به نام پروردگار مهربان

ویرایش جدید

ریاضی ۳

دوازدهم

آموزش و مرور ویژهٔ امتحان نهایی

سارا واعظزاده

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

تقدیم به پدر و مادر و همسر عزیزم

مقدمه

دوستان عزیز سلام!

توفیق شد که با تألیف کتاب لقمهٔ ریاضی دوازدهم تجربی (ریاضی ۳) در خدمتتون باشم تا بتونم از دغدغه‌ها و نگرانی‌های شما در شب‌های امتحان کم کرده و نیازهای شمارو تو این درس برطرف کنم.

همون‌طور که می‌دونید امتحانات نهایی سال دوازدهم، در نظام آموزشی جدید اهمیت بسیاری پیدا کرده و درصد زیادی از نتیجهٔ کنکور شما رو رقم می‌زنه؛ معمولاً دانش‌آموزان برای این امتحانات و خصوصاً امتحان ریاضی نگرانی‌های زیادی دارن. همهٔ شما ترجیح میدین ۱۰۰٪ مطالب کتاب درسی رو تو یه کتاب داشته باشید که حجمش هم خیلی زیاد نباشه و بشه روز قبل از امتحان همشو مطالعه کرد.

این شد که به فکر افتادیم کتابی جامع و کامل بنویسیم که شما رو برای امتحان نهایی آماده کنه. در طول سال‌های تدریسم همواره دغدغهٔ این رو داشتم که دانش‌آموزان عزیز بتونن ریاضی رو به‌طور عمیق درک کنن و تو حل مسئله‌های مختلف، ایده‌های خلاقانه بدن. در این کتاب، مطالب رو با زبانی ساده، با مثال‌های متنوع و عمیق و با نظم و ترتیب خاصی ارائه کردیم. تنوع مثال‌های این کتاب به اندازه‌ایه که همهٔ مطالب کتاب درسی رو پوشش میده.

میتونم بگم یه کتاب مرجع برای ریاضی دوازدهم تجربیه؛ چون هم در طول سال تحصیلی و هم در شب امتحان میتونی بری سراغش و همهٔ مثال‌ها، چاشنی‌ها، فرمول‌ها و روابط اون رو یاد بگیری و خیالت نسبت به امتحانت راحت باشه.

اگرچه ظاهر این کتاب کوچیکه، اما چیزی که در متن اون هست، بزرگ‌تر از چیزیه که شما فکر می‌کنی؛ پس با خیال راحت از این کتاب بهره ببر.

در اینجا لازم می‌دونم از استاد عزیزم جناب آقای بهمن اصلاح‌پذیر تشکر کنم که در طول سال‌هایی که ایشون رو می‌شناسم، همواره از تجربیات ارزشمندشون استفاده کردم و همیشه راهنمایی‌هاشون کمک بزرگی برای من بوده است.

تشکر و قدردانی

قــدردان زحمات همهٔ عزیزانی هســتم که در آماده‌ســازی این کتاب تلاش کرده‌اند؛

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم و توانمند انتشارات
- جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر فرهیختهٔ شورای تألیف انتشارات
- جناب آقای عباس گودرزی مدیر فروش انتشارات
- جناب آقای عباس اشرفی مدیر باتدبیر گروه ریاضی
- سرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری
- سرکار خانم‌ها کبری ملکی و راحله فریدون‌نژاد ویراستارهای علمی
- گروه تولید خستگی‌ناپذیر انتشارات جناب آقای میلاد صفایی مدیر فنی، سرکار خانم فاطمه طاهر و جناب آقای سیدعلی تقوی صفحه‌آرا و سرکار خانم مهناز ستاری تایپیست محترم
- گروه هنری خلاق انتشارات به مدیریت جناب آقای فرهادی
- جناب آقای تایماز کاویانی، طراح گرافیک و جناب آقای حسام طلایی طراح جلد

و همهٔ عزیزانی که در تهیهٔ این کتاب ما را همراهی کردند.

