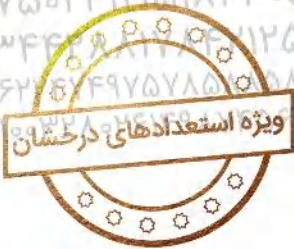




مجموعه کتاب‌های
علامه حلی

ریاضے ہنتنم

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237$$



مریم شیخ علیان . پریسا پرمور



مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی هشتم

● مریم شیخ‌علیان

● پریسا پرمور





شناسنامه
کتاب

سرشناسه : شیخ‌علیان، مریم، ۱۳۶۰
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی هشتم، مؤلفین مریم شیخ‌علیان، پریسا پرمور ویراستار علمی اقبال زارعی، ریحانه محمدی‌نژاد
مشخصات نشر : تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۹
مشخصات ظاهری : ۲۹×۲۲ س م. ۱: مصور (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ص ۳۳۲
فروست : مجموعه کتاب علامه‌حلی
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۴۹۶-۲۰۷-۰
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
یادداشت : واژه‌نامه
شناسه افزوده : پرمور، پریسا، ۱۳۶۱
شناسه افزوده : زارعی، اقبال - ویراستار
شناسه افزوده : محمدی‌نژاد، ریحانه، ۱۳۶۳ - ویراستار
شماره کتابشناسی ملی : ۷۳۶۵۶۸۲



عنوان کتاب : ریاضی هشتم
ناشر : انتشارات حلی
مؤلف : مریم شیخ‌علیان، پریسا پرمور
ویراستار علمی : اقبال زارعی، ریحانه محمدی‌نژاد
مسئول هماهنگی : سمیه‌سادات فاطمی
طراح جلد : عاطفه قلیچ‌خانی
تصویرسازان : محمدحسین صفدریان
صفحه‌آرا : راضیه‌سادات فرهانیان
حروف‌نگار : منیره‌سادات فرهانیان
چاپ و صحافی : واژه‌پرداز اندیشه
سال چاپ : ۱۴۰۱
نوبت چاپ : سوم
شمارگان : ۲۰۰۰ جلد
قیمت : ۲۱۴۵۰۰ تومان
شماره شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۴۹۶-۲۰۷-۰



تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ ول ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

کلیه حقوق این اثر برای ناشر محفوظ است.

هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق برداشت تمام یا قسمتی از اثر را به صورت چاپ، فتوکپی، جزوه و مجازی ندارد.

متخلفان به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از ناشران تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



پالاب
براتی

	فصل ۱ عددهای صحیح و گویا	<ul style="list-style-type: none"> ۴ درسنامه ۲۷ تمرین ۳۴ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
<ul style="list-style-type: none"> ۴۱ درسنامه ۵۶ تمرین ۶۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای 	فصل ۲ عددهای اول	
	فصل ۳ چندضلعی‌ها	<ul style="list-style-type: none"> ۶۵ درسنامه ۸۵ تمرین ۹۰ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
<ul style="list-style-type: none"> ۹۷ درسنامه ۱۱۱ تمرین ۱۱۶ پرسش‌های چهارگزینه‌ای 	فصل ۴ جبر و معادله	
	فصل ۵ بردار و مختصات	<ul style="list-style-type: none"> ۱۲۱ درسنامه ۱۳۵ تمرین ۱۴۰ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
<ul style="list-style-type: none"> ۱۴۵ درسنامه ۱۶۴ تمرین ۱۶۸ پرسش‌های چهارگزینه‌ای 	فصل ۶ مثلث	
	فصل ۷ توان و جذر	<ul style="list-style-type: none"> ۱۷۳ درسنامه ۱۹۰ تمرین ۱۹۵ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
<ul style="list-style-type: none"> ۲۰۱ درسنامه ۲۱۶ تمرین ۲۲۰ پرسش‌های چهارگزینه‌ای 	فصل ۸ آمار و احتمال	
	فصل ۹ دایره	<ul style="list-style-type: none"> ۲۲۵ درسنامه ۲۴۴ تمرین ۲۵۰ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۵۶	یادش‌ها	

قبل از شروع به مطالعه کتاب این قسمت را بنویسید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هر کدام وجود دارد که در هر یک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:

خیلی وقت‌ها موضوعات درسی اساس یک بازی هستند و یا می‌شود برای یادگرفتن آن‌ها از یک بازی استفاده کرد. در نوبت بازی درواقع هم درس می‌خوانیم و هم بازی می‌کنیم.

در انتهای فصل برای یک جمع‌بندی سریع می‌توان از این قسمت کمک گرفت. در این قسمت با هم فصل را جمع‌بندی می‌کنیم و نکات و مطالب مهم را برای خود تکمیل می‌کنیم.

یک بار هم خودمان را جای معلم‌ها بگذاریم و برگه تصحیح کنیم. این قسمت یک برگه امتحانی با جواب است که برخی از جواب‌ها دارای غلط و اشتباه است. برگه را تصحیح کنید و نمره دهید.

ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضوع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات کاربردی با معادل انگلیسی آن آورده شده است.

در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید. سؤالات سخت با ستاره مشخص شده، اگر این سؤالات را نتوانستید حل کنید خیلی به خودتان آسیب نزنید!

سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. سؤالات چهارگزینه‌ای با این پیش فرض طراحی شده است که اگر نکات مربوط به سؤال را بلد باشید حداکثر در ۲ دقیقه بتوانید به آن جواب دهید.

پاسخ تمرین‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای همه فصل‌ها به‌صورت کامل ارائه شده است.



در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانیم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

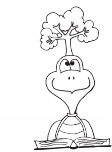
هیچ‌بخشی به اندازه مثال نمی‌تواند، روش‌های حل مسئله را برای انسان روشن کند. برای اینکه کاملاً روشن شوید، کتاب پر از مثال‌های حل شده و کار راه‌انداز است.

اشتباه رایج: اگر فکر می‌کنید اشتباهات شما در حل مسائل مختص شما است در اشتباه هستید. تجربه ما در تدریس نشان می‌دهد که خیلی از این موارد بین دانش‌آموزان مشترک است. این بخش اشتباهات رایج را به عنوان یک مثال با پاسخ اشتباه رایج ارائه می‌کند.

شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سؤالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیده‌ها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

در این بخش شخصیتی در متن درس معرفی می‌شود و در کنار صفحه، عکس و مختصری از زندگی وی می‌بینید. حق مسلم ما است که حداقل قیافه این دانشمندان دوست داشتنی را ببینیم، شاید در کتاب‌های آینده عکس شما هم اینجا قرار بگیرد!

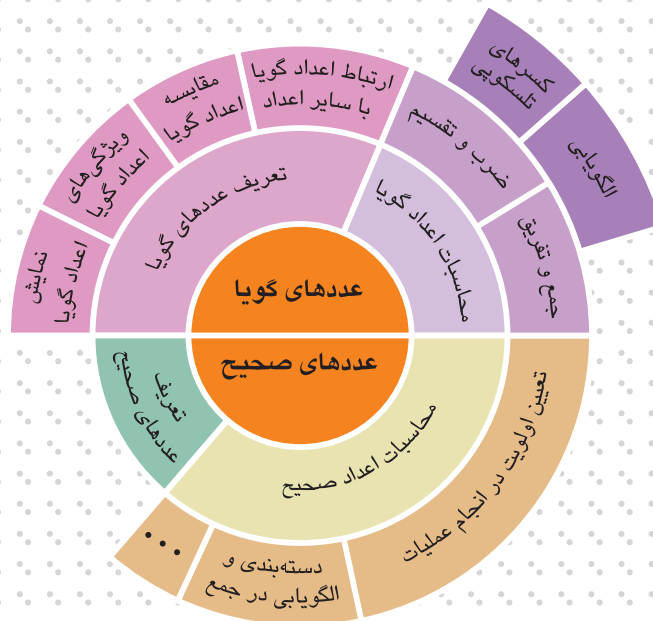
برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.





هرجا که باشی نمونه‌های از کاربرد اعداد را پیرامون خود خواهی دید. کافی است نگاهی دقیق به اطرافت بیندازی.

