

به نام پروردگار مهربان

کنکور جدید

رشته

انسانی

به همراه سوالات کنکور ۹۷



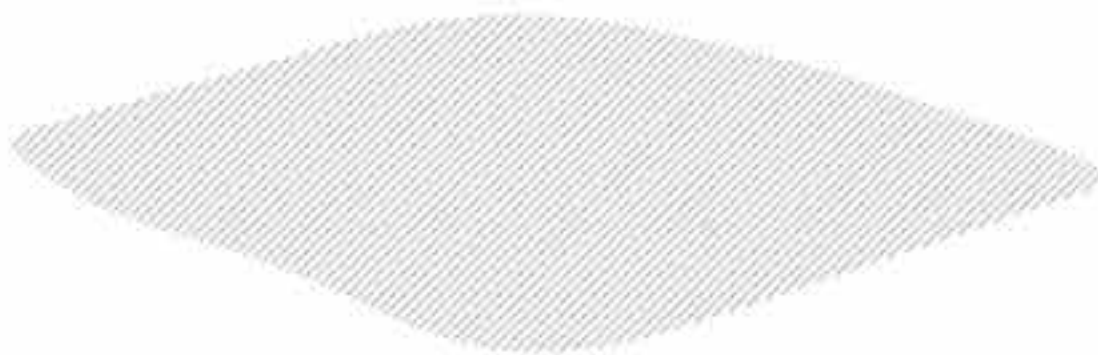
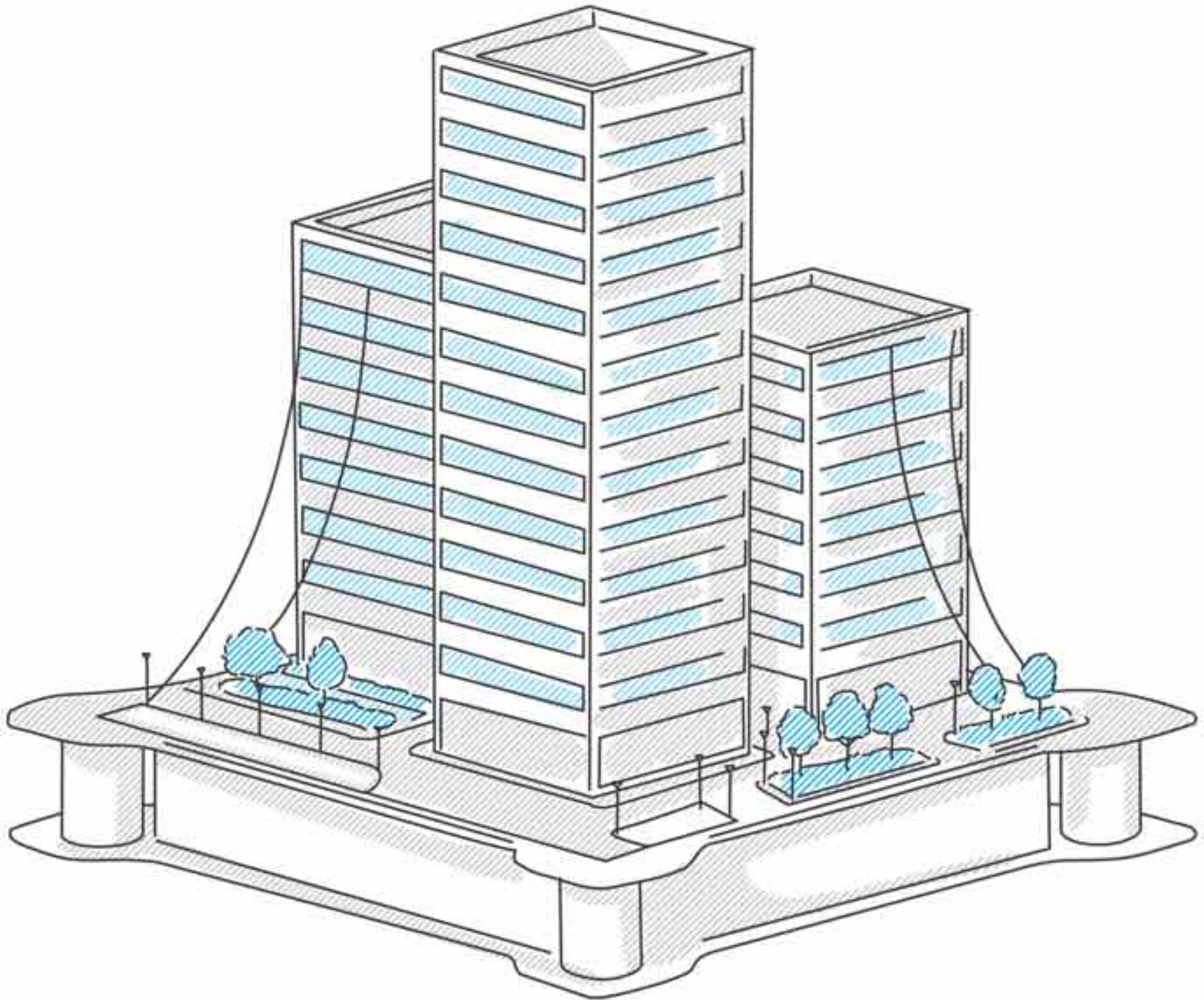
مهروماه

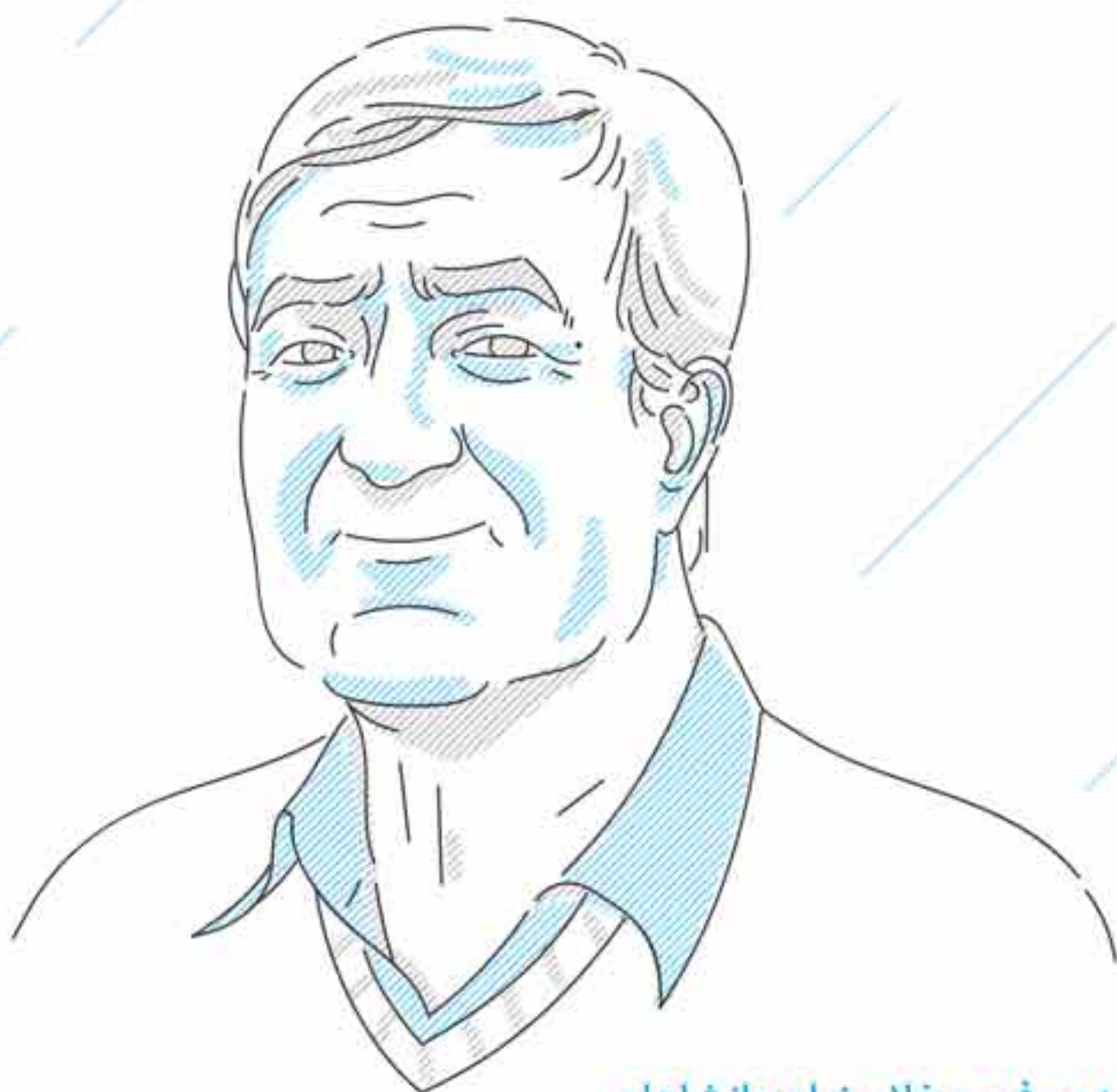
ریاضی و آمار

ریاضی و آمار ۳ پایه دوازدهم

• فرشاد ابوالقاسمی • مسعود غزالی بینا

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی





تقدیم به پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو در روز ۲۷ اسفند سال ۱۳۲۲ در روستای سمقاور از توابع کمیجان در استان اراک چشم به دنیا گشود. وی مدرک ششم ابتدایی خود را در سال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرستانی تا فاصله صد کیلومتری سمقاور وجود نداشت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشاورزی پرداخت. در سال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ التحصیل ممتاز از دبیرستانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سپس برای تحصیل در مقطع کارشناسی رشته ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسی در مؤسسه ریاضیات که توسط «پروفیسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شد. مؤسسه ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران است که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسیس شده بود استاد جهانشاهلو دوره ۲۷ ماهه بسیار سنگین مؤسسه ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسانده و به عنوان فارغ التحصیل ممتاز در دانشسرای عالی (دانشگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شغل مقدس معلمی در دانشگاه مشغول شد. ایشان در سال ۱۳۵۱ برای ادامه تحصیل عازم انگلستان شد، ابتدا مدرک کارشناسی ارشد دیگری در رشته تحقیق در عملیات از دانشگاه ساوت همپتون دریافت نمود، سپس برای دوره دکتری در زمینه الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشگاه برنل رفت و در اردیبهشت سال ۱۳۵۵ از رساله خود دفاع کرد و به ایران بازگشت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبه استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ ما حاصل زندگی وی چاپ بیست و دو جلد کتاب و چاپ بیش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشجوی کارشناسی ارشد و بیش از هزار دبیر ریاضی است. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششی داده‌های ایران» همچون پدری دلسوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشن‌گر راه کسانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مقدمه

دوستای خوب و کنکوری من، سلام!

امیدوارم که حال دلتون خوب باشه و یه دنیا اتفاق خوب و مثبت منتظر همتون باشه. ماراثن بچه‌های نظام قدیم به پایان رسیده و حالا نوبت شماست که با کتاب‌های جدید، این ماراثن رو ادامه بدین و برای اهدافتون بجنگین.

میدونم که کار سختی پیش رو دارین! اما برای به دست آوردن هر چیزی باید تلاش کرد. با شناختی که تو این سال‌ها از دانش‌آموزان پیدا کردم؛ میدونم که دانش‌آموز دوست داره که درس بخونه اما نمی‌دونه چه جوری و از کجا باید شروع کنه. اگه راهش رو اشتباه بره، خیلی زود کاخ آرزوهایش تبدیل میشه به یه همکف ۳۰ متری! یکی از دلایلی که دانش‌آموز انسانی از ریاضی فرار میکنه؛ اینه که کتاب خوب و کاملی که به زبون بچه‌های انسانی نوشته شده باشه، وجود نداره. اما کتاب ما، ریاضی کنکور شما رو تضمین میکنه. تو این کتاب تمام تلاشمون رو کردیم تا ریاضی رو به شما خوب توضیح بدیم تا کمی دیدتون نسبت به این درس عوض بشه!