ارادتمند شما

سارا واعظزاده

فهرست

فصل اول

تابع

تابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

- توابع چندجمله‌ای
- توابع صعودی و نزولی

درس دوم: ترکیب توابع

- ترکیب توابع
- دامنهٔ تابع مرکب
- رسم نمودار توابع به کمک انتقال، انقباض و انبساط

درس سوم: تابع وارون

- توابع یک‌به‌یک
- وارون تابع
- محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع
- ترکیب تابع با تابع وارون آن

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی درس ۱

وعدهٔ ۱
توابع چندجمله‌ای

توابعی به فرم $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

دامنهٔ این توابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی است؛ به عنوان نمونه:

الف تابع ثابت $f(x) = k$ تابع چندجمله‌ای با درجهٔ صفر است.

ب تابع خطی $f(x) = ax + b$ یک تابع چندجمله‌ای با درجهٔ یک است.

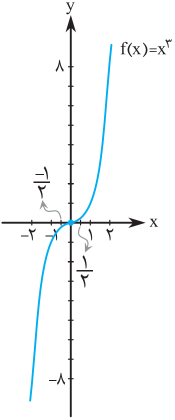
پ تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ نیز تابعی چندجمله‌ای با درجهٔ دو است.

ت تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ یک تابع درجهٔ سه است. در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم؛

مثال: به کمک نقطه‌یابی نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

پاسخ

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

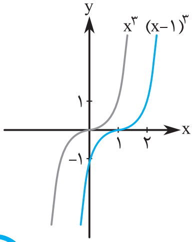


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = (x-۱)^3$

برای رسم این تابع کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. برای رسم دقیق‌تر می‌توان از نقطه‌یابی کمک گرفت.

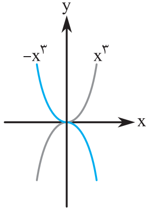
x	$y = (x-۱)^3$
۰	-۱
۱	۰
۲	۱



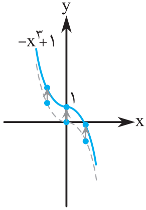
ب) $y=-x^{3}+1$ (تمرین کتاب درسی)

یادآوری: برای رسم نمودار $-f(x)$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ یعنی در واقع به ازای هر x، مقادیر yها قرینه می‌شود.

برای رسم این تابع در مرحلهٔ اول، نمودار $-x^{3}$ را رسم می‌کنیم؛ سپس نمودار رسم‌شده را ۱ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



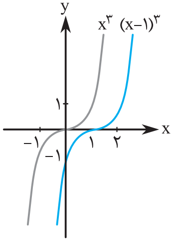
مرحلهٔ اول

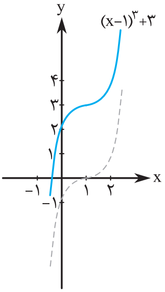


مرحلهٔ دوم

پ) $y=x^{3}-3x^{2}+3x+2=(x-1)^{3}+3$

در مرحلهٔ اول نمودار تابع $(x-1)^{3}$ را رسم می‌کنیم؛ سپس آن را ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

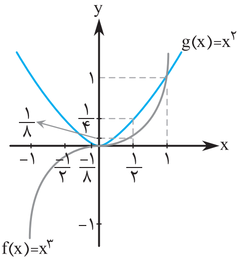




مثال: نمودار دو تابع $f(x)=x^{۳}$ و $g(x)=x^{۲}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ با نقطه‌یابی، نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

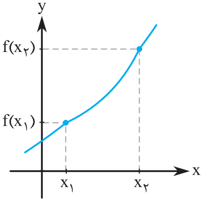
x	f(x)	g(x)
-۱	-۱	۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$
۰	۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$
۱	۱	۱



چاشنی: نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ فقط در فاصلهٔ $(۰,۱)$ زیر نمودار $g(x)=x^{۲}$ قرار دارد.

وعدهٔ ۲

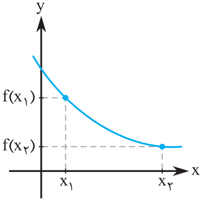
توابع صعودی و نزولی



تابع اکیداً صعودی: اگر با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y نیز افزایش یابد، این تابع را اکیداً صعودی می‌نامیم.

$x_1 , x_2 \in D_f , x_1 < x_2$

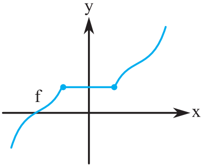
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



تابع اکیداً نزولی: اگر با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y کاهش یابد، این تابع را اکیداً نزولی می‌نامیم.