فصل اول عددهای صحیح و گویا



اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و مثال‌ها و تمرین‌های خواسته‌شده را به دقت انجام دهی؛

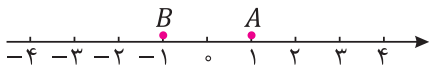
- می‌توانی حاصل عبارات شامل اعداد صحیح را با رعایت اولویت در انجام عملیات به‌دست آوری.
- می‌توانی حاصل جمع و تفریق تعداد زیادی از اعداد صحیح را با پیدا کردن الگوی بین اعداد و دسته‌بندی مناسب آن‌ها به‌دست آوری.
- می‌توانی بین دو عدد گویا، هر تعداد که بخواهی، عدد گویا بنویسی.
- می‌توانی حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد گویا را با رعایت اولویت در انجام عملیات بیابی.
- می‌توانی تعداد زیادی عدد گویا را با الگویابی مناسب، جمع و تفریق کنی.



لهراف رفتاری

یادآوری اعداد صحیح

در سال قبل با مجموعه اعداد صحیح آشنا شدیم، می‌دانیم که این مجموعه، شامل مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه قرینه اعداد طبیعی و عدد صفر است. مجموعه اعداد طبیعی، همان اعداد صحیح مثبت‌اند (یعنی ۱ و ۲ و ۳...)، قرینه اعداد طبیعی، همان اعداد صحیح منفی‌اند (یعنی -۱ و -۲ و -۳ و ...). و عدد صفر که بدون علامت یعنی نه مثبت و نه منفی است. نمی‌دانم تا الان به اهمیت عدد صفر در به وجود آمدن اعداد صحیح، فکر کرده‌اید یا نه، به محور اعداد زیر نگاه کنید:



هر دو نقطه A و B به اندازه یک واحد از صفر فاصله دارند و تنها تفاوتشان، جایگاهی است که نسبت به صفر دارند. نقطه $A = +1$ در سمت راست عدد صفر قرار دارد و نقطه $B = -1$ در سمت چپ عدد صفر. همان‌طور که یاد گرفته‌اید که قرینه عدد $+4$ برابر -4 است، در واقع اگر عدد $+4$ را نسبت به عدد صفر قرینه کنیم به عدد -4 می‌رسیم؛



پس قرینه هر عدد صحیح، عددی صحیح است. شاید خواندن این مطالب، برای تکراری و خسته کننده باشد، پس زیاد وقت را تلف نکنیم و برویم چند سؤال از اعداد صحیح حل کنیم.

یک پیشنهاد:



ابتدا به سوال خوب فکر کن و بعد پاسخ را نگاه کن، اگر خیلی سریع سراغ جواب بروی، به همان سرعت هم، پاسخ از ذهن‌ات پاک می‌شود!

مثال ۱. عدد -5 قرینه عدد $+5$ است یا عدد $+5$ قرینه عدد -5 ؟

پاسخ: هر دو، عدد -5 قرینه عدد $+5$ است: $-(+5) = -5$ و عدد $+5$ هم قرینه عدد -5 است: $-(-5) = +5$
 قرینه $+5$ قرینه -5

با توجه به محور اعداد هم می‌توانید پاسخ این سؤال را بیابید.



در کتاب ریاضی هفتم دیدیم که در جمع و تفریق اعداد صحیح می‌توانیم اعداد را با حفظ علامت، جابه‌جا کنیم:

$$5 + 8 = 8 + 5 \quad \text{و} \quad 3 - 6 = -6 + 3$$

همین‌طور در ضرب و تقسیم اعداد صحیح، ابتدا علامت حاصل عبارت را تعیین می‌کنیم و بعد حاصل را به‌دست می‌آوریم. برای مرور چهار عمل اصلی در اعداد صحیح، مثال زیر را حل کن.

مثال ۲. حاصل عبارات زیر را به‌دست آور.

الف) $-17 - (-30) =$ ب) $-49 \div (-7) =$ پ) $-(-8) \times (-125) =$

پاسخ:

الف) $-17 - (-30) = -17 + 30 = 13$ ب) $-49 \div (-7) = +7$

پ) $-(-8) \times (-125) = 8 \times (-125) = -1000$

در جمع و تفریق اعداد صحیح، می‌توان اعداد را با حفظ علامت جابه‌جا کرد.

اولویت در انجام عملیات

می‌خواهیم حاصل عبارت $-7 + 14 \div (-7)$ را به دست آوریم:

$$\text{روش اول} \quad \underbrace{-7 + 14}_{7} \div (-7) = 7 \div (-7) = -1$$

$$\text{روش دوم} \quad -7 + \underbrace{14 \div (-7)}_{-2} = -7 + (-2) = -9$$

قاعده‌تاً هر دو روش بالا نمی‌تواند درست باشد، چون به دو پاسخ مختلف رسیده‌ایم. در ریاضیات برای رفع این مشکل، قرار گذاشته‌اند که اول سراغ پرانتز بروند، دوم توان، سوم ضرب و تقسیم و چهارم جمع و تفریق که البته در کتاب ریاضی هفتم این مطلب را یاد گرفته‌ای. پس در مثال بالا روش اول اشتباه است، چون اولویت تقسیم را در نظر نگرفته است.

مثال ۳. حاصل عبارات زیر را به دست آور.

الف) $3 - 3(4 - 4(1 - 2)) =$

ب) $4 + 15 \div (-3) \times (-10) - 1 =$

پ) $-2^4 - (6 - 8)^2 =$

پاسخ:

الف) $3 - 3(4 - 4(1 - 2)) =$

در عبارتی که چند پرانتز دارد، ابتدا سراغ داخلی‌ترین پرانتز می‌رویم، پس در عبارت بالا سراغ $(1 - 2)$ می‌رویم و حاصل آن که -1 است را می‌نویسیم:

$$3 - 3(4 - 4(-1)) = 3 - 3(4 - \underbrace{4 \times (-1)}_{-4}) = 3 - 3(\underbrace{4 - (-4)}_{4+4=8}) = 3 - \underbrace{3(8)}_{24} = 3 - 24 = -21$$

ب) $4 + \underbrace{15 \div (-3)}_{-5} \times (-10) - 1 =$

در این عبارت سمت چپ عدد -3 علامت \div و سمت راست عدد -3 علامت \times قرار دارد. بین \times و \div سراغ علامتی می‌رویم که در سمت چپ قرار گرفته باشد. پس در این سوال اول \div را انجام می‌دهیم و حاصل آن که -5 است را می‌نویسیم.

$$4 + \underbrace{(-5) \times (-10)}_{50} - 1 = 4 + 50 - 1 = 53$$

پ) $-2^4 - \underbrace{(6 - 8)^2}_{-2} = -\underbrace{2^4}_{16} - \underbrace{(-2)^2}_{4} = -16 - 4 = -20$

در قسمت پ، اول داخل پرانتز را حساب می‌کنیم و بعدا به توان می‌رسانیم.

مثال ۴. یکی از دانش‌آموزان پایه هشتم، پرسش زیر را چنین پاسخ داده است. اشتباه این پاسخ را پیدا کن.
(اشباهی که در حل این سؤال اتفاق افتاده از اشتباهات رایج دانش‌آموزان هفتمی است)



حاصل عبارات زیر را به دست آورید.



