

» تقدیم به

روان پاک پدر و مادرم

حسین هاشمی طاهری»»

» تقدیم به

مادرم که بعد از خدا هر چه دارم از اوست

فرخ فرشیان»»

به طور کلی همیشه گفت به علم فیزیکی بوده که هر جا توش می‌موندن و نمی‌تونستن مسائل رو حل کنن به عده دانشمند بلند می‌شدن می‌رفتن تو علم ریاضیات به چیز جدیدی رو به ریاضی اضافه می‌کردن!

مثلن آقای نیوتون برای محاسبه‌کردن سرعت لحظه‌ای ساعت‌ها و روزها با خودش کلنجار رفته گفته چی کار کنم! چی کار نکنم! آها برم تو ریاضیات مفهوم مشتق رو اضافه کنم! نیوتون آدم بزرگی بوده و خب مجبور بوده مشتق رو ابداع کنه! شما ببخشینش و خواهشن خیلی بدوبیراه بهش نگین! مرسی.

خلاصه که همیشه گفت علم ریاضی کاملاً برآمده از متن زندگی ما و برای حل‌شدن مشکلات زندگی انسانه! پس دیگه لطفاً نگین چرا ما باید مشتق بخونیم؟ چرا لگاریتم بخونیم؟ چرا؟ چرا؟

از اساتید عزیز و بزرگوار: آقایان هاشمی طاهری و فرشیان برای تألیف این کتاب خوب و مفید بسیار سپاس‌گزاریم.

مقدمه مؤلفان

وقتی پیشنهاد شد تا کتابی جیبی ریاضی هر سه سال تجربیو بنویسم، یاد دانش‌آموزایی افتادم که همش می‌گن:

«آقا درس ریاضی سفته و زیاد، تازه شم ما کرای موم‌تریم داریم‌ا یه چیزایی بگین تا نمره شو بپاریمو در کشم بکنیم»

پیش خودم گفتمیم دم خیلی سبزی گرم! زدن تو خال.

حالا دُرسته که اینا جوجه کتابین، اما ضرب‌المثلی می‌گه «فلفل نبین چه ...»

شمام بشکنیدش تا نتیجشو ببینین! واسه این ادعایونم سه دلیل عمده دارم:

اولنش: درس‌نامه‌ش کافیه و کامل؛ یعنی هر چه از کتاب درسی بخواین تو اینم

هستش، پس یه جزوهٔ درسی کامله.

دومنش: بعد از هر مطلب درسی، مثال یا مثالی آوردم که حسابی اون درس

حالیومون بشه، تازه سؤالاتشم از ساده می‌ره تا یه کمی سخت.

سومنش: آخرای هر فصل، آزمونایی ده‌سؤاله اومده که می‌تونین خودتونو با اونا

بسنجین، پس واسه شرکت تو آزمونام مناسبه.

دیگه چی می‌خواین؟

فهرست

	■ فصل اول: تابع
۸	درس اول (توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی)
۱۹	درس دوم (ترکیب توابع)
۳۲	درس سوم (تابع وارون)
	■ فصل دوم: مثلثات
۵۲	درس اول (تناوب و تنازانت)
۶۰	درس دوم (معادلات مثلثاتی)
	■ فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۸۲	درس اول (حد بی‌نهایت)
۹۳	درس دوم (حد در بی‌نهایت)
	■ فصل چهارم: مشتق
۱۰۷	درس اول (آشنایی با مفهوم مشتق)
۱۱۱	درس دوم (مشتق‌پذیری و پیوستگی)
۱۲۴	درس سوم (آهنگ تغییر)
	■ فصل پنجم: کاربرد مشتق
۱۳۵	درس اول (اکسترم‌های تابع)
۱۵۰	درس دوم (بهینه‌سازی)
	■ فصل ششم: هندسه
۱۶۸	درس اول (تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی)
۱۷۴	درس دوم (دایره)
	■ فصل هفتم: احتمال
۱۸۹	درس اول (قانون احتمال کل)
۲۱۵	ضمائم

تابع فصل (۱)

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

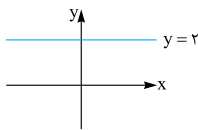
توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ و a_n اعداد حقیقی، n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه توابع چندجمله‌ای، مجموعه اعداد حقیقی است ($D_f = \mathbb{R}$)؛ به عنوان مثال تابع $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ ، یک تابع از درجه دو و تابع $f(x) = \frac{x^6}{4} + 5x^3 + 2$ یک تابع از درجه شش می‌باشد و دامنه هر دو تابع \mathbb{R} است.