حالا ببینین در درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.

هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم:


قسمت اول: درسنامه

توی این قسمت یه درسنامه مفصل آوردیم که جزء به جزء متن رو قورت بدی. این قسمت پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشیه.

بعد از اینا با آمادگی کامل میتونی بری سراغ تست‌ها.

این درسنامه کاملاً منطبق بر متن کتاب درسی جدید و همه مطالب کتاب درسی رو پوشش میده.

آیکون‌هایی که در کتاب به کار رفته رو براتون توضیح میدیم:

تو حل بعضی از تست‌ها برات راهبرد آوردیم که مطالب اون‌ها یا جدید و ابتکاری هستن یا این که از سال‌های قبل آورده شدن. 

هر جا دیدیم بیشتر بچه‌ها راه حل رو اشتباه میرن برات هشدار گذاشتیم. 

مهم به جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات مهر مهم زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

را جاهایی که فراتر از سطح کتاب درسیه و تحت عنوان خواندنی تو کتاب درسی اومده رو برات یک گام فراتر گذاشتیم.

ممنوع از همه مهم تر!!! یه راه حل هایی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره؛ اسمش رو گذاشتیم فرمول ممنوع. این دیگه آخرشه! بدون این که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می کنی.

نکته، حواست باشه و **را** تذکر هم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: تست های چهارگزینه ای

■ تو این بخش کولاک کردیم! تست های کنکور سراسری، از کنکورهای زیرخاکی بگیر تا جدیدترین کنکورهای پای ثابت این بخش هستن. حتی کنکور امسال تو کتابمون هست. تا یادم نرفته بگم، تک تک تمرین ها، فعالیت ها، مثال ها و ... کتاب درسی رو خوندم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره. تعداد تست های هر فصل متناسب با اهمیت هر مبحثه و شما رو از بقیه کتاب ها بی نیاز می کنه. یه سری هم تست هایی اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می خوان ۱۰۰٪ بزنن و حل کردن اون ها برای همه لازم نیست. و در آخر هر درس ۱ یا ۲ آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجی.

قسمت سوم: پاسخنامه تشریحی

■ مهم ترین بخش این کتاب همینه! این بخش وجه تمایز کتاب ما با بقیه کتابای کمک آموزشیه. پاسخ هایی کاملاً تشریحی و توضیحات فراوان که به طور کامل مسئله رو برای شما انسانی ها شفاف سازی کرده. خیلی از تست ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها با سه روش حل کردیم. تو پاسخ هامون نکاتی که برای حل تست نیاز بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت ها اهمیت بدی.

قدرانی

برای تهیه این کتاب خیلی ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

◀ آقای احمد اختیاری مدیر توانمند انتشارات که از هیچ نوع کمک و مساعدتی دریغ نکردند و همواره در همه مراحل از ما حمایت کردند.

◀ آقای محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که راهنمایی ها و مشاوره هایشان بسیار مفید بود.

◀ آقای مهندس عباس اشرفی مدیر گروه ریاضی که نظارت امور را تقبل کردند.

◀ خانم سنور حریری، مسئول ویراستاری کتاب و خانم پرنیان علیجانی که ویراستاری علمی و پیگیری امور مربوطه را انجام دادند و اگر پیگیری ها و زحمات بی دریغشان نبود چاپ کتاب بیش از این طول می کشید.

◀ خانم الهام پیلوایه مسئول فنی کتاب که برای صفحه آرایی بی نقص این کتاب زحمت فراوان کشیدند.

گروه هنری خلاق و دوست داشتنی انتشارات خانم‌ها الهام اسلامی اشلقی و سمیرا مختاری و آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و محسن فرهادی که با طراحی‌های زیبا، روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.

رسام محترم آقای مرتضی ضیایی و حروفچین‌های محترم آقای امیر ماهر و خانم ربابه موسوی

آقای امیر انوشه مدیر سایت و خانم فرزانه قنبری مدیر روابط عمومی

و در نهایت از خانم‌ها مائده میرزایی (رتبه ۴۶ کنکور ۹۶) و زهرا شریفی (رتبه ۳۰۵ کنکور ۹۴) که نظرات ارزشمندی در خصوص بهتر شدن کتاب داشتند و در جمع‌آوری سؤالات کنکور همکاری کردند؛ کمال تشکر را دارم.

فرشاد ابوالقاسمی، مسعود غزالی بینا

فهرست

فصل ۱: آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

درس ۲: احتمال

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل



۹

۱۰

۳۱

۵۲

فصل ۲: الگوهای خطی

درس ۱: مدل سازی و دنباله

درس ۲: دنباله های حسابی



۱۰۳

۱۰۴

۱۰۹

فصل ۳: الگوهای غیرخطی

درس ۱: دنباله هندسی

درس ۲: ریشه n ام و توان های گویا

درس ۳: تابع نمایی



۱۵۱

۱۵۲

۱۷۱

۱۸۵

درس سوم: چرخه آمار در حل مسائل

دنیای امروزی که ما با آن سروکار داریم، پر از اطلاعاتی است که در ابعاد مختلف زندگی با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم. برای این‌که بتوانیم بهتر زندگی کنیم و در مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم؛ لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند، تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج به دست آمده را بشناسیم و در آخر با استدلال درست، بهتر تصمیم بگیریم. حل مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل در شکل زیر آمده است:



نمای کلی از چرخه حل مسئله به کمک آمار

- ۱ بیان مسئله: ابتدا مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
- ۲ طرح و برنامه‌ریزی: سپس راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
- ۳ گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها: بعد از آن به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.
- ۴ تحلیل داده‌ها: سپس با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
- ۵ بحث و نتیجه‌گیری: در آخر به تفسیر نتایج به دست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.

گام‌های چرخه آمار در حل مسائل

گام ۱: بیان مسئله

طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. پس قبل از هر چیزی، باید مسئله به درستی درک شود و سپس دقیقاً تعریف و بیان شود؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط جامعه آماری را محدود و هدف خود از مطالعه این موضوع را مشخص کنیم.

گام ۲: طرح و برنامه‌ریزی

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب گاهی آسان است. مثل قد، وزن و دما اما در مواردی مثل خوشحالی، رفاه و یا هوش، آسان نخواهد بود.

با توجه به اهمیتی که بحث اندازه‌گیری دارد؛ حضور افراد متخصص در تیم هدایت‌کننده پژوهش با اهمیت و حیاتی است.

متخصصین، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه‌ها را طوری تنظیم می‌کنند که بتوان همان متغیری را اندازه گرفت که مورد نظر است.

بدون کمک این افراد ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً رفاه یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق در مورد چگونگی اندازه‌گیری متغیرها، درباره چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌گویند. هرچه اندازه جامعه بزرگ‌تر باشد، برای آن‌که نمونه بتواند به خوبی بیانگر ویژگی‌های جامعه باشد، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم است. هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از حضور تنوع در نمونه، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم داریم.





❗ **تست:** در کدام مورد، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم است؟

- (۱) سن دانش‌آموزان یک کلاس
 (۲) وزن بچه‌های یک مدرسه
 (۳) مدت زمان مطالعه افراد شهر
 (۴) میزان آب مصرفی افراد یک کشور
- پاسخ: **گزینه ۴** پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر و اندازه جامعه از همه بزرگ‌تر است؛ پس اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم داریم.

❗ در کدام گزینه، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم است؟

- (۱) سن افراد یک شهر
 (۲) وزن افراد یک شهر
 (۳) کتاب‌های مورد مطالعه افراد شهر
 (۴) قد افراد یک شهر
- پاسخ: **گزینه ۳** پراکندگی متغیر مورد بررسی بیشتر است.

دقت کنید همه افراد جامعه باید شانس حضور در نمونه را داشته باشند.



گام ۳: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباهات را تصحیح کرد.

❗ **تست:** در جدول زیر، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک بررسی آماری پیش از برطرف شدن اشتباهات است.

ردیف	شماره دانش‌آموز	سن	جنسیت	متوسط ساعات ورزش در شبانه‌روز	نمره تاریخ
۱	۱۷	۱۲	۱	۷	۱۷
۲	۱۸	۱۳	۲	۵	۱۲
۳	۲۱	۱۰	۱	۱۱	۱۳
۴	۵	۵۱	۲	۲۵	۱۴
۵	۸	۱۶	۳	۱۱	۱۰
۶	۹	۱۳	۱	۱۳	۱۷
۷	۱۰	۱۴	۲	۸	۱۳

در این بررسی آماری، مدت زمانی که دانش‌آموز در یک شبانه‌روز ورزش می‌کند و نمره تاریخ او ثبت شده است. در این جدول، جنسیت افراد که یک متغیر کیفی است؛ با کدهایی نشان داده شده است. اگر جنسیت به ترتیب دختر و پسر باشد، کدهای ۱ و ۲ را داریم. در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است. در کدام ستون این جدول، اشتباه رخ نداده است؟

- (۱) سن
 (۲) جنسیت
 (۳) متوسط ساعت ورزش در شبانه‌روز
 (۴) نمره تاریخ
- پاسخ: **گزینه ۴** با توجه به جدول، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: سن ۵۱ احتمالاً اشتباه تایپ شده است.

گزینه ۲: جنسیت ۳ نداریم و احتمالاً اشتباه تایپ شده است.

گزینه ۳: یک شبانه‌روز ۲۴ ساعت دارد، پس ۲۵ ساعت به نادرستی وارد شده است.

گزینه ۴: همه نمرات احتمالاً درست می‌باشند؛ زیرا نمرات داده شده بین ۰ تا ۲۰ قرار دارند و تقریباً یکنواخت هستند.

گام ۴: تحلیل داده‌ها

در این مرحله، داده‌ها تحلیل و نتایج ارائه می‌شوند. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش شاخص‌ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

تفسیر و نتیجه‌گیری از داده‌ها در گام بعدی انجام می‌شود.

برای توصیف داده‌های کمی باید هر دو شاخص مرکزی و پراکندگی گزارش شوند. شاخص‌های مرکزی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند تا بدانیم داده‌ها در کجا متمرکز هستند و شاخص‌های پراکندگی مانند دامنه، انحراف معیار و دامنه میان چارکی به ما کمک می‌کنند تا بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند.

اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود و بهتر است از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم.

مثال: سن و مدت زمان مطالعه درسی چند دانش آموز در جدول زیر آمده است. میانگین، میانه، انحراف معیار و دامنه میان چارگی را برای متغیر سن به دست آورید.

درس	۱۰	۱۲	۱۵	۵۱	۱۷	۲۱
مدت زمان مطالعه درسی	۱۱	۱۶	۴۱	۱۰	۱۲	۱۳

پاسخ:

الف) محاسبه میانگین:



اگر داده‌ها به صورت x_1, x_2, \dots, x_n باشد، آن‌ها را با هم جمع کرده و بر تعدادشان تقسیم می‌کنیم؛ یعنی از رابطه $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

استفاده می‌کنیم.

ب) محاسبه میانه:

۱) ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۲) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده میانی (وسطی)، میانه است.

۳) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده وسطی، میانه است.