الف) $8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 = 8 + 6 + 4 - 7 + 5 + 3 = 19$

ب) $\underbrace{2 \times 5}_{10} - 10 \cdot (14 - 4 \div (-2)) - 1 = \underbrace{10}_{10} - \underbrace{10}_{10} \cdot \underbrace{(14 - 2)}_{12} \div (-2) = \underbrace{10 \div (-2)}_{-5} = \cdot \times (-5) = \cdot$

پاسخ:

$$\text{الف) } 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 = 8 + 6 + 4 - 7 - 5 - 3 = 19$$

ایده این راه حل این است که اعداد هم علامت را با هم جمع کند ولی اشکال اینجاست که علامت منفی را فقط برای عدد ۷ گذاشته است. باید علامت منفی را برای هر سه عددی که منفی اند، در نظر بگیریم:

$$8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 = \underbrace{8 + 6 + 4}_{18} + \underbrace{(-7 - 5 - 3)}_{-15} = 18 + (-15) = 3$$

$$\text{ب) } \underbrace{2 \times 5}_{10} - 10 (14 - 4 \div (-2)) - 1 = \underbrace{10 - 10}_{0} \cdot \underbrace{(14 - 4 \div (-2))}_{10} = 0 \cdot (10 \div (-2)) = 0 \cdot (-5) = 0$$

در قسمت ب، اولویت ضرب و تقسیم نسبت به تفریق را در دو جا در نظر نگرفته:

$$\underbrace{2 \times 5}_{10} - 10 (14 - 4 \div (-2)) - 1 = 10 - 10 (14 - (-2)) - 1 = 10 - 10 (16) - 1 = 10 - 160 - 1 = -151$$

ترتیب انجام عملیات در محاسبات اعداد: ۱- پرانتز ۲- توان ۳- ضرب و تقسیم ۴- جمع و تفریق

یادت هست که در محاسبه ضرب اعداد، ابتدا علامت را تعیین می‌کردیم و بعد حاصل را به دست می‌آوردیم. یعنی در محاسبه $(-4) \times (-8)$ ، ابتدا می‌گفتیم (و البته می‌گوییم!) که «منفی \times منفی» می‌شود مثبت و بعد ۴ را در ۸ ضرب می‌کنیم:

$$(-8) \times (-4) = +(8 \times 4) = +32$$

حالا مثال‌هایی از تعیین علامت عبارت‌ها حل می‌کنیم.

مثال ۵. تعیین کن که حاصل عبارت‌های زیر مثبت است یا منفی.

الف) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times \dots \times (-10)$

ب) $(-5) \times (-6) \times (-7) \times \dots \times (-30)$

پاسخ:

چه خوب که قرار نیست حاصل را به دست آوریم و فقط کافی است تعیین علامت کنیم.

الف) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times \dots \times (-10) \rightarrow (+)$

چون ۱۰ تا عدد منفی در هم ضرب شده‌اند، حاصل مثبت می‌شود.

ب) $(-5) \times (-6) \times (-7) \times \dots \times (-30) \rightarrow (+)$

اینجا چندتا عدد منفی در هم ضرب می‌شوند؟ ۲۵ تا؟ اگر کمی فکر کنیم می‌بینیم که ۲۶ تا عدد منفی در هم ضرب شده‌اند و حاصل مثبت می‌شود. چون از (-1) تا (-30) ، ۳۰ تا عدد داریم که ۴ تای آنها یعنی (-1) تا (-4) در این سؤال نیامده‌اند، پس $30 - 4 = 26$. در واقع تعداد اعداد از (-5) تا (-30) برابر با تعداد اعداد از ۵ تا ۳۰ است، پس ما برای پیدا کردن تعداد اعداد از ۵ تا ۳۰ می‌توانیم فاصله بین ۵ تا ۳۰ را حساب کنیم:

$$30 - 5 = 25$$

و بعد چون ۵ را کم کرده‌ایم، یکی به ۲۵ اضافه کنیم:

$$25 + 1 = 26$$

شمردن تعداد اعداد، از اشتباهات رایج بچه‌هاست پس با حل چند مثال دیگر، آن را کمی بیشتر توضیح می‌دهیم.

مثال ۶. باز هم تعیین کن که حاصل عبارتهای زیر مثبت است یا منفی:

الف) $(-99) \times \dots \times (-9) \times (-6) \times (-3)$

ب) $(-222) \times \dots \times (-69) \times (-66) \times (-63)$

پاسخ:

الف) $(-99) \times \dots \times (-9) \times (-6) \times (-3) \rightarrow \ominus$

بینیم از -3 تا -99 چند تا عدد داریم، خب فاصله -3 تا -99 برابر با فاصله 3 تا 99 است، پس:

$$\frac{96}{3} = 32$$

و چون اعداد متوالی در این مثال، 3 تا 3 تا با هم فاصله دارند، پس:

$$32 + 1 = 33$$

و در آخر چون 3 را کم کرده بودیم، یکی به 32 اضافه می‌کنیم:

33 تا عدد منفی در هم ضرب شده‌اند، در نتیجه حاصل منفی می‌شود.

ب) $(-222) \times \dots \times (-69) \times (-66) \times (-63) \rightarrow \oplus$

اول بینیم از (-63) تا (-222) چندتا عدد داریم: $159 = (-222) - (-63) - 63$ و یا راحت‌تر:

$$222 - 63 = 159$$

159 تا عدد غیر از (-222) داریم. (چون -222 را کم کرده‌ایم).

فاصله‌های بین دو عدد متوالی در الگوی ما 3 تا 3 تاست:

$$\frac{159}{3} = 53$$

53 تا عدد که باید یکی به آن اضافه کنیم:

$$53 + 1 = 54$$



به خاطر (-222)

کلاً 54 تا عدد منفی داریم که در هم ضرب شده و حاصل عددی مثبت می‌شود.



برای پیدا کردن تعداد اعداد در یک الگوی منظم که فاصله بین هر دو عدد متوالی مقدار ثابتی است، می‌توانیم عدد آخر (بزرگ‌ترین عدد) را منهای عدد اول (کوچک‌ترین عدد) کنیم، حاصل را بر فاصله بین عددهای متوالی تقسیم کنیم و در نهایت با عدد یک جمع کنیم:

$$+ \frac{\text{کوچک‌ترین عدد} - \text{بزرگ‌ترین عدد}}{\text{فاصله بین دو عدد متوالی}} : \text{تعداد اعداد در یک الگوی منظم}$$

مثال ۷. تعداد اعداد در الگوی زیر چندتاست؟

$$7, 9, 11, 13, \dots, 205$$

پاسخ:

$$\underbrace{7, 9, 11, 13, \dots, 205}_{+2 \quad +2 \quad +2}$$

طبق جمع‌بندی بالا داریم:

$$\text{تعداد اعداد} : \frac{205 - 7}{2} + 1 = 100$$

(کوچک‌ترین عدد) (بزرگ‌ترین عدد)
فاصله

روش دسته بندی در جمع اعداد

سال‌ها قبل در دبستانی، معلمی برای سرگرم کردن دانش‌آموزانش به آنان گفت اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع کنند. مدت کوتاهی بعد از طرح این سوال، دانش‌آموزی پاسخ آن را به دست آورد و موجب تعجب معلم و سایر دانش‌آموزان شد. راه حل او به این صورت بود:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \times 101 = 5050$$

۱۰۱

نام این دانش‌آموز کارل فریدریش گاوس، ریاضیدان معروف آلمانی است و روشی که او برای جمع اعداد استفاده کرد، به روش گاوس معروف است.

به راه حل گاوس نگاه دقیق‌تری بیندازیم. او ابتدا با جمع دوه‌دوی عددها از دو سر عبارت، به تعدادی عدد ۱۰۱ رسید. حالا باید تعداد ۱۰۱ هایی را که با هم جمع می‌شوند، پیدا می‌کرد.

خب ۱۰۰ تا عدد داریم که جمع هر دو تای آن‌ها برابر ۱۰۱ می‌شود، پس $\frac{100}{2} = 50$ ، یعنی ۵۰ تا ۱۰۱ که برابر ۵۰۵۰ است.

روش گاوس را به این صورت هم می‌توان توجیه کرد:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 =$$

اعداد ۱ تا ۱۰۰ را دوبار کنار هم می‌نویسیم (یکبار از ۱ تا ۱۰۰ و بار دیگر از ۱۰۰ تا ۱) و با هم جمع می‌کنیم:

۱	+	۱۰۰	=	۱۰۱
۲		۹۹		۱۰۱
۳		۹۸		۱۰۱
⋮		⋮		⋮
۱۰۰		۱		۱۰۱

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

چون دو بار از ۱ تا ۱۰۰ را جمع کرده‌ایم باید حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم

روش دسته‌بندی در جمع اعداد با الگوی منظم را می‌توان اینگونه خلاصه کرد:

$$\text{جمع اعداد در یک الگوی منظم} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{عدد آخر} + \text{عدد اول})}{2}$$



با هم نمونه‌هایی در این باره حل می‌کنیم:

نمونه اول:

$$5 + 10 + 15 + \dots + 90 + 95 =$$

۱۰۰

$$95 = \frac{(5+95) \times 19}{2} \Rightarrow 19 = \frac{95-5}{5} + 1$$

تعداد اعداد

در نمونه اول چندتا ۱۰۰ داریم:

تعداد کل اعداد ۱۹ تا است، پس نصف این تعداد یعنی ۹/۵ تا ۱۰۰ داریم، که عددی غیرصحیح است و خب معنی ندارد. در واقع عددی بین این اعداد وجود دارد که جفتی ندارد تا حاصل جمعش با جفتش، ۱۰۰ شود و همین باعث صحیح نشدن تعداد ۱۰۰ها شده است. آن عدد چیست؟ بله ۵۰ همان عدد تنها است! که اگر با خودش جمع شود، حاصل ۱۰۰ می‌شود.

