

ریاضی ۹ ام شهاب

حمیدرضا بیات
مرتضی خمایی ابدی
کیان کریمی خراسانی



پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که مجموعه کتاب‌های «شهاب» را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این مجموعه در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های «ریاضی ۹ ام شهاب» می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل؛
- ۵۰ پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل همراه با پاسخ کلیدی در انتهای کتاب؛
- پاسخ‌نامه تشریحی تمام تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای در جلد دوم کتاب؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها به تمرین‌های دشوار (☆) و تمرین‌های خیلی دشوار (☆☆)

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمایی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم‌ها حمیده نوروزی و مینا غلام‌احمدی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و ترسیم شکل‌ها را بر عهده داشته‌اند، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

bayat@mobtakeran.com

پست الکترونیک برای آگاهی از نقطه نظرها و پیشنهادها:

فصل ۱: مجموعه‌ها

۷

درس اول: معرفی مجموعه‌ها ۸

نمودار ون ۹

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها ۱۱

برابری مجموعه‌ها ۱۱

زیرمجموعه ۱۲

نمایش مجموعه‌های اعداد ۱۵

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها ۱۸

مجموعه مرجع ۱۸

متمم یک مجموعه ۱۹

اجتماع دو مجموعه ۲۰

اشتراک دو مجموعه ۲۱

تفاضل دو مجموعه ۲۱

مثال‌های تکمیلی ۲۲

تعداد اعضای مجموعه (عدد اصلی) ۲۸

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال ۲۹

تمرین‌ها ۳۲

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۳۸

فصل ۲: عددهای حقیقی

۴۳

یادآوری ۴۴

درس اول: معرفی اعداد گویا ۴۵

اعداد گویای بین دو عدد گویا ۴۵

مقایسه اعداد گویا ۴۸

نمایش اعشاری اعداد گویا ۵۰

جمع و تفریق اعداد اعشاری ۵۲

تشخیص مختوم یا متناوب بودن یک کسر ۵۳

تبدیل اعداد اعشاری مختوم به کسر ۵۴

تبدیل اعداد اعشاری متناوب به کسر ۵۴

درس دوم: عددهای حقیقی ۵۶

اعداد حقیقی بین دو عدد حقیقی ۵۸

نمایش اعداد گنگ روی محور اعداد ۵۸

نمایش اعداد حقیقی روی محور اعداد ۵۹

چهار عمل اصلی بین دو عدد گویا ۶۰

چهار عمل اصلی بین دو عدد گنگ ۶۱

چهار عمل اصلی بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ ۶۱

درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی ۶۳

قدرمطلق در محاسبات ۶۳

قدرمطلق در معادلات ۶۵

محاسبه تقریبی ۶۶

تمرین‌ها ۶۸

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۷۲

فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه ۷۷

درس اول: استدلال ۷۸

مثال نقض ۷۸

ترسیم دقیق و آزمایش ۷۹

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه ۸۰

فرض و حکم ۸۰

اثبات ۸۱

درس سوم: هم‌نهشتی مثلث‌ها ۸۴

هم‌نهشتی ۸۴

مثلث‌های متساوی‌الساقین ۸۵

درس چهارم: حل مسئله در هندسه ۸۷

حل مسئله در مثلث‌ها ۸۷

حل مسئله در چهارضلعی‌ها ۸۹

متوازی‌الاضلاع ۸۹

لوزی ۹۱

مستطیل ۹۴

مربع ۹۵

حل مسئله در دایره‌ها ۹۶

قضیه میان خط ۹۸

درس پنجم: شکل‌های متشابه ۱۰۲

مفهوم تشابه ۱۰۲

بیش‌تر بدانید: ماکت و نقشه ۱۰۲

نسبت‌های طولی در تشابه ۱۰۴

نسبت محیط دو شکل متشابه ۱۰۸

نسبت مساحت و شکل متشابه ۱۰۸

تمرین‌ها ۱۱۰

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۲۰

فصل ۴: توان و ریشه ۱۲۷

یادآوری ۱۲۸

درس اول: توان صحیح ۱۳۰

درس دوم: نماد علمی ۱۳۳

درس سوم: ریشه‌گیری ۱۳۷

ریشه دوم ۱۳۷

ریشه سوم ۱۳۸

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها ۱۴۰

۲۰۰	به‌دست آوردن شیب به کمک زاویه
۲۰۲	عرض از مبدأ
۲۰۳	معادله خط گذرنده از دو نقطه
۲۰۴	شیب خط عمود بر یک خط
۲۰۶	معادله خط‌های موازی با محورها
۲۰۶	صورت کلی معادله خط
۲۰۷	طول از مبدأ
۲۰۸	فاصله بین دو نقطه
۲۰۹	معادله عمودمنصف یک پاره‌خط
۲۱۰	درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی
۲۱۰	روش‌های حل دستگاه معادله‌های خطی
۲۱۱	تعداد جواب‌های یک دستگاه دو معادله و دو مجهول
۲۱۲	حل مسئله به کمک تشکیل دستگاه معادله
۲۱۴	تمرین‌ها
۲۱۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۲۵	فصل ۷: عبارتهای گویا
۲۲۶	درس اول: معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا
۲۲۸	ساده کردن یک عبارت گویا
۲۳۰	درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا
۲۳۰	ضرب و تقسیم عبارتهای گویا
۲۳۲	جمع و تفریق عبارتهای گویا