انواع توابع چندجمله‌ای

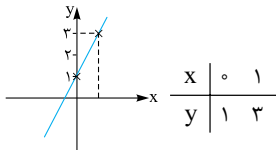
۱- تابع ثابت

تابع چندجمله‌ای از درجه صفر که به صورت $f(x) = k$; ($k \in \mathbb{R}$) باشد را تابع ثابت می‌گوییم. برای رسم تابع ثابت $f(x) = k$ ، به اندازه k روی محور y ها حرکت کرده و از آنجا خطی موازی محور x ها رسم می‌کنیم؛ به عنوان مثال در شکل روبه‌رو تابع ثابت $f(x) = 2$ رسم شده است.



۲- تابع خطی

یک تابع چندجمله‌ای از درجه یک است که ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$; ($a \neq 0$) می‌باشد. در این تابع، ضریب x (یعنی a) شیب



خط و b عرض از مبدأ می باشد و برای رسم آن داشتن دو نقطه دلخواه کافی است؛ به عنوان مثال در شکل مقابل تابع $f(x) = 2x + 1$ رسم شده است.

۳- تابع چندجمله ای درجه دوم

ضابطه این تابع به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) است و نمودار

آن سهمی نام دارد. برای رسم آن باید رأس سهمی را از فرمول $S \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ یا $S \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$ به دست آوریم. سپس با رسم یک جدول و قراردادن رأس سهمی

در آن، یک عدد بزرگتر و یک عدد کوچکتر از طول رأس سهمی در جدول قرار داده و عرض آن را به دست آورده و نمودار را رسم می کنیم. اگر $a > 0$ ، آن گاه دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، دهانه آن رو به پایین است.

مثال

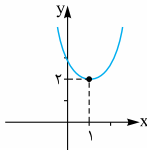
نمودار تابع درجه دوم $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را رسم کنید.

پاسخ ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می کنیم.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(1)} = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1^2 - 2(1) + 3 = 2$$

$$\Rightarrow S(1, 2)$$

x	0	1	2
y	3	2	3

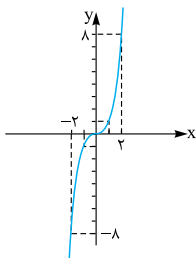


۴- تابع درجه سوم

تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ که در آن $a \neq 0$ باشد، تابعی درجه سوم است. دامنه و برد این تابع مجموعه اعداد حقیقی هستند.

$$y = x^3 \text{ نمودار}$$

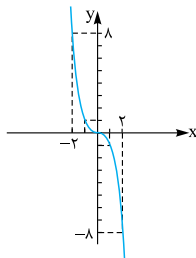
به کمک نقطه یابی، نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم.



x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

$$y = -x^3 \text{ نمودار}$$

به کمک نقطه یابی، نمودار $y = -x^3$ را رسم می‌کنیم.



x	-2	-1	0	1	2
y	8	1	0	-1	-8

از دو نمودار فوق می‌توان دریافت که نمودار $y = -x^3$ قرینه نمودار $y = x^3$ نسبت به محور y ها است.

برای یادآوری مطالب انتقال می‌توانید به قسمت انتقال توابع مراجعه کنید.

مثال

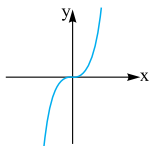
نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = (x-1)^3$

ب) $y = -x^3 + 1$

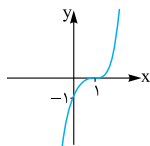
پ) $y = (x-2)^3 + 1$

پاسخ الف)



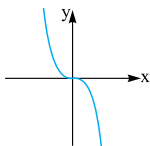
$$y = x^3$$

یک واحد در
جهت مثبت x ها



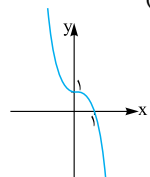
$$y = (x-1)^3$$

ب)



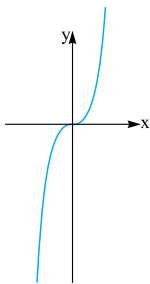
$$y = -x^3$$

یک واحد در
جهت مثبت y ها



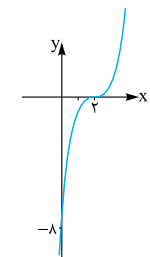
$$y = -x^3 + 1$$

ب)

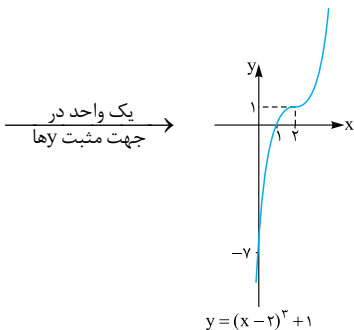


$$y = x^3$$

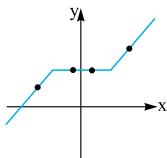
۲ واحد در
جهت مثبت x ها



$$y = (x-2)^3$$



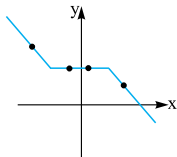
تابع صعودی



اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) با فرض $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آن گاه f را در مجموعه A تابعی صعودی می‌نامیم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع نزولی

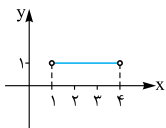


اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) با فرض $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آن گاه f را در مجموعه A تابعی نزولی می‌نامیم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تابع یکنوا

اگر تابعی در یک بازه، فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا است.