۹ جفت عدد داریم که حاصل جمع هر جفت ۱۰۰ می‌شود و یک ۵۰ داریم: $9 \times 100 + 50 = 950$
اگر به صحیح نبودن تعداد ۱۰۰ها توجه نکنیم و بگوییم $\frac{19}{2}$ تا ۱۰۰ داریم در نتیجه:

که دوباره همان جواب راه حل بالا به دست می‌آید، پس اگر تعداد اعداد فرد بوده و بر ۲ تقسیم نمی‌شود، نگران نباش و از همان راه حل همیشگی برو و مطمئن باش که حاصل کل عبارت، عددی صحیح خواهد شد.

نمونه دوم:

$$\cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{6} + \cancel{8} + \dots + \cancel{98} + \cancel{100} =$$

با یک نگاه تیزهوشانه، می‌بینیم که عددها دو به دو برابر (۲-) می‌شوند و حالا باید ببینیم چند تا (۲-) داریم.

تعداد کل اعداد بالا برابر: $50 = \frac{100-2}{2} + 1$ است که در واقع اعداد زوج از ۲ تا ۱۰۰ هستند، (البته بدون محاسبه هم

می‌توانستیم تعداد آن‌ها را به دست آوریم.)

چون این عددها دو به دو برابر (۲-) شده‌اند، پس تعداد (۲-)ها برابر $25 = \frac{50}{2}$ است. در نتیجه حاصل عبارت بالا برابر است

با ۲۵ تا (۲-) یعنی $50 = 25 \times (-2)$.

در نمونه‌های بالا دیدیم که می‌توان با دسته‌بندی‌های مناسب، راه ساده‌ای برای به دست آوردن حاصل جمع تعداد زیادی از اعداد پیدا کرد و حتماً متوجه شده‌ای که در هر نمونه بین اعدادی که با هم جمع می‌شوند، نظم و الگوی ثابتی برقرار است. حالا سعی کن مثال‌های زیر را به تنهایی حل کنی و بعد راه حل خود را با پاسخ‌های داده شده مقایسه کنی.

مثال ۸. حاصل عبارات زیر را به دست آور.

الف) $(-25) + \dots + (-170) + (-175) + (-180) + (-185)$

ب) $-2600 + \dots - 1400 + 1300 - 1200 + 1100 - 1000$

پ) $1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 - 12 + \dots - 100 =$

پاسخ:

الف) $(-25) + \dots + (-170) + (-175) + (-180) + (-185) =$

تعداد کل اعداد: $33 = \frac{-25 - (-185)}{5} + 1$

مجموع اعداد: $-3465 = \frac{((-25) + (-185)) \times 33}{2}$

ب) $-2600 + 2500 - 2400 + \dots - 1400 + 1300 - 1200 + 1100 - 1000 =$

تعداد کل اعداد: $17 = \frac{2600 - 1000}{100} + 1$

به این نکته توجه کنیم که در این سؤال، اعداد یکی در میان با هم جمع یا از هم کم شده‌اند، برای محاسبه تعداد آن‌ها، می‌توانیم تعداد اعداد منفی و مثبت را جداگانه به دست آوریم و یا راحت‌تر است که همه علامت‌ها را جمع در نظر گرفته و تعدادشان را حساب کنیم، چون می‌دانیم تعداد اعداد بالا با تعداد اعداد $2600 + 1300 + 1200 + 1100 + 1000$ برابر است. ۱۷ تا عدد داریم که یکی از آن‌ها یعنی $2600 -$ تنهاست و زوجی ندارد که حاصل‌اش با آن عدد ۱۰۰ شود، پس،

$16 = 17 - 1$ عدد داریم که دو به دو ۱۰۰ می‌شوند، یعنی $8 = \frac{16}{2}$ تا ۱۰۰ داریم که باید با $2600 -$ جمع شود.

$$8 \times 100 + (-2600) = -1800$$

$$\text{پ) } 1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 - 12 + \dots + 97 + 98 + 99 - 100 =$$

با دسته‌بندی‌ای که می‌بینی، مجموع دو به دو اعداد، برابر -3 است و دو عدد 98 و 99 در دسته‌بندی‌ها قرار نگرفته‌اند. (تو هم مثل من اعداد قبل از 100 را به صورت سؤال اضافه کردی؟ از کجا فهمیدم که 99 مثبت است؟ دیدم که 99 مضربی از 3 است، پس در صورت سؤال به بررسی اعدادی که مضرب 3 هستند، پرداختم.

$$1 + 2 + \frac{3}{3 \times 1} - 4 - 5 - \frac{6}{3 \times 2} + 7 + 8 + \frac{9}{3 \times 3} - 10 - 11 - \frac{12}{3 \times 4} + \dots - 100 =$$

مضارب فرد 3 مثبت و مضرب‌های زوج 3 منفی‌اند و چون $99 = 3 \times 33$ یعنی مضرب فردی از 3 است، پس علامت 99 مثبت است.

خب حالا، 100 عدد داریم که دوتای آن‌ها $(99, 98)$ در الگویی که پیدا کرده‌ایم، نیستند، یعنی $98 = 100 - 2$ تا عدد داریم، که دو به دو -3 شده‌اند، پس:

$$\frac{98}{2} \times (-3) + 98 + 99 = 50$$

بازی دو نفره

وسایل لازم: یک ماشین حساب، کاغذ و مداد

ابزار لازم برای این بازی یک ماشین حساب است. البته باید دکمه یکی از عددهای آن خراب باشد! یعنی فرض کنید، نمی‌توانید از یکی از عددهای آن (مثلاً 4) استفاده کنید. با دوستانتان به نوبت بازی کنید و در هر نوبت یک عدد دو رقمی صحیح بگویید که حتماً رقم 4 را داشته باشد (مثلاً -43)، دیگری باید با استفاده از بقیه دکمه‌ها آن عدد را در نمایشگر ماشین حساب نمایش دهد.

تعداد دکمه‌هایی که برای نمایش دادن آن عدد استفاده می‌شود، امتیازی است که برای بازیکنی که عدد را انتخاب کرده است منظور می‌شود.

مثلاً شما عدد -43 را انتخاب می‌کنید. اگر دوستانتان با استفاده از رابطه زیر به این عدد برسند، باید 6 دکمه را به ترتیب نشان داده شده به کار برد. پس 6 امتیاز نصیب شما می‌شود.

$$- \quad 7 \quad \times \quad 6 \quad - \quad 1$$

اما اگر از رابطه زیر به عدد مورد نظر برسند، 4 امتیاز برای شما منظور می‌شود.

$$7 \quad - \quad 5 \quad 0$$

البته می‌توانید پس از چند دور بازی، بازی را مشکل‌تر کنید. مثلاً با اعداد سه رقمی بازی کنید یا قرار بگذارید که از دو یا سه دکمه استفاده نکنید.

بازی کنید و لذت ببرید. این بازی علاوه بر آن که تمرینی برای به کارگیری ماشین حساب است، به تقویت مهارت‌های محاسبه و حل مسئله نیز کمک می‌کند. در حین بازی می‌توانید درباره استراتژی‌هایی که برای کم کردن تعداد دکمه‌ها به کار می‌برید هم صحبت کنید.

نوبت بازی



معرفی اعداد گویا

تا حالا با اعداد طبیعی، حسابی و صحیح آشنا شدی:

^۱ نمایش می‌دهیم. \mathbb{N} اعداد طبیعی که آن را با \mathbb{N} نمایش می‌دهیم. $1, 2, 3, 4, \dots$

^۲ نمایش می‌دهیم. \mathbb{W} اعداد حسابی که آن را با \mathbb{W} نمایش می‌دهیم. $0, 1, 2, 3, \dots$

^۳ نمایش می‌دهیم. \mathbb{Z} اعداد صحیح که آن را با \mathbb{Z} نمایش می‌دهیم. $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

همینطور با اعداد کسری هم کار کردی که نه طبیعی‌اند، نه حسابی و نه صحیح.