$x_1 , x_2 \in D_f , x_1 < x_2$

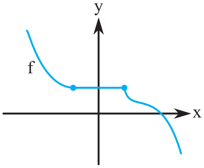
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



تابع صعودی: اگر با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y افزایش یابد یا ثابت بماند، این تابع را صعودی می‌نامیم.

$x_1 , x_2 \in D_f , x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



تابع نزولی: اگر با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند، این تابع را نزولی می‌نامیم.

$x_1 , x_2 \in D_f , x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

۶ بـرای نشـان دادن یـک زاویه روی دایرهٔ مثلثاتـی، همواره یک ضلع زاویه را روی قسمت مثبت محور x ها، ثابت در نظر می‌گیریم.

۷ برای هر زاویهٔ دلخواه α داریم:

① $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \\ -1\le\sin\alpha\le1 \\ -1\le\cos\alpha\le1 \end{cases}$

② $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha\neq0)$

③ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha\neq0)$

④ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha} & (\cos\alpha\neq0) \\ \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha} & (\sin\alpha\neq0) \end{cases}$

⑤ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha\neq0)$

⑥ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\sin\alpha\neq0)$

چاشنی: نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم بر حسب درجه و رادیان

زاویه \ نسبت	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
0° یا 0 رادیان	0	1	0	ت ن
30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45° یا $\frac{\pi}{4}$ رادیان	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° یا $\frac{\pi}{3}$ رادیان	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان	1	0	ت ن	0
180° یا π رادیان	0	-1	0	ت ن
270° یا $\frac{3\pi}{2}$ رادیان	-1	0	ت ن	0
360° یا 2π رادیان	0	1	0	ت ن

(ت ن یعنی تعریف‌نشده)

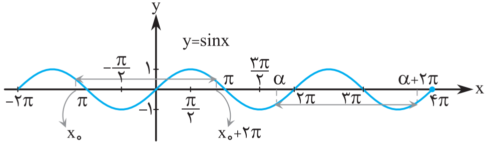
◂ اگر D زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازهٔ همان زاویه بر حسب رادیان باشد، برای تبدیل واحدها به یکدیگر از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

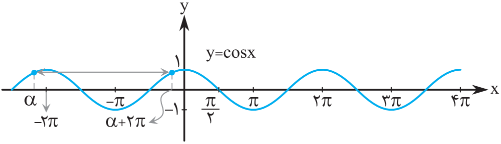
$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

وعدهٔ ۲

توابع متناوب

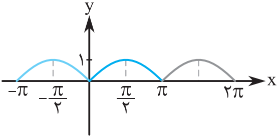
نمودار توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌هایی به طول ۲π تکرار می‌شود. به شکل‌های زیر توجه کنید:



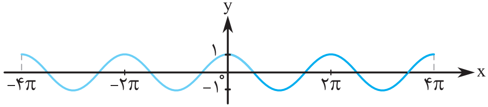


اگر از نمودارهای بالا، قطعه‌ای به طول ۲π را به تعداد زیاد کپی کنیم و آن‌ها را کنار هم بچینیم، آن‌گاه نمودار سینوس یا کسینوس ساخته می‌شود. درصورتی که مثلاً اگر قطعه‌ای با طول π را جدا کرده، آن را کپی کنیم و کنار هم بچینیم، نمودار سینوس یا کسینوس به‌وجود نمی‌آید.

به‌طور مثال اگر قطعه‌ای از نمودار تابع sinx در فاصلهٔ $[\circ,\pi]$ را جدا کرده و به تعداد زیاد کپی کنیم، از کنار هم قراردادن این قطعه‌ها نمودار زیر حاصل می‌شود که نمودار تابع $f(x)=\sin x$ نیست.



اگر قطعه‌ای به طول ۴π از نمودار تابع $\cos x$ را جدا کرده، کپی کنیم و کنار هم بچینیم، نمودار تابع $f(x) = \cos x$ به‌دست می‌آید.



به این‌گونه توابع، توابع متناوب می‌گوییم و طول کوچک‌ترین قطعه از منحنی را که با تکرار بازهٔ آن، نمودار کامل می‌شود، دورهٔ تناوب می‌نامیم و آن را با T نشان می‌دهیم.

