

کتاب‌های
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی ۳ (دوازدهم)

تجربی

کازم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشارات
انگه

مقدمه

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای ریاضی ۳ تجربی سال دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آنها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آنها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همهٔ تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای هر فصل آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو و همچنین از خانم شیرین دانشی‌پور و آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

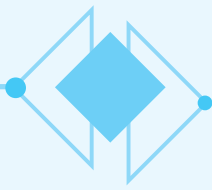
فهرست

● فصل اول: تابع

۲	درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی
۱۱	تمرین
۱۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۶	درس دوم: ترکیب توابع
۳۱	تمرین
۳۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۷	درس سوم: تابع وارون
۵۴	تمرین
۵۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل دوم: مثلثات

۶۲	درس اول: تناوب و تابع تانژانت
۶۶	تمرین
۶۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷۲	درس دوم: معادلات مثلثاتی
۸۰	تمرین
۸۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



● فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

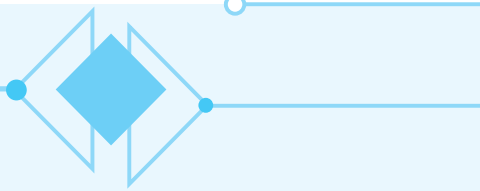
- درس اول: حد بی نهایت ۹۰
- تمرین ۱۰۰
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۰۲
- درس دوم: حد در بی نهایت ۱۰۹
- تمرین ۱۱۴
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۱۵

● فصل چهارم: مشتق

- درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۱۲۰
- تمرین ۱۲۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۲۹
- درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی ۱۳۳
- تمرین ۱۴۷
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۴۹
- درس سوم: آهنگ تغییر متوسط، آهنگ تغییر لحظه‌ای و معادله خط مماس ۱۵۸
- تمرین ۱۶۳
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۵

● فصل پنجم: کاربرد مشتق

- درس اول: اکستریم‌های تابع ۱۷۲
- تمرین ۱۸۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۷
- درس دوم: بهینه‌سازی ۱۹۵
- تمرین ۱۹۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۹۹



● فصل ششم: هندسه

- ۲۰۲ درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی
- ۲۰۷ تمرین
- ۲۱۰ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۲۱۴ درس دوم: دایره
- ۲۲۱ تمرین
- ۲۲۳ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل هفتم: احتمال

- ۲۲۸ قانون احتمال کل
- ۲۳۱ تمرین
- ۲۳۳ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل هشتم: راه‌حل تمرین‌ها

● فصل نهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

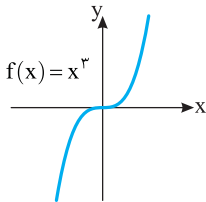
توابع چندجمله‌ای

تعریف هر تابع با دامنه \mathbb{R} را که ضابطه آن به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ است، که در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است و a_0, a_1, \dots, a_n عددهایی حقیقی هستند و $a_n \neq 0$ ، تابعی چندجمله‌ای از درجه n می‌نامند.

مثال: تابع‌های $f(x) = 2$ ، $f(x) = 3x - 1$ ، $f(x) = x^2 + 4$ و $f(x) = x^3 - \sqrt{3}x^2 + x - 1$ همگی تابع‌هایی چندجمله‌ای

هستند. تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$ تابعی چندجمله‌ای نیست (زیرا ضابطه‌اش به صورت چندجمله‌ای نیست).

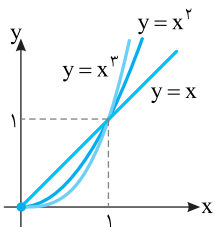
همین‌طور تابع f با دامنه $[0, 1]$ و ضابطه $f(x) = x$ تابعی چندجمله‌ای نیست (زیرا دامنه‌اش \mathbb{R} نیست).



نمودار تابع چندجمله‌ای درجه ۳ با ضابطه $f(x) = x^3$ به صورت روبه‌رو است.

چون هر خط موازی محور x نمودار این تابع را قطع می‌کند، پس برد این تابع \mathbb{R} است (توجه کنید که طبق تعریف، دامنه این تابع هم \mathbb{R} است). همین‌طور، چون هر خط موازی محور x این نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع یک‌به‌یک نیز هست. به این ترتیب، تابع f وارون‌پذیر است.

مسئله ۱ نمودار تابع‌های با ضابطه $y = x$ ، $y = x^2$ و $y = x^3$ را روی بازه $[0, +\infty)$ در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

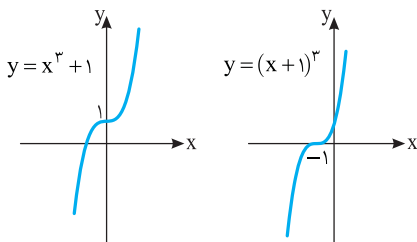


اگر $0 < a < 1$ ، آنگاه $a^3 < a^2 < a$ ، بنابراین روی بازه $(0, 1)$ ، نمودار $y = x^3$ زیر نمودار $y = x^2$ است و نمودار $y = x^2$ زیر نمودار $y = x$ است. اگر $a > 1$ ، آنگاه $a < a^2 < a^3$ ، بنابراین روی بازه $(1, +\infty)$ ، نمودار $y = x^3$ بالای نمودار $y = x^2$ است و نمودار $y = x^2$ بالای نمودار $y = x$ است. توجه کنید که اگر $a = 0$ یا $a = 1$ ، آنگاه $a = a^2 = a^3$ ، پس هر سه نمودار در نقطه‌های $(0, 0)$ و $(1, 1)$ مشترک‌اند.

مسئله ۱

راه‌حل

مسئله ۲ نمودار تابع‌های $y = x^3 + 1$ و $y = (x+1)^3$ را رسم کنید.



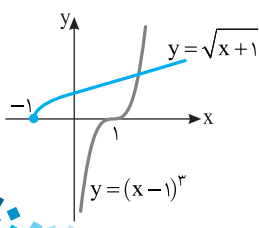
برای رسم نمودار تابع $y = x^3 + 1$ ، ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = x^3 + 1$ به‌دست بیاید. برای رسم نمودار تابع $y = (x+1)^3$ ، ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = (x+1)^3$ به‌دست بیاید.

مسئله ۲

راه‌حل

تست ۱ نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ در چند نقطه نمودار تابع $y = (x-1)^3$ را قطع می‌کند؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

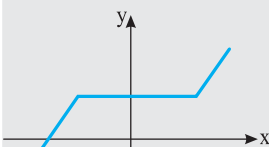
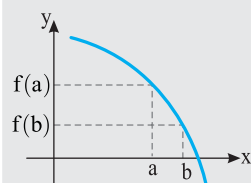
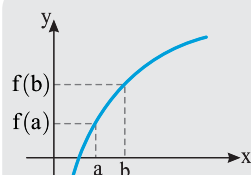


نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ به‌دست بیاید. نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = (x-1)^3$ به‌دست بیاید. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که این دو نمودار یک نقطه تقاطع دارند.

تست ۱

راه‌حل

توابع صعودی و نزولی



تعریف تابع f را روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) **اکیداً صعودی** می‌نامند، به شرطی که به ازای هر a و b در مجموعه A ،

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

اگر $A = D_f$ ، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **اکیداً صعودی** است.

• تابع f را روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) **اکیداً نزولی** می‌نامند، به شرطی که به ازای هر a و b در مجموعه A ،

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

اگر $A = D_f$ ، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **اکیداً نزولی** است.

• اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) **اکیداً صعودی** یا **اکیداً نزولی** باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A **اکیداً یکنواست**.

• تابع f را روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) **صعودی** می‌نامند، به شرطی که به ازای هر a و b در مجموعه A ،

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

اگر $A = D_f$ ، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **صعودی** است.

• تابع f را روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) **نزولی** می‌نامند، به شرطی که به ازای هر a و b در مجموعه A ،

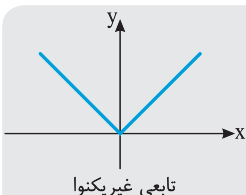
$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

اگر $A = D_f$ ، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **نزولی** است.

• اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) **صعودی** یا **نزولی** باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A **یکنواست**.

تذکر تابع ثابت روی هر زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش هم صعودی است و هم نزولی. همچنین، تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است و هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

تذکر وقتی می‌گوییم «تابع f صعودی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش صعودی است و وقتی می‌گوییم «تابع f نزولی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش نزولی است.



تعریف اگر تابع f روی مجموعه $A \subseteq D_f$ نه صعودی باشد و نه نزولی، روی این مجموعه تابعی **غیر یکنواست**.