۲۳۴	ساده کردن عبارتهای مرکب
۲۳۵	درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۲۳۵	تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای
۲۳۶	تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای
۲۳۷	تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای
۲۳۷	روش تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای
۲۳۹	به‌دست آوردن باقی‌مانده یک تقسیم بدون انجام عمل تقسیم
۲۴۱	تمرین‌ها
۲۴۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۴۹	فصل ۸: حجم و مساحت
۲۵۰	درس اول: حجم و مساحت کره
۲۵۴	درس دوم: حجم هرم و مخروط
۲۵۴	هرم
۲۵۷	مخروط
۲۶۰	درس سوم: سطح و حجم
۲۶۰	سطح هرم
۲۶۳	سطح استوانه
۲۶۴	سطح مخروط
۲۶۶	تمرین‌ها
۲۷۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۷۷	پاسخنامه کلیدی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۴۱	درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها
۱۴۲	ساده کردن عبارتهای رادیکالی
۱۴۳	گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی
۱۴۵	تمرین‌ها
۱۴۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۵۳	فصل ۵: عبارتهای جبری
۱۵۴	درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد
۱۵۴	جمله‌های متشابه
۱۵۵	جمع و تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه
۱۵۵	ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها
۱۵۷	درجه یک جمله‌ای نسبت به متغیر
۱۵۷	چندجمله‌ای‌های جبری
۱۵۸	جمع و تفریق چندجمله‌ای‌ها
۱۶۰	ضرب بیش از دو چندجمله‌ای در هم
۱۶۰	درجه یک چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر و چند متغیر ...
۱۶۱	چندجمله‌ای استاندارد
۱۶۲	مفهوم اتحاد
۱۶۳	اتحاد مربع دو جمله‌ای
۱۶۵	تجزیه چندجمله‌ای‌ها
۱۶۵	تجزیه با روش استفاده از فاکتورگیری
۱۶۵	تجزیه با روش دسته‌بندی و فاکتورگیری
۱۶۵	تجزیه با روش خرد کردن و دسته‌بندی
۱۶۶	تجزیه با روش استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای
۱۶۶	درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها
۱۶۶	اتحاد مزدوج (تفاضل مربع دو جمله‌ای)
۱۶۸	تجزیه با روش استفاده از اتحاد مزدوج
۱۶۹	اتحاد جمله مشترک
۱۷۰	تجزیه با روش استفاده از اتحاد جمله مشترک
۱۷۰	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله (چاق و لاغر)
۱۷۱	تجزیه با روش استفاده از اتحاد چاق و لاغر
۱۷۲	اتحاد مکعب دو جمله‌ای
۱۷۲	معادلات امسال
۱۷۴	درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها
۱۷۵	نشان دادن ناحیه متناظر با یک نابرابری روی محور اعداد
۱۷۷	نامعادله
۱۷۹	تمرین‌ها
۱۸۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۹۱	فصل ۶: خط و معادله‌های خطی
۱۹۲	درس اول: معادله خط
۱۹۵	ترسیم یک خط با استفاده از معادله آن
۱۹۷	درس دوم: شیب و عرض از مبدأ
۱۹۷	مفهوم شیب و روش به‌دست آوردن آن



فصل ۱

مجموعه‌ها

به گروهی که اعضای آن کاملاً مشخص هستند، یک **مجموعه** می‌گویند. مثلاً استان‌های ایران یک مجموعه است، چون همه اعضای آن مشخص است. مثلاً یزد عضوی از آن است، ولی استانبول عضوی از آن نیست. اعداد طبیعی یک مجموعه است که ۷ عضو آن است و $\frac{1}{3}$ عضو آن نیست. ولی غذاهای خوشمزه مجموعه نیست، چون اعضای آن مشخص نیست. فسنجان شاید از نظر تو خوشمزه باشد، ولی من فسنجان دوست ندارم!

یک مجموعه را معمولاً با یکی از حروف بزرگ انگلیسی نشان می‌دهیم. عضو بودن در یک مجموعه را با علامت \in و عضو نبودن را با \notin نشان می‌دهیم. فرض کن مجموعه استان‌های ایران را با A مشخص کرده‌ایم. پس $7 \in A$ و $A \notin$ استانبول. اگر مجموعه اعداد طبیعی را با B نشان دهیم، $7 \in B$ و $\frac{1}{3} \notin B$.

برای نشان دادن یک مجموعه، اعضای آن را داخل $\{ \}$ قرار می‌دهیم. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی را به صورت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ نشان می‌دهیم.



اگر مجموعه A را به صورت $A = \{1, 2, 3\}$ در نظر بگیریم، برای نشان دادن اینکه «۱ عضو A است» می‌نویسیم $1 \in A$ و برای نشان دادن اینکه «۴ عضو A نیست» می‌نویسیم $4 \notin A$.

مثال: کدام یک از موارد زیر یک مجموعه است؟ اعضای مواردی که مجموعه است را نمایش بده.

الف) اعداد اول یک‌رقمی

ب) سه فوتبالیست

ج) اعداد زوج بزرگ از ۱۰۰

د) دو شماره‌دهنده عدد ۱۲

پاسخ:

الف) $\{2, 3, 5, 7\}$

ب) مجموعه نیست. کدام سه فوتبالیست؟!

ج) $\{102, 104, 106, 108, \dots\}$

د) مجموعه نیست. اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ شماره‌دهنده‌های ۱۲ هستند. کدام دوتایشان؟!