ب) محاسبه انحراف معیار:

اگر n داده به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا مقدار میانگین و سپس با استفاده از رابطه زیر انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

$$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}}$$

ت) محاسبه دامنه میان چارگی:

ابتدا میانه را به دست می‌آوریم. سپس میانه نیمه اول داده‌ها و میانه نیمه دوم داده‌ها را به دست آورده و به ترتیب آن‌ها را Q_1 و Q_3 می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$IQR = Q_3 - Q_1 \quad (\text{دامنه میان چارگی})$$

$$\text{میانگین سن} = \frac{10 + 12 + 15 + 51 + 17 + 21}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

حال با توجه به یادآوری، مثال را حل می‌کنیم.

برای به دست آوردن میانه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۷، ۲۱، ۵۱

۱) داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$\text{میانه} = \frac{15 + 17}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

۲) تعداد داده‌ها زوج است. پس داریم:

همانطور که دیده می‌شود به دلیل داده دورافتاده ۵۱ که احتمالاً اشتباه تایپ شده است؛ مقدار میانگین برابر ۲۱ شده و ما را به اشتباه می‌اندازد ولی مقدار میانه که ۱۶ می‌باشد، خیلی واقعی‌تر است.

حال به سراغ محاسبه انحراف معیار و دامنه میان چارگی می‌رویم.

میانگین متغیر سن را در قسمت قبل به دست آوردیم و مقدار آن برابر ۲۱ شده است.

$$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\frac{(10-21)^2 + (12-21)^2 + (15-21)^2 + (51-21)^2 + (17-21)^2 + (21-21)^2}{6}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(-11)^2 + (-9)^2 + (-6)^2 + (30)^2 + (-4)^2 + 0}{6}} \Rightarrow \sqrt{\frac{121 + 81 + 36 + 900 + 16}{6}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1154}{6}} \approx 13.9$$

چون تعداد داده‌ها فرد است؛ برای به دست آوردن Q_2 ، داده وسطی را انتخاب می‌کنیم. پس داده ۱۶، میانه (Q_2) است.

$$10, 12, 15 \Rightarrow Q_1 = 12$$

حال میانه نیمه اول داده‌ها را به دست می‌آوریم:

چون سه داده داریم؛ داده ۱۲، Q_1 را نشان می‌دهد.

$$17, 21, 51 \Rightarrow Q_3 = 21$$

برای به دست آوردن میانه نیمه دوم داده‌ها، داده وسط را به عنوان Q_3 انتخاب می‌کنیم:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 21 - 12 = 9 \quad (\text{دامنه میان چارگی})$$

به دلیل پرت بودن داده‌ها، ۵۱ که دور افتاده است؛ انحراف معیار، پراکندگی بسیار زیادی را نشان می‌دهد ولی دامنه میان چارگی کمی واقعی‌تر است.

داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که

بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین و میله خطای روی آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

به اندازه انحراف معیار

به اندازه میانگین

مثال: داده‌های زیر، نمرات پانزده نفر از دانش‌آموزان یک کلاس می‌باشد. میانگین و انحراف معیار این نمرات را به دست آورید و سپس نمودار میانگین و انحراف معیار این داده‌ها را رسم کنید.

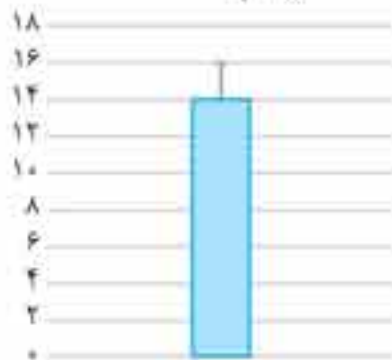
پاسخ: برای به دست آوردن میانگین، همه داده‌ها را جمع کرده و بر تعدادشان تقسیم می‌کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{210}{15} = 14$$

برای به دست آوردن انحراف معیار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{صورت کسر انحراف معیار} &= (17-14)^2 + (15-14)^2 + (13-14)^2 + (14-14)^2 + (12-14)^2 + (16-14)^2 + (15-14)^2 + (14-14)^2 \\ &+ (16-14)^2 + (15-14)^2 + (14-14)^2 + (14-14)^2 + (13-14)^2 + (12-14)^2 + (10-14)^2 = 46 \end{aligned}$$

$$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\frac{46}{15}} = 1.75$$



نمودار آن به صورت مقابل است:



مثال: فرض کنید در مطالعه‌ای برای کاهش درد افراد مورد مطالعه، آن‌ها را به صورت تصادفی به دو گروه تقسیم کردند و به یک گروه، دارویی گیاهی دادند و به گروه دیگر دارونما دادند. (دارونما در واقع اثر درمانی ندارد و از نظر ظاهری کاملاً شبیه داروی اصلی طراحی می‌شود تا اثر روانی دریافت دارو در دو گروه برابر باشد). میانگین و انحراف معیار «میزان کاهش درد» در دو گروه دارویی گیاهی و دارونما در نمودار زیر نشان داده شده است.

با توجه به نمودار بالا، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- الف) میزان درد افرادی که دارویی گیاهی دریافت کرده‌اند به صورت متوسط تقریباً چند واحد کاهش یافته است؟
- ب) انحراف معیار میزان کاهش درد در گروهی که دارونما دریافت کرده‌اند، تقریباً چقدر است؟
- پ) تغییرات کاهش درد در بین افراد کدام گروه بیشتر بوده است؟ چرا؟

پاسخ: الف) میانگین کاهش درد در افرادی که دارویی گیاهی دریافت کرده‌اند تقریباً ۲ واحد کاهش یافته است. ب) ۲

پ) در افرادی که دارونما مصرف کرده‌اند؛ تغییرات کاهش درد بیشتر بوده است.

اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، بهتر است به جای استفاده از میانگین و انحراف معیار که می‌توانند همراه‌کننده باشند، از نمودار جعبه‌ای استفاده شود.

نمودار جعبه‌ای

به میانه نیمه اول داده‌ها، چارک اول (Q_1) و به میانه نیمه دوم داده‌ها، چارک سوم (Q_3) و به خود میانه، چارک دوم (Q_2) گفته می‌شود.

روش رسم

برای به دست آوردن میانه، به تعداد داده‌ها دقت می‌کنیم:

- ۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسط، میانه (Q_2) است.
- ۲) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط، میانه (Q_2) است.

برای به دست آوردن میانه نیمه اول داده‌ها (Q_1) و میانه نیمه دوم داده‌ها (Q_3) مانند به دست آوردن Q_2 عمل می‌کنیم.

محل قرار گرفتن Q_2 ، بستگی به داده‌ها دارد و لزومی ندارد درست در وسط جعبه باشد.

تعداد داده‌ها در هر یک از چهار بازه برابر با $\frac{1}{4}$ یا ۲۵٪ است.



مثال: فرض کنید داده‌های زیر نمرات مرتب شده ادبیات یک کلاس ۲۵ نفره باشد. نمودار جعبه‌ای آن را رسم کنید.

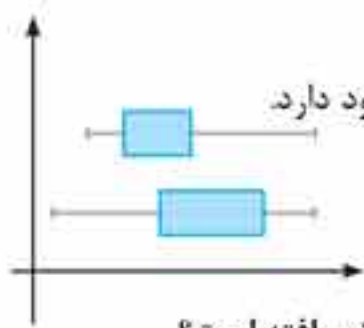
- ۵ ، ۱۱ ، ۱۱/۵ ، ۱۲/۵ ، ۱۲/۷۵ ، ۱۳/۲۵ ، ۱۴/۵ ، ۱۵/۵ ،
 ۱۶ ، ۱۶/۷۵ ، ۱۶/۷۵ ، ۱۶/۵ ، ۱۶/۵ ، ۱۶/۲۵ ، ۱۷/۷۵ ، ۱۷/۷۵ ،
 ۱۸ ، ۱۸/۵ ، ۱۸/۵ ، ۱۸/۷۵ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۱۹/۲۵ ، ۲۰

پاسخ: کمترین نمره، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار به ترتیب برابر است با: ۵، ۱۳، ۱۶/۵، ۱۸/۵ و ۲۰.

بنابراین نمودار جعبه‌ای این داده‌ها، به صورت زیر خواهد بود:



در این نمودار میانه برابر $۱۶/۵$ ، دامنه تغییرات ۱۵ (کوچکترین داده - بزرگترین داده $R =$) و دامنه میان چارکی $۵/۵$ است. مطابق تعریف چارک‌ها می‌دانیم تعداد دانش‌آموزان در بازه‌های ۵ تا ۱۳ ، ۱۳ تا $۱۶/۵$ ، $۱۶/۵$ تا $۱۸/۵$ و $۱۸/۵$ تا ۲۰ برابر است.



بنابراین نمرات دانش‌آموزان مثلاً در بازه $۱۶/۵$ تا $۱۸/۵$ فشرده‌تر و در بازه ۵ تا ۱۳ پراکنده‌تر بوده است.

با توجه به طول بازه ۵ تا ۱۳ می‌توان حدس زد که داده یا داده‌های دورافتاده‌ای متفاوت از مابقی داده‌ها در این بازه وجود دارد.

یکی از بهترین نمودارهایی که می‌تواند اطلاعات «متغیرهای کمی» را به خوبی نمایش دهد، نمودار جعبه‌ای است. از این نمودار برای مقایسه بین چند گروه از نظر تمرکز و پراکندگی داده‌ها استفاده می‌شود.

مثال: دو مدرسه داریم. مدرسه اول ۳۰۰ درصد قبولی‌هایش رشد کرده و مدرسه دوم ۵۰ درصد قبولی‌هایش افزایش یافته است؟

الف) کدام مدرسه برای تحصیل مناسب‌تر است؟

ب) اگر تعداد قبولی‌های مدرسه اول قبلاً یک نفر بوده و حالا ۴ نفر شده و مدرسه دوم ۲۰ نفر بوده و حالا ۳۰ نفر شده است، حال به نظر شما

کدام مدرسه مناسب‌تر است؟

پاسخ: الف) به نظر می‌رسد، مدرسه اول بهتر است.

ب) مدرسه دوم بهتر است؛ زیرا در متغیرهای کیفی ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد می‌تواند گمراه‌کننده باشد.



برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

(دقت کنید آمار، دروغ نمی‌گوید؛ بلکه با آمار خوب می‌توان دروغ گفت.)

گام ۵: بحث و نتیجه‌گیری

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم؛ بسیار مهم است و باید به‌طوری صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری به انجام این مطالعه بپردازند، با مشکلات مشابه مواجه نشوند.

اگر تمام افراد جامعه آماری را بررسی نکرده باشیم، نتایج ما قطعی نیست؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند.



اگر جامعه n عضو و نمونه r عضو داشته باشد، به تعداد $\binom{n}{r}$ نمونه می‌توان انتخاب کرد و در هر نمونه ممکن است نتایج متفاوتی به دست آید.

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

آمارگیران باید از اهداف کلی مطالعه باخبر باشند و یا فردی که داده‌ها را تحلیل و بررسی می‌کند، باید ویژگی‌های جامعه آماری با موضوع مورد بررسی را به خوبی بشناسد. اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمامی گام‌ها از دانش اهالی منطقه باید کمک بگیریم و دانش آن‌ها در اولویت قرار دارد. در غیر این صورت نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود.

کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه آمار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد شاخص‌های گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم اجرای گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.

در تمام گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، نیازمندیم مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آن‌ها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه موضوع مورد بررسی، ممکن نیست.



تست: در کدام مورد اجرای نادرست گام اول (بیان مسئله) رخ داده است؟

- ۱) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.
- ۲) مسئله به صورتی بیان شده که اجراکنندگان، برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.
- ۳) تمامی داده‌های دورافتاده، حذف شده‌اند.
- ۴) تفسیر نتایج فقط توسط افراد متخصص آمار انجام شده است.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



گزینه «۱»: در اجرای گام دوم (طرح و برنامه‌ریزی) اشتباه رخ داده است.

