

فصل اول : مجموعه‌ها

درس اول : معرفی مجموعه

مجموعه چیست

هر دسته‌ی کاملاً مشخص و غیر تکراری از اشیاء را یک **مجموعه** می‌گویند و هریک از آن اشیاء را **عضو مجموعه** می‌نامند. منظور از عبارت « کاملاً مشخص » چیست ؟ به مثال زیر توجه کنید :

کدام یک از تعریف‌های روبه‌رو ، یک مجموعه را مشخص می‌کند : الف) چهار عدد زوج متوالی (ب) اعداد اول یک رقمی
حل : تعریف « الف » دارای بی‌شمار جواب است ، چون جواب‌ها می‌تواند سلیقه‌ای باشد .

۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ یا ۳۰ ، ۳۲ ، ۳۴ ، ۳۶ یا ۱۰۰۲ ، ۱۰۰۴ ، ۱۰۰۶ ، ۱۰۰۸

بنابراین چهار عدد زوج متوالی نمی‌تواند یک مجموعه را مشخص کنند. اما تعریف « ب » یک مجموعه را مشخص می‌کند : ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷
 مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A ، B ، C و ... نامگذاری می‌کنند. عضوهای یک مجموعه را داخل این علامت‌ها { } قرار می‌دهند که به آن‌ها « **آکلا**د » می‌گویند .

مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را به صورت اعضا بنویسید :
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 هریک از عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ و ... و ۹ را عضو مجموعه‌ی A می‌گوییم . علامت عضویت یا عضو بودن در یک مجموعه را با نماد \in و علامت عضو نبودن در یک مجموعه را با نماد \notin نشان می‌دهیم .

برای مثال در مجموعه A : عدد ۲ عضو مجموعه A است که به صورت ریاضی می‌نویسیم :
 $2 \in A$
 عدد ۱۰ عضو مجموعه A نیست که به صورت ریاضی می‌نویسیم :

$10 \notin A$
 در مجموعه ، ترتیب نوشتن اعضا مهم نیست ، یعنی جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه ، مجموعه جدیدی مشخص نمی‌شود .

برای مثال مجموعه $A = \{3, 5, 7\}$ را می‌توان به صورت‌های زیر نشان داد :
 $A = \{7, 5, 3\}$ یا $A = \{5, 3, 7\}$ یا $A = \{3, 5, 7\}$
 همان‌طور که در تعریف مجموعه گفتیم عضوهای یک مجموعه باید غیر تکراری باشند ، پس در مجموعه ، عضوهای تکراری فقط یک عضو حساب می‌شوند (یک بار نوشته می‌شوند) .

مجموعه $A = \{2, 3, 5, 2, 5, 7\}$ دارای چهار عضو است ، یعنی :
 $A = \{2, 3, 5, 7\}$

یکی از روش‌های نشان دادن مجموعه‌ها ، نمایش هندسی یا « **نمودار ون** » است. در این روش عضوهای مجموعه را داخل یک منحنی بسته قرار می‌دهیم .

اگر A مجموعه‌ی اعداد مرکب یک رقمی باشد ، آن را به دو صورت نمایش دهید .



مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد ، **مجموعه تهی** نامیده می‌شود. مجموعه تهی را با نماد { } یا \emptyset نمایش می‌دهیم. هیچ‌گاه مجموعه تهی را با این نماد $\{ \emptyset \}$ نشان ندهید. (نادرست است)

هریک از مثال‌های زیر ، **مجموعه تهی** را مشخص می‌کنند : الف) مجموعه انسان‌هایی که در کره مریخ زندگی می‌کنند .