مثال: اگر A مجموعه اعداد اول و $B = \{2, 4, 5, 9\}$ باشد، در جاهای خالی علامت \in یا \notin قرار بده.

$2 \in A$ $3 \in A$ $6 \in A$ $9 \in A$

$2 \in B$ $3 \in B$ $6 \in B$ $9 \in B$

پاسخ:

$2 \in A$ $3 \in A$ $6 \notin A$ $9 \notin A$

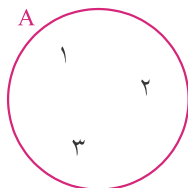
$2 \in B$ $3 \notin B$ $6 \notin B$ $9 \in B$

به نظر تو آیا مجموعه‌های $\{1, 2\}$ ، $\{2, 1\}$ ، $\{1, 2, 1\}$ و $\{2, 2, 2, 1\}$ با هم فرق دارند؟ همه آن‌ها دارای اعضای ۱ و ۲ هستند و عضو دیگری هم ندارند. پس همه آن‌ها یکی هستند.

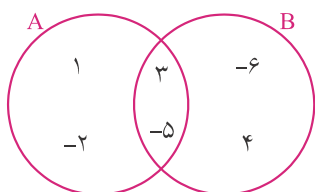


با جابه‌جا کردن عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. با تکرار عضوهای یک مجموعه نیز، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. مثلاً مجموعه‌های $\{1, 2\}$ ، $\{2, 1\}$ ، $\{2, 1\}$ و $\{2, 2, 1\}$ یکی هستند.

نمودار ون



بعضی وقت‌ها، مجموعه را با استفاده از منحنی‌های بسته نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو، مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را نمایش داده‌ایم. به این شکل نشان دادن مجموعه‌ها، رسم **نمودار ون** گفته می‌شود.



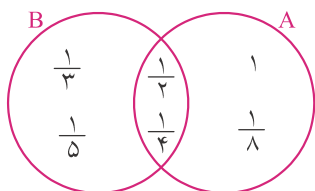
مثال: با توجه به نمودار ون روبه‌رو، اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص کن:

$$A = \{1, -2, 3, -5\}$$

$$B = \{3, -5, -6, 4\}$$

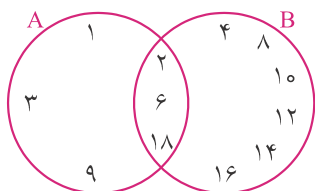
پاسخ:

مثال: مجموعه‌های $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$ و $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$ را با یک نمودار ون نمایش بده.



پاسخ:

مثال: اگر A مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۸ باشد و B مجموعه اعداد زوج کوچک‌تر از ۲۰ باشد، A و B را با عضوهایشان مشخص کن و آن‌ها را با یک نمودار ون نمایش بده:



پاسخ:

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

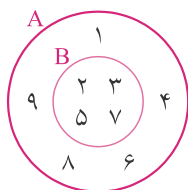
مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی و B مجموعه اعداد اول یک‌رقمی باشد، آن‌ها را با یک نمودار ون نمایش بده.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

پاسخ:

تمام عضوهای B داخل A هم هست. پس نمودار ون این مجموعه‌ها به این صورت است:



مثال: اگر A مجموعه اعداد دورقمی باشد که مجموع ارقامشان ۱۹ است، اعضای مجموعه A را مشخص کن.

پاسخ: مجموع ارقام یک عدد دورقمی حداکثر ۱۸ است، چون هر رقم آن حداکثر می‌تواند ۹ باشد. پس مجموعه A عضوی ندارد.



اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را **مجموعه تهی** می‌نامیم و با نماد \emptyset یا $\{ \}$ نشان می‌دهیم.

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر، تهی است و کدام یک تهی نیست؟

- الف) اعداد صحیح کوچک‌تر از ۱
ب) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱
ج) گربه‌سانان پرنده
د) پرنده‌های گوشت‌خوار

پاسخ:

- الف) $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ (ب) تهی است.
ج) تهی است. (د) تهی نیست، مثلاً جغد گوشت‌خوار است.

مثال: اگر A مجموعه اعداد اول یک‌رقمی، B مجموعه اعداد اول مضرب ۳، C مجموعه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۳، D مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳، E مجموعه اعداد زوج بین ۳ و ۹، F مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی مضرب ۴، G مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی بزرگ‌تر از ۳ و H مجموعه اعداد اول زوج دورقمی باشد، جاهای خالی را با حروف A تا H پر کن:

$\square = \{3\}$	$\square = \{4, 6, 8\}$	$\square = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$\square = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$	$\square = \{2, 3, 5, 7\}$	$\square = \{4, 8\}$
$\square = \{ \}$	$\square = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$	

پاسخ:

$B = \{3\}$	$E = \{4, 6, 8\}$	$G = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$C = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$	$A = \{2, 3, 5, 7\}$	$F = \{4, 8\}$
$H = \{ \}$	$D = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$	

مثال: در صورت امکان، متناظر با هر عبارت یک مجموعه بنویس:

- الف) سه عدد یک‌رقمی بزرگ‌تر از ۶
ب) پنج عدد یک‌رقمی کوچک‌تر از ۸
ج) اعداد طبیعی بین ۵- و ۵
د) اعداد صحیح منفی بزرگ‌تر از ۳
ه) اعداد اول دورقمی مضرب ۱۱
و) اعداد اول دورقمی مضرب ۵
ز) جواب معادله $2x + 1 = 0$
ح) جواب معادله $x^2 = 4$

پاسخ:

- الف) $\{7, 8, 9\}$ (ب) مجموعه نیست (هفت عدد یک‌رقمی کوچک‌تر از ۸ داریم. پس پنج‌تای آن‌ها نامشخص است).
ج) $\{1, 2, 3, 4\}$ (د) $\{ \}$ (ه) $\{11\}$
و) $\{ \}$ (ز) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (ح) $\{2, -2\}$

مثال: در صورت امکان، متناظر با هر مجموعه یک عبارت بنویس:

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & A = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\} \\ \text{ب)} & B = \{11, 22, 33, \dots, 99\} \\ \text{ج)} & C = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\} \\ \text{د)} & C = \{4, 6, 8, 9\} \end{array}$$

پاسخ:

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \text{توان‌های طبیعی عدد ۲} \\ \text{ب)} & \text{اعداد دورقمی مضرب ۱۱} \\ \text{ج)} & \text{اعداد مربع کامل دورقمی} \\ \text{د)} & \text{اعداد مرکب یک‌رقمی} \end{array}$$

مثال: هر یک از مجموعه‌های $A = \emptyset$ ، $B = \{0\}$ و $C = \{0, \emptyset\}$ چند عضو دارند؟

پاسخ: $A = \emptyset$ ، پس عضوی ندارد.

$B = \{0\}$ ، پس یک عضو دارد. $(0 \in B)$.

$C = \{0, \emptyset\}$ ، پس دو عضو دارد. $(0 \in C)$ و $(\emptyset \in C)$.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

برابری مجموعه‌ها

دو مجموعه وقتی مساوی هستند که اعضایشان کاملاً یکسان باشند. مثلاً مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 2, 1\}$ مساوی هستند. ولی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ با $C = \{1, 2, 3, 4\}$ یا $D = \{2, 3, 4\}$ برابر نیست.

دو مجموعه A و B باهم برابر هستند، هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و هر عضو B نیز عضوی از A باشد. در این صورت می‌نویسیم $A = B$.

مثال: اگر A مجموعه «دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ که ضربشان برابر ۱۵ است» باشد، ابتدا مجموعه A را با اعضایش مشخص کن. سپس مشخص کن که کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه A برابر است؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & B, \text{ مجموعه اعداد اول فرد یک‌رقمی} \\ \text{ب)} & C, \text{ مجموعه اعداد فرد بین ۲ و ۶} \\ \text{ج)} & D = \{1, 15\} \\ \text{د)} & E, \text{ مجموعه اعداد فرد کوچک‌تر از ۷} \end{array}$$

پاسخ: تنها دو عدد بزرگ‌تر از ۱ که ضربشان ۱۵ است، ۳ و ۵ هستند. پس $A = \{3, 5\}$.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & B = \{3, 5, 7\} \Rightarrow B \neq A \\ \text{ب)} & C = \{3, 5\} \Rightarrow C = A \\ \text{ج)} & D = \{1, 15\} \Rightarrow D \neq A \\ \text{د)} & E = \{1, 3, 5\} \Rightarrow E \neq A \end{array}$$

اگر عضوی در مجموعه A باشد و در مجموعه B نباشد، یا عضوی در مجموعه B باشد و در مجموعه A نباشد، مجموعه‌های A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$.

مثال: x چه عددی باشد تا مجموعه‌های $A = \{4, 5, 7\}$ و $B = \{x+2, x-1, x\}$ برابر باشند؟

پاسخ: اعضای مجموعه B از کوچک به بزرگ عبارت‌اند از $x-1$ ، x و $x+2$ که به ترتیب برابرند با ۴، ۵ و ۷. پس $x = 5$.

مثال: x و y چه عددهایی باشند تا مجموعه‌های $A = \{3, x, \frac{1}{y}\}$ و $B = \{5, \frac{1}{y}, y\}$ برابر باشند؟

پاسخ: $\frac{1}{y}$ در هر دو مجموعه هست. ۳ در A هست، پس باید در B هم باشد، پس $y = 3$. ۵ در B هست، پس باید در A هم باشد، پس $x = 5$.

مثال: x و y چه عددهایی باشند تا مجموعه‌های $A = \{4, \frac{1}{y}, \sqrt{\frac{9}{25}}, \frac{1}{x}\}$ و $B = \{0/125, 2^2, y, 0/5\}$ برابر باشند؟

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{4, \frac{1}{y}, \frac{3}{5}, \frac{1}{x}\} \\ B = \{\frac{1}{8}, 4, y, \frac{1}{y}\} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 8, y = \frac{3}{5}$$

مثال: x و y چه عددهایی باشند تا مجموعه‌های $A = \{3, 4, 6, 7\}$ و $B = \{x, y, x+1, y+2, \frac{x}{y}\}$ برابر باشند؟

پاسخ: مجموعه A دارای چهار عضو است و مجموعه B دارای پنج عضو. پس یکی از اعضای مجموعه B تکراری است. اگر $x = 3$ آنگاه $\frac{x}{y} = \frac{3}{y}$ که در A نیست. اگر $x = 4$ آنگاه $x+1 = 5$ که در A نیست. اگر $x = 6$ آنگاه $x+1 = 7$ و $\frac{x}{y} = 3$ که هر دو در A هستند. پس $x = 6$ و $y = 4$ (در نتیجه $y+2 = 6$ و $x = 6$ در واقع یک عضو هستند).

