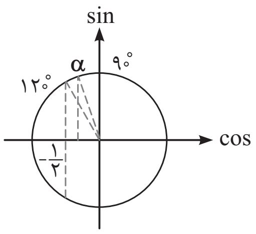
$$\Rightarrow d(۳+\sqrt{۳}) = ۲۰۰\sqrt{۳} \Rightarrow d = \frac{۲۰۰\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}$$

$$\xRightarrow{\sqrt{۳} \simeq ۱/۷} d \simeq \frac{۲۰۰ \times ۱/۷}{۳ + ۱/۷} \simeq ۷۲$$

۲۸۲ | ۳ شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، مساوی است. در بین زوایای حاده، زاویه‌ای تانژانت بیش‌تری دارد که اندازه‌اش بزرگ‌تر باشد. پس بین چند خط که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ حاده می‌سازند، خطی شیب بیش‌تری دارد که زاویهٔ بزرگ‌تری با جهت مثبت محور xها بسازد. خط‌های موردنظر در گزینه‌ها به ترتیب با جهت مثبت محور xها زوایای ۱۷°، $۹۰ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$ و ۶۳° و $۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ$ می‌سازند. ۶۳° بزرگ‌تر از همه است!

۲۸۳ | ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

۱ و ۳) انتهای کمان مقابل α در ربع دوم یا سوم قرار دارد و نمی‌توان یکی از این دو ناحیه را با قطعیت انتخاب کرد.



۲ و ۴) $-\frac{۱}{۲} = -\frac{۲/۵}{۵} \simeq -\frac{۲}{۵}$ که $\cos ۱۲۰^\circ$ می‌باشد (از روی $\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ گفتیم!). حالا چون $-\frac{۲}{۵}$ از $-\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر است، α از ۱۲۰° کوچک‌تر خواهد بود: $۹۰^\circ < \alpha < ۱۲۰^\circ$.

۲۸۴ | ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) درست نیست. در ربع سوم، $\sin\theta$ منفی و $\tan\theta$ مثبت است.

۲) درست است. خب درست است دیگر!

۳) درست نیست. θ در ربع دوم نیز می‌تواند باشد.

۴) درست نیست. مثلاً قرار دهید $\theta = ۳۰^\circ$ یا $\theta = ۴۵^\circ$.

۴ | ۲۸۵ شیب خط، $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ است و یک نقطه از آن را هم داریم. بروید معادله‌اش را بنویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x+1)\Rightarrow y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$$

نقطهٔ $(-2,0)$ روی این خط قرار دارد.

۲ | ۲۸۶ با توجه به شکل، خط d با جهت مثبت محور xها، زاویهٔ 60° می‌سازد. پس شیب آن می‌شود: $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

از طرفی، خط d از نقطهٔ $(0,-3)$ عبور می‌کند. پس معادلهٔ آن این شکلی می‌شود:

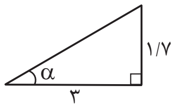
$$y+3=\sqrt{3}(x-0)\Rightarrow y+3=\sqrt{3}x$$

۳ | ۲۸۷ آسان است:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{1}=AB\quad,\quad \cos\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{OB}{1}=OB$$

$$\tan\alpha=\frac{AB}{OB}=\frac{CD}{OD}=\frac{CD}{1}=CD$$

۲ | ۲۸۸ آسان است:

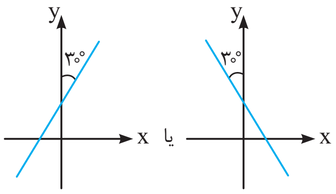


$$\tan\alpha=\frac{1/7}{3}\simeq\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=30^\circ$$

۳ | ۲۸۹ باید ببینیم شیب کدام خط بیشتر است، شیب چهار خط به ترتیب ۱، $\sqrt{3}$، $\frac{18}{10}=1/8$ و $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\simeq 1/7$ است.

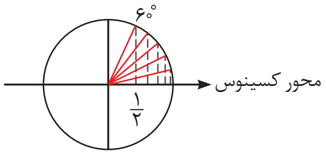
۱ | ۲۹۰ $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$، پس وقتی x و y یک طرف تساوی‌اند، نسبت ضریب x به ضریب y باید $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد تا شیب خط همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ شود! پس گزینه‌های دوم و چهارم رد می‌شوند، نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ هم باید روی خط باشد، پس گزینهٔ سوم هم منتفی است!