اعداد گویا شامل تمام اعدادی است که بشود به صورت کسری با صورت و مخرج صحیح و مخرج مخالف صفر نوشت.

در واقع هر کسری مثل $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای صحیح و $b \neq 0$ باشد، یک عدد گویا نامیده می‌شود.

تمام اعداد $-\frac{1}{4}, 8, 1/2, \sqrt{4}, 0, (-1)^2$ گویا هستند، تساوی‌های زیر را نگاه کن.

$$8 = \frac{8}{1}, \quad 1/2 = \frac{12}{10}, \quad \sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad (-1)^2 = 1 = \frac{1}{1}$$

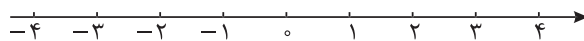
دیدی که همه اعداد بالا را می‌توان به صورت کسری با صورت و مخرج صحیح (که مخرج صفر نباشد) نشان داد، پس همه اعداد

بالا گویا هستند. با توجه به تعریف اعداد گویا، هر عدد صحیح، عددی گویا هم هست.

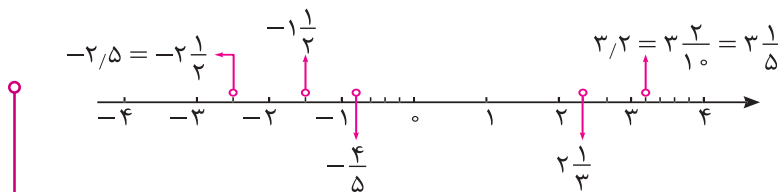
می‌توانی عددی مثال بزنی که گویا نباشد؟ (جواب این سؤال را در تمرین‌های همین فصل خواهی دید.)

مثال ۹. جای اعداد زیر را روی محور پیدا کن.

$$-1\frac{1}{2}, \quad 3\frac{2}{2}, \quad \frac{-4}{5}, \quad 2\frac{1}{3}, \quad -2/5$$



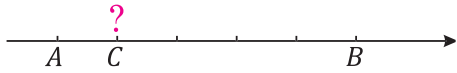
پاسخ:



هر عدد طبیعی، حسابی و صحیح، عددی گویا هم است.

1. $\mathbb{N} \rightarrow \text{Natural}$
2. $\mathbb{W} \rightarrow \text{Whole number}$
3. $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Zahlen}$

مثال ۱۰. اگر نقطه A نمایش $\frac{2}{7}$ و نقطه B نمایش $\frac{2}{3}$ روی محور اعداد زیر باشد و فاصله این دو عدد روی محور به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد، در این صورت نقطه C چه عددی را نشان می‌دهد؟



پاسخ: برای اینکه بفهمیم اندازه هر قسمت کوچک روی این محور چه قدر است، ابتدا فاصله A تا B را به دست می‌آوریم:

$$B - A = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$$

$$\frac{8}{21} \div 5 = \frac{8}{105}$$

$$C = \frac{2}{7} + \frac{8}{105} = \frac{38}{105}$$

چون این فاصله به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است، پس:

برای پیدا کردن نقطه C کافی است از A ، به اندازه $\frac{8}{105}$ جلو برویم:

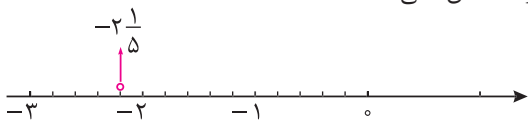
نواری کاغذ به طول $\frac{2}{3}$ متر داریم و هیچ نوع خط‌کش یا متری برای اندازه‌گیری در دسترسمان نیست. چگونه می‌توانیم با قیچی کردن قسمت‌های اضافی، نواری دقیقاً به درازای نیم‌متر به دست آوریم؟

فیسفر به‌سوزان

بینش راهنمایی

مثال ۱۱. قرینه $2\frac{1}{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد؟

پاسخ: قرینه $2\frac{1}{5}$ برابر $-2\frac{1}{5}$ است که اگر آن را روی محور مشخص کنی، می‌بینی بین دو عدد -3 و -2 قرار گرفته است.



مثال ۱۲. دانش‌آموزی برای تبدیل عدد مخلوط $-3\frac{1}{2}$ به کسر، روش زیر را به کار برده است و بعد جای این دو عدد را روی محور مشخص کرده و متوجه شده است که این دو عدد با هم برابر نیستند. اشکال کار او چیست؟

(اشتباهی که در حل این سؤال اتفاق افتاده از اشتباهات رایج دانش‌آموزان هشتمی است)

!

$$-3\frac{1}{2} = \frac{-3 \times 2 + 1}{2} = \frac{-6 + 1}{2} = \frac{-5}{2}$$

!

پاسخ: $-3\frac{1}{2}$ یعنی به اندازه ۳ واحد کامل و $\frac{1}{2}$ واحد به سمت منفی‌ها برویم ولی این دانش‌آموز -3 را در واقع با $\frac{1}{2}$

جمع کرده است. از روی محور می‌توانیم راحت‌تر ببینیم که اگر از -3 به اندازه $\frac{1}{2}$ اشتباهاً به سمت مثبت‌ها برویم، به

$$-3\frac{1}{2} = -\left(\frac{3 \times 2 + 1}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

می‌رسیم و او با این روش محاسبه، این کار را کرده است.



□ یادآوری اعداد صحیح

۱. اختلاف کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی چندتاست؟
۲. قرینه اعداد -7 , $-(-12)$, $-(-(-10))$ را بنویسید.
۳. بین -3 و $+4/1$ چند عدد صحیح نامثبت وجود دارد؟ (بین دو عدد 3 و $4/1$ یعنی این دو عدد را نشماریم) (به اعداد کوچک‌تر یا مساوی صفر $(x \leq 0)$ ، اعداد نامثبت و به اعداد بزرگ‌تر یا مساوی صفر $(x \geq 0)$ ، اعداد نامنفی می‌گویند)
۴. اگر مجموع اعداد صحیح 1 تا 4021 را با مجموع قرینه اعداد صحیح 2 تا 4020 جمع کنیم، حاصل چه می‌شود؟
۵. اگر قرینه a ، عدد b و قرینه b ، عدد c باشد، آیا می‌توان گفت $a = c$ ؟

□ اولویت در انجام عملیات

۶. جدول ضرب مقابل را طوری با اعداد $4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$ پر کنید که اعداد به‌دست آمده صحیح باشند. (از اعداد تکراری استفاده نکنید). آیا این مسأله یک جواب دارد؟

×				
	۶		۳	
		-۱۲		-۸
			۰	
	-۲			۲

۷. ★ از هفت عدد $-9, 0, -5, -4, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5$ ، شش عدد را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که بتوان آن‌ها را به‌دسته‌های 2 تایی با مجموع برابر تقسیم‌بندی کرد. در این صورت کدام عدد را نباید انتخاب کرد؟
(کتابگورو ۲۰۱۰)
۸. ★ یک ماشین حساب خراب داریم که نمی‌تواند همزمان بیش از دو عدد را با هم جمع کند و هرگاه حاصل جمع اعداد از 9 بیشتر شود، حاصل جمع را -3 اعلام می‌کند. با پرانتزگذاری روی عبارتهای زیر و محاسبه آن‌ها، حاصل حداقل چقدر می‌شود؟ (کتاب تکمیلی سمپار)
الف) $1+2+1+2+1+2+1+2=$
ب) $1+2+3+4+5+6+7+8=$
۹. حاصل عبارتهای زیر را به‌دست آورید.
الف) $13+7-13+7=$ ب) $4 \times (-9) \div 4 =$
پ) $-4(2-(5-7)-3) =$ ت) $2+6 \div 4 \times 8-3 =$
ث) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} =$ ج) $5-5((2^3-9)^2 + (-1)^7) =$
چ) $(7^2-5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 20 - 2^5 =$ (کتاب تکمیلی سمپار) ★
ح) $(43-5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^4 - 1 \times 3 - 4 \times (8+3^2) =$ (کتاب تکمیلی سمپار) ★
۱۰. حاصل عبارتهای زیر را به‌دست آورید.
الف) $(1-1399)(2-1399)(3-1399)(4-1399) \dots (2020-1399) =$
ب) $(1379-1393)(1380-1392)(1381-1391) \dots (1393-1379) =$