تست ۲ به ازای چند عدد صحیح x تابع $f = \{(-2, 4x-3), (0, x^2), (x^2, 9)\}$ صعودی است؟

۴ (۴) ۵ (۳) ۶ (۲) ۷ (۱)

با توجه به دو زوج مرتب $(0, x^2)$ و $(-2, 4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2 < 0 \Rightarrow 4x - 3 \leq x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^2, 9)$ و $(-2, 4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2 < x^2 \Rightarrow 4x - 3 \leq 9 \Rightarrow 4x \leq 12 \Rightarrow x \leq 3$$

اگر $x = 0$ ، $f = \{(-2, -3), (0, 0), (0, 9)\}$ ، که در این صورت f تابع نیست. پس با توجه به دو زوج مرتب $(x^2, 9)$ و $(0, x^2)$ می‌توان نوشت:

$$0 < x^2 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

چون x مقدار صحیح است، از اشتراک شرایط به دست آمده نتیجه می‌شود: $x \in \{3, 1, -1, -2, -3\}$. بنابراین پنج مقدار صحیح برای x وجود دارد.

تست ۳

تابع $f = \{(1, a-2), (2, 3a+4), (3, 2a-b)\}$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) -۵

راه حل

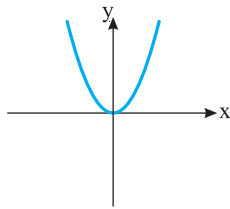
تنها تابعی که هم صعودی است و هم نزولی تابع ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین
 $f(1) = f(2) = f(3) \Rightarrow a - 2 = 3a + 4 = 2a - b \Rightarrow a = -3, b = -1$

در نتیجه $a+b = -4$.

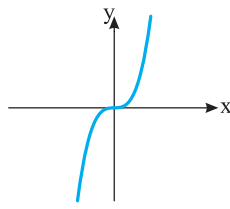
تذکر

ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا باشد، اما روی زیرمجموعه‌هایی از دامنه‌اش یکنوا باشد.

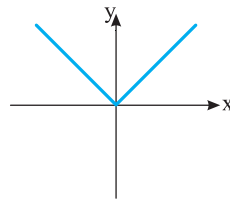
مثال: نمودار توابع معروف را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم. با توجه به نمودار آنها صعودی (اکید)، نزولی (اکید) یا غیریکنوا بودن هر تابع مشخص است.



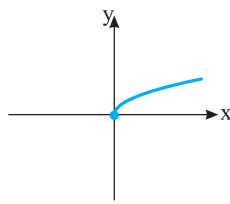
غیریکنوا، $y = x^2$



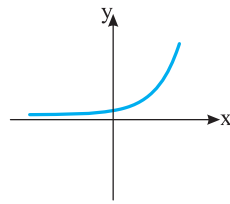
اکیداً صعودی، $y = x^3$



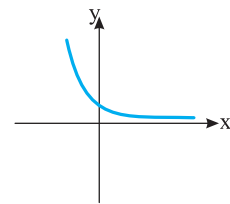
غیریکنوا، $y = |x|$



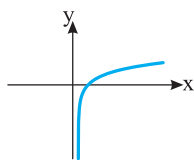
اکیداً صعودی، $y = \sqrt{x}$



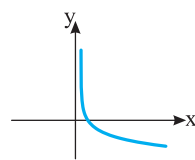
اکیداً صعودی، $y = a^x, a > 1$



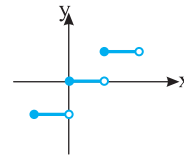
اکیداً نزولی، $y = a^x, 0 < a < 1$



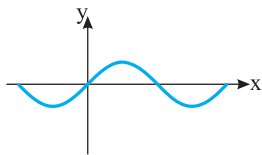
اکیداً صعودی، $y = \log_a x, a > 1$



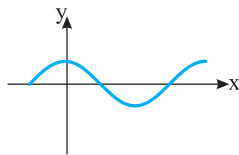
اکیداً نزولی، $y = \log_a x, 0 < a < 1$



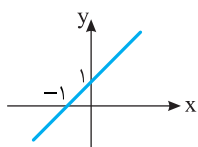
صعودی، $y = [x]$



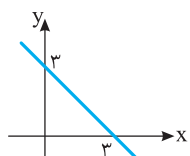
غیریکنوا، $y = \sin x$



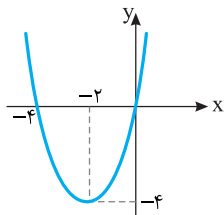
غیریکنوا، $y = \cos x$



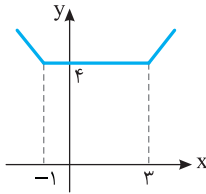
مثال: تابع $y = x + 1$ یک تابع اکیداً صعودی است، زیرا با افزایش x ، y افزایش می‌یابد. یعنی نمودار آن با افزایش x رو به بالا حرکت می‌کند.



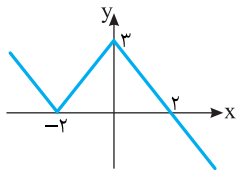
• تابع $y = -x + 3$ یک تابع اکیداً نزولی است، زیرا با افزایش x ، y کاهش می‌یابد. یعنی نمودار آن با افزایش x رو به پایین حرکت می‌کند.



● تابع $y = x^2 + 4x$ در دامنه خود یک تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست. اما این تابع روی بازه $(-\infty, -2]$ اکیداً نزولی است، زیرا در این بازه نمودار آن با افزایش x رو به پایین حرکت می‌کند و روی بازه $[-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است زیرا در این بازه با افزایش x ، y افزایش می‌یابد.



● نمودار تابع $y = |x+1| + |x-3|$ به شکل مقابل است. این تابع روی بازه $[3, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازه $(-\infty, -1]$ اکیداً نزولی است. روی بازه $[-1, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی نیست، ولی صعودی است، زیرا با افزایش x ، y کاهش پیدا نمی‌کند، در واقع یا ثابت می‌ماند یا زیاد می‌شود. به همین ترتیب روی بازه $(-\infty, 3]$ تابع اکیداً نزولی نیست، ولی نزولی است.



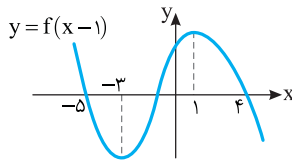
نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. تابع f روی کدام بازه زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(1, 4)$
(۴) $(-1, +\infty)$

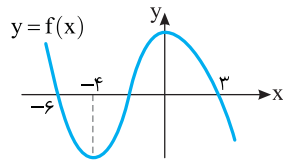
تست ۴

راه‌حل تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -2]$ و $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. از بازه‌های داده شده فقط بازه $(1, 4)$ زیرمجموعه یکی از این دو بازه است.

راه‌حل



نمودار تابع $y = f(x-1)$ در شکل مقابل رسم شده است. تابع f روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



ابتدا نمودار تابع $y = f(x-1)$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست بیاید. اکنون از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که این تابع روی بازه $[-4, 0]$ اکیداً صعودی است.

مسئله ۳

راه‌حل

تست ۵ $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 3 \\ -2x+4 & x \geq 3 \end{cases}$ و تابع f روی بازه $[a, +\infty)$ نزولی باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 3 (۴) -3

راه‌حل تابع $y = x-3$ روی بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً صعودی است. تابع $y = 2$ روی بازه $[-2, 3)$ تابعی ثابت است، پس هم نزولی است هم صعودی. تابع $y = -2x+4$ روی بازه $[3, +\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازه $[-2, +\infty)$ نزولی است. پس حداقل مقدار a برابر -2 است.

راه‌حل

تست ۶ تابع نمایی $f(x) = (3k+1)^x$ اکیداً نزولی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $0 < k < \frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3} < k < 0$ (۳) $-\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3}$ (۴) $k > 0$

راه‌حل اگر تابع $y = a^x$ اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $0 < a < 1$. بنابراین $0 < 3k+1 < 1$ ، پس $-\frac{1}{3} < k < 0$.

راه‌حل

تست ۷

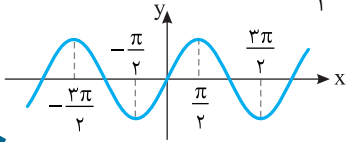
تابع $f(x) = \sin x$ روی بازه $[a, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{\pi}{4}$



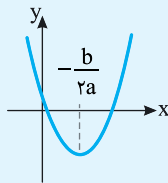
با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که حداقل مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

راه‌حل

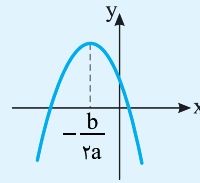
نکته

تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ روی \mathbb{R} غیریکنواست.

- اگر $a > 0$ ، تابع f روی بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
- اگر $a < 0$ ، تابع f روی بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



$$f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$$

تست ۸

تابع $f(x) = x^2 - 6x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) -۲

(۱) ۲

تابع $f(x) = x^2 - 6x$ روی بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[3, +\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین حداقل مقدار a برابر ۳ است.