۴ | ۲۹۱ دو حالت وجود دارد:

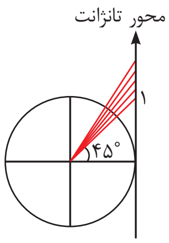


در هر دو حالت زاویهٔ حادهٔ خط با جهت مثبت یا منفی محور xها، 60° می‌باشد، اما در شکل سمت راست شیب خط منفی است. پس شیب خط در حالت کلی یا $+\sqrt{3}$ است یا $-\sqrt{3}$، چون $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

۳ | ۲۹۲ خودمان را به زوایای ۰ تا ۹۰ درجه محدود می‌کنیم.



$$\cos 2\alpha>\frac{1}{2}\Rightarrow 0<2\alpha<60^\circ\Rightarrow 0<\alpha<30^\circ$$



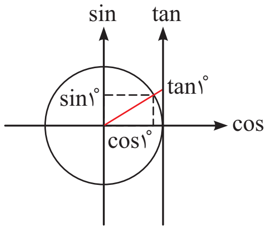
$$\tan 3\alpha>1\Rightarrow 45^\circ<3\alpha<90^\circ\Rightarrow 15^\circ<\alpha<30^\circ$$

اشتراک حرف‌های بالا می‌شود $15^\circ<\alpha<30^\circ$. به عنوان نمونه، $\alpha=20^\circ$ مناسب است.

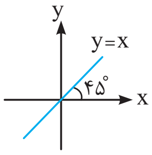
۲ | ۲۹۳ از محورهای مثلثاتی کمک می‌گیریم. در شکل، زاویه 1° بزرگ‌تر از مقیاس واقعی خود نمایش داده شده تا رسم شکل راحت‌تر باشد.

با توجه به شکل، واضح است که: $\sin 1^\circ<\tan 1^\circ<\cos 1^\circ$

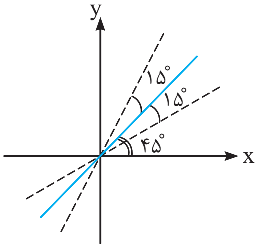
یعنی: $a<c<b$



۴ | ۲۹۴ خط $y=x$ با محور افقی زاویهٔ 45° دارد:



پس اگر بخواهیم با این خط زاویهٔ 15° بسازیم دو حالت داریم:



زاویهٔ این خط‌ها با افق ۴۵+۱۵ و ۱۵-۴۵ یعنی ۶۰ و ۳۰ درجه است.

پس شیب آن‌ها به ترتیب $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ خواهد بود و چون از مبدأ می‌گذرند، معادلهٔ آن‌ها $y=\sqrt{3}x$ و $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ می‌شود.

حالا بررسی گزینه‌ها:

۱) نقطهٔ $(\sqrt{3},3)$ روی خط $y=\sqrt{3}x$ قرار دارد.

۲) نقطهٔ $(\sqrt{3},1)$ روی خط $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ قرار دارد.

۳) نقطهٔ $(3,\sqrt{3})$ روی خط $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ قرار دارد.

۴) نقطهٔ $(3,1)$ روی هیچ‌یک از این دو خط قرار ندارد.

۱ | ۲۹۵ وقتی حاصل‌ضرب چند عبارت صفر می‌شود، حداقل یکی از آن‌ها برابر صفر است:

$$(4\sin^2\alpha-1)(4\sin^2\alpha-3)(4\sin^2\alpha-9)=0$$

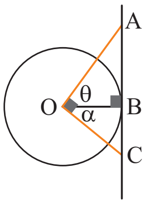
$$\Rightarrow 4\sin^2\alpha-1=0 \text{ یا } 4\sin^2\alpha-3=0 \text{ یا } 4\sin^2\alpha-9=0$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{4} \text{ یا } \sin^2\alpha=\frac{3}{4} \text{ یا } \sin^2\alpha=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{1}{2} \text{ یا } \sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ یا } \sin\alpha=\pm\frac{3}{2}$$

سینوس هر زاویه‌ای بین ۱- و ۱ یا برابر با آن‌هاست، پس $\sin\alpha=\pm\frac{3}{2}$ را بی‌خیال شوید! همچنین با توجه به حاده بودن α در این سؤال، $\sin\alpha$ مثبت است و در نتیجه تنها دو مقدار $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ قابل قبول هستند. از این‌رو، به ترتیب $\alpha=30^\circ$ و $\alpha=60^\circ$ به‌دست می‌آید و زاویهٔ حادهٔ دیگری برای α موجود نمی‌باشد!

۲۹۶ | ۳ در مثلث قائم‌الزاویه OBA، می‌نویسیم:



$$\cos\theta=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{m}\Rightarrow m\cos\theta=1$$

به طور مشابه در مثلث قائم‌الزاویه OBC می‌توان به $n\cos\alpha=1$ رسید. از طرفی $\hat{O}=\alpha+\theta=90^\circ$ و در واقع α و θ متمم یکدیگرند، پس $\cos\alpha=\sin\theta$ و رابطهٔ $n\cos\alpha=1$ به شکل $n\sin\theta=1$ نوشته می‌شود. حالا:

$$m\cos\theta+n\sin\theta=1+1=2$$

۲۹۷ | ۲ سینوس و کسینوس حداقل ۱- و حداکثر ۱ هستند:

$$-1\le\sin2\alpha\le1 \quad , \quad -1\le\cos3\beta\le1$$

پس حاصل $\sin2\alpha\cos3\beta$ حداکثر برابر ۱ می‌شود. از طرفی با توجه به نامنفی بودن m^2، مقدار m^2+1 حداقل برابر ۱ می‌باشد. چه طور چیزی که حداکثر ۱ است، با چیزی که حداقل ۱ است، برابر می‌شود؟ خب وقتی هر دو دقیقاً برابر ۱ باشند. با این حساب، داریم:

$$m^2+1=1\Rightarrow m^2=0\Rightarrow m=0$$

برای m فقط یک مقدار وجود دارد. تامام!