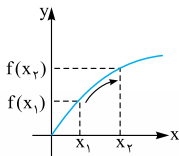


نکته تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. مانند تابع $f(x) = 1$ با دامنه $D = (1, 4)$. این تابع در بازه $(1, 4)$ ثابت است؛ زیرا:

$$1 < x_1 < x_2 < 4 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 1$$

نکته تابع ثابت $(k \in \mathbb{R}, f(x) = k)$ در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

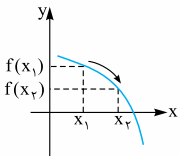
تابع اکیداً صعودی



اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) با فرض $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آن‌گاه f را در مجموعه A تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع اکیداً نزولی



اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) با فرض $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آن‌گاه f را در مجموعه A تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع اکیداً یکنوا

اگر تابعی در یک بازه، فقط اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً یکنوا است.

نکته توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا نیز هستند به این معنی که تابع اکیداً صعودی (یا نزولی)، صعودی (یا نزولی) هم هست، اما عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی تابع صعودی (یا نزولی)، لزوماً اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) نیست.

مثال ۱

کدام یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 12)\} \quad (1)$$

$$g = \{(1, 10), (2, 8), (3, 5), (4, 2)\} \quad (2)$$

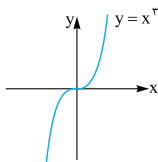
$$k = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7), (4, 10)\} \quad (3)$$

$$h = \{(1, 10), (2, 8), (3, 8), (4, 5)\} \quad (4)$$

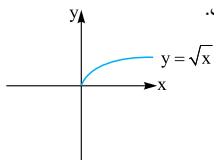
پاسخ | گزینه ۱ در همه گزینه‌ها، زوج‌های مرتب طوری نوشته شده‌اند که x ها از کوچک به بزرگ باشند. در تابع k هر y یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی است، پس تابع صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؛ در حالی که در تابع f هر y از قبلی خود بزرگ‌تر است، پس تابع f اکیداً صعودی است. واضح است که تابع g اکیداً نزولی است. تابع h نزولی است اما اکیداً نزولی نیست، زیرا $3 < 4$ ولی $h(3) = h(4)$.

چند تابع مهم اکیداً یکنوا

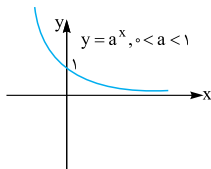
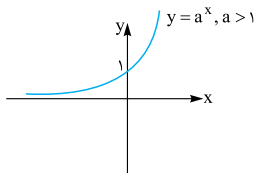
(۱) تابع $y = x^3$: این تابع اکیداً صعودی است.



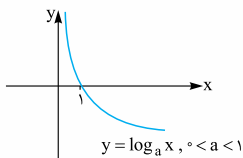
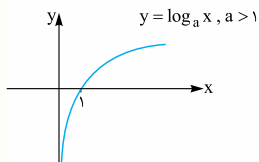
(۲) تابع $y = \sqrt{x}$: این تابع اکیداً صعودی است.



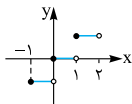
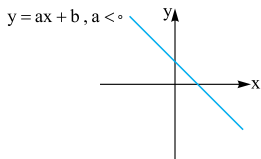
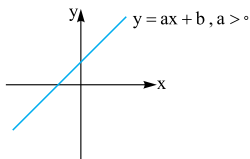
(۳) تابع $y = a^x$: این تابع با شرط $a > 1$ (مانند $y = 2^x$) تابعی اکیداً صعودی و با شرط $0 < a < 1$ (مانند $y = (\frac{1}{2})^x$) تابعی اکیداً نزولی است.



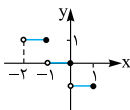
(۴) تابع $y = \log_a x$: این تابع با شرط $a > 1$ (مانند $y = \log_2 x$) تابعی اکیداً صعودی و با شرط $0 < a < 1$ (مانند $y = \log_{\frac{1}{2}} x$) تابعی اکیداً نزولی است.



(۵) تابع خطی $y = ax + b$: این تابع با شرط $a > 0$ (مانند $y = 2x + 1$) اکیداً صعودی و با شرط $a < 0$ (مانند $y = -3x + 2$) تابعی اکیداً نزولی است.