گزینه «۲»: در اجرای گام اول (بیان مسئله) اشتباه رخ داده است.

گزینه «۳»: در اجرای گام سوم (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها) اشتباه رخ داده است.

گزینه «۴»: در اجرای گام پنجم (بحث و نتیجه‌گیری) اشتباه رخ داده است.

مثال: با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محل زیست در یک کلاس ۲۸ نفره و با انتخاب یک نمونه ۹ نفره، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) در هفته گذشته با کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اید؟

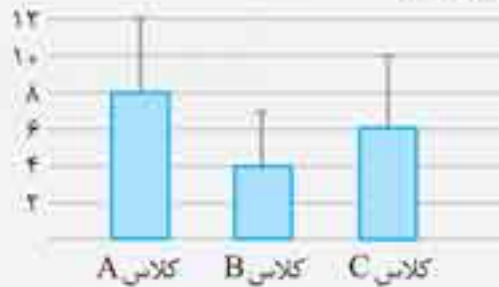
- (۱) پیاده یا دوچرخه
 - (۲) با وسایل حمل و نقل عمومی (۳) با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی
- ب) سپس در این مطالعه جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.
- پ) متغیر مورد بررسی و نوع متغیر و مقیاس اندازه‌گیری را مشخص کنید.

پاسخ: الف) هر یک از دانش‌آموزان با یکی از حالت‌های ذکر شده به مدرسه آمده‌اند.

ب) جامعه، دانش‌آموزان یک کلاس و نمونه، ۹ نفر از آن‌ها هستند؛ پس اندازه جامعه ۲۸ و اندازه نمونه ۹ می‌باشد.

پ) متغیر مورد بررسی، شیوه‌های حمل و نقل دانش‌آموزان، نوع متغیر، کیفی اسمی و مقیاس اندازه‌گیری آن، نفر است.

تست: ساعت خواب سه کلاس در نمودار زیر آمده است. کلاسی که بیشترین میانگین را دارد، کدام است؟



(۱) ۱/۵

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۱/۷

پاسخ: **گزینه ۲**

با توجه به نمودار، کلاس A بیشترین میانگین را دارد و انحراف معیار، میله بالای آن می‌باشد. انحراف معیار آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۱۲ - ۸ = ۴$$



مثال: نمودار میله‌ای عضوهای یک کتابخانه از دو سال قبل تاکنون به صورت زیر است:

الف) این کتابخانه سالانه چند عضو می‌پذیرد؟

ب) نمودار دایره‌ای پارسال را رسم کنید.

پاسخ:

الف) با توجه به نمودار مقابل، این کتابخانه سالانه ۸۰ عضو داشته است.

ب) پارسال، ۵۰ نفر از دانش‌آموزان مدرسه و ۳۰ نفر از سایر اعضا در کتابخانه عضو بوده‌اند؛ پس کل اعضا

برابر است با: $۳۰ + ۵۰ = ۸۰$. حال $\frac{۵۰}{۸۰}$ یعنی $\frac{۵}{۸}$ دایره را برای دانش‌آموزان و $\frac{۳۰}{۸۰}$ یعنی $\frac{۳}{۸}$ دایره را برای

سایر اعضا در نظر می‌گیریم.

سایر اعضا ■ دانش‌آموزان مدرسه ■



سایر اعضا ■ دانش‌آموزان مدرسه ■

برای رسم نمودار دایره‌ای، از نسبت $\frac{\text{تعداد مطلوب}}{\text{تعداد کل}}$ استفاده می‌کنیم. این نسبت، سهمی از دایره را نشان می‌دهد که مربوط به آن بخش است.



تست: در یک نمودار دایره‌ای، بازدیدکنندگان از سالن نمایش در گروه‌های مختلف سنی، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی زیر ۲۰ سال و ۹۰ درجه

مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و مابقی مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است. چند درصد از افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال، سن دارند؟

(۴) ۷۰

(۳) ۶۰

(۲) ۵۰

(۱) ۴۰

پاسخ: **گزینه ۳**

روش اول

۱) برای به دست آوردن زاویه در نمودار دایره‌ای از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم: $\text{زاویه در نمودار دایره‌ای بر حسب درجه} = \frac{\text{تعداد افراد آن گروه}}{\text{تعداد کل افراد}} \times ۳۶۰$

۲) برای یافتن درصد یک گروه از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم: $\text{درصد یک گروه} = \frac{\text{تعداد افراد گروه}}{\text{تعداد افراد کل}} \times ۱۰۰$

کل نمودار دایره‌ای ۳۶۰ درجه است، داریم:

$$۲۱۶^\circ = \frac{\text{تعداد افراد گروه}}{\text{تعداد افراد کل}} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{\text{تعداد افراد گروه}}{\text{تعداد افراد کل}} = \frac{۲۱۶}{۳۶۰}$$

$$\text{درصد گروه ۴۰ تا ۶۰ سال} = \frac{\text{تعداد افراد گروه}}{\text{تعداد افراد کل}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۱۶}{۳۶۰} \times ۱۰۰ = ۶۰$$

روش دوم

۱) اگر زاویه در نمودار دایره‌ای را داشته باشیم، برای به دست آوردن درصد، کافی است، زاویه بر حسب درجه را بر $\frac{۳}{۶}$ تقسیم کنیم.

۲) اگر درصد را داشته باشیم، برای به دست آوردن زاویه، در نمودار دایره‌ای درصد را در $\frac{۳}{۶}$ ضرب می‌کنیم.

$$\text{درصد} = \frac{\text{زاویه در نمودار دایره‌ای}}{\frac{۳}{۶}} = \frac{۲۱۶}{\frac{۳}{۶}} = ۶۰$$



درس در یک نگاه



حل مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های زیر می‌باشد:

- ۱ بیان مسئله
- ۲ طرح و برنامه‌ریزی
- ۳ گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها
- ۴ تحلیل داده‌ها
- ۵ بحث و نتیجه‌گیری

گام اول: بیان مسئله

طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام در رسیدن به پاسخ درست است. ابتدا مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد، به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم. با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود کنیم و هدف مطالعه را مشخص نماییم.

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. سپس راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم. در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم؛ اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.

گام سوم: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباهات را تصحیح کرد.

گام چهارم: تحلیل داده‌ها

منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش شاخص‌ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است و تفسیر و نتیجه‌گیری در گام آخر انجام می‌شود. با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم؛ نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی داده‌ها گزارش می‌کنیم. برای توصیف داده‌های کمی باید هر دو شاخص مرکزی و پراکندگی گزارش شوند.

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری

به تفسیر نتایج به دست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم. اگر به تمامی نکات نمونه‌گیری توجه و با روش‌های مناسبی داده‌ها را تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم.

هر چه تعداد اعضای جامعه بزرگ‌تر و یا پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم است.

مانند دامنه، انحراف معیار و دامنه میان چارکی به ما کمک می‌کند تا بدانیم داده‌ها در کجا متمرکز هستند و شاخص‌های پراکندگی



مانند دامنه، انحراف معیار و دامنه میان چارکی به ما کمک می‌کند تا بدانیم داده‌ها چگونه مترکم یا پراکنده شده‌اند. اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، بهتر است به جای میانگین و انحراف معیار از شاخص‌های میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم. در داده‌های که میانگین و انحراف معیار، شاخص مناسبی برای توصیف داده‌ها هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل نشان‌دهنده میانگین و میله خطی روی آن به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، بهتر است به جای نمودار فوق از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم.

اگر تمام افراد جامعه آماری را بررسی نکرده باشیم، نتایج ما قطعی نیست و در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج دیگری به دست می‌آید.

اگر جامعه‌ای n عضو و نمونه r عضو داشته باشد، به تعداد $\binom{n}{r}$ نمونه می‌توان انتخاب کرد. در هر نمونه ممکن است نتایج متفاوتی به دست آید.





پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام‌های چرخه آمار



(مشابه کتاب درسی)

۲۱۴. گام‌های حل مسئله‌های مرتبط با آمار به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

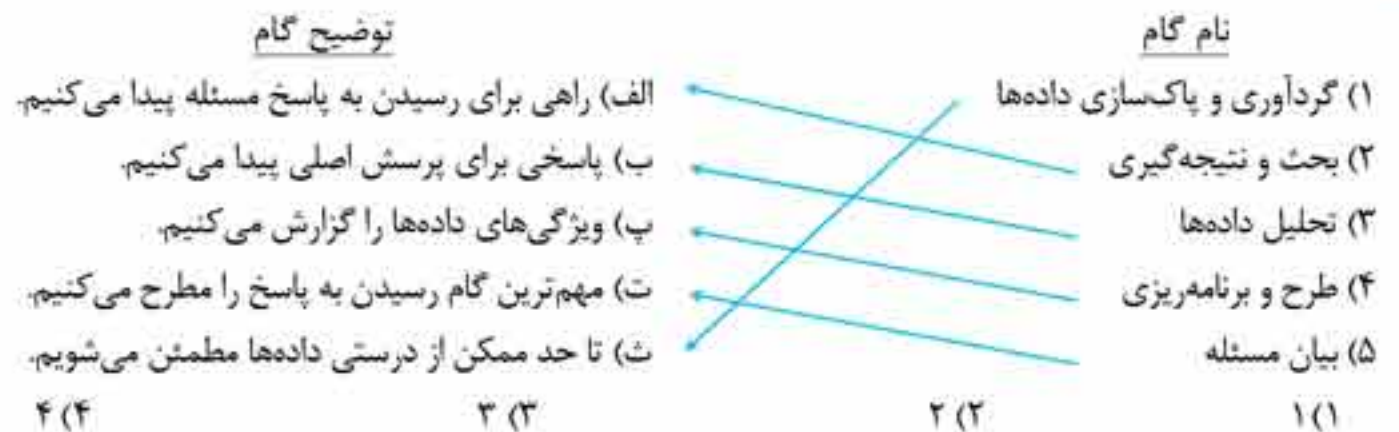
- (۱) بیان مسئله - طرح و برنامه‌ریزی - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - تحلیل داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری
- (۲) بیان مسئله - طرح و برنامه‌ریزی - تحلیل داده‌ها - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری
- (۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - بیان مسئله - تحلیل داده‌ها - طرح و برنامه‌ریزی - بحث و نتیجه‌گیری
- (۴) طرح و برنامه‌ریزی - بیان مسئله - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری - تحلیل داده‌ها

۲۱۵. پس از انجام تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد مختلف مسئله و براساس و به دست آمده، یک مسئله جدید شکل می‌گیرد.