۲۹۸ | ۲ $\frac{1}{3}$ به اضافهٔ $\frac{1}{4}$ می‌شود $\frac{7}{12}$. سؤال گفته $\frac{\sin\alpha}{3}$ به اضافهٔ $\frac{\cos\beta}{4}$ شده $\frac{7}{12}$. پس می‌گوییم $\sin\alpha=\cos\beta=1$ و خودمان را راحت می‌کنیم! با توجه به حدود α و β که در صورت سؤال مشخص شده، باید گفت $\alpha=90^\circ$ و $\beta=0^\circ$. پس $\alpha+\beta=90^\circ$ و در نتیجه:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin90^\circ=1$$

۲۹۹ | ۴ هر سه رابطه درست‌اند. ببینید:

$$\frac{\sin15^\circ}{\sin75^\circ}=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\tan15^\circ$$

$$1+\tan^2 50^\circ=\frac{1}{\cos^2 50^\circ}=\frac{1}{\sin^2 40^\circ}\Rightarrow \sin^2 40^\circ(1+\tan^2 50^\circ)=1$$

$$\frac{\tan^2 20^\circ}{\cos^2 70^\circ}=\frac{\tan^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ}=\frac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}\times\frac{1}{\sin^2 20^\circ}=\frac{1}{\cos^2 20^\circ}=1+\tan^2 20^\circ$$

۳۰۰ | ۲ کاری ندارد که! به جای $\cos^2 10^\circ$ در صورت کسر، می‌نویسیم $1-\sin^2 10^\circ$ که این هم با اتحاد مزدوج می‌شود $(1-\sin10^\circ)(1+\sin10^\circ)$ تامام!

$$1-\frac{\cos^2 10^\circ}{1+\sin10^\circ}=1-\frac{1-\sin^2 10^\circ}{1+\sin10^\circ}=1-\frac{(1-\sin10^\circ)\cancel{(1+\sin10^\circ)}}{\cancel{1+\sin10^\circ}}$$

$$=1-1+\sin10^\circ=\sin10^\circ$$

این را در گزینه‌ها نمی‌بینیم. 80° متمم 10° است ($10^\circ+80^\circ=90^\circ$) پس سینوس یکی با کسینوس دیگری مساوی است:

$$\sin10^\circ=\cos80^\circ$$

۳۰۱ | ۳ می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

می‌توانیم صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت یعنی $1+\sin\theta$ ضرب کنیم:

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{(\cos\theta)(1+\sin\theta)}=\frac{\cos^2\theta}{(\cos\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

۳۰۲ | ۲ روش اول (اتحادهای مثلثاتی):

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$=1-\frac{9}{49}=\frac{40}{49}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{40}{49}}=\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

سؤال گفته α در ربع چهارم است، جایی که سینوس منفی است:

$$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

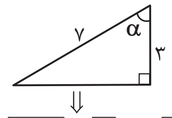
همچنین:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{7}}=-\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{-3}{2\sqrt{10}}=\frac{-3\sqrt{10}}{20}$$

در مورد گزینهٔ (۱) دقت کنید که در حالت کلی، $\cos2\alpha\neq2\cos\alpha$!

روش دوم: مثلث زیر را طوری کشیده‌ایم که در آن $\cos\alpha=\frac{3}{7}$ شود. در شکل مقابل داریم:



$\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$$\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\cot\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

البته چون در ربع چهارم، سه نسبت بالا منفی‌اند باید قرینهٔ آن‌ها را در نظر بگیریم.

۳۰۳ | ۴ به جای $1+\tan^2x$ می‌نویسیم $\frac{1}{\cos^2x}$:

$$\sqrt{1+\tan^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}=\frac{1}{|\cos x|}$$

سؤال گفته x در ربع سوم است ($180^\circ<x<270^\circ$) و آن‌جا کسینوس منفی است:

$$\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x}$$

به جای $\sin45^\circ$ هم می‌نویسیم $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$2\sin^2 45^\circ-\sin^2x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sin^2x=1-\sin^2x=\cos^2x$$

بنابراین:

$$\sqrt{1+\tan^2x}\,(2\sin^2 45^\circ-\sin^2x)=\frac{1}{-\cos x}\times\cos^2x=-\cos x$$

۳۰۴ | ۱ $1+\tan^2x$ همان $\frac{1}{\cos^2x}$ است.

در واقع $\sqrt{1+\tan^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}=\frac{1}{|\cos x|}$ که چون x در ربع دوم است (سؤال گفته $90^\circ<x<180^\circ$)، این عبارت مساوی $\frac{1}{-\cos x}$ می‌شود. به جای $\tan x$ هم می‌نویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$.