نکته تابع $y = [x]$ تابعی صعودی و نمودار آن به صورت مقابل است:



همین طور تابع $y = [-x]$ تابعی نزولی و نمودار آن به صورت مقابل است:

مثال ۲۲

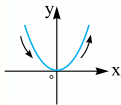
نمودار توابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است مشخص کنید:

الف) $y = x^2$

ب) $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

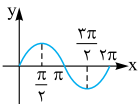
پ) $y = x|x|$

$$\text{ت) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ -1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$



پاسخ الف) نمودار تابع $y = x^2$ به شکل مقابل است:

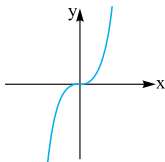
مشاهده می‌شود که تابع در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



(ب) نمودار تابع $y = \sin x$ به شکل مقابل است:

مشاهده می‌شود که تابع در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ اکیداً صعودی

و در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً نزولی است.



(پ) نمودار تابع $y = x|x|$ یا

$$y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

به شکل

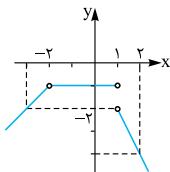
مقابل است:

مشاهده می‌شود که تابع در بازه $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ -1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

(ت) هر یک از ضابطه‌های تابع

یا پاره‌خط هستند و نمودار آن به شکل زیر است:



$$y = x + 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & -3 & -2 \\ \hline y & -2 & -1 \end{array}$$

$$y = -2x \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & -2 & -4 \end{array}$$

پرسش های تستی

۱- نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ از کدام ناحیه عبور نمی کند؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲- تابع $f = \{(-2, 3m-1), (2, m+4), (1, 5)\}$ اکیداً صعودی است. حدود

m کدام است؟

(۱) $m > 1$ (۲) $m > \frac{3}{2}$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $m < 2$

۳- تابع $y = x^2 |x|$ در بازه $[-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

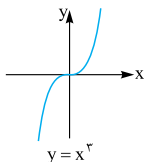
۴- کدام یک از توابع زیر، در بازه $[2, \pi]$ اکیداً صعودی است؟

(۱) $y = |x - 4|$ (۲) $y = |\sin x|$

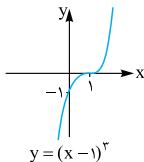
(۳) $y = x^2 - 8x + 16$ (۴) $y = x |x|$

پاسخ پرسش‌های تستی

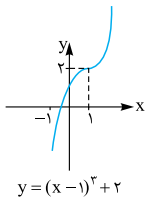
۱- گزینه «۴» نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = (x - 1)^3$ حاصل شود و در نهایت ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = (x - 1)^3 + 2$ حاصل شود. مشاهده می‌کنیم که این تابع از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.



یک واحد به
سمت راست



دو واحد به
سمت بالا



۲- گزینه «۳» x ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم. در این صورت در تابع اکیداً صعودی هر y از قبلی خود باید بزرگ تر باشد.

$$f = \{(-2, 3m-1), (1, 5), (2, m+4)\}$$

$$3m-1 < 5 < m+4$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} 3m-1 < 5 \\ m+4 > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m < 6 \\ m > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 1 \end{cases}$$

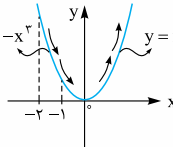
$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < m < 2$$

۳- گزینه «۱» ابتدا نمودار $y = x^2 |x|$ را رسم می کنیم:

$$y = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار $y = -x^3$ به صورت  است که روی \mathbb{R} اکیداً نزولی است و

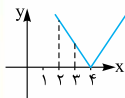
نمودار $y = x^3$ به صورت  است که روی \mathbb{R} اکیداً صعودی

است؛ در نتیجه تابع $y = -x^3$ در بازه $y = x^2$  پس بیشترین مقدار a ، برابر صفر است.

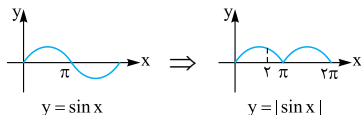
۴- گزینه «۴» هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه (۱): نمودار تابع به شکل مقابل است. π عددی بین ۳ و ۴

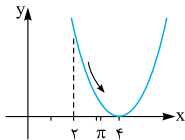
است، پس در بازه $[2, \pi]$ این تابع اکیداً نزولی است.



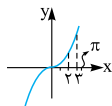
گزینه (۲): با توجه به نمودار زیر، تابع $|\sin x|$ در بازه $[2, \pi]$ تابع اکیداً نزولی است.



گزینه (۳): نمودار تابع $y = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ ، به صورت شکل صفحه بعد است و با توجه به شکل می‌بینیم که تابع در بازه $[2, \pi]$ اکیداً نزولی است.



$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



گزینه (۴):

در بازه $[2, \pi]$ تابع اکیداً صعودی است.