(مشابه کتاب درسی)

- (۱) همیشه - نتایج - تجربه - منطقی
- (۲) اغلب - جمع‌بندی - نتایج - دقیق‌تر
- (۳) همیشه - جمع‌بندی - نتایج - منطقی
- (۴) اغلب - نتایج - تجربه - دقیق‌تر

۲۱۶. چه تعداد از فلش‌های زیر، درست رسم شده‌اند؟



گام‌های ۱، ۲ و ۳



۲۱۷. مهم‌ترین گام برای رسیدن به پاسخ کدام است؟

- (۱) گردآوری داده‌ها
- (۲) اندازه‌گیری یا سنجش
- (۳) طرح یک پرسش دقیق و شفاف
- (۴) تحلیل داده‌ها

(مشابه کتاب درسی)

۲۱۸. چه تعداد از موارد زیر مربوط به بیان مسئله است؟

- (الف) طرح یک پرسش دقیق و شفاف
 - (ب) مسئله به درستی درک شود و سپس حدوداً تعریف و بیان شود.
 - (پ) کل جامعه آماری را در نظر می‌گیریم و هدف مطالعه را مشخص می‌کنیم.
 - (ت) مشورت با کارشناسان حوزه مورد نظر در بیان مسئله تأثیر ندارد.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۱۹. چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- (الف) طرح پرسش‌های دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.
 - (ب) بعد از طرح پرسش، باید مسئله را به درستی درک کنیم.
 - (پ) با توجه به اهداف مورد نظر، کل جامعه آماری را بررسی می‌کنیم.
 - (ت) عوامل تأثیرگذار در بیان مسئله میزان فعالیت بدنی افراد می‌توانند سن، محل سکونت، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی و یا توانایی‌ها یا ناتوانی‌های جسمانی باشند.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲۰. اولین قدم برای یافتن داده و بررسی متغیر مورد نظر کدام است؟

- (۱) بیان مسئله
- (۲) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها
- (۳) تحلیل داده‌ها
- (۴) اندازه‌گیری یا سنجش

(مشابه کتاب درسی)

۲۲۱. در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات را تا حد ممکن به اطلاعات تبدیل کنیم.

(۱) عددی - توصیفی (۲) کمی - توصیفی (۳) کیفی - کمی (۴) عددی - کیفی

۲۲۲. چه تعداد از موارد زیر در مورد طرح و برنامه‌ریزی درست نیست؟

الف) اندازه‌گیری یا سنجش کاری کاملاً ساده است.

ب) با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توان فهمید که حضور افراد متخصص در تیم هدایت‌کننده پژوهش چقدر حیاتی است.

پ) در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم: اطلاعات توصیفی (کیفی) را به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.

ت) در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق در مورد چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای موردنظر، درباره چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲۳. چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟

الف) تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم.

ب) هر چه اندازه جامعه بزرگ‌تر باشد، برای آن که نمونه بتواند به خوبی بیانگر ویژگی‌های جامعه باشد؛ اندازه نمونه کوچک‌تری لازم است.

پ) هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از حضور تنوع در جامعه، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم است.

ت) در گام دوم (طرح برنامه‌ریزی)، متخصصین، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه را طوری می‌کنند که بتوانیم همان متغیری را اندازه بگیریم که مورد نظر ما می‌باشد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲۴. در کدام یک از گزینه‌های زیر به اندازه نمونه بزرگ‌تری برای بررسی آن نیاز است؟

(۱) سن دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

(۲) معدل سال گذشته دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

(۳) بررسی میانگین ساعت‌های مطالعه آزاد هفتگی دانش‌آموزان یک مدرسه

(۴) بررسی میانگین ساعت‌های مطالعه آزاد هفتگی دبیران یک مدرسه

۲۲۵. در کدام یک از حالات زیر به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم؟

(۱) میزان تحصیلات مردم در دنیا (۲) میزان خوشحالی افراد یک خانوار

(۳) مقایسه توسعه زندگی مردم در سراسر دنیا (۴) سن افراد یک جامعه

(مشابه کتاب درسی)

۲۲۶. چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

الف) در هر مطالعه اکثراً در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ می‌دهد.

ب) با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان اکثر اشتباهات را تصحیح کرد.

پ) منظور از تحلیل داده‌ها در گام چهارم صرفاً گزارش شاخص‌ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

ت) برای توصیف داده‌های کیفی باید هر دو شاخص مرکزی و پراکندگی گزارش شوند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

گام ۴



۲۲۷. برای توصیف داده‌های (..... یا)، گزارش باید همیشه با گزارش همراه باشد.

(۱) کیفی - اسمی - ترتیبی - درصد - تعداد (۲) کمی - اسمی - ترتیبی - درصد - تعداد

(۳) کمی - فاصله‌ای - نسبی - تعداد - درصد (۴) کیفی - اسمی - ترتیبی - تعداد - درصد

۲۲۸. از بین اعداد زیر، کدام یک بهتر است با نمودار جعبه‌ای نشان داده شود؟

الف) ۱، ۳، ۶، ۷، ۱۰، ۱۵ (ب) ۱، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۸۰، -۷۳

پ) ۳، ۱، ۱۵، ۲۰، ۲۷، ۳۳ (ت) ۱۰۰، -۵، ۲، ۳، ۵، ۷

۱ (۱) ت (۲) الف و ب (۳) ب و پ و ت (۴) ب و ت

۲۲۹. اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم تنها به نمایش و بسنده کنیم. زیرا گزارش می‌تواند

(مشابه کتاب درسی)

گمراه‌کننده باشد؛ در این موارد از نمودار استفاده کنیم.

(۱) میانه - انحراف معیار - میانگین - جعبه‌ای (۲) میانگین - دامنه تغییرات - میانه - میله‌ای

(۳) میانگین - انحراف معیار - میانگین - جعبه‌ای (۴) انحراف معیار - میانگین - دامنه میان چارکی - میله‌ای



۲۳۰. در کدام یک از گزینه‌های زیر، به ترتیب شاخص‌های مرکزی، پراکندگی، پراکندگی، مرکزی و پراکندگی آمده است؟

- (۱) میانگین - دامنه میان چارکی - دامنه تغییرات - انحراف معیار - میانه
- (۲) انحراف معیار - دامنه تغییرات - میانگین - دامنه میان چارکی - میانه
- (۳) میانه - دامنه میان چارکی - انحراف معیار - میانگین - دامنه تغییرات
- (۴) دامنه تغییرات - انحراف معیار - میانگین - میانه - دامنه میان چارکی

(مشابه کتاب درسی)

۲۳۱. میانگین داده‌های ۶, ۶, ۱۷, ۷, ۷, ۸, ۱۲, ... کدام است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰

۲۳۲. در یک امتحان ریاضی، نمرات ۱۵ نفر به صورت زیر می‌باشد. میانه این نمرات کدام است؟

۴, ۷, ۷, ۳, ۱۲, ۱۱, ۱۷, ۱۵, ۱۴, ۱۷, ۱۹, ۱۴, ۱۰, ۹, ۵

- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۰/۵
- (۳) ۱۱
- (۴) ۱۱/۵

۲۳۳. در داده‌های آماری ۱۰, ۱۹, ۱۵, ۱۵, ۱۷, ۷, ۱۳, ۱۵, ۱۴, ۵, ۹, ۱۶, ... تفاضل میانه از میانگین جامعه کدام است؟

- (۱) ۰/۲۵
- (۲) ۰/۷۵
- (۳) ۰/۲۵
- (۴) ۰/۷۵

۲۳۴. میانه یک مجموعه از داده‌های مرتب‌شده، برابر میانگین چهارمین و پنجمین داده و مجموع کل داده‌ها مساوی با ۳۶۰ است. میانگین کل داده‌ها چه قدر است؟

- (۱) ۳۰
- (۲) ۴۰
- (۳) ۴۵
- (۴) ۳۶

۲۳۵. مجموع هفت عدد متوالی ۴۷ است. اگر میانگین این اعداد منهای میانه شود، حاصل کدام خواهد بود؟

- (۱) ۷۳/۵
- (۲) ۲۱
- (۳) صفر
- (۴) نمی‌توان تعیین کرد

(انسانی خارج ۹۱)

۲۳۶. اگر میانگین ۱۰ داده آماری ۱۶, ۱۱, ۱۷, ۱۰, ۸, ۱۰, ۱۳, ۱۷, ۹, ۱۶ برابر ۱۳/۱ باشد، میانه کدام است؟

- (۱) ۱۱/۵
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۲/۵
- (۴) ۱۳

۲۳۷. دامنه تغییرات داده‌های ۲۸, ۳۰, ۳۱, ۳۱, ۳۱, ۴۸, ۳۸, ۴۰, ۴۳ کدام است؟

- (۱) ۱۵
- (۲) ۱۰
- (۳) ۲۰
- (۴) ۱۲

۲۳۸. کدام یک از گزینه‌های زیر، دامنه تغییرات بیشتری دارند؟

- (۱) سن دانشجویان ورودی ۹۷ دانشکده حقوق
- (۲) درآمد صنایع مختلف در ایران
- (۳) قد والیبالیست‌های ایرانی
- (۴) وزن کشتی‌کاران در دسته سنگین وزنان

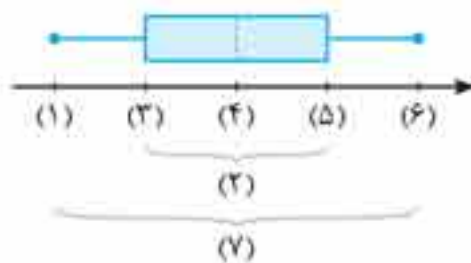
۲۳۹. اگر داده‌های ۱۰۰, ۹۰, ۸۰, ۱۲۰, ۱۴۰, ۸۵ را داشته باشیم، مقادیر Q_1, Q_2, Q_3 به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ - ۹۰ - ۸۵
- (۲) ۱۲۰ - ۸۵ - ۹۵
- (۳) ۱۲۰ - ۹۵ - ۸۵
- (۴) ۱۲۰ - ۹۵ - ۸۰

۲۴۰. در داده‌های ۵۵, ۷۳, ۲۸, ۶۵, ۸۰, ۹۰, ... دامنه میان چارکی کدام است؟

- (۱) ۲۵
- (۲) ۱۲/۵
- (۳) ۴۰
- (۴) ۵۰

۲۴۱. در نمودار جعبه‌ای زیر، کدام گزینه به درستی اعداد مشخص شده را نشان می‌دهد؟



- (۱) کوچک‌ترین داده - دامنه میان چارکی - چارک اول - میانه - بیشترین داده - چارک سوم - دامنه تغییرات
- (۲) کوچک‌ترین داده - دامنه میان چارکی - چارک اول - میانه - چارک سوم - بیشترین داده - دامنه تغییرات
- (۳) چارک اول - دامنه تغییرات - چارک اول - چارک دوم - چارک سوم - دامنه تغییرات - بیشترین داده
- (۴) کوچک‌ترین داده - دامنه میان چارکی - چارک سوم - میانه - چارک اول - دامنه تغییرات - بیشترین داده

۲۴۲. در نمودار جعبه‌ای داده‌های آماری ۸, ۷, ۲۱, ۱۹, ۵, ۱۰, ۱۲, ۹, ۱۷, ۱۴, ۱۶, ۲۳, ۲۰, ۱۸, ... دامنه تغییرات داخل جعبه کدام است؟

- (۱) ۸
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳

۲۴۳. در نمودار جعبه‌ای داده‌های آماری ۲, ۸, ۷, ۸, ۵, ۱۰, ۳, ۷, ۶, ... میانگین داده‌های داخل جعبه چه قدر از چارک دوم کمتر است؟

- (۱) ۱/۵
- (۲) ۰/۵
- (۳) ۲
- (۴) ۰/۴

۲۴۴. واریانس داده‌های آماری ۹, ۱۲, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۰, ۷, ۱۲, ... کدام است؟

- (۱) ۱/۷۵
- (۲) ۲
- (۳) ۲/۲۵
- (۴) ۲/۵

۲۴۵. انحراف معیار داده‌های آماری ۲۰, ۱۸, ۱۶, ۱۶, ۱۵, ... کدام است؟

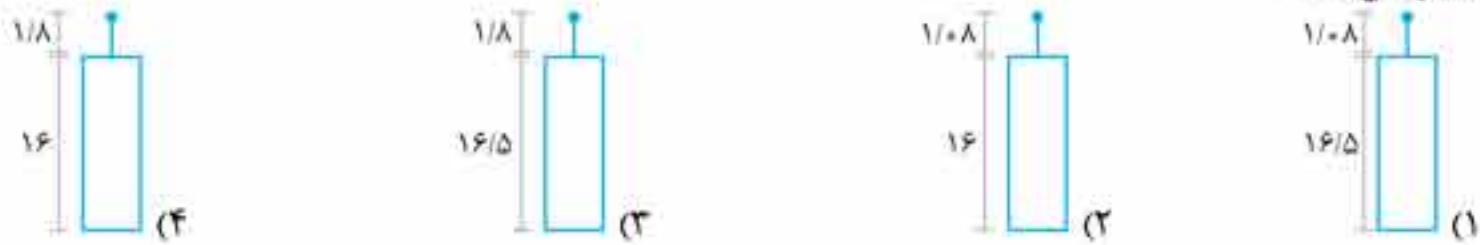
- (۱) ۱
- (۲) ۱/۲
- (۳) $\sqrt{۳}$
- (۴) $\sqrt{۳/۲}$

۲۴۶. در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف داده‌ها هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده و میله‌ی خطای آن، به اندازه روی مستطیل بالا آمده باشد.