راه‌حل

تست ۹

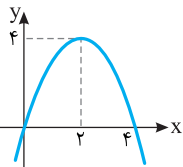
بزرگ‌ترین مقدار k که به ازای آن تابع f با دامنه $(-\infty, k]$ و ضابطه $f(x) = -x^2 + 4x$ اکیداً صعودی است کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



طول رأس سهمی به معادله $y = -x^2 + 4x$ برابر است با $-\frac{b}{2a} = 2$. بنابراین از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که این تابع روی بازه $(-\infty, 2]$ اکیداً صعودی است. بنابراین بزرگ‌ترین مقدار k برابر با ۲ است.

راه‌حل

مسئله ۴

بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = x^2 + |x+1| + 1$ روی آنها اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

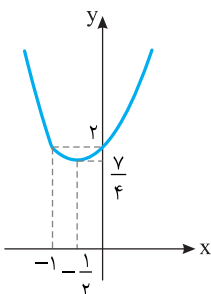
توجه کنید که

راه‌حل

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 + 1 & x \geq -1 \\ x^2 - (x+1) + 1 & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + x + 2 & x \geq -1 \\ x^2 - x & x < -1 \end{cases}$$

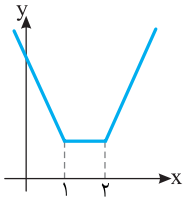
بنابراین نمودار تابع f به شکل مقابل است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه

$(-\infty, -\frac{1}{2}]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

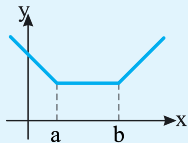


مسئله ۵

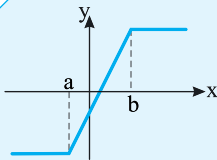
نمودار تابع $f(x) = |x-1| + |x-2|$ را رسم کنید و بازه‌هایی را که تابع f روی آن بازه‌ها یکنوا است، مشخص کنید.

راه‌حل


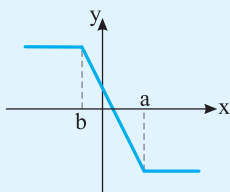
نمودار تابع f به شکل مقابل است. واضح است که تابع f روی بازه $(-\infty, 2]$ نزولی، روی بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً نزولی، روی بازه $(1, +\infty)$ صعودی، روی بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازه $[1, 2]$ هم صعودی و هم نزولی است.

نکته


نمودار تابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$ به شکل مقابل است ($a < b$). واضح است که تابع f روی بازه $(-\infty, b]$ نزولی، روی بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه $[a, +\infty)$ صعودی، روی بازه $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازه $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.

نکته


اگر $a < b$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی، روی بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی \mathbb{R} صعودی است.



اگر $a > b$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازه $[b, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه‌های $(-\infty, b]$ و $[a, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی \mathbb{R} نزولی است.

توابع اکیداً یکنوا و نابرابری‌ها

اگر تابع f روی بازه I اکیداً صعودی باشد، به ازای هر a و b در I ،

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

اگر تابع f روی بازه I اکیداً نزولی باشد، به ازای هر a و b در I ،

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

اکنون توجه کنید که

(۱) تابع $y = x^3$ و در حالت کلی تابع $y = x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) روی \mathbb{R} اکیداً صعودی هستند. پس

$$a < b \Rightarrow a^3 < b^3, \quad a < b \Rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$$

در واقع می‌توان دو طرف نابرابری را بدون هیچ شرطی به توان فرد رساند.

(۲) تابع‌های $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ و در حالت کلی تابع‌های $y = \sqrt[n]{x}$ و $y = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) روی بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی

هستند. پس به ازای هر دو عدد حقیقی و نامنفی مانند a و b ،

$$\begin{cases} 0 \leq a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n} \\ 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{cases}$$

(۳) تابع $y = x^2$ و در حالت کلی تابع $y = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) روی بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی هستند. پس به ازای هر دو عدد حقیقی و غیر

مثبت مانند a و b ،

$$a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2, \quad a < b \leq 0 \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$$

در واقع وقتی دو طرف نابرابری غیر مثبت است، با توان زوج رساندن دو طرف، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

(۴) اگر $a > 1$ ، تابع $y = \log_a x$ روی $(0, +\infty)$ و تابع $y = a^x$ روی \mathbb{R} اکیداً صعودی هستند. پس

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

(۵) اگر $0 < a < 1$ ، تابع $y = \log_a x$ روی $(0, +\infty)$ و تابع $y = a^x$ روی \mathbb{R} اکیداً نزولی هستند. پس

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

در حقیقت، با لگاریتم گرفتن از دو طرف نابرابری یا اثر دادن تابع نمایی، جهت نابرابری تغییر می‌کند. همچنین با حذف این توابع از دو طرف نابرابری، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

نکته

اگر تابع f صعودی باشد و $f(a) < f(b)$ ، آن‌گاه $a < b$.

اگر تابع f نزولی باشد و $f(a) < f(b)$ ، آن‌گاه $a > b$.

تست ۱۰

تابع f روی \mathbb{R} نزولی است و $f(2x+1) < f(2-x)$. حدود x کدام است؟

- (۱) $x > 1$ (۲) $x < 1$ (۳) $x > \frac{1}{3}$ (۴) $x < \frac{1}{3}$

چون تابع f نزولی است، پس

$$f(2x+1) < f(2-x) \Rightarrow 2x+1 > 2-x \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

تست ۱۱

اگر تابع f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد و $f(2) = 0$ ، دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0)$

توجه کنید که $D_g = \{x \mid x \in D_f, f(x) > 0\}$. از طرف دیگر، چون تابع f اکیداً نزولی است و $f(2) = 0$ ، پس

$$f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(2) \Rightarrow x < 2$$

بنابراین $D_g = (-\infty, 2)$.

تست ۱۲

از نابرابری $a < b < 0$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$ (۲) $\frac{3}{a} > \frac{3}{b}$ (۳) $2^a < 2^{b+1}$ (۴) $\log|a| < \log|b|$

توجه کنید که

گزینه (۱)

گزینه (۲)

گزینه (۳)

$$-a > -b > 0 \Rightarrow \sqrt{-a} > \sqrt{-b}$$

$$a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3}{b} < \frac{3}{a}$$

$$a < b \Rightarrow 2^a < 2^b$$

از مثبت بودن 2^b ، نتیجه می‌شود که $2^b < 2 \times 2^b$. بنابراین

$$\begin{cases} 2^a < 2^b \\ 2^b < 2^{b+1} \end{cases} \Rightarrow 2^a < 2^{b+1}$$

گزینه (۴)

$$a < b < 0 \Rightarrow 0 < -b < -a \Rightarrow \log(-b) < \log(-a) \Rightarrow \log|b| < \log|a|$$

مسئله ۶

راه حل

اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، ثابت کنید تابع $f+g$ صعودی است.
فرض کنید a و b دو عضو دلخواه از دامنه تابع $f+g$ باشند. اگر $a < b$ ، از صعودی بودن توابع f و g نتیجه می‌شود

$$f(a) \leq f(b), \quad g(a) \leq g(b)$$

از جمع کردن دو طرف نابرابری‌های فوق نتیجه می‌شود

$$f(a) + g(a) \leq f(b) + g(b) \Rightarrow (f+g)(a) \leq (f+g)(b)$$

بنابراین تابع $f+g$ صعودی است.

نتیجه

اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.

اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.

مسئله ۷

راه حل

تابعی مانند f با دامنه \mathbb{R} مثال بزنید که تابع g با ضابطه $g(x) = f(x) + [x]$ اکیداً صعودی باشد.

تابع با ضابطه $y = [x]$ و دامنه \mathbb{R} صعودی است. بنابراین، اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، تابع g با ضابطه $g(x) = f(x) + [x]$ اکیداً صعودی است:

$$x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) \\ [x] \leq [y] \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} f(x) + [x] < f(y) + [y]$$

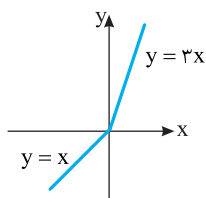
مثلاً می‌توانیم فرض کنیم $f(x) = x$. به این ترتیب، تابع g با ضابطه $g(x) = x + [x]$ ویژگی مورد نظر را دارد.

مسئله ۸

راه حل

دامنه تابع‌های f و g یکسان است، تابع f یکنواست ولی تابع g یکنوا نیست. آیا تابع $f+g$ لزوماً یکنوا نیست؟

ممکن است تابع $f+g$ یکنوا باشد. مثلاً، اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ (با دامنه \mathbb{R})، آن‌گاه تابع f



یکنواست، تابع g یکنوا نیست ولی

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

پس تابع $f+g$ یکنواست (اکیداً صعودی است).