بنابراین توابع $\sin x$ و $\cos x$ توابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲π هستند.

چاشنی: توابع متناوب در رابطهٔ $f(x \pm T) = f(x)$، $(x \pm T) \in D_f$ که در آن T عدد حقیقی مثبت است، صدق می‌کنند؛ کوچک‌ترین مقدار T را که در این رابطه صدق می‌کند، دورهٔ تناوب آن تابع می‌گویند. به عنوان مثال:

$$\sin(x + ۲\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + ۲\pi) = \cos x$$

◂ دورهٔ تناوب $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است. برای نمونه نشان می‌دهیم که چرا دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ۲x$ برابر π است.

$$f(x \pm T) = f(x) \Rightarrow \sin(۲x \pm ۲T) = \sin ۲x$$

$$\Rightarrow ۲T = ۲\pi \Rightarrow T = \pi$$

مثال: دورهٔ تناوب توابع زیر را به‌دست آورید و محل تلاقی نمودارها را با محور x ها مشخص کنید؛ سپس نمودار این توابع را رسم کنید.

الف) $f(x) = \sin \pi x$ $\quad T = \dfrac{۲\pi}{\pi} = ۲$

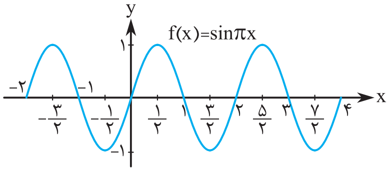
می‌دانیم مقدار تابع $\sin x$ در نقاط ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و... برابر صفر است. این مضارب صحیح π را با $k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین برای این‌که مقدار تابع $\sin \pi x$ برابر صفر شود، باید:

$$\pi x = k\pi \Rightarrow x = k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

یعنی همهٔ نقاط صحیح نمودار تابع، با محور x ها تلاقی دارد.

حال برای رسم تابع کافی است با توجه به آنچه در فصل اول نیز گفتیم، تابع $\sin x$ را منقبض کنیم. نمودار تابع را ابتدا در یک دورهٔ تناوب، یعنی از صفر تا ۲ رسم کرده، سپس ادامهٔ نمودار را رسم می‌کنیم. می‌توانیم از نقطه‌یابی نیز کمک بگیریم. به این‌صورت که نقاط مهم تابع $\sin x$ را بر π تقسیم می‌کنیم و نقاط تابع جدید را به‌دست می‌آوریم.

x	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	...
$\sin \pi x$	۰	۱	۰	-۱	۰	۱	...



اکسترمم‌های تابع درس ۱

وعدهٔ ۱
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

آزمون یکنوایی تابع

الف در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آن‌گاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

در حقیقت برای بررسی یکنوایی یک تابع مشتق‌پذیر، از تابع مشتق می‌گیریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. اگر علامت مشتق در بازه‌ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی و اگر علامت مشتق در بازه‌ای منفی باشد، تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

مثال: تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۶x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟

پاسخ ابتدا ضابطه f' را به‌دست می‌آوریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۱$$

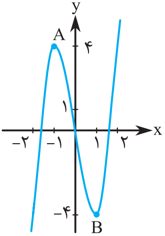
حال جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+	
یکنوایی $f(x)$		اکیداً صعودی ↗		اکیداً نزولی ↘		اکیداً صعودی ↗	

تابع f در بازهٔ $(-\infty , -۱)$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۱ , ۱)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(۱ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

$f(۱) = -۴ , f(-۱) = ۴$

به کمک این نقاط و جدول تعیین علامت می‌خواهیم نمودار تابع را رسم کنیم. برای رسم دقیق‌تر از نقاط کمکی دیگری نیز می‌توان استفاده کرد.



x	f(x)
-۲	-۴
۰	۰
۲	۴

همان‌طور که می‌بینید از روی نمودار تابع نیز می‌توانیم مشخص کنیم که تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.

مثال: تابع $g(x) = \dfrac{۱}{x^۲ + ۱}$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟ (تمرین کتاب درسی)

پاسخ

$$g'(x)=\frac{0\times(x^2+1)-2x\times 1}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x)=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

مخرج کسر نیز همواره مثبت است؛ بنابراین:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		−
یکنوایی $g(x)$	اکیداً صعودی ↗		اکیداً نزولی ↘

این تابع در بازهٔ $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

مثال: با رسم جدول تغییرات، یکنوایی تابع $f(x)=x^3$ را بررسی کنید.