(مشابه کتاب درسی)

- (۱) میانه - دامنه تغییرات
- (۲) میانگین - دامنه میان چارکی
- (۳) دامنه میان چارکی - انحراف معیار
- (۴) میانگین - انحراف معیار

۲۴۷. سن دانش آموزان در یک بازی فوتبال به صورت ۱۶, ۱۷, ۱۵, ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۵, ۱۸ است. کدام یک از نمودارهای زیر، نشان دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟



۲۴۸. کدام شاخص آماری داده‌های ۸, ۹, ۵, ۷, ۱ با هم برابرند؟

- (۱) میانگین و واریانس
- (۲) دامنه تغییرات و انحراف معیار
- (۳) میانگین و انحراف معیار
- (۴) واریانس و دامنه تغییرات

۲۴۹. اگر داده‌های آماری با یکدیگر برابر باشند، کدام یک از شاخص‌های زیر با هم برابرند؟

- (۱) میانگین - انحراف معیار (۲) انحراف معیار - میانه
- (۳) میانگین - واریانس
- (۴) واریانس - دامنه تغییرات

۲۵۰. داده‌های مقابل مفروض است:

کدام چهار داده زیر را به اعداد بالا اضافه کنیم تا میانگین داده‌های جدید بیشتر از حالت اول شود اما میانه، چارک اول و چارک سوم تغییر نکند؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۲۱-۱۷-۱۳-۹
- (۲) ۱۹-۱۵-۱۱-۵
- (۳) ۱۷-۱۵-۱۳-۷
- (۴) ۱۸-۱۷-۱۱-۸

۲۵۱. مطابق داده‌های تست قبل با اضافه کردن کدام دو عدد زیر، میانگین تقریباً ثابت و میانه ثابت می‌ماند؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- (۱) ۱۱-۵
- (۲) ۲۱-۱۳
- (۳) ۱۴-۱۱
- (۴) ۱۵-۱۰

۲۵۲. پنج داده ۱۶, ۱۹, ۱۵, ۱۷ مفروض است. با اضافه کردن کدام دو عدد زیر به پنج داده مذکور، انحراف معیار بیشترین مقدار بین گزینه‌ها می‌باشد اما میانه تغییری نمی‌کند؟

- (۱) ۱۸-۱۱
- (۲) ۱۴-۱۳
- (۳) ۲۷-۱۶
- (۴) ۲۱-۱۸

گام ۵



۲۵۳. چه تعداد از موارد زیر در مورد بحث و نتیجه‌گیری درست است؟

- (الف) در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است.
- (ب) روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام مطالعه‌ای در این زمینه داشتند با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند.
- (پ) ارائه پیشنهادهای ما معمولاً به این افراد کمک می‌کند.
- (ت) اگر به تمامی نکات نمونه‌گیری توجه و با روش‌های مناسبی داده‌ها را تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را به هر جامعه آماری تعمیم دهیم.

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۵۴. چه تعداد از موارد زیر، درست هستند؟

(الف) از جامعه‌ای با اندازه N به $\binom{N}{n}$ طریق می‌توان نمونه‌هایی با اندازه n انتخاب کرد.

- (ب) در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، نیازمندیم مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آن‌ها را خوب بشناسیم.
- (ج) چنانچه آمارگیر از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشد یا ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد؛ حتی در صورت عملکرد فردی خوب، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود.
- (د) کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه آمار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد.

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

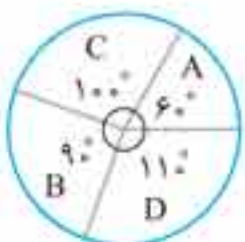
۲۵۵. از جامعه‌ای با اندازه ۱۰۰ به چند طریق می‌توان نمونه‌هایی با اندازه ۳ داشت؟

- (۱) ۱۶۱۷۰
- (۲) ۱۶۷۱۰۰
- (۳) ۱۶۷۱۰
- (۴) ۱۶۱۷۰۰

نمودار و تحلیل آن



۲۵۶. اگر نمودار زیر ۶۰۰۰۰ نفر را در گروه‌های سنی A, B, C و D نشان دهد، چند نفر در گروه سنی A قرار دارند؟



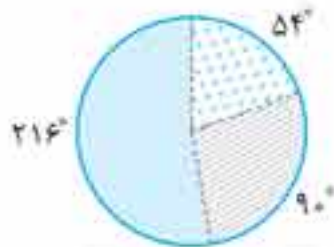
- (۱) ۱۰۰۰
- (۲) ۶۰۰۰
- (۳) ۱۰۰۰۰
- (۴) ۱۵۰۰۰

۲۵۷. در یک شرکت دارویی، جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره‌ای نشان می‌دهیم. زاویه مربوط به کارکنان ارشد، چند درجه است؟

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکترای
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

۱۰۵° (۴) ۹۶° (۳) ۹۳° (۲) ۸۴° (۱)

۲۵۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های مختلف سنی در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. چند درصد افراد

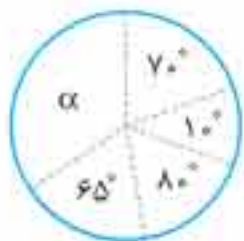


□ ۶۰ تا ۴۰ سال □ ۲۰ تا ۴۰ سال □ زیر ۲۰ سال

بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

- ۴۰ (۱)
- ۵۰ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۷۰ (۴)

۲۵۹. افراد یک جامعه به ۵ گروه سنی تقسیم شده‌اند که نمودار دایره‌ای آن‌ها با زاویه مرکزی برحسب درجه رسم شده است. گروه سنی با زاویه

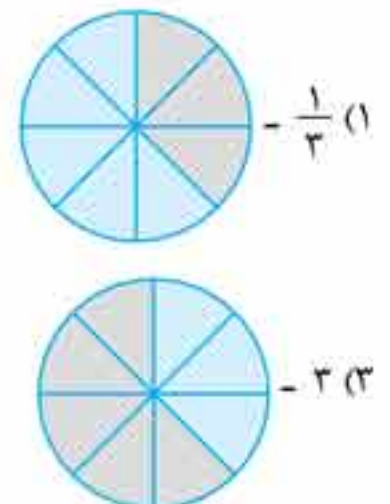
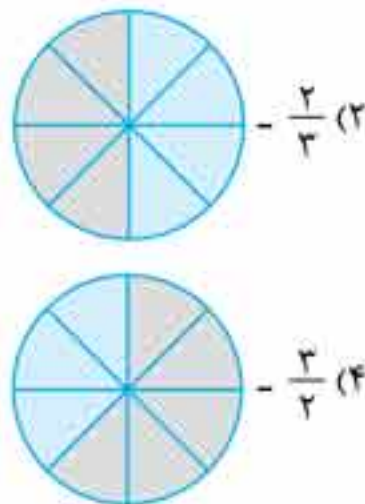
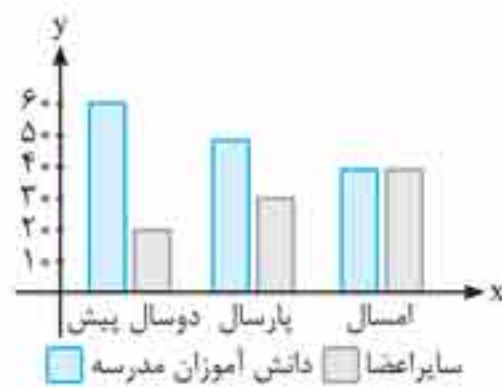


مرکزی α ، شامل چند درصد این جامعه است؟

- ۳۳/۵ (۲)
- ۳۷/۵ (۴)
- ۲۳ (۱)
- ۳۶ (۳)

۲۶۰. مطابق نمودار میله‌ای زیر، پیش‌بینی می‌کنیم در دو سال بعد تعداد دانش‌آموزان مدرسه که عضو کتاب‌خانه می‌شوند، چند برابر سایر افرادی

است که عضو کتاب‌خانه نمی‌شوند و همچنین نمودار دایره‌ای این دو گروه در سال بعد چگونه است؟



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۶۱. نمودار جعبه‌ای ۳ کلاس به صورت زیر است. وضعیت درسی کدام کلاس بهتر است؟



- A (۱)
- B (۲)
- C (۳)

(۴) نمی‌توان گفت

(۴) نمی‌توان گفت

۲۶۲. در تست قبل، سطح درسی دانش‌آموزان کدام کلاس به هم نزدیک‌تر است؟

- C (۳)
- B (۲)
- A (۱)

برای ۱۰۰٪

۲۶۳. اگر اعداد ۱، ۵، ۷، ۸، ۹ را در عدد ۱۹- ضرب و با عدد ۲۷ جمع کنیم، انحراف معیار حالت دوم چند برابر واریانس حالت اول است؟

- ۲/۳۷۵√۸ (۴)
- ۲/۵۳۷√۸ (۳)
- ۲۳/۷۵√۸ (۲)
- ۲/۷۳۵√۸ (۱)

۲۶۴. واریانس ۱۱ داده آماری برابر صفر است. اگر داده‌های ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند. انحراف معیار ۱۴

داده حاصل کدام است؟

- ۲ (۴)
- ۱/۵ (۳)
- ۱/۲۵ (۲)
- ۰/۷۵ (۱)

۲۶۵. داده‌های آماری ۱۸، ۷، ۲۰، ۱۶، ۱۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۲۱، ۱۲، ۱۳ را به نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

- (۱) ۴/۵۹ (۲) ۴/۹۵ (۳) ۵/۲۴ (۴) ۵/۷۱

۲۶۶. اگر $f(x) = (2x - 1)^2$ باشد، میانگین $f(1), f(2), \dots, f(20)$ کدام است؟

- (۱) ۴۹۳ (۲) ۵۱۳ (۳) ۵۲۳ (۴) ۵۳۳

۲۶۷. اگر میانگین اعداد x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۲۵ باشد، میانگین اعداد $-\frac{1}{4}x_1 + 3, -\frac{1}{4}x_2 + 3, \dots, -\frac{1}{4}x_n + 3$ کدام است؟

- (۱) ۸/۵ (۲) -۸/۵ (۳) ۹/۵ (۴) -۹/۵

$$A = \{15, 14, 15, 16, 17, 19\}$$

۲۶۸. مجموعه اعداد A و B به صورت زیر است. واریانس کدام یک بزرگ‌تر است؟

$$B = \{16, 14, 17, 14, 17, 18\}$$

- (۱) A (۲) B (۳) یکسان (۴) غیرقابل پیش‌بینی

۲۶۹. مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌ها برابر ۳۴۰ می‌باشد. انحراف معیار کدام است؟

- (۱) ۱/۲۵ (۲) ۱/۵ (۳) ۲/۲۵ (۴) ۲/۵

۲۷۰. میانگین و واریانس ۲۹ داده آماری به ترتیب ۱۷ و ۵ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۲، ۱۳، ۲۱ و ۲۲ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

(انسالی ۹۶)

- (۱) ۲/۵۲ (۲) ۲/۵۴ (۳) ۲/۶۴ (۴) ۲/۶۶

۲۷۱. میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده آماری به ترتیب ۱۶ و ۲ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۷، ۲۰ و ۱۱ به آن‌ها افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده حاصل کدام است؟

(انسالی خارج ۹۶)

- (۱) ۴/۸ (۲) ۴/۹ (۳) ۵/۱ (۴) ۵/۲

۲۷۲. میانگین چند داده برابر ۵۷ است. ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم و سپس داده‌های حاصل را سه برابر کرده‌ایم. میانگین داده‌های نهایی کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۷۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۵۹

آزمون‌های درس

۱ آزمون اول

۱. واژه‌های «روش نمونه‌گیری»، «شاخص‌ها»، «ایده‌های جدید»، «سازماندهی» به ترتیب مرتبط با کدام گام‌های حل مسئله‌های مرتبط با آمار است؟

(۱) تحلیل داده‌ها - داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری تفسیر نتایج - طرح و برنامه‌ریزی

(۲) طرح و برنامه‌ریزی - تحلیل داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری تفسیر نتایج - داده‌ها

(۳) تحلیل داده‌ها - داده‌ها - طرح و برنامه‌ریزی - بحث و نتیجه‌گیری تفسیر نتایج

(۴) طرح و برنامه‌ریزی - تحلیل داده‌ها - داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری تفسیر نتایج

۲. در گام‌های مسائل مرتبط با آمار، مرحله بعد از روش نمونه‌گیری و مرحله قبل از جدول‌ها است.