زیرمجموعه

مثال: مجموعه $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ را در نظر بگیر. تمام اعضای کدام یک از مجموعه‌های زیر، عضوی از مجموعه A نیز هستند؟

$$B = \{2, 4, 8\}$$

$$C = \{4, 8, 12\}$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

پاسخ: مجموعه‌های B و E تمام اعضایشان عضوی از A نیز هستند.



اگر A و B دو مجموعه باشند، به طوری که تمام اعضای B عضوی از A نیز باشند، آنگاه می‌گوییم مجموعه B زیرمجموعه A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$.

در مثال بالا تمام اعضای مجموعه‌های B و E عضوی از A نیز بودند. پس این دو مجموعه، زیرمجموعه A بودند و می‌توانیم بنویسیم $E \subseteq A$ و $B \subseteq A$.

در مجموعه C ، عضو ۱۲ در A وجود نداشت. پس C زیرمجموعه A نبود.



اگر A و B دو مجموعه باشند، به طوری که عضوی در B باشد که در A نباشد، آنگاه می‌گوییم مجموعه B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

در مثال قبل علاوه بر مجموعه C، مجموعه‌های D و F هم زیرمجموعه A نبودند. چون اعضای ۱، ۳ و ۵ در D و اعضای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ در F، در A نبودند.

اگر کمی دقت کرده باشی، متوجه شدی که مجموعه E برابر مجموعه A بود و همان‌طور که گفتیم مجموعه E زیرمجموعه A نیز بود. این در مورد همه مجموعه‌ها درست است. یعنی در هر مجموعه‌ای، همه اعضای مجموعه در خود آن مجموعه وجود دارند! پس هر مجموعه زیرمجموعه خودش است!



هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است. یعنی برای هر مجموعه دلخواه مانند A داریم $A \subseteq A$.

همچنین، مجموعه تهی عضوی ندارد که در مجموعه دیگری یافت نشود (چون اصلاً عضوی ندارد). پس می‌توان گفت مجموعه تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست!



مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است. یعنی داریم $\emptyset \subseteq A$.

اگر یادت باشد در تعریف برابری دو مجموعه گفتیم که اگر همه اعضای A در B و همه اعضای B در A باشند، آنگاه A و B برابر هستند. همه اعضای A در B باشند، یعنی A زیرمجموعه B باشد. همه اعضای B در A باشند، یعنی B زیرمجموعه A باشد. یعنی دو مجموعه وقتی برابر هستند که هریک زیرمجموعه دیگری باشد!



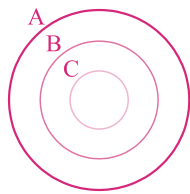
اگر A و B دو مجموعه باشند و داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، آنگاه داریم $A = B$.

مثال: اگر $A = \{-1, 1, -2, 2\}$ ، $B = \{0, 1, 2\}$ ، $C = \{1, 2\}$ ، $D = \{-1\}$ ، $E = \{-1, 1\}$ و $F = \{1, 2\}$ ، مشخص کن که هر کدام از این مجموعه‌ها زیرمجموعه کدام یک از این مجموعه‌هاست؟

پاسخ:

$A \subseteq A$ ، $B \subseteq B$ ، $C \subseteq C$ ، $C \subseteq A$ ، $C \subseteq B$ ، $C \subseteq F$ ، $D \subseteq D$ ، $D \subseteq A$
 $D \subseteq E$ ، $E \subseteq E$ ، $E \subseteq A$ ، $F \subseteq F$ ، $F \subseteq A$ ، $F \subseteq B$ ، $F \subseteq C$

مثال: با توجه به شکل، در جاهای خالی علامت \subseteq یا $\not\subseteq$ قرار بده.



A <input type="checkbox"/> A	A <input type="checkbox"/> B	A <input type="checkbox"/> C	A <input type="checkbox"/> \emptyset
B <input type="checkbox"/> A	B <input type="checkbox"/> B	B <input type="checkbox"/> C	B <input type="checkbox"/> \emptyset
C <input type="checkbox"/> A	C <input type="checkbox"/> B	C <input type="checkbox"/> C	C <input type="checkbox"/> \emptyset
\emptyset <input type="checkbox"/> A	\emptyset <input type="checkbox"/> B	\emptyset <input type="checkbox"/> C	\emptyset <input type="checkbox"/> \emptyset

پاسخ:

$A \subseteq A$	$A \not\subseteq B$	$A \not\subseteq C$	$A \not\subseteq \emptyset$
$B \subseteq A$	$B \subseteq B$	$B \not\subseteq C$	$B \not\subseteq \emptyset$
$C \subseteq A$	$C \subseteq B$	$C \subseteq C$	$C \not\subseteq \emptyset$
$\emptyset \subseteq A$	$\emptyset \subseteq B$	$\emptyset \subseteq C$	$\emptyset \subseteq \emptyset$



از این مثال می‌توان فهمید که اگر مجموعه‌ای مانند C زیرمجموعه مجموعه‌ای مانند B باشد و مجموعه B نیز زیرمجموعه مجموعه‌ای مانند A باشد، C زیرمجموعه A نیز هست. (معلم ما می‌گفت: «اگه کرم توی شکم ماهی باشه و ماهی توی شکم کوسه باشه، کرم توی شکم کوسه هم هست!»)



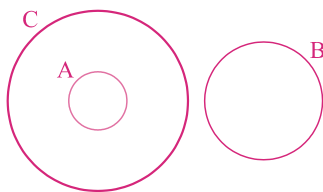
$$\left. \begin{matrix} C \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix} \right\} \Rightarrow C \subseteq A$$

به ازای هر سه مجموعه دلخواه مانند A، B و C داریم:



مثال: با ذکر یک مثال و رسم یک نمودار و ثابت کن $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq C$ نادرست است.