پاسخ

$$f'(x)=3x^2$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2=0\Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
یکنوایی $f(x)$	اکیداً صعودی ↗		اکیداً صعودی ↗

بنابر آنچه در فصل‌های قبل آموختیم، تابع $f(x)=x^3$ اکیداً صعودی است. در جدول بالا در نقطهٔ $x=0$، $f'(x)=0$ شده است که عددی مثبت نیست و با آزمون یکنوایی تابع تطابق ندارد، یعنی نمی‌توانیم بگوییم روی $\mathbb{R}$، $f'>0$ است و تابع

اکیداً صعودی است؛ پس چه اتفاقی افتاده است؟ در حقیقت چون در همهٔ نقاط، مشتق مثبت بوده و فقط در نقطهٔ $x=0$ مشتق صفر است، اکیداً یکنوا بودن تابع حفظ می‌شود.

چاشنی: اگر مشتق تابع f روی بازه‌ای بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و تعداد نقاطی که مشتق در آن‌ها صفر می‌شود متناهی باشد، تابع f در آن بازه اکیداً صعودی است؛ همچنین اگر مشتق تابع f روی بازه‌ای کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد و تعداد نقاطی که مشتق در آن‌ها صفر می‌شود متناهی باشد، تابع f در آن بازه اکیداً نزولی است.

مثال: آیا تابع $f(x)=-x^3+x^2-2x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداًنزولی است؟

پاسخ ضابطهٔ f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x)=-3x^2+2x-2$$

$$\Delta=4-4(-3)(-2)=-20<0 \quad , \quad a=-3<0$$

چون $\Delta<0$ و $a<0$، عبارت $f'(x)=-3x^2+2x-2$ همواره منفی است، یعنی مشتق همواره منفی است. در نتیجه تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

وعدهٔ ۲

اکسترمم‌های نسبی تابع

تعریف: تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم

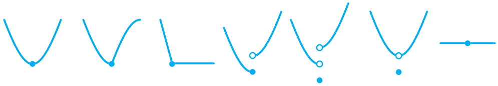
$f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود. در واقع اگر عرض نقطهٔ c از عرض نقاط اطرافش بزرگ‌تر یا مساوی باشد، تابع در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

◂ تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم. در واقع اگر عرض نقطهٔ c از عرض نقاط اطرافش کوچک‌تر یا مساوی باشد، تابع در $x=c$ مینیمم نسبی دارد. در وعدهٔ یک، نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۶x$ را رسم کردیم. این تابع در نقطهٔ A به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ B به طول $x=۱$ مینیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی برابر $f(-۱)=۴$ و مقدار مینیمم نسبی برابر $f(۱)=-۴$ است.

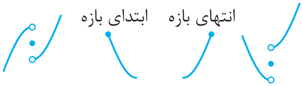
تذکر: نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع می‌گوییم. در مثال اول وعدهٔ ۱، نقاط A و B اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

نقاط مشخص‌شده در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط ماکزیمم نسبی هستند:

نقاط مشخص‌شده در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط مینیمم نسبی هستند:



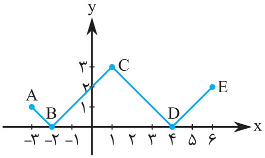
در نمودارهای زیر، تابع در نقطهٔ مشخص‌شده، نه مینیمم نسبی دارد و نه ماکزیمم نسبی.



تذکر: نقاط ابتدا و انتهای بازه، نقاط اکسترمم نسبی نیستند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=||x-۱|-۳|$ را با دامنهٔ $[-۳\,,۶]$ رسم کرده و نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص کنید.

پاسخ ابتدا نمودار $|x|$ را رسم کرده، سپس یک واحد به سمت راست و سه واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم و در نهایت قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ بنابراین نمودار f در بازهٔ $[-۳\,,۶]$ به‌صورت زیر است:



نقاط B و D نقاط مینیمم نسبی و نقطهٔ C نقطهٔ ماکزیمم نسبی است؛ نقاط A و E اکسترمم نسبی نیستند.