□ اعداد صحیح

۱. حاصل عبارت $6 \div 2(1+2)$ کدام است؟
 (پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳)
- ۱ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)
۲. اگر a یک عدد صحیح منفی باشد، حاصل کدام یک از عبارتهای زیر حتماً مثبت است؟
 (پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳)
- ۱) $a+1394$ ۲) $a-2$ ۳) $3a$ ۴) $-2a$
۳. حاصل عبارت $7-7(6-6(5-5(4-4(3-2))))$ کدام است؟
 (علامه علی ۹۸-۹۷)
- ۱) ۱۷۵ ۲) -۲۴۵ ۳) ۱۶۱ ۴) صفر
۴. قرینه حاصل عبارت $3-4+5-6+7-8+\dots+99-100$ کدام است؟
 (آزمون علامه علی)
- ۱) ۴۹ ۲) -۴۹ ۳) ۹۸ ۴) -۹۸
۵. مهران اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۱ را روی کاغذ نوشت و بین آنها منفی و مثبت قرار داد. حاصل این محاسبات مهران کدام نمی‌تواند باشد؟
 (آزمون علامه علی)
- ۱) ۱۵ ۲) ۷ ۳) -۵ ۴) صفر
۶. اگر $A = (a-12)(a-11)(a-10)\dots(a+11)(a+12)$ باشد و a عددی صحیح و بین -8 و $+8$ باشد، کدام گزینه درباره مقدار A درست است؟
 (آزمون علامه علی)
- ۱) A همواره عددی مثبت است. ۲) A همواره عددی منفی است.
 ۳) A همواره برابر صفر است. ۴) A عددی بین -26 و $+36$ است.
۷. اگر A مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ و B مجموع اعداد صحیح -20 تا -89 باشد، حاصل $A+B$ کدام است؟
 (آزمون علی ۹۸-۹۷)
- ۱) ۳۰۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۱۹۰ ۴) ۲۱۰
۸. $3-12$ بار با $2-$ جمع می‌کنیم و سپس حاصل را 11 بار قرینه می‌کنیم، عدد نهایی کدام است؟
 (آزمون علی ۹۸-۹۷)
- ۱) ۲۴ ۲) -۲۴ ۳) ۲۷ ۴) -۲۷
۹. اگر مجموع اعداد صحیح بزرگ‌تر از -49 و کوچک‌تر از 19 را A بنامیم، $\frac{A}{5}$ کدام است؟
 (آزمون علی ۹۸-۹۷)
- ۱) -۱۹۵ ۲) -۱۹۷ ۳) -۱۹۹ ۴) -۲۰۱
۱۰. حاصل جمع اعداد زیر که در ۱۱ سطر نوشته شده‌اند، برابر کدام گزینه است؟
 (پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۷-۹۶)
- ۱۱۱
 ۱۱۱ ۱۱۱ $\rightarrow 2 \times 111$
 ۱۱۱ ۱۱۱ ۱۱۱ $\rightarrow 3 \times 111$
 ⋮
 ۱۱۱ ۱۱۱ ۱۱۱ ⋯ ۱۱۱ $\rightarrow 11 \times 111$
- ۱) $11 \times 11 \times 111$ ۲) $11 \times 12 \times 111$ ۳) $11 \times 5 \times 111$ ۴) $11 \times 6 \times 111$

۱۱. در جاهای خالی عبارت $1 \square 2 \square 4 \square 6 \square 8$ باید یکی از علامت‌های \times یا $+$ را قرار دهیم. بیشترین مقدار ممکن این

(آزمون ملی ۹۸-۹۷)

عبارت برابر چه عددی است؟

(۱) ۷۶۹ (۲) ۳۸۵ (۳) ۳۸۴ (۴) ۱۹۵

۱۲. با قرار دادن دو علامت ضرب و دو علامت جمع در جاهای خالی عبارت 504030201 چند تا از اعداد ۱۵، ۳۰، ۲۷ و ۲۹ می‌تواند

(پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳)

حاصل عبارت داده شده باشد؟

(۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا (۴) چهار تا

(پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳)

۱۳. روی محور اعداد صحیح چند عدد بین $1/1394$ و $4/2015$ قرار دارد؟

(۱) ۳۴۱۰ (۲) ۳۴۰۹ (۳) ۳۴۰۸ (۴) ۳۴۰۹-

۱۴. مهسا جمع اعداد زیر را تا n که خودش مقدار آن را می‌داند، ادامه می‌دهد. کدام یک از اعداد زیر می‌تواند حاصل عبارت زیر باشد؟

(پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳) $n = 1 + (-70) + (-80) + (-90) + \dots + (-100)$

(۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۴۰

۱۵. در سال جاری، یکی از معتبرترین جایزه‌های ریاضی جهان به مریم میرزاخانی (متولد ۱۹۷۷ میلادی، ۱۳۵۷ شمسی) اهدا شد. روی

نشانی که به او اهدا شد، تصویر ارشمیدس (۲۸۷ - ۲۱۲ پیش از میلاد) حک شده است. مریم میرزاخانی چند سال پس از تولد

(پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳)

ارشمیدس به دنیا آمده است؟

(۱) ۲۲۶۴ (۲) ۲۱۸۹ (۳) ۱۷۶۵ (۴) ۱۶۹۰

۱۶. عددهای ۱، -۱، -۱، -۱ و -۱ را می‌نویسیم. (۱ اولین عدد است). بعد، حاصل ضرب دو جمله آخر را هم می‌نویسیم و همین کار را

ادامه می‌دهیم (مثلاً عددهای چهارم و پنجم را در هم ضرب می‌کنیم تا عدد ششم به دست بیاید). حاصل جمع اولین عدد تا دو هزار و

(مسابقات کانگورو، ۲۰۱۳)

سیزدهمین عدد کدام است؟

(۱) ۱۰۰۶- (۲) ۶۷۱- (۳) صفر (۴) ۱۰۰۷

۱۷. پنج عدد صحیح متفاوت را از بین اعداد ۱ تا ۳۰ طوری انتخاب کرده‌ایم که مجموع آن‌ها ۳۰ شده است. کدام گزینه بزرگ‌ترین مقدار

(مسابقات استرالیا، ۲۰۱۳)

ممکن برای بزرگ‌ترین عدد از این پنج عدد است؟

(۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۲۶

□ اعداد گویا

۱۸. کدام کسر به ۲ نزدیک‌تر است؟

(۱) $\frac{29}{19}$ (۲) $\frac{39}{19}$ (۳) $\frac{49}{39}$ (۴) $\frac{59}{49}$

(مسابقات استرالیا، ۲۰۱۳)

۱۹. کدام جمله در مورد کسر $\frac{720163}{2016}$ درست است؟

(۱) بین ۱ و ۱۰ است.
(۲) بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ است.
(۳) بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰۰ است.
(۴) از ۱۰۰۰ بزرگ‌تر است.