پاسخ:



$$\begin{aligned} A &= \{1\} \\ B &= \{3\} \\ C &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

در این جا $A \subseteq C$ ولی $B \not\subseteq C$ و $A \not\subseteq B$.

حواست باشد که فرق بین عضو و زیرمجموعه را فهمیده باشی! زیرمجموعه، خودش یک مجموعه است که عضوهای آن در مجموعه اصلی وجود دارد. مثلاً مجموعه $A = \{1, 2\}$ دو عضو دارد: ۱ و ۲. و چهار زیرمجموعه دارد: $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1, 2\}$ و $\{\}$ (یا همان \emptyset). اگر دقت کنی همه زیرمجموعه‌ها علامت $\{ \}$ را دارند، زیرا خودشان مجموعه هستند. در این مثال چون مجموعه اصلی دارای دو عضو بود، زیرمجموعه‌ها می‌توانند صفر، یک یا دو عضو داشته باشند.

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیر و جاهای خالی را با علامت \in ، \notin ، \subseteq یا $\not\subseteq$ پر کن:

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| $3 \circ A$ | $\{3\} \circ A$ | $5 \circ A$ |
| $\{2, 4\} \circ A$ | $\{1, 2, 3, 4\} \circ A$ | $\{ \} \circ A$ |
| $1 \circ \{ \}$ | $\emptyset \circ A$ | $\{3, 5\} \circ A$ |
| $A \circ A$ | $2 \circ \emptyset$ | $A \circ \emptyset$ |
| $\{1, 2\} \circ \{1, 3, 4\}$ | $\{1, 2, 3, 4, 5\} \circ A$ | $\{5\} \circ \emptyset$ |

پاسخ:

$3 \in A$	$\{3\} \subseteq A$	$5 \notin A$
$\{2, 4\} \subseteq A$	$\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$	$\{\} \subseteq A$
$1 \notin \{\}$	$\emptyset \subseteq A$	$\{3, 5\} \not\subseteq A$
$A \subseteq A$	$2 \notin \emptyset$	$A \not\subseteq \emptyset$
$\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\} \not\subseteq A$	$\{5\} \not\subseteq \emptyset$

مثال: همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{1, 2\}$ را بنویس. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ: ۴ زیرمجموعه دارد: $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

مثال: همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{a, b, c\}$ را بنویس. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ: ۸ زیرمجموعه دارد: $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

مثال: اگر P مجموعهٔ همهٔ اعداد اول یک‌رقمی باشد، تمام زیرمجموعه‌های P را بنویس. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ: ۱۶ زیرمجموعه دارد: $P = \{2, 3, 5, 7\}$

$\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$

با توجه به مثال‌های بالا حتماً فهمیدی که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، از چه رابطه‌ای به دست می‌آید:

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، 2^n تا است.

مثال: یک مجموعهٔ ۹ عضوی، چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ: $2^9 = 512$ زیرمجموعه دارد.

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر است با ۲۵۶. تعداد اعضای این مجموعه چند است؟

پاسخ: $2^8 = 256$ ، پس این مجموعه ۸ عضو دارد.

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $2k + 7$ عضوی، ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $k + 5$ عضوی است.

k را به دست بیار.

پاسخ: $2^{2k+7} = 16 \times 2^{k+5} \Rightarrow 2^{2k+7} = 2^4 \times 2^{k+5} \Rightarrow 2^{2k+7} = 2^{k+9} \Rightarrow 2k+7 = k+9 \Rightarrow k=2$

نمایش مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد را می‌توان با روش‌های **توصیفی**، **نمودار ون** یا **استفاده از نمادهای ریاضی** نشان داد. با روش‌های توصیفی (نشان دادن اعضای مجموعه) و رسم نمودار ون قبلاً آشنا شدی.

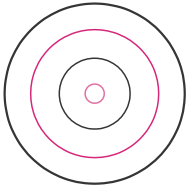
حالا می‌خواهیم مجموعه‌ها را با استفاده از «نمادهای ریاضی» نمایش دهیم. مثلاً مجموعهٔ A را در نظر بگیر:

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

در این عبارت، علامت «|» را «به طوری که» می‌خوانیم. پس کل این عبارت را از چپ به راست، به این صورت می‌خوانیم: «A برابر است با مجموعه اعدادی به شکل $3k$ ، به طوری که k عضوی از \mathbb{N} است» (k عضوی از \mathbb{N} است در واقع یعنی k یک عدد طبیعی است). پس اعضای مجموعه A در واقع $3k$ هایی هستند که به جای k باید اعداد طبیعی قرار گیرد. اولین عضو A را با قرار دادن $k=1$ در $3k$ به دست می‌آوریم که می‌شود ۳. دومین عضو A را با قرار دادن $k=2$ در $3k$ به دست می‌آوریم که می‌شود ۶ و همین‌طور تا آخر. پس با کمی دقت متوجه می‌شویم که A مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳ است. یعنی $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$.