(۱) مرتب کردن داده‌ها - پاک‌سازی (۲) پاک‌سازی - روش کار

(۳) نتیجه‌گیری - گردآوری (۴) سازماندهی - پاک‌سازی

۳. کدام یک از گزینه‌های زیر به ترتیب مرتبط با گام‌های سوم، پنجم و اول است؟

(۱) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - ایده‌های جدید - نقد و بررسی

(۲) شیوه اندازه‌گیری - طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.

(۳) اشتباه در ثبت داده‌ها - در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم - محدودیت جامعه آماری

(۴) سعی در تبدیل اطلاعات کیفی به کمی - چگونگی نمونه‌گیری و شیوه تحلیل داده‌ها - سازماندهی

۴. اگر به کتابخانه‌ای برویم و از نوجوانان بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، بزرگ‌تر از می‌شود، چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند در نظر گرفته نشده‌اند.

(۱) میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آماره نمونه) - میانگین آن در جامعه آماری (آماره جامعه)

(۲) میانگین آن در جامعه آماری (آماره جامعه) - میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (پارامتر نمونه)

(۳) میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آماره نمونه) - میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه)

(۴) میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) - میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آماره نمونه)

۵. در داده‌های جدول زیر، بخشی از داده‌های یک پروژه دانش‌آموزی است که برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. همچنین در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است. در مقادیر داده‌شده چند اشتباه مشاهده می‌کنید؟ (هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است.)

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش‌آموز	۱
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱۴	۲
۱۴	۰	۱	۲	۱۵	۵	۳
۱۵	۳	۲	۱	۱۴	۱	۴
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴۵	۵
۱۷	۴۴	۲	۲	۵۱	۲	۶
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۱۷	۷
	۱۹	۷	۳	۱۵	۱۹	۸
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۳۴	۹
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۵۲	۱۰

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۶. میانگین مجموعه A از میانگین مجموعه B و انحراف معیار مجموعه B از انحراف معیار مجموعه A بیشتر است. کدام یک از گزینه‌های زیر به درستی نمایش داده شده‌اند؟



۷. در داده‌های ۱۸، ۱۴، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۱۵، ۱۴، ۱۲، ۲۶، ۲۱، ۲۰، ۳۵، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم کدام است؟

۱۸ / ۷۵ (۴)

۱۸ / ۶۶ (۳)

۱۸ / ۳۳ (۲)

۱۸ / ۲۵ (۱)

۸. اگر داده‌های آماری ۱۴، ۱۸، ۱۵، ۱۲، ۱۱، ۹، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۵، ۱۱ را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، انحراف معیار داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

۱ / ۷ (۴)

۱ / ۶ (۳)

۱ / ۵ (۲)

۱ / ۱ (۱)

۹. نمودار دایره‌ای زیر، تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز را نشان می‌دهد. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها دارای گروه خونی B هستند؟



۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

۴۰ (۴)

۳۶ (۳)

۱۰. در داده‌های ۰۰، ۱، ۴، ۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۲، ۲۵، ۲۷، ۳۰، ۳۲، ۴۵، ۵۴، ۵۵، ۶۰ با حذف داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و بزرگ‌تر از چارک سوم، دامنه تغییرات چه قدر کاهش می‌یابد؟

۴۸ (۴)

۴۷ (۳)

۴۶ (۲)

۴۵ (۱)

آزمون دوم

۱. هنگامی که براساس داده‌های یک برای نتیجه‌گیری می‌کنیم: اصطلاحاً می‌گوییم نتایج را داده‌ایم

(۱) نمونه آماری - هر جامعه آماری - تعمیم

(۲) نمونه آماری - جامعه آماری مرتبط با آن - تعمیم

(۳) جامعه آماری - نمونه مرتبط با آن - تخصیص

(۴) جامعه آماری - هر نمونه آماری - تخصیص

۲. برای توصیف کدام یک از متغیرهای زیر باید هر دو شاخص مرکزی و پراکندگی گزارش شوند؟

(۱) قد دانش‌آموزان (۲) نمره دانش‌آموزان (۳) درجه حرارت در شهرهای مختلف (۴) شماره دانش‌آموزی

۳. واژه‌های «مرتب کردن داده‌ها»، «گردآوری»، «روش کار»، «سازماندهی» و «شاخص‌ها» به ترتیب به کدام یک از گام‌های حل مسائل مرتبط با آمار مربوط است؟

(۱) تحلیل داده‌ها - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - طرح و برنامه‌ریزی - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - تحلیل داده‌ها

(۲) طرح و برنامه‌ریزی - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - تحلیل داده‌ها - بحث و نتیجه‌گیری - بیان مسئله

(۳) تحلیل داده‌ها - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها - طرح و برنامه‌ریزی - تحلیل داده‌ها - گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

(۴) تحلیل داده‌ها - طرح و برنامه‌ریزی - بحث و نتیجه‌گیری تفسیر نتایج - بیان مسئله - تحلیل داده‌ها

۲۱۳. **گزینه ۲** فضای نمونه‌ای، انتخاب سه لنگه از ۱۰ لنگه (پنج جفت)

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120 \quad \text{است:}$$

برای این که هیچ جفتی در میان لنگه‌ها نباشد باید سه جفت از پنج جفت انتخاب کنیم و از هر جفت انتخابی یک لنگه بیرون بکشیم:

$$n(A) = \binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1}$$

از جفت سوم
انتخاب یک لنگه از جفت دوم
انتخاب یک لنگه از جفت اول
انتخاب سه جفت از پنج جفت

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \quad \text{احتمال را به دست می‌آوریم:}$$

۲۱۴. **گزینه ۱** گام‌های حل مسئله‌های مرتبط با آمار به ترتیب برابر است با:

۱ بیان مسئله

۲ طرح و برنامه‌ریزی

۳ گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

۴ تحلیل داده‌ها

۵ بحث و نتیجه‌گیری

۲۱۵. **گزینه ۴** اغلب پس از انجام تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد

مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به‌دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد.

۲۱۶. **گزینه ۲** با توجه به جدول کار در کلاس صفحه ۳۳ کتاب

درسی، داریم:

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	به تفسیر نتایج به‌دست‌آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را متناسب با اهداف کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها	به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

موارد ۱ و ۴ درست رسم شده‌اند.

۲۱۷. **گزینه ۳** طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به

پاسخ است.

احتمال متمم را به دست می‌آوریم:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{4! \times 2!}{5!} = \frac{4! \times 2}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$

حال احتمال اصلی را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

۲۰۹. **گزینه ۲** در پرتاب دو تاس، فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

حال پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس، مربع یک عدد طبیعی باشد را می‌نویسیم: $A = \{\{1, 3\}, \{2, 2\}, \{3, 1\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 4\}, \{6, 3\}\}$

$$\Rightarrow n(A) = 7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{36} \quad \text{احتمال را به دست می‌آوریم:}$$

۲۱۰. **گزینه ۲** هر یک از ۲ حالت را در نظر می‌گیریم، سپس با هم جمع

می‌کنیم:

حالت اول تاس عدد ۶ بیاید (یک حالت) و دو سکه پرتاب شود.

دو سکه و تاس عدد ۶

$$n(A) = 1 \times 2^2 \Rightarrow n(A) = 1 \times 4 = 4$$

حالت دوم: تاس عددی جز ۶ بیاید (۵ حالت) و یک سکه پرتاب شود:

یک سکه و تاس عددی به جز ۶

$$5 \times 2^1 \Rightarrow n(A) = 5 \times 2 = 10$$

حالت اول و دوم را با هم جمع می‌کنیم:

$$n(S) = 4 + 10 = 14$$

۲۱۱. **گزینه ۱** فضای نمونه برابر است با:

سه شماره فرد و دو شماره زوج داریم. برای آن که دو مهره با شماره فرد به طور متوالی خارج نشود، باید این شماره‌ها یک در میان به صورت زیر قرار گیرند:

فرد زوج فرد زوج فرد

بین اعداد فرد ۳! جایگشت و بین اعداد زوج ۲! جایگشت در آرایش فوق وجود دارد. پس داریم:

$$n(A) = 3! \times 2!$$

احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{3! \times 2}{5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{10} = 0.1$$

۲۱۲. **گزینه ۳** شش نفر به ۶! حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند. پس

فضای نمونه یا کل حالات ممکن برابر است با:

$$n(S) = 6!$$

اگر دو برادر را a و b بنامیم، پیشامد آن که فرد a و b کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم.

دو فرد a و b را به صورت یک بسته و سایر افراد هر کدام یک بسته جدا هستند. بین خود a و b نیز ۲! جایگشت و پنج بسته زیر، ۵! جایگشت

a,b c d e f

دارند. داریم:

$$n(A) = 5! \times 2!$$

حال احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{5! \times 2!}{6 \times 5!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

هشدار: در سؤالاتی که n! موجود است، حاصل آن را محاسبه

نکنید. شاید بعداً با عبارتی ساده شوند.

جامعه بزرگ‌تر باشد، به نمونه بزرگ‌تری نیاز است. توسعه زندگی مردم به عوامل زیادی مثل سطح درآمد، شیوه زندگی، رفتار اجتماعی، فناوری، فرهنگ و... بستگی دارد و اساساً موضوع پیچیده‌تری نسبت به میزان تحصیلات است. پس به نمونه بیشتری نسبت به میزان تحصیلات نیاز دارد.

۲۲۶. گزینه ۱ گام سوم (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها): در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

گام چهارم (تحلیل داده‌ها): در این مرحله به تحلیل داده‌ها و ارائه نتایج می‌پردازیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش شاخص‌ها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

برای توصیف داده‌های کمی باید هر دو شاخص مرکزی گزارش شوند.

۲۲۷. گزینه ۱ داده‌های کیفی شامل داده‌های اسمی و ترتیبی و داده‌های کمی شامل داده‌های فاصله‌ای و نسبتی است. برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

۲۲۸. گزینه ۴ در دو مورد «ب» و «ت»، داده‌های دور افتاده داریم؛ مورد «ب»: داده‌های ۲۳- و ۸۰- داده‌های دور افتاده هستند. مورد «ت»: داده‌های ۵۰- و ۱۰۰- داده‌های دور افتاده هستند.