امتحان نهایی ۹۸

۱. در جاهای خالی گزینهٔ مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y=(x+۱)^۳$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است.

ب) هرچه خروج از مرکز بیضی .... (کوچک‌تر، بزرگ‌تر) شود شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد .... (مستقل، ناسازگار) هستند.

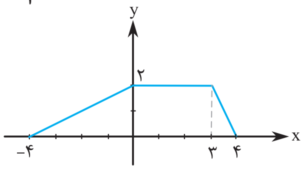
۲. درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$ و $g(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

ب) دورهٔ تناوب تابع $y=\tan x$ برابر ۲π است. (درست، نادرست)

۳. دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۴. با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.



y=f(x)

۵. الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۱-۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را به‌دست آورید.

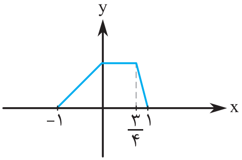
پاسخنامه

۱. الف) صعودی ب) کوچک‌تر پ) ناسازگار

۲. الف) درست ب) نادرست

۳. $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq ۴ \mid \sqrt{x-۴} \neq \pm ۱\}$
$= [۴, ۵) \cup (۵, +\infty)$

۴. ابتدا عرض نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا $y = \frac{۱}{۲}f(x)$ به‌دست آید، سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۴}$ ضرب می‌کنیم و نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم می‌کنیم.



۵. الف) $\max = |-۲| + ۱ = ۳ \ , \ \min = -|-۲| + ۱ = -۱$

ب) $۱ - ۲\sin^۲\alpha - \sin\alpha + ۱ = ۱ \Rightarrow ۲\sin^۲\alpha + \sin\alpha - ۱ = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -۱ \\ \sin\alpha = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ \alpha = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \ , \ \alpha = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}$$

۶. الف) الف) $\lim_{x \to ۰^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$

تابع

۱ دامنهٔ توابع گویا به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، برابر است با:

$$D_f=\mathbb{R}-\{x \mid Q(x)=0\}$$

۲ دامنهٔ هر تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج برابر است با:

$$y=\sqrt{f(x)} \Rightarrow D_y=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\geq 0\}$$

دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد همان دامنهٔ تابع زیر رادیکال است.

۳ تساوی دو تابع f و g:

الف دامنهٔ f و g با هم برابر باشد.

ب برای هر x از این دامنهٔ یکسان، $f(x)=g(x)$ باشد.

۴ اعمال روی توابع:

اگر f با دامنهٔ D_f و g با دامنهٔ D_g دو تابع باشند، آن‌گاه:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)\,,\ D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\,,\ D_{fg}=D_f\cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\,,\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$$

۵ اگر K عددی مثبت باشد، دامنهٔ تابع $y=Kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است.

۶ ترکیب توابع:

$$fog(x)=f(g(x)) \qquad D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

۷ تابع وارون: تابع f، وارون (f^{-1}) دارد، هرگاه یک‌به‌یک باشد:

$$\begin{cases} f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a \\ D_f=R_{f^{-1}}\,,\ R_f=D_{f^{-1}} \end{cases}$$

۸ توابع صعودی و نزولی

الف f صعودی: $x_1 , x_2 \in D_f \; , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

ب f نزولی: $x_1 , x_2 \in D_f \; , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

مثلثات

۱ رابطهٔ تبدیل رادیان و درجه:

$$\underset{\text{زاویه به درجه}\leftarrow}{\frac{D}{180^\circ}} = \underset{\rightarrow\text{زاویه به رادیان}}{\frac{R}{\pi}}$$

۲ در دایره‌ای به شعاع r، طول کمان (ℓ) روبه‌رو به زاویهٔ θ (رادیان) برابر است با: $\ell = r \times \theta$

۳ اتحادهای مثلثاتی:

الف $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

ب $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

پ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

ت $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

ث $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ج $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

چ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴ دورهٔ تناوب:

الف دورهٔ تناوب $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

ب دورهٔ تناوب توابعی به فرم $y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos(bx+c)+d$ که در آن‌ها a، b، c و d اعداد حقیقی و $a , b \neq 0$ برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است.