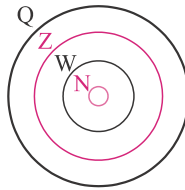
یک مثال دیگر! فرض کن $B = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}, k < 6\}$. این عبارت را به این صورت از چپ به راست می‌خوانیم: «B برابر است با مجموعه اعدادی به شکل $2k-1$ ، به طوری که k عضوی از \mathbb{N} است و k از ۶ کوچک‌تر است». پس در این جا نیز k باید عددی طبیعی باشد، ولی فقط اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶. یعنی k می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد. که به ازای آن‌ها $2k-1$ به ترتیب برابر است با ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹. پس مجموعه B در واقع مجموعه اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی است. یعنی $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

به جز \mathbb{N} مجموعه‌های معروف دیگری هم وجود دارند که می‌توان از آن‌ها در نمایش مجموعه‌ها به روش نمادین استفاده کرد. مثلاً: \mathbb{Z} که مجموعه اعداد صحیح است:
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 یا \mathbb{W} که مجموعه اعداد حسابی است:
 $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 یا \mathbb{Q} که مجموعه اعداد گویاست.



مثال: اگر مجموعه‌های \mathbb{W} ، \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} و \mathbb{N} را در نمودار ون روبه‌رو نمایش داده باشیم، مشخص کن که هر دایره مربوط به کدام مجموعه است؟

پاسخ:



هر عدد طبیعی، یک عدد حسابی هم هست. هر عدد حسابی، یک عدد صحیح هم هست. هر عدد صحیح، یک عدد گویا هم هست. پس داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

مثال: عضوهای مجموعه‌های زیر را بنویس:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 5\}$$

$$B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

پاسخ:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 6, 9, \dots\}$$

مثال: مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی نشان بده:

$$A = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \text{اعداد صحیح مضرب } 7$$

پاسخ:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 3\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 4\}$$

$$C = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

مثال: اعضای مجموعه‌های زیر را بنویس:

$$A = \{3k - 3 \mid k \in \mathbb{W}\}$$

$$B = \left\{ \frac{3k}{5} \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k < 2 \right\}$$

$$C = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 8\}$$

پاسخ:

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \Rightarrow A = \{-3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$k = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow B = \left\{ \frac{-6}{5}, \frac{-3}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \Rightarrow C = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$$

مثال: مجموعه‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش بده:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$C = \left\{ -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots \right\}$$

پاسخ:

$$A = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}, k < 6 \right\}$$

$$B = \{k^2 \mid k \in \mathbb{W}\}$$

$$C = \left\{ -\frac{1}{3^k} \mid k \in \mathbb{W} \right\}$$

یادت باشد که اگر مجموعه‌ای با نمادهای ریاضی معرفی شده بود و خواستیم اعضای آن را مشخص کنیم، اعضای آن حتماً یکتا خواهند بود. یعنی مثلاً اگر خواستیم اعضای مجموعه $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ را بنویسیم، به این صورت است:

$$A = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

ولی اگر اعضای مجموعه را داشتیم و خواستیم مجموعه را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش دهیم، این نمایش لزوماً یکتا نیست.

مثلاً مجموعه $B = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$ را در نظر بگیر. یکی از نمایش‌های این مجموعه با نمادهای ریاضی $B = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ است. یکی دیگر از نمایش‌های آن $B = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{W}\}$ است. نمایش دیگری از آن $B = \{3k + 4 \mid x \in \mathbb{Z}, k > -2\}$ است. نمایش‌های متعدد دیگری هم وجود دارد!

مثال: ابتدا اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کن. سپس بگو هر کدام از آنها چند زیرمجموعه دارند و زیرمجموعه‌های آنها را بنویس.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 1 = 5\}$$

$$B = \left\{ \frac{y}{4} \mid y = 0, 3 \right\}$$

$$C = \{ab \mid a, b \in \{1, 2\}\}$$

پاسخ:

یک عضو دارد، پس $2^1 = 2$ زیرمجموعه دارد $\Rightarrow A = \{2\}$

$$\{\}, \{2\} \subseteq A$$

دو عضو دارد، پس $2^2 = 4$ زیرمجموعه دارد $\Rightarrow B = \left\{ 0, \frac{3}{4} \right\}$

$$\{\}, \{0\}, \left\{ \frac{3}{4} \right\}, \left\{ 0, \frac{3}{4} \right\} \subseteq B$$

سه عضو دارد، پس $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد $\Rightarrow C = \{1, 2, 4\}$

$$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\} \subseteq C$$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کن:

$$B = \{x \in A \mid x^2 < 30\}$$

$$C = \{x \mid x \in B, \frac{x+1}{2} \in \mathbb{N}\}$$

$$D = \{x^x \mid x \in C, x-1 \in B\}$$

پاسخ:

$$1^2 = 1 < 30 \checkmark$$

$$2^2 = 4 < 30 \checkmark$$

$$3^2 = 9 < 30 \checkmark$$

$$4^2 = 16 > 30 \times$$

$$\Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{1+1}{2} = 1 \in \mathbb{N} \checkmark$$

$$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \times$$

$$\frac{3+1}{2} = 2 \in \mathbb{N} \checkmark$$

$$\Rightarrow C = \{1, 3\}$$

$$1-1=0 \notin B \times$$

$$3-1=2 \in B \checkmark$$

$$\Rightarrow D = \{3^3\} = \{27\}$$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

مجموعه مرجع



هرجا که درباره تعدادی مجموعه صحبت می‌کنیم، همه این مجموعه‌ها را می‌توانیم زیرمجموعه یک مجموعه در نظر بگیریم که به آن **مجموعه مرجع** گفته می‌شود و آن را با حرف **M** نشان می‌دهیم.