اگر داده‌های دور افتاده (پرث) داشته باشیم، از نمودار جعبه‌ای استفاده می‌کنیم. **۲۲۹. گزینه ۲** عبارت گزینه «۳» را به خاطر بسپارید.

۲۳۰. گزینه ۲ پارامترهای دامنه تغییرات، انحراف معیار و دامنه میان چارکی (IQR) جزء شاخص‌های پراکندگی و پارامترهای میانه و میانگین جزء شاخص‌های مرکزی هستند.

۲۳۱. گزینه ۳

یادآوری: برای به‌دست آوردن میانگین، مجموع را به دست آورده و آن‌ها را بر تعدادشان تقسیم می‌کنیم.

$$\bar{X} = \frac{6+6+17+7+7+8+12}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

تذکر: برای محاسبه میانگین نیازی به مرتب کردن داده‌ها نیست.

۲۳۲. گزینه ۳

یادآوری:

۱ برای به‌دست آوردن میانه، ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

۲ بعد از مرتب کردن داده‌ها دو حالت به وجود می‌آید:
الف) تعداد داده‌ها فرد باشد: در این حالت داده وسط، که تعداد داده‌های قبل و بعد از این داده با هم برابرند، همان میانه است.
ب) تعداد داده‌ها زوج باشد: در این حالت میانگین دو داده وسط، همان میانه است.

حال داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

داده ۷ عدد وسط داده ۷
۳, ۴, ۵, ۷, ۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۷, ۱۹

همان‌طور که می‌بینید، ۱۵ داده داریم؛ پس تعداد داده‌ها فرد و میانه در این حالت همان عدد وسط است. پس عدد ۱۱، میانه را نشان می‌دهد.

۲۳۳. گزینه ۲ برای به دست آوردن میانه، ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

داده ۵ داده ۲ وسط داده ۵
۵, ۷, ۹, ۱۰, ۱۳, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹

۲۱۸. گزینه ۱ گام اول (بیان مسئله): طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین پیش از هر چیز، باید مسئله به درستی درک شود و سپس دقیقاً تعریف و بیان شود؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود می‌کنیم و هدف مطالعه را مشخص می‌کنیم. مشورت با کارشناسان حوزه مورد نظر در بیان مسئله موثر است. پس موارد «ب»، «پ» و «ت» نادرست هستند. تنها مورد «الف» درست است.

۲۱۹. گزینه ۳ طرح یک پرسش دقیق و شفاف، مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین پیش از هر چیز، باید مسئله به درستی درک شود و سپس دقیقاً تعریف و بیان شود؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود کنیم و هدف مطالعه را مشخص نماییم. تنها مورد «د» درست است، آن را به خاطر بسپارید.

۲۲۰. گزینه ۴ اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

۲۲۱. گزینه ۳ در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم.

۲۲۲. گزینه ۲ گام دوم (طرح و برنامه‌ریزی): اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

در اندازه‌گیری در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. اندازه‌گیری یا سنجش همیشه این قدر هم آسان نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توان فهمید حضور افراد متخصص در تیم هدایت‌کننده پژوهش چقدر حیاتی است. در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق در مورد چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

با توجه به مطالب فوق، موارد «الف» و «پ» نادرست هستند.

۲۲۳. گزینه ۲ هر چه اندازه جامعه بزرگ‌تر باشد، برای آن که نمونه بتواند به خوبی بیانگر ویژگی‌های جامعه باشد؛ اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم داریم و هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از حضور تنوع در نمونه، اندازه نمونه بزرگ‌تری لازم داریم.

موارد «الف» و «ت» درست هستند آن‌ها را به خاطر بسپارید.

۲۲۴. گزینه ۳

نکته: هر چه اندازه جامعه بزرگ‌تر و میزان پراکندگی متغیر مورد بررسی بیشتر باشد، به نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

دانش‌آموزان یک مدرسه، تعداد زیادی دارند؛ پس به نمونه بیشتری نسبت به دبیران یک مدرسه یا دانش‌آموزان یک کلاس نیاز دارد.

اگر بخواهیم بررسی جداگانه‌ای بین گزینه‌های ۱ و ۲ انجام دهیم؛ می‌گوییم اندازه جامعه تقریباً ثابت مانده است اما معدل، یک متغیر پیچیده‌تری نسبت به سن دانش‌آموز است. چون اعداد و ارقام بیشتری دارد و عوامل تأثیرگذار بر روی آن بیشتر است.

اگر بخواهیم بررسی جداگانه بین گزینه‌های ۳ و ۴ انجام دهیم می‌گوییم تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه از تعداد دبیران بیشتر است، پس به نمونه بیشتری برای بررسی نیاز می‌باشد.

۲۲۵. گزینه ۳ هر چه اندازه جامعه بزرگ‌تر باشد، به نمونه بزرگ‌تری نیاز است. پس گزینه‌های ۱ و ۳ می‌توانند درست باشند، چون در مورد مردم دنیا صحبت شده است. از طرفی هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در

فرمول ممنوع: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: سن دانشجویان ورودی ۹۷ معمولاً بین ۱۸ تا ۱۹ سال است، پس دامنه تغییرات کمی دارد.

گزینه ۲: صنایع مختلف در ایران، پراکندگی درآمدشان زیاد است، مثلاً صنعت پتروشیمی ایران درآمد بسیار بیشتری نسبت به صنعت قالببافی در ایران دارد. پس دامنه تغییرات زیادی دارد.

گزینه ۳: قد والیبالیست‌ها معمولاً بین ۱۸۰ تا ۲۰۵ سانتی‌متر است، پس دامنه تغییرات کمی دارد.

گزینه ۴: وزن کشتی‌کاران در دسته سنگین زنان، در یک حدود مشخص است؛ پس دامنه تغییرات کمی دارد.

۲۳۹. **گزینه ۳**

راهنبرد: چارک اول، چارک دوم و چارک سوم: مقدارهای سه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنند. چارک دوم همان میانه است.

برای محاسبه چارک‌ها، ابتدا میانه داده‌ها را به دست می‌آوریم. سپس برای داده‌های مرتب شده پیش از میانه، یک میانه به دست می‌آوریم و آن را چارک اول می‌نامیم. در پایان برای داده‌های مرتب شده، پس از میانه، یک میانه به دست می‌آوریم و آن را چارک سوم می‌نامیم. معمولاً چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نمایش می‌دهند.

داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم: $80, 85, 90, 100, 120, 140$
 نیمه اول داده‌ها نیمه دوم داده‌ها

$$(Q_1) = 85 \quad (Q_3) = 120$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، پس میانه، میانگین دو داده وسط است. داریم:

$$(Q_2) \text{ میانه} = \frac{90 + 100}{2} = \frac{190}{2} = 95$$

۲۴۰. **گزینه ۴**

راهنبرد: دامنه میان چارکی (IQR) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

چارک اول چارک سوم دامنه میان چارکی

چارک اول و چارک سوم را به دست می‌آوریم. برای این کار باید داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنیم، سپس Q_1 و Q_3 را به دست آوریم:

داده‌های مرتب‌شده: $28, 55, 65, 73, 80, 90$

نیمه دوم داده‌ها نیمه اول داده‌ها

$$Q_1 = 55 \quad Q_3 = 80$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 80 - 55 = 25$$

۲۴۱. **گزینه ۲**

راهنبرد: نمودار جعبه‌ای: نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

در این نمودار اطلاعاتی به ما داده می‌شود که عبارتند از: کمترین داده، بیشترین داده، چارک اول (Q_1)، چارک دوم (Q_2)، چارک سوم (Q_3)، دامنه میان چارکی و دامنه تغییرات.



چون تعداد داده‌ها زوج است، پس میانگین دو عدد وسط همان میانه است:

$$\text{میانه} = \frac{13 + 14}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

برای به دست آوردن میانگین، همه داده‌ها را با هم جمع کرده و بر تعدادشان تقسیم می‌کنیم:

گزینه ۴:

$$\bar{X} = \frac{5 + 7 + 9 + 10 + 13 + 13 + 14 + 15 + 15 + 16 + 17 + 19}{12}$$

$$= \frac{153}{12} = 12.75$$

تفاضل میانه از میانگین برابر است با: $12.75 - 13.5 = -0.75$

۲۳۴. **گزینه ۳** چون میانه برابر میانگین دو عدد شده است، پس تعداد

داده‌ها زوج بوده و این دو عدد همان دو عدد وسط هستند. یعنی:

$$\underbrace{X_1, X_2, X_3}_{\text{جمله ۱}} , \underbrace{X_4, X_5}_{\text{جمله ۲ وسط}} , \underbrace{X_6, X_7, X_8}_{\text{جمله ۳}}$$

طبق الگوی بالا، کل مجموعه ۸ جمله دارد. مجموع این ۸ جمله طبق فرض برابر ۳۶۰ است. پس میانگین برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_8}{8} = \frac{360}{8} = 45$$

۲۳۵. **گزینه ۳**

نکته: اگر چند عدد متوالی به تعداد فرد داشته باشیم،

میانه و میانگین آن‌ها پس از مرتب کردن اعداد، همان عدد وسط

بوده و برابر خواهند بود.

طبق نکته فوق، میانگین و میانه با هم برابرند؛ پس تفاضل آن‌ها برابر صفر می‌شود.

۲۳۶. **گزینه ۳** میانگین داده آماری فوق را به دست می‌آوریم (در این

مرحله نیازی به مرتب‌سازی داده‌ها نیست):

$$\bar{X} = \frac{16 + 9 + 17 + 13 + 10 + a + 10 + 17 + 11 + 16}{10} = 13.1$$

$$a + 119 = 131 \Rightarrow a = 131 - 119 = 12$$

حال داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم؛ چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه همان میانگین دو عدد وسط می‌باشد. داریم:

$$\underbrace{9, 10, 10, 10, 11}_{\text{داده ۱}} , \underbrace{12, 13}_{\text{داده ۲ وسط}} , \underbrace{16, 16, 17, 17}_{\text{داده ۳}}$$

$$\text{میانه} = \frac{12 + 13}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

۲۳۷. **گزینه ۳**

راهنبرد: دامنه تغییرات مجموعه‌ای از اعداد، به صورت اختلاف

کوچکترین داده از بزرگترین داده می‌باشد:

$$R = b - a$$

کوچکترین داده بزرگترین داده دامنه تغییرات

بزرگترین عدد، ۴۸ و کوچکترین عدد ۲۸ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$R = b - a = 48 - 28 = 20 \Rightarrow R = 20$$

۲۳۸. **گزینه ۲**

نکته: هر چه پراکندگی داده‌ها بیشتر باشد، دامنه تغییرات

نیز بیشتر است.



حال میانگین به دست آمده را در فرمول واریانس قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &= (12-10)^2 + (7-10)^2 \\ &+ (10-10)^2 + (11-10)^2 + (9-10)^2 \\ &+ (10+10)^2 + (12-10)^2 + (9-10)^2 \\ &= 4+9+0+1+1+0+4+1=20 \\ \sigma^2 &= \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

۲۴۵. **گزینه ۴** ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{15+16+16+18+20}{5} = \frac{85}{5} = 17$$

با استفاده از فرمول زیر، انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{(15-17)^2 + (16-17)^2 + (16-17)^2 \\ &+ (18-17)^2 + (20-17)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4+1+1+1+9}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{3.2} \end{aligned}$$

۲۴۶. **گزینه ۴** جاهای خالی به