ب) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱ (ب) مجموعه اعداد اول زوج دورقمی

مجموعه‌ای که فقط دارای یک عضو باشد ، **مجموعه یک عضوی** نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌های زیر :

الف) مجموعه اعداد اول زوج $A = \{2\}$ (ب) مجموعه اعداد صحیح که نه مثبت هستند و نه منفی $B = \{0\}$

۱- الف) جای خالی را طوری پر کنید که مجموعه های زیر برابر باشند :

$$\left\{ \frac{0/72}{0/9}, (6, 36), \square, \frac{121}{22} \right\} = \left\{ \sqrt{\frac{144}{4}}, -4/9, 0/8, \square \right\}$$

ب) صورت دیگر مجموعه ی روبه رو را با علائم و نماد ریاضی بنویسید :

$$F = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

پ) مجموعه ی روبه رو را با اعضاء مشخص کنید :

$$G = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4 \right\}$$

۲- اگر داشته باشیم $A \cup B = \left\{ -4/2, a, \frac{3}{5}, 9 \right\}$ و $A \cap B = \left\{ a, \frac{3}{5} \right\}$ ، مجموعه A و B را با نمودار ون مشخص کنید.

۳- دو مجموعه ی $E = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4 \}$ و $F = \{ x \in \mathbb{W} \mid x < 5 \}$ را در نظر بگیرید. اگر یکی از اعضاء دو مجموعه را به تصادف انتخاب کنیم :

الف) احتمال آن که عدد عضو $E - F$ باشد چه قدر است؟

ب) احتمال این که عدد عضو $F - E$ باشد چه قدر است؟

پ) آیا دو پیشامد (الف) و (ب) هم شانس هستند؟ چرا؟

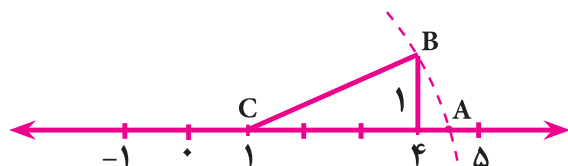
۴- در یک کیسه ۳ مهره آبی، ۶ مهره قرمز، ۲ مهره سبز و یک مهره بنفش وجود دارد. یک مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. احتمال این که :

الف) مهره خارج شده یکی از رنگ های آبی یا بنفش یا سبز باشد چه قدر است؟

ب) مهره خارج شده رنگ سبز نباشد چه قدر است؟

۵- الف) نقطه نمایش عدد گنگ روبه رو را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید :

$$-3 + \sqrt{10}$$



ب) در شکل روبه رو نقطه A چه عددی را نشان می دهد :

۶- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید :

الف) $|x| + 2| -y | + y =$

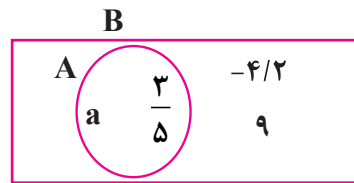
ب) $\sqrt{(-3 + \sqrt{11})^2} - | -5 - \sqrt{11} | =$

(اگر $x < 0$ و $y < 0$ باشد)

$$\text{الف) } \left\{ \frac{121}{22}, 6, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0 \right\} = \left\{ \frac{121}{22}, \frac{1}{8}, -\frac{4}{9}, 6, 0 \right\} \quad -1$$

$$\text{ب) } F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 5 \right\}$$

$$\text{پ) } G = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \right\}$$



$$\text{الف) } F = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad E = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad n(S) = 7 \quad -3$$

$$E - F = \{-2, -1\} \Rightarrow P(E - F) = \frac{n(E - F)}{n(S)} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ب) } F - E = \{3, 4\} \Rightarrow n(F - E) = 2, \quad P(F - E) = \frac{2}{7}$$

پ) بله، زیرا تعداد اعضای دو مجموعه با هم برابرند.

$$\text{الف) } \left(\text{کلاً ۱۲ مهره} \right) \quad \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad -4$$

$$\text{ب) } \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{احتمال سبز نبودن} \Rightarrow 1 - \frac{12}{6 \times 12} = \frac{5}{6}$$



$$\text{ب) } CB^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow CB = \sqrt{10}$$

$$CA = CB \Rightarrow CA = \sqrt{10}$$

$$\text{نقطه A} = 1 + CA = 1 + \sqrt{10}$$

ادامه دارد ...