مسئله ۹

راه حل

دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هر دو صعودی باشند و تابع $h(x) = (f-g)(x)$

(الف) صعودی باشد. (ب) نزولی باشد. (پ) غیریکنوا باشد.

(الف) توابع $f(x) = 3x$ و $g(x) = 2x$ صعودی‌اند و تابع $(f-g)(x) = x$ نیز صعودی است.

(ب) توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = 3x$ صعودی‌اند و تابع $(f-g)(x) = -x$ نزولی است.

(پ) توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = 3x$ صعودی‌اند و تابع $h(x) = (f-g)(x) = x^3 - 3x$ غیریکنواست. زیرا مثلاً

$$0 < 2 \Rightarrow h(0) < h(2)$$

پس تابع h نزولی نیست. همچنین

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow h\left(-\frac{1}{2}\right) > h\left(\frac{1}{2}\right)$$

پس تابع h صعودی نیست.

مسئله ۱۰

راه حل

دامنه تابع‌های f و g یکسان است و هر دو اکیداً صعودی‌اند. آیا تابع $f \times g$ نیز لزوماً اکیداً صعودی است؟

ممکن است تابع $f \times g$ اکیداً صعودی نباشد. مثلاً اگر $f(x) = g(x) = x$ (با دامنه \mathbb{R})، آن‌گاه $f(x) \times g(x) = x^2$ ، و این تابع روی

\mathbb{R} اکیداً صعودی نیست.

مسئله ۱۱

اگر تابع‌های f و g با دامنه یکسان صعودی باشند و مقادیر این توابع مثبت باشند، ثابت کنید تابع $f \times g$ صعودی است.

راه حل

فرض کنید a و b دو عضو دلخواه از دامنه تابع $f \times g$ باشند. اگر $a < b$ ، از صعودی بودن توابع f و g نتیجه می‌شود

$$0 < f(a) \leq f(b), \quad 0 < g(a) \leq g(b)$$

اگر دو طرف نابرابری‌های فوق را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود

$$f(a)g(a) \leq f(b)g(b) \Rightarrow (f \times g)(a) \leq (f \times g)(b)$$

بنابراین تابع $f \times g$ صعودی است.

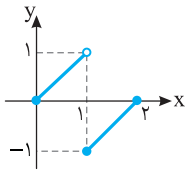
نتیجه

اگر تابع‌های f و g صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f \times g$ نیز صعودی است.

اگر تابع‌های f و g نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f \times g$ نیز نزولی است.

مسئله ۱۲

تابع f روی هر یک از مجموعه‌های A و B اکیداً صعودی است. آیا تابع f روی مجموعه $A \cup B$ نیز لزوماً اکیداً صعودی است؟



ممکن است تابع f روی مجموعه $A \cup B$ اکیداً صعودی نباشد. مثلاً تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x-2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

روی هر یک از مجموعه‌های $[0, 1]$ و $[1, 2]$ اکیداً صعودی است. اما روی اجتماع این دو مجموعه، یعنی

$$[0, 2] \text{ اکیداً صعودی نیست، زیرا مثلاً } 0 < 1, \text{ اما } f(0) > f(1).$$

مسئله ۱۳

تابع f یکنوا نیست. آیا تابع f^2 نیز لزوماً یکنوا نیست؟

راه حل

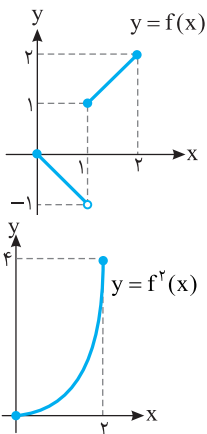
ممکن است تابع f^2 یکنوا باشد. مثلاً، تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

یکنوا نیست، اما

$$f^2(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

پس تابع f^2 یکنواست.



مسئله ۱۴

ثابت کنید اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.

راه حل

اگر f تابعی صعودی باشد، a و b در دامنه f باشند و $a < b$ ، آن‌گاه $f(a) \leq f(b)$. اگر دو طرف این نابرابری را در -1 ضرب کنیم،

$$\text{به دست می‌آید } -f(b) \leq -f(a), \text{ یعنی تابع } -f \text{ نزولی است.}$$

نتیجه

اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.

اگر f تابعی نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است.

مسئله ۱۵

اگر تابع f صعودی باشد و $R_f \subseteq (0, +\infty)$ ، ثابت کنید تابع $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ نزولی است.

راه حل

از صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود به ازای هر a و b از دامنه f که $a < b$ ، $f(a) \leq f(b)$. چون برد تابع زیرمجموعه‌ای از بازه

$$(0, +\infty) \text{ است، پس مقادیر } f(a) \text{ و } f(b) \text{ مثبت هستند و از } f(a) \leq f(b) \text{ نتیجه می‌شود } \frac{1}{f(a)} \geq \frac{1}{f(b)}.$$

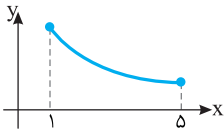
$$a < b \Rightarrow g(a) \geq g(b)$$

پس تابع g نزولی است. توجه کنید که اگر $R_f \subseteq (-\infty, 0)$ ، نتیجه فوق درست است. ولی اگر شرط‌های فوق وجود نداشته باشند، ممکن

است تابع g غیریکنوا باشد.

$$\text{مثلاً تابع } f(x) = x \text{ صعودی است و تابع } g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \text{ غیریکنواست. در این مثال } R_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

نتیجه اگر f تابعی صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن گاه تابع $\frac{1}{f}$ نزولی است. همچنین اگر f تابعی نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن گاه تابع $\frac{1}{f}$ صعودی است.



تست ۱۳ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً صعودی است؟

$$(۲) \quad y = f^2(x)$$

$$(۱) \quad y = \frac{1}{f(x)}$$

$$(۴) \quad y = xf(x)$$

$$(۳) \quad y = x^2 f(x)$$

راه حل f تابعی اکیداً نزولی با مقادیر مثبت است. بنابراین تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ اکیداً صعودی است.

تست ۱۴ اگر مقادیر تابع f عددهایی مثبت باشند و تابع f^2 صعودی باشد، کدام یک از تابع‌های زیر حتماً نزولی است؟

$$(۴) \quad y = \frac{1}{f(x)}$$

$$(۳) \quad y = x^2 - f(x)$$

$$(۲) \quad y = x^2 f(x)$$

$$(۱) \quad y = f(x) + 2x^2$$

راه حل توجه کنید که دامنه تابع‌های f و f^2 یکسان است. همچنین، اگر a و b در دامنه f باشند، چون تابع f^2 صعودی است و مقادیر f مثبت‌اند، پس

$$a < b \Rightarrow f^2(a) \leq f^2(b) \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow \frac{1}{f(b)} \leq \frac{1}{f(a)}$$

یعنی تابع $\frac{1}{f}$ حتماً نزولی است.

تمرین

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید. (۱-۳)

$$-۲ \quad f(x) = |x^3 + 1|$$

$$-۱ \quad f(x) = |x|^3 + 1$$

$$-۳ \quad f(x) = (x-1)^3 - 1$$

-۴ صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را مشخص کنید.

$$\text{الف) } f = \{(-1, -2), (-2, -3), (2, 1), (1, 0), (3, 2)\}$$

$$\text{ب) } g = \{(2, -5), (-1, 0), (1, -2), (\frac{3}{4}, -4)\}$$

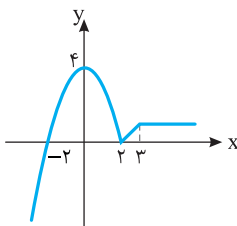
$$\text{پ) } h = \{(-1, 0), (2, 5), (1, -4)\}$$

-۵ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مشخص کنید تابع روی کدام بازه

الف) اکیداً صعودی

ب) اکیداً نزولی

پ) ثابت است.



$$-۶ \quad \text{ابتدا نمودار تابع } f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & x > 2 \end{cases} \text{ را رسم کنید، سپس مشخص کنید که تابع روی چه بازه‌ای اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی}$$

یا ثابت است.