(پیشرفت تفصیلی سمپار ۹۳-۹۳)

۲۰. چندتا از اعداد زیر گویا است؟

$\frac{2}{3}, -3, \frac{3}{-5}, \frac{0}{1}, \frac{2}{-5}, \frac{0}{1}, \frac{-2}{2}$

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



پایه: هشتم

بسمه تعالی

تاریخ آزمون:

مبحث آزمون: عددهای صحیح

نام و نام خانوادگی: بهادر قدرتی

نام دبیر: استاد گرامی سرکار خانم رحیمی

مدت آزمون: ۴۰ دقیقه

بارم آزمون: ۱۵ نمره

صفحه ۱

بارم

۲ نمره

۱. هر یک از اعداد زیر را در جدول و در جای درست خود قرار دهید. (ممکن است خانه‌ای خالی بماند و یا در خانه‌ای بیش از یک عدد قرار بگیرد.)

$$-\frac{1}{7}, \frac{-5}{3}, 1\frac{8}{3}, -2\frac{2}{9}, \frac{+4}{11}, -1\frac{2}{10}, -\frac{7}{12}, \frac{-17}{26}, \frac{-8}{4}, \frac{-6}{-19}$$

$x < -2$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$x \geq 2$
$-\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{4}, -1\frac{2}{10}, -2\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{12}, -1$	$\frac{7}{19}, \frac{17}{26}, \frac{4}{11}$	$1\frac{8}{3}$	

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱ نمره

الف)
$$-2 + 3 \left[-1 + 4(-7 + 8)^9 \right] \div (-9) = 1 \left[\frac{3}{3} \right] \div (-9) = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

۱ نمره

ب)
$$4 - (3 - (2 - 8) - 1) = 4 - (3 - (-6) - 1) = 4 - (3 - (-1)) = 4 - (3 - 1) = 4 - 2 = 2$$

۱ نمره

پ)
$$\frac{2 \times 11^2 \times (-78)}{-26 \times (+99)} = -\frac{2 \times 11 \times (-2) \times 3 \times 13}{-2 \times 11 \times 3^2 \times 11} = -\frac{11 \times (-2)}{3} = \frac{22}{3}$$

۱ نمره

ت)
$$-1\frac{1}{4} \times \frac{-2}{10} \div \frac{6}{25} = -\frac{5}{4} \times \frac{-2}{10} \times \frac{25}{6} = \frac{25}{24}$$

۲ نمره

۳. درستی (د) یا نادرستی (ن) عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) قرینه عدد $-4\frac{3}{5}$ عددی طبیعی است. **ن**

ب) عددی وجود ندارد که معکوسش با خودش برابر باشد. **د**

پ) بیشمار عدد گویا وجود دارد. **د**

ت) هر عدد صحیح، عددی گویا هم هست. **د**

ث) هر عددی که بشود به صورت یک کسر نوشت، عددی گویاست. **د**

ج) بین هر دو عدد گویا می‌توان یک عدد گویای دیگر نوشت. **د**

۴. حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به دست آورید.

۱ نمره

الف)
$$-5 + (-4) + (-3) + (-2) + \dots + 175$$

$$= (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 175$$

$$= \frac{(6 + 175) \times 179}{2} \Rightarrow \text{چون عدد بزرگ می‌شد دیگه جواب آخر و پیدا نکردم خانوم} \quad 175 - 6 = 179 \quad \text{تعداد}$$

پایه‌نامه تشریحی

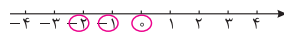


تمرین‌های فصل ۱: عبارتهای صحیح و گویا

۱. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت +۱ و بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی -۱ است و اختلاف آن‌ها برابر است با: $+1 - (-1) = 2$

۲. $-7 \xrightarrow{\text{قرینه}} -(-7) = 7, -(-12) \xrightarrow{\text{قرینه}} -(-(-12)) = -12$

۳. سه عدد ۲- و ۱- و ۰. $-(-(-10)) \xrightarrow{\text{قرینه}} -(-(-(-10))) = 10$



۴. $1 + \cancel{2} + \cancel{3} + \dots + 4021 + (\cancel{2}) + (\cancel{3}) + (\cancel{4}) + \dots + (\cancel{4020}) = 1 + 4021 = 4022$

۵. بله.

۶. با آزمون و خطا و در نظر گرفتن ردیف ۰ و توجه به حاصل ضرب‌های اول (مثل ۳ و ۲).

۱) $-a = b - \frac{x(-1)}{x} \rightarrow a = -b$

۲) $-b = c$ قرینه b عدد c است.

۳) $(1), (2) \Rightarrow a = -b = c \Rightarrow a = c$

۷. جواب دیگر این جدول، قرینه هم این اعداد است.

x	-۲	۳	-۱	۲
-۳	۶	۳		
-۴		-۱۲		-۸
۰			۰	
۱	-۲			۲

۸. اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و در تشکیل جفت‌هایی با مجموع برابر، از یک عدد کوچک و یک عدد بزرگ در این مجموعه، استفاده می‌کنیم.

۹، -۵، -۴، -۳، -۱، ۰، ۵

عدد ۵- را نباید انتخاب کرد.

-۹، ۵	-۴، ۰	-۳، -۱
-------	-------	--------

الف) $(1+2+1+2) + (1+2+1+2) = 6+6 = 12$

ب) $1+2+3+4+5+6+7+8 = (1+2+3+4) + (5+6) + (7+8) = -3 + (-2) + (-3) = -9$

۹.

الف) $\cancel{3} + 7 - \cancel{3} + 7 = 14$

ب) $4 \times (-9) \div 4 = (-36) \div 4 = -9$

پ) $-4(2 - (\cancel{5} - \cancel{7}) - 3) = -4(2 - (-2) - 3) = -4(4 - 3) = -4 \times 1 = -4$

ت) $2 + \frac{6}{4} \times 8 - 3 = 2 + \frac{6}{1} \times 2 - 3 = 2 + 12 - 3 = 11$

ث) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} =$

$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \dots + (-1)^{97} + (-1)^{98} + (-1)^{99}$

$= (-1) + (+1) + (-1) + (+1) + \dots + (-1) + (+1) + (-1) = -1$

ج) $5 - 5((\cancel{9} - 9)^3 + (\cancel{-1})^4)$

$= 5 - 5((\cancel{9} - 9)^3 + (-1)) = 5 - 5((\cancel{-1})^4 + (-1)) = 5 - 5(\cancel{-1} + (-1)) = 5 - 5(-2) = 5 - (-10) = 5 + 10 = 15$

ج) $(\cancel{49} - \cancel{25}) \times (\cancel{6} \times \cancel{4} + 4) \times 20 - \cancel{22} = (24)(\cancel{24} + 4) \times 20 - 22 = 24 \times 28 \times 20 - 22 = 2778$

ح) $(43 - \cancel{25} \times 2)^2 - 8 \div 4^2 - 1 \times 3 - 4 \times (8 + 3^2)$

$= (43 - \cancel{50})^2 - 8 \div 16 - 1 \times 3 - 4 \times (8 + 9)$

$= (\cancel{43} - \cancel{50})^2 - \frac{1}{2} - 3 - 4 \times 17 = 49 - \frac{1}{2} - 3 - 68$

$= \frac{98 - 1 - 6 - 136}{2} = -\frac{45}{2}$

الف) $(1 - 1399)(2 - 1399)(3 - 1399) \dots (2020 - 1399) = 0$

در پرانتزهای بالا با الگویی که پیش می‌رود به (۱۳۹۹-۱۳۹۹) هم برخورد خواهیم کرد که حاصل آن صفر است و صفر در هر عددی ضرب شود، حاصل صفر است.

ب) $(1379 - 1393)(1380 - 1393)(1381 - 1393) \dots (1393 - 1393) = 0$

در اینجا هم به پرانتز (۱۳۸۶-۱۳۸۶) خواهیم رسید، که حاصل کل عبارت را صفر می‌کند.

برای پیدا کردن این پرانتز، می‌دانیم عدد اول پرانتزها از ۱۳۷۹ تا ۱۳۹۳ یکی یکی زیاد می‌شود و عدد دوم در پرانتزها از ۱۳۹۳ تا ۱۳۷۹ یکی یکی کم می‌شود و این دو در جایی بین ۱۳۷۹ و ۱۳۹۳ با هم برابر خواهند شد.

$\frac{1379 + 1393}{2} = 1386$

۱۱. باید تا جایی که ممکن است علامت‌های منفی را به مثبت تبدیل کنیم تا حداکثر مقدار ممکن به دست آید.

$-12 \times (-3) + 6 - (-20) = 36 + 6 + 20 = 62$

۱۲.

الف) $(-2) \times (-4) \times (-6) \times \dots \times (-500) \times (-502) \rightarrow -$

برای تعیین علامت حاصل عبارت بالا، باید تعداد اعدادی که در هم ضرب شده‌اند را بدانیم، با توجه به درسامه داریم:

تعداد: $\frac{-2 - (-502)}{2} + 1 = 251$

۲۵۱ عدد منفی در هم ضرب شده‌اند و حاصل عددی منفی خواهد بود.