فرض کن کیانا، لیدا، بهار، سمانه، نرگس، روزیار و زهرا دانش‌آموزان کلاس نهم مدرسه‌ای هستند.

$$A = \{\text{کیانا، سمانه، زهرا}\}$$

A مجموعه‌ای از دانش‌آموزان است که در مسابقات ریاضی شرکت کرده‌اند:

$$B = \{\text{کیانا، نرگس}\}$$

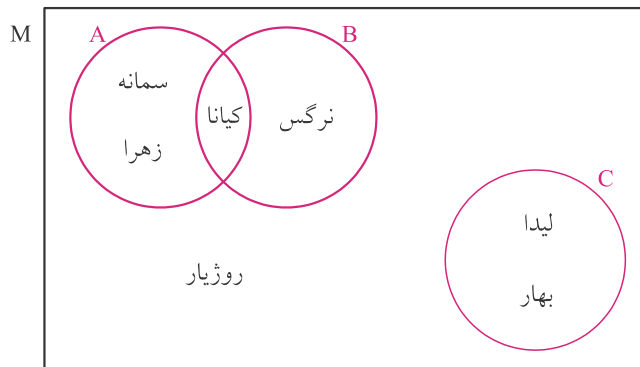
B مجموعه‌ای از دانش‌آموزان است که در مسابقات بسکتبال شرکت کرده‌اند:

$$C = \{\text{بهار، لیدا}\}$$

C مجموعه‌ای از دانش‌آموزان است که در مسابقات شطرنج شرکت کرده‌اند:



مجموعه‌های A ، B و C زیرمجموعه یک مجموعه مرجع هستند که در اینجا مجموعه دانش‌آموزان کلاس نهم مدرسه‌شان است:
 $M = \{\text{کیانا، لیدا، بهار، سمانه، زهرا، روژیاری، نرگس}\}$
 در رسم نمودار ون معمولاً مجموعه‌ها را با دایره مشخص می‌کنند و مجموعه مرجع را با یک مستطیل بزرگ که همه دایره‌ها (مجموعه‌ها) داخل آن هستند (زیرمجموعه آن هستند) نمایش می‌دهند. مثلاً نمودار ون مثال ما به این شکل است:



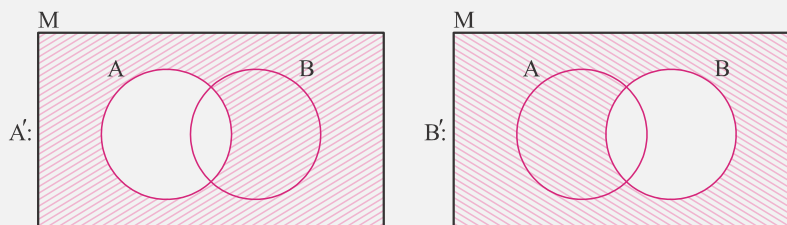
متمم یک مجموعه

متمم مجموعه A ، مجموعه همه عضوهای M است که در A نیست و آن را با A' نشان می‌دهیم.
 در مثالی که زدیم، داریم:

آنهایی که در A نیستند $\rightarrow A' = \{\text{نرگس، لیدا، بهار، روژیاری}\}$
 آنهایی که در B نیستند $\rightarrow B' = \{\text{سمانه، زهرا، لیدا، بهار، روژیاری}\}$
 آنهایی که در C نیستند $\rightarrow C' = \{\text{کیانا، سمانه، زهرا، نرگس، روژیاری}\}$

متمم مجموعه A را با نمادهای ریاضی به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$



مثال: اگر $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{3, 4, 5\}$ ، متمم مجموعه A را بنویس.

$$A' = \{1, 2\}$$

پاسخ:

مثال: اگر $M = \mathbb{N}$ ، $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ، متمم مجموعه A را با نوشتن اعضا مشخص کن.

$$A' = \{1, 3, 5, \dots\}$$

پاسخ:

اجتماع دو مجموعه

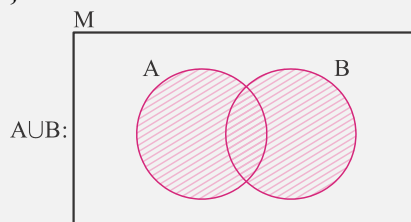
شهاب

در مثال مدرسه، مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از مسابقات ریاضی یا بسکتبال شرکت کرده‌اند، در نظر بگیر. اعضای این مجموعه در واقع یا عضوی از مجموعه A هستند یا عضوی از مجموعه B (یا عضو هر دو). به مجموعه‌ای که اعضای آن حداقل در یکی از مجموعه‌های A و B وجود دارند، «اجتماع مجموعه‌های A و B» گفته می‌شود و آن را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$A \cup B = \{\text{نرگس، کیانا، زهرا، سمانه}\}$$


اجتماع دو مجموعه A و B را با نمادهای ریاضی به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه، برای هر مجموعه دلخواه A داریم:

$$A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup M = M, \quad A \cup A' = M$$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ ، $A \cup B$ را مشخص کن.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

پاسخ:

مثال: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 5\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$ ، $A \cup B$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کن.

پاسخ:



$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال: اگر $A \cup B = B$ ، در مورد A و B چه می‌توان گفت؟

پاسخ: چون اجتماع A و B برابر B شده، یعنی A عضوی نداشته که در B نباشد، پس A زیرمجموعه B است.

مثال: عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویس:

الف) $(A \cup M)' \cup (\emptyset \cup A')$

ب) $(A' \cup A)' \cup (M' \cup A)$

پاسخ:

الف) $(M)' \cup (A') = \emptyset \cup A' = A'$

ب) $(M)' \cup (\emptyset \cup A) = \emptyset \cup A = A$