-۷ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

اگر تابع $y=f(x)$ روی بازه $[-2, 5]$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاهالف) تابع $y=f(x+3)$ روی بازه $\dots\dots\dots$ اکیداً $\dots\dots\dots$ است.ب) تابع $y=-f(x)$ روی بازه $\dots\dots\dots$ اکیداً $\dots\dots\dots$ است.پ) تابع $y=f(-x)$ روی بازه $\dots\dots\dots$ اکیداً $\dots\dots\dots$ است.ت) تابع $y=f(x)+3$ روی بازه $\dots\dots\dots$ اکیداً $\dots\dots\dots$ است.-۸ نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را بررسی کنید.-۹ وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=kx-|2x-3|$ را برحسب مقادیر مختلف k بررسی کنید.-۱۰ اگر تابع f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$ ، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{(x^2-4)f(x)}$ را مشخص کنید.-۱۱ اگر تابع f روی \mathbb{R} اکیداً صعودی باشد و $f(a^3)<f(a^2)$ ، حدود a را به دست آورید.-۱۲ اگر f تابعی نزولی روی \mathbb{R} باشد و $f(\frac{1}{m})<f(m)$ ، حدود m را مشخص کنید.-۱۳ اگر f تابعی صعودی باشد، $D_f=[0, +\infty)$ و $f(2)=0$ ، مجموعه جواب نامعادله $f(2x-1)<0$ را مشخص کنید.-۱۴ اگر تابع‌های f و g با دامنه یکسان اکیداً یکنوا باشند، آیا تابع $f+g$ نیز لزوماً اکیداً یکنواست؟-۱۵ دامنه تابع‌های f و g یکسان است و هر دو غیریکنوا هستند. آیا تابع $f+g$ نیز لزوماً غیریکنواست؟-۱۶ اگر تابع‌های f و g با دامنه یکسان صعودی باشند و مقادیر این دو تابع منفی باشند، ثابت کنید تابع $f \times g$ نزولی است.-۱۷ دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هر دو صعودی باشند و تابع $\frac{f}{g}$

الف) صعودی باشد. ب) نزولی باشد. پ) غیریکنوا باشد.

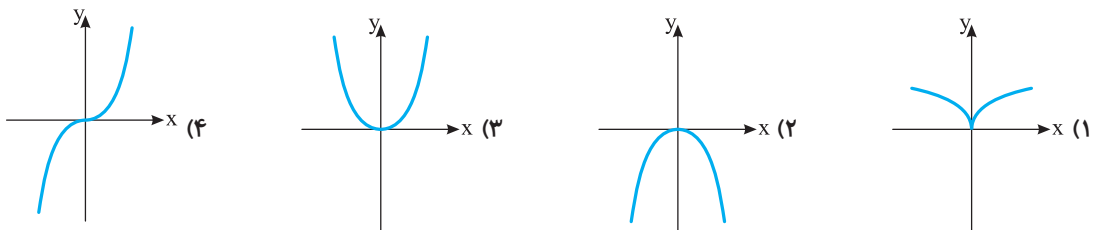
-۱۸ هر نقطه از دامنه تابع f را که در نظر بگیرید، یک بازه باز شامل آن نقطه وجود دارد که این تابع روی آن یکنواست. آیا تابع f لزوماً یکنواست؟-۱۹ ثابت کنید تابع $f(x)=x[x]$ روی بازه $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.-۲۰ نشان دهید تابع $f(x)=\frac{\log_{\Delta} x}{2^x}$ روی بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- نمودار تابع $y = x^3 + 1$ چند بار خط $y = -x$ را قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۲- نمودار تابع $y = |-x^3|$ کدام است؟



۳- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ چند بار خط $y = -x$ را قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۴- کدام تابع صعودی است؟

۱ $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ ۲ $g = \{(-1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$

۳ $h = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ ۴ $k = \{(2, 0), (0, 1), (1, -2)\}$

۵- تابع $f = \{(1, m-1), (2, 2m), (3, m+3)\}$ صعودی است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶- تابع $f = \{(-a^2 - 1, a), (0, 2), (a^2 + 1, 2a + 1)\}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

۱ $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ ۲ $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ ۳ $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ ۴ $-2 \leq a \leq 2$

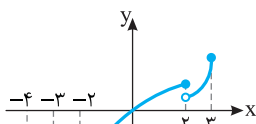
۷- اگر تابع $f = \{(3, a+b), (2, a-b), (1, 4)\}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار ab کدام است؟

- ۱ (۱) ۴ (۲) صفر ۳ (۳) -۱۶ ۴ (۴) ۱۶

۸- چند تابع اکیداً صعودی با دامنه $\{1, 2, 3\}$ و برد $\{4, 5, 6\}$ وجود دارد؟

- ۱ (۱) ۲۷ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱

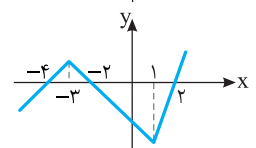
۹- شکل روبه‌رو نمودار تابع به ضابطه $y = f(x)$ را نشان می‌دهد. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن صعودی است کدام است؟



۱ (۱) $[0, 3]$ ۲ (۲) $[-3, 2]$

۳ (۳) $[-2, 2]$ ۴ (۴) $[-2, 3]$

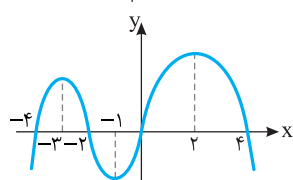
۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع $-f$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱ (۱) $[-3, 2]$ ۲ (۲) $(-\infty, -3]$

۳ (۳) $[-3, 1]$ ۴ (۴) $[1, +\infty)$

۱۱- نمودار تابع $y = f(x-1)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(x)|$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱ (۱) $(-3, -2)$ ۲ (۲) $(2, 4)$

۳ (۳) $(-1, 0)$ ۴ (۴) $(-2, -1)$

- ۱۲- تابع $f(x) = -4x^2 + 6x - 1$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟
 (۱) $(\frac{3}{4}, +\infty)$ (۲) $(-\infty, \frac{3}{4})$ (۳) $(-\frac{3}{4}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -\frac{3}{4})$
- ۱۳- تابع f با ضابطه $f(x) = -x^2 + 4x$ و دامنه $[k, +\infty)$ نزولی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k \geq 2$ (۲) $k \geq -2$ (۳) $k \leq -2$ (۴) $k \geq -2$
- ۱۴- تابع نمایی $f(x) = (2k-3)^x$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k > 0$ (۲) $k > 1$ (۳) $k > 2$ (۴) $k > \frac{3}{2}$
- ۱۵- تابع $f(x) = \log_{(k+1)}(x+2)$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k > 0$ (۲) $k > 1$ (۳) $0 < k < 1$ (۴) $-1 < k < 0$
- ۱۶- کدام تابع نزولی است؟
 (۱) $y = \frac{1}{x}$ (۲) $y = \sqrt{x-1}$ (۳) $y = x^2 - 1$ (۴) $y = -\sqrt{x+1}$
- ۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 1-x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ چگونه است؟
 (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) غیر یکنوا (۴) هم صعودی و هم نزولی
- ۱۸- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x + 1 & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. تابع f روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟
 (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[-2, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) \mathbb{R}
- ۱۹- تابع $f(x) = x[x]$ روی بازه $(-\infty, 0)$ چگونه است؟ ($[]$ علامت جزء صحیح است).
 (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) هم صعودی و هم نزولی (۴) غیر یکنوا
- ۲۰- تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ روی بازه $(a, +\infty)$ نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۲۱- تابع $f(x) = 3 \sin x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, a]$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟
 (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) $\frac{3\pi}{2}$
- ۲۲- اگر f یک تابع صعودی روی \mathbb{R} باشد و $f(2m-1) \geq f(m+1)$ ، حدود m کدام است؟
 (۱) $m > 2$ (۲) $m \geq 2$ (۳) $m < 2$ (۴) $m \leq 2$
- ۲۳- اگر تابع f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(a^2 - 3) > f(2a)$ ، حدود a کدام است؟
 (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(\sqrt{3}, +\infty)$ (۳) $(-1, 3)$ (۴) $(-3, 1)$
- ۲۴- اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه \mathbb{R} باشد و $f(0) = 0$ ، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x)}$ کدام است؟
 (۱) \mathbb{R} (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0]$
- ۲۵- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، $f(1) = 0$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-xf(x)}$ کدام است؟
 (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $\mathbb{R} - (0, 1)$ (۴) $[0, 1]$
- ۲۶- اگر f تابعی با دامنه \mathbb{R} و اکیداً نزولی باشد و $f(1) = 2$ ، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x-2)} - 2$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, 3]$ (۲) $(-\infty, 1]$ (۳) $[3, +\infty)$ (۴) $(2, +\infty)$

۲۷- اگر $f+g$ و $f-g$ توابعی صعودی با دامنه \mathbb{R} باشند، کدام تابع صعودی است؟

- (۱) f (۲) g (۳) $f \times g$ (۴) $\frac{f}{g}$

۲۸- اگر f تابعی صعودی باشد، کدام تابع حتماً صعودی است؟

- (۱) $y = xf(x)$ (۲) $y = x + f(x)$ (۳) $y = x - f(x)$ (۴) $y = \frac{x}{f(x)}$

۲۹- اگر تابع f نزولی باشد، کدام تابع حتماً نزولی است؟

- (۱) $y = f(x) - \sqrt{x}$ (۲) $y = \sqrt{x}f(x)$ (۳) $y = \frac{\sqrt{x}}{f(x)}$ (۴) $y = f(x) + \sqrt{x}$

۳۰- اگر تابع $g(x) = x^3 + f(x)$ صعودی و تابع $h(x) = x^3 - f(x)$ نزولی باشد، آن گاه تابع f

- (۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) ثابت است. (۴) غیر یکنواست.

۳۱- اگر تابع f با دامنه \mathbb{R} نزولی باشد، کدام تابع حتماً صعودی است؟

- (۱) $y = x^2 f(x)$ (۲) $y = f(x^2)$ (۳) $y = -f^2(x)$ (۴) $y = -f^3(x)$

۳۲- تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

- (۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۳۳- کدام تابع یکنوا است؟

- (۱) $y = x^2 - x$ (۲) $y = x^2 + x$ (۳) $y = x^3 + x$ (۴) $y = x^3 - x$

۳۴- تابع $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x}$

- (۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۳۵- حدود a که به ازای آن تابع $f(x) = \begin{cases} x+a & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$ صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $a \geq 2$ (۲) $a > 1$ (۳) $a \leq 3$ (۴) $a \leq 2$

۳۶- تابع $f(x) = kx + |x-1|$ صعودی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $k \geq 1$ (۲) $k \geq -1$ (۳) $-1 \leq k \leq 1$ (۴) $k \leq -1$

کنکور سراسری

۳۷- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

۳۸- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

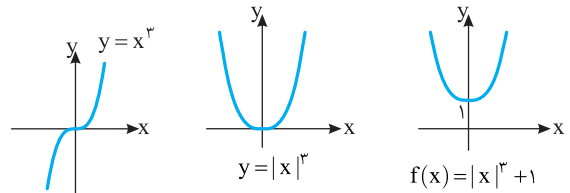
- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

فصل هشتم

راه حل تمرین‌ها

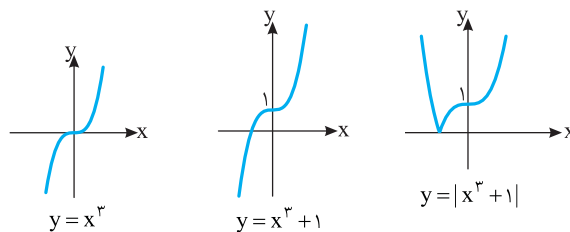
۱

به ترتیب زیر نمودار تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.



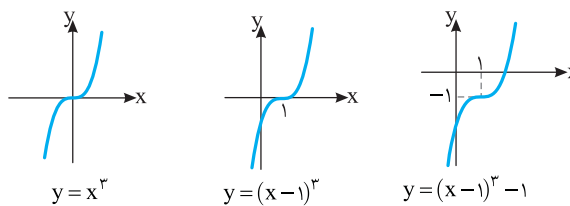
۲

به ترتیب زیر نمودار تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.



۳

به ترتیب زیر نمودار تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم.



۴

(الف)

$$\begin{cases} -2 < -1 < 1 < 2 < 3 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ -3 < -2 < 0 < 1 < 2 \end{cases}$$

با افزایش x ، f افزایش می‌شود، پس تابع f اکیداً صعودی است.

(ب)

$$\begin{cases} -1 < 1 < \frac{3}{2} < 2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 0 < -2 < -4 < -5 \end{cases}$$

با افزایش x ، f کاهش می‌یابد، پس تابع f اکیداً نزولی است.

(پ)

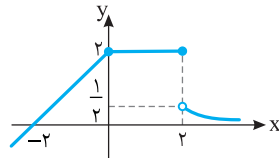
$$\begin{cases} -1 > 1 > 2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 0 < -4 < -5 \end{cases}$$

تابع h نه صعودی است و نه نزولی.

۵

تابع $y=f(x)$ روی بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً صعودی است، زیرا باافزایش x ، f افزایش می‌یابد. تابع روی بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی است، زیرابا افزایش x ، f کاهش می‌یابد. تابع روی بازه $[2, 3]$ اکیداً صعودی است،زیرا با افزایش x ، f افزایش می‌یابد و تابع روی بازه $[3, +\infty)$ ثابت است.

۶

با توجه به نمودار، تابع روی بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً صعودی، روی بازه $[0, 2]$ ثابت و روی بازه $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۷

(الف) ابتدا دامنه تابع $y=f(x+3)$ را می‌یابیم:

$$-2 \leq x+3 \leq 5 \xrightarrow{-3} -5 \leq x \leq 2$$

از طرف دیگر،

$$x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 + 3 > x_1 + 3$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(x_2 + 3) > f(x_1 + 3)$$

بنابراین تابع $y=f(x+3)$ روی بازه $[-5, 2]$ اکیداً صعودی است.(ب) دامنه تابع $y=-f(x)$ همان دامنه تابع f است. از طرف دیگر،

$$x_2 > x_1 \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(x_2) > f(x_1)$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -f(x_2) < -f(x_1)$$

بنابراین تابع $y=-f(x)$ روی بازه $[-2, 5]$ اکیداً نزولی است.(پ) ابتدا دامنه تابع $y=f(-x)$ را به دست می‌آوریم:

$$-2 \leq x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq -x \leq 2$$

از طرف دیگر،

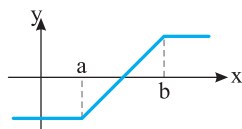
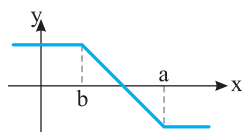
$$x_2 > x_1 \Rightarrow -x_2 < -x_1 \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(-x_2) < f(-x_1)$$

بنابراین تابع $y=f(-x)$ روی بازه $[-5, 2]$ اکیداً نزولی است.(ت) اگر نمودار تابع f را سه واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)+3$ به دست می‌آید. بنابراین این تابع همانند تابع f اکیداً صعودی است و دامنه آنهمان دامنه تابع f است. پس تابع $y=f(x)+3$ روی بازه $[-2, 5]$ اکیداً

صعودی است.

۸ نمودار تابع f در حالتی که $a < b$ ، به شکل زیر است. در این حالت

تابع صعودی است.

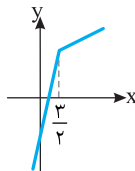
در حالتی که $a > b$ ، نمودار تابع f به شکل زیر است و تابع نزولی است.در حالتی که $a = b$ ، f تابع ثابت صفر است و در این حالت تابع هم صعودی

است و هم نزولی.

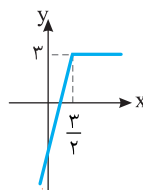
۹ ابتدا توجه کنید که

$$x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = kx - (2x - 3) = (k-2)x + 3$$

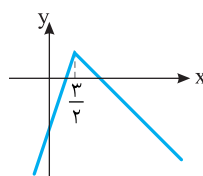
$$x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = kx + (2x - 3) = (k+2)x - 3$$



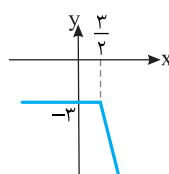
اگر $k > 2$ ، آن گاه نمودار تابع به شکل مقابل است که در این صورت تابع اکیداً صعودی است.



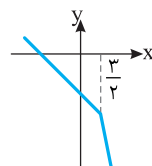
اگر $k = 2$ ، آن گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع صعودی است.



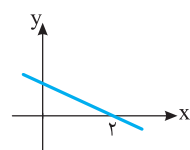
اگر $-2 < k < 2$ ، آن گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع غیریکنواست.



اگر $k = -2$ ، آن گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع نزولی است.



اگر $k < -2$ ، آن گاه نمودار تابع به شکل مقابل است و در این صورت تابع اکیداً نزولی است.



۱۰ اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و $f(2) = 0$ ، می توان تابعی به صورت زیر برای f در نظر گرفت. بدیهی است برای $x < 2$ ، $f(x) > 0$ و برای $x > 2$ ، $f(x) < 0$.

برای یافتن دامنه تابع g ، زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم:

$$(x^2 - 4)f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

پس طبق جدول تعیین علامت زیر، دامنه تابع g برابر است با $(-\infty, -2] \cup \{2\}$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$		+	-	+
$f(x)$		+	+	-
$(x^2 - 4)f(x)$		+	-	-

۱۱ با توجه به تعریف تابع اکیداً صعودی از $f(a^3) < f(a^2)$ نتیجه

می شود $a^3 < a^2$ ، پس

$$a^3 - a^2 < 0 \Rightarrow a^2(a-1) < 0 \Rightarrow a < 1, a \neq 0$$

۱۲ با توجه به نزولی بودن تابع f روی \mathbb{R} از نابرابری $f(\frac{1}{m}) < f(m)$

$$\frac{1-m^2}{m} > 0$$

نتیجه می شود $\frac{1}{m} > m$ ، بنابراین $\frac{1-m^2}{m} > 0$.

با توجه به جدول تعیین علامت زیر حدود m به صورت زیر است:

m	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{1-m^2}{m}$		+	-	+	-

۱۳ با توجه به دامنه تابع f باید $2x - 1 \geq 0$ ، پس $x \geq \frac{1}{2}$ ، از طرف دیگر،

با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می شود

$$f(2x-1) < f(2) \Rightarrow 2x-1 < 2 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله بازه $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ است.

۱۴ ممکن است تابع $f+g$ اکیداً یکنوا نباشد. مثلاً، اگر $f(x) = x$ و

$g(x) = -x$ (با دامنه \mathbb{R})، آن گاه تابع های f و g اکیداً یکنوا هستند (ف اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی است)، اما $f+g$ تابع ثابت صفر است، که اکیداً یکنوا نیست.

۱۵ ممکن است تابع $f+g$ یکنوا باشد. مثلاً، اگر $f(x) = x - 2|x|$ و

$g(x) = 2|x|$ ، آن گاه $(f+g)(x) = x$ ، و تابع $f+g$ یکنواست (اکیداً صعودی است).

۱۶ فرض کنید a و b در دامنه تابع $f \times g$ باشند و $a < b$. در این

صورت، چون تابع های f و g صعودی اند، پس

$$f(a) \leq f(b), \quad g(a) \leq g(b)$$

در نتیجه

$$-f(a) \geq -f(b) \Rightarrow -g(a) \geq -g(b)$$

اکنون توجه کنید که چون مقادیر تابع های f و g منفی اند، پس مقادیر دو طرف این نابرابری ها مثبت اند، در نتیجه،

$$(-f(a))(-g(a)) \geq (-f(b))(-g(b))$$

$$f(a)g(a) \geq f(b)g(b), \quad (f \times g)(a) \geq (f \times g)(b)$$

یعنی تابع $f \times g$ نزولی است.

۱۷ الف) توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ صعودی اند و تابع زیر صعودی است.

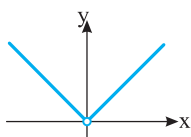
$$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2\sqrt{x}, \quad D_h = (0, +\infty)$$

ب) توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x$ صعودی اند و تابع زیر نزولی است.

$$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad D_h = (0, +\infty)$$

پ) توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^3$ صعودی اند و تابع زیر غیریکنواست.

$$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x^2}, \quad D_h = \mathbb{R} - \{0\}$$



۱۸ ممکن است تابع f یکنوا نباشد. مثلاً،

تابع f با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ و ضابطه $f(x) = |x|$ یکنوا نیست، ولی به ازای هر نقطه از دامنه اش، یک بازه باز شامل این نقطه وجود دارد که f روی آن یکنواست.

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای

۸- گزینه ۴ فرض کنید f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\{1, 2, 3\}$ و

برد $\{4, 5, 6\}$ باشد. در این صورت

$$1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(3)$$

بنابراین $f(1)$ و $f(3)$ باید به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه $\{4, 5, 6\}$ باشند، یعنی $f(1)=4$ و $f(3)=6$. در نتیجه $f(2)=5$. به این ترتیب، تابع f به طور یکتا مشخص می‌شود، یعنی فقط یک تابع با ویژگی مورد نظر داریم.

۹- گزینه ۲ با توجه به شکل رسم شده در صورت سؤال بازه $[-3, 2]$

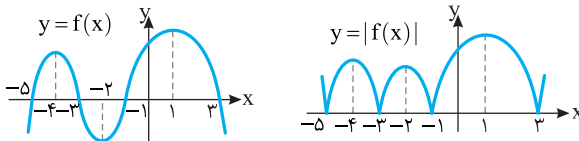
بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع f روی آن صعودی است.

توجه کنید که تابع روی بازه $[-2, 2]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[-3, 2]$ صعودی است. چون صورت سؤال بزرگ‌ترین بازه‌ای را خواسته که تابع روی آن صعودی است، پس گزینه (۲) صحیح است.

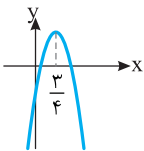
۱۰- گزینه ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آنها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازه $[-3, 1]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

۱۱- گزینه ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست

انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-1)$ به دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-1)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید. اکنون اگر قرینه قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازه $(-2, -1)$ اکیداً نزولی است.

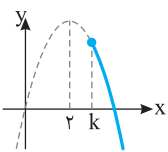


۱۲- گزینه ۱ طول رأس سهمی به معادله $f(x) = -4x^2 + 6x - 1$ برابر است با $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$. از روی نمودار این سهمی معلوم



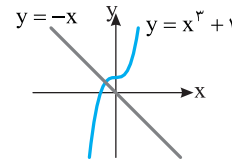
است که تابع f روی بازه $(\frac{3}{4}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۱۳- گزینه ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنه آن شامل دو طرف رأس سهمی یعنی نقطه $x=2$ نباشد. بنابراین $k \geq 2$.



۱۴- گزینه ۳ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a > 1$ ، آن‌گاه تابع صعودی

$$2k-3 > 1 \Rightarrow 2k > 4 \Rightarrow k > 2$$



۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع

$y=x^3$ را یک واحد به بالا انتقال

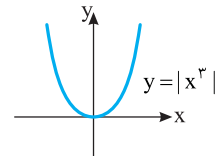
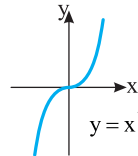
می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^3+1$

به دست بیاید. همین‌طور خط $y=-x$

را رسم می‌کنیم. اکنون از روی شکل معلوم است که نمودار تابع $y=x^3+1$ خط $y=-x$ را یک‌بار قطع می‌کند.

۲- گزینه ۳ توجه کنید که $|-x^3|=|x^3|$. بنابراین کافی است

نمودار تابع $y=|x^3|$ را رسم کنیم. برای این کار نمودار $y=x^3$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینه قسمتی را که زیر محور x است رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید

که $f(x)=(x-2)^3+1$. پس برای

رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع

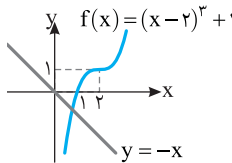
$y=x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را

دو واحد به راست و یک واحد به بالا

منتقل می‌کنیم. مطابق شکل روبه‌رو

نمودار تابع f یک‌بار خط $y=-x$ را

قطع می‌کند.



۴- گزینه ۲ تابع f غیر یکنوا، تابع g صعودی، تابع h اکیداً نزولی و

تابع k غیر یکنواست.

۵- گزینه ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$f(1) \leq f(2) \Rightarrow m-1 \leq 2m \Rightarrow m \geq -1$$

$$f(2) \leq f(3) \Rightarrow 2m \leq m+3 \Rightarrow m \leq 3$$

بنابراین $-1 \leq m \leq 3$ و در نتیجه m می‌تواند پنج مقدار صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را داشته باشد.

۶- گزینه ۱ توجه کنید که به ازای هر a نابرابری $a^2+1 < a^2-1 < 0$

برقرار است. با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$f(-a^2-1) \leq f(0) \leq f(a^2+1) \Rightarrow a \leq 2 \leq 2a+1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq 2$$

۷- گزینه ۲ تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت

است. بنابراین

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow ab=0$$

۲۲- گزینه ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$2m-1 \geq m+1 \Rightarrow m \geq 2$$

۲۳- گزینه ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^2 - 3 < ra \Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) < 0 \Rightarrow -1 < a < 3$$

۲۴- گزینه ۲ برای پیدا کردن دامنه تابع g باید نامعادله $f(x) \geq 0$ را حل کنیم.

چون $f(0) = 0$ ، پس باید نامعادله $f(x) \geq f(0)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x \geq 0$. پس $D_g = [0, +\infty)$.

۲۵- گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی است. پس نتیجه گیری‌های زیر درست هستند:

$$x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$1 < x \Rightarrow f(1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g باید نامعادله $-xf(x) \geq 0$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت $x \in [0, 1]$ است.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
-x		+	-	-
f(x)		-	-	+
-xf(x)		-	+	-

۲۶- گزینه ۱ دامنه تابع g از حل نامعادله زیر به دست می‌آید:

$$f(x-2) - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x-2) \geq 2 \Rightarrow f(x-2) \geq f(1)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$

بنابراین $D_g = (-\infty, 3]$.

۲۷- گزینه ۱ مجموع دو تابع صعودی، تابع صعودی است. بنابراین مجموع

دو تابع $f+g$ و $f-g$ ، یعنی تابع $2f$ صعودی است. پس تابع f نیز صعودی است.

۲۸- گزینه ۲ توابع $y=f(x)$ و $y=x$ صعودی‌اند، پس مجموع

آنها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

۲۹- گزینه ۱ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است. پس تابع $y=-\sqrt{x}$

نزولی است. بنابراین مجموع توابع $y=f(x)$ و $y=-\sqrt{x}$ که هر دو نزولی‌اند، تابعی نزولی است.

۳۰- گزینه ۱ تابع h نزولی است. پس تابع $-h$ صعودی است.

مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است. پس تابع $g+(-h)$ صعودی است. از طرف دیگر،

$$g(x) - h(x) = x^2 + f(x) - x^2 + f(x) = 2f(x)$$

بنابراین تابع $2f$ صعودی است و در نتیجه تابع f صعودی است.

۳۱- گزینه ۴ اگر a و b عددهایی حقیقی باشد، آن‌گاه چون تابع f

نزولی است،

$$a < b \Rightarrow f(b) \leq f(a) \Rightarrow f^2(b) \leq f^2(a) \Rightarrow -f^2(a) \leq -f^2(b)$$

بنابراین تابع $y=-f^2(x)$ صعودی است.

۳۲- گزینه ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است. پس تابع $y=\sqrt{x}+1$

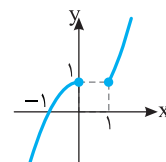
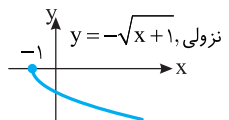
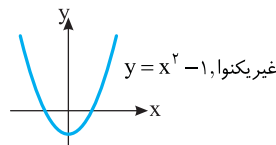
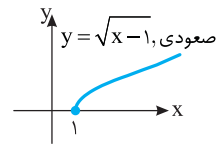
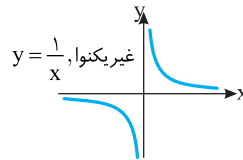
نیز صعودی و مثبت است. بنابراین تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ نزولی است.

۱۵- گزینه ۱ در تابع $y=\log_a x$ اگر $a > 1$ ، آن‌گاه تابع اکیداً صعودی

است. پس $k+1 > 1$ و در نتیجه $k > 0$. توجه کنید که نمودار تابع $y=\log_{(k+1)}(x+2)$ از انتقال نمودار تابع $y=\log_{(k+1)} x$ به اندازه دو واحد به چپ به دست می‌آید و دو تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن مانند هم هستند.

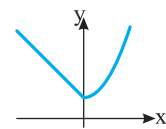
۱۶- گزینه ۴ با توجه به نمودار توابع، واضح است که تابع

$$y=-\sqrt{x+1}$$



۱۷- گزینه ۱ با توجه به نمودار، تابع f

صعودی است.



۱۸- گزینه ۱ با توجه به نمودار کاملاً

مشخص است که تابع f روی بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

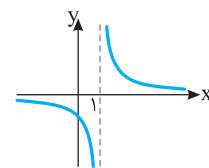
۱۹- گزینه ۲ راه حل اول فرض کنید $x_2 < x_1 < 0$. در این صورت

$$x_1[x_1] < x_2[x_2] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

پس تابع f روی بازه $(-\infty, 0)$ نزولی است.

راه حل دوم توابع $y=x$ و $y=[x]$ روی بازه $(-\infty, 0)$ منفی و صعودی‌اند.

پس تابع $y=x[x]$ روی این بازه نزولی است.



۲۰- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$

را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار

تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ به دست می‌آید که به

شکل روبه‌رو است. واضح است که تابع f روی

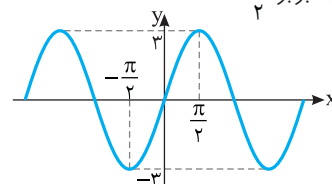
بازه $(1, +\infty)$ نزولی است. پس حداقل مقدار

a برابر ۱ است.

۲۱- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر

نقطه آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=3\sin x$ به دست می‌آید که به صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است.

پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.



۳۳- گزینه ۳ تابع‌های $y=x^3$ و $y=x^3+x$ اکیداً صعودی‌اند. پس مجموع آنها یعنی $y=x^3+x$ اکیداً صعودی است. توابع سه‌گزینه‌ای دیگر غیریکنوا هستند.

۳۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{2^x+1}{2^x} = \frac{2^x}{2^x} + \frac{1}{2^x} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ نزولی است، پس تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ نیز نزولی است.

۳۵- گزینه ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همه مقادیر تابع $y_1 = 2x+1$ کوچک‌تر یا مساوی مقدار تابع $y_2 = x+a$ باشد:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x+a \geq 1+a \Rightarrow y_1 \geq 1+a \\ x < 1 \Rightarrow 2x+1 < 3 \Rightarrow y_2 < 3 \end{cases}$$

$$3 \leq 1+a \Rightarrow a \geq 2$$

بنابراین

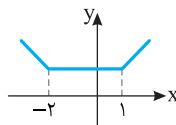
۳۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = kx + |x-1| = \begin{cases} (k+1)x - 1 & x \geq 1 \\ (k-1)x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطه تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

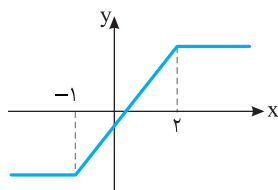
$$\begin{cases} k+1 \geq 0 \\ k-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 1$$

۳۷- گزینه ۱ نمودار تابع f



به صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

۳۸- گزینه ۳ نمودار تابع f



به صورت مقابل است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

۳۹- گزینه ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) = g(-1) = 2 \\ (g \circ f)(2) &= g(f(2)) = g(-1) = 2 \\ (g \circ f)(-1) &= g(f(-1)) = g(3) = 2 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(-2) = 4 \end{aligned}$$

بنابراین $g \circ f = \{(1, 2), (2, 2), (-1, 2), (3, 4)\}$

۴۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(1) &= 4, & f(2) &= 3, & f(3) &= 2, & f(4) &= 1, & f(5) &= 5 \\ f(g(1)) &= 2, & f(g(2)) &= 5, & f(g(3)) &= 1, & f(g(4)) &= 4, & f(g(5)) &= 3 \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$f(g(1)) = f(2) \Rightarrow g(1) = 3, \quad f(g(2)) = f(5) \Rightarrow g(2) = 5$$

$$f(g(3)) = f(4) \Rightarrow g(3) = 4, \quad f(g(4)) = f(1) \Rightarrow g(4) = 1$$

$$f(g(5)) = f(3) \Rightarrow g(5) = 2$$

بنابراین $g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 2)\}$

۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(2) = 3$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-3) = -2$$

$$\text{بنابراین } (f \circ g)(-2) - (g \circ f)(-1) = 3 - (-2) = 5$$

۴۲- گزینه ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3)$$

بنابراین $f \circ g = \{(-3, \sqrt{3}), (-2, 2), (-1, \sqrt{3}), (1, f(3))\}$

۴۳- گزینه ۱ تنها جواب معادله $f(s) = 3$ برابر است با $s = 2$.

$$\text{بنابراین } (f \circ g)(a+1) = f(g(1+a)) = 3 \Rightarrow g(1+a) = 2$$

تنها جواب معادله $g(t) = 2$ نیز برابر است با $t = 0$. بنابراین $1+a = 0 \Rightarrow a = -1$

۴۴- گزینه ۴ چون ۱ و ۳ ریشه‌های سهمی g هستند، پس

$$g(x) = a(x-1)(x-3)$$

$$g(0) = 6 \Rightarrow a(0-1)(0-3) = 6 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $g(x) = 2(x-1)(x-3)$. همچنین، f خطی است که از نقطه‌های

$(-6, 0)$ و $(0, 6)$ می‌گذرد، پس $f(x) = x+6$. به این ترتیب

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-2) = 4$$

۴۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $(f \circ f)(3) = f(f(3))$. از طرف

$$\text{دیگر، } f(3) = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(f \circ f)(3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{6-3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$$

۴۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(g \circ f)(6) = g(f(6))$. از طرف

دیگر،

$$f(3x) = x-1 \xrightarrow{x=2} f(6) = 2-1 = -1$$

همین‌طور

$$g(x+1) = 2x+3 \xrightarrow{x=-1} g(-9) = -2 \cdot 9 + 3 = -17$$

$$\text{پس } (g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(-9) = -17$$

۴۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(f \circ f)(3) = f(f(3))$. از طرف

دیگر،

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13, \quad f(f(3)) = f(13) = \frac{13-1}{2} = 6$$

بنابراین $(f \circ f)(3) = 6$

۴۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3+3) = f(6) = 6-2 = 4$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = (3-2) + (3+3) = 7$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $4+7 = 11$

۴۹- گزینه ۱ توجه کنید که $f(2) = 3$ در نتیجه

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 3m+2 = 8$$

بنابراین $m = 2$