ب) $(-2)^{125} \times (-2)^{15} \times (-2)^{20} \times \dots \times (-2)^{125} \rightarrow -$

تعداد (-۲) ها $= \frac{125 - 1}{2} + 1 = 25$

که یکی در میان به توان زوج می‌رسند، پس یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند.

$(-)^{\times} (+)^{\times} (-)^{\times} (+)^{\times} \dots \times (-)^{\times} (+)^{\times} (-)^{\times}$

اگر عدد آخر یعنی $(-2)^{125}$ را کنار بگذاریم، تعداد اعداد منفی و مثبتمان با هم برابرند:

$12 \div 2 = 12 \rightarrow$ عدد مثبت داریم که حاصل مثبت است $\rightarrow 24 \div 2 = 12$

و در آخر یک منفی داریم که حاصل را منفی می‌کند.

پ) $(10 - 12)(12 - 14)(14 - 16)(16 - 18) \dots (2090 - 2092) \rightarrow -$

حاصل هر پرانتز برابر (-۲) است و برای پیدا کردن تعداد (-۲) ها یا همان تعداد پرانتزها، اعداد اول هر دسته را می‌نویسیم و تعداد آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$10, 12, 14, 16, \dots, 2090$

تعداد (-۲) ها $= \frac{2090 - 10}{2} + 1 = 1041$

۱۰۴۱ عدد منفی در هم ضرب شده‌اند، پس حاصل منفی خواهد بود.

۱۳. سه عدد a, b و c را در نظر می‌گیریم. A کوچک‌ترین عدد است و b واحد بیشتر از a است.

$a = -7, b = 2 + (-7) = -5$

$\frac{a+b+c}{3} = -1 \Rightarrow a+b+c = -3$

$\Rightarrow -7 + (-5) + c = -3 \Rightarrow c = 9$

اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد برابر است با: $9 - (-7) = 16$

۴. گزینه «۱»
چون ۲، ۳، ۴، ۵، ۰، ۰۰، ۱۰۰ متوالی هستند، از عدد ۳ تا ۹۸ عدد داریم. بنابراین تعداد پرانتزها $49 = 98 \div 2$ می‌باشد:

$$49 \Rightarrow 49 = 49 \times (-1) = -49 \Rightarrow 49 = \underbrace{(3-4)}_{-1} + \underbrace{(5-6)}_{-1} + \underbrace{(7-8)}_{-1} + \dots + \underbrace{(99-100)}_{-1}$$

۵. گزینه «۴»
این حاصل جمع هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. با دسته‌بندی ۲ تایی از این اعداد داریم:
 $1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6$
 $11 \quad 11 \quad 11 \quad 11 \quad 11$
تا ۱۱ داریم که اگر هر ۱۱ با ۱۱ بعدی خنثی و صفر شود، یک ۱۱ می‌ماند.

۶. گزینه «۳»
 a عددی صحیح بین (-8) و $(+8)$ است و هر کدام از این مقادیر را بگیرد با جایگذاری در A حتماً یک پرانتز صفر خواهد شد و حاصل ضرب صفر در هر عددی صفر است. مثلاً $a=6$

$$A = (6-12)(6-11)(6-10)(6-9)(6-8)(6-7)(6-6) \dots (6+12) = 0$$

۷. گزینه «۲»

$$A = 1+2+3+\dots+20+21+\dots+88+89+90$$

$$B = \underbrace{(-20)+(-21)+\dots+(-88)+(-89)}_{-190}$$

$$A+B = \underbrace{1+2+3+\dots+19+90}_{190} = 190+90 = 280$$

۸. گزینه «۳»
 $-3+12(-2) = -3-24 = -27$
 $(-1)(-1)\dots(-1)(-27) = -(-27) = 27$
یازده بار

۹. گزینه «۴»
باید حاصل جمع روبه‌رو را حساب کنیم:

$$A = -48 + (-47) + \dots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + 18$$

$$A = -48 + (-47) + \dots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + 18$$

$$A = -48 + (-47) + \dots + (-19)$$

تعداد اعداد $n = 48 - 19 + 1 = 30$

$$A = \frac{(-48 + (-19)) \times 30}{2} = -201$$

۱۰. گزینه «۴»
 $111+2 \times 111+3 \times 111+\dots+11 \times 111 = 111(1+2+3+\dots+11)$
 $= 111 \times \frac{11 \times 12}{2} = 111 \times 66 = 111 \times 6 \times 11$

۱۱. گزینه «۲»
برای ساختن بزرگ‌ترین عدد باید از ضرب استفاده کنیم ولی از آنجا که عدد ۱ عامل خنثی عمل ضرب است، بهتر است عدد ۱ را جمع کنیم.
 $8 \times 6 \times 4 \times 2 + 1 = 48 \times 8 + 1 = 385$

۱۲. گزینه «۳»
تمام حالاتی که دو علامت \times و دو علامت $+$ می‌تواند در اینجا قرار بگیرد برابر است با:
 $++\times\times, \times\times++ , \times++\times, ++\times\times, +\times\times+, \times\times+, \times++\times, \times\times+$
که اعداد ۱۹، ۶۳، ۲۷، ۳۰، ۱۵ و ۲۵ تولید می‌شوند.

۱۳. گزینه «۱»
 $-1394 < x < 2015/4$
 $-1394, -1393, -1392, \dots, 2015$
۱۳۹۴ تا عدد منفی و یک صفر و ۲۰۱۵ تا عدد مثبت داریم:
 $1394+1+2015 = 3410$

۱۴. گزینه «۱»
برای n هایی که کمتر از ۱۰۰ هستند حاصل عددی منفی می‌شود که در گزینه‌ها نداریم. برای $n=100$ داریم:
 $n=100 \rightarrow (-100) + (-90) + (-80) + \dots + 90 + 100 = 0$
 $n=110 \rightarrow 0 + 110 = 110$
 $n=120 \rightarrow 0 + 100 + 120 = 220$
پس برای n های بیشتر از ۱۱۰ حاصل بزرگتر از ۲۰۰ می‌شود که در گزینه‌ها نداریم.

ب) $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51} = \frac{5-3}{3 \times 5} + \frac{7-5}{5 \times 7} + \frac{9-7}{7 \times 9} + \dots + \frac{51-49}{49 \times 51}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} = \frac{1}{3} - \frac{1}{51} = \frac{17-1}{51} = \frac{16}{51}$
برای به دست آوردن حاصل جمع کسره‌های تلسکوپی، با توجه به الگویی که پیدا کردیم، می‌توانیم کسر اول را منهای کسر آخر کنیم.

پس با ضرب این عبارت در $\frac{3}{16}$ (که همان ۱ است و تغییری در جواب سؤال ایجاد نمی‌کند)، عبارت را به کسر تلسکوپی تبدیل می‌کنیم و با توجه به الگویی که در کسره‌های تلسکوپی پیدا کردیم، حاصل را به دست می‌آوریم.

اگر صورت کسره‌های بالا برابر ۳ (که اختلاف دو عدد مخرج است)، بود، کسره‌های بالا تلسکوپی بودند.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \frac{3}{11 \times 14} + \dots + \frac{3}{32 \times 35} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{35} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{35} \right) = \frac{2}{35}$$

ت) $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{97 \times 100}$
در کسره‌های بالا اگر به جای ۸ صورت، عدد ۳ داشتیم، کسرها تلسکوپی بودند.

$$8 \left(\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{97 \times 100} \right) =$$

حالا در $\frac{3}{8}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{97 \times 100} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{100} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{99}{100} \right) = \frac{66}{25}$$

ث) $\frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{24+26}{24 \times 25 \times 26} =$

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{24 \times 25} + \frac{1}{25 \times 26}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

۶. گزینه «۴»
 $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
 $B = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$
 $AB = \frac{2}{5} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{75}$



سوالات چهارگزینه‌ای فصل اول

۱. گزینه «۴»
 $6 \div 2(1+2) = 3 \times 3 = 9$

۲. گزینه «۴»
 $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow -2a > 0$

۳. گزینه «۱»
با توجه به اینکه اولویت محاسبات با داخلی‌ترین پرانتز است، داریم:

$$7-7(6-6(5-5(4-4(3-2))))$$

$$\Rightarrow 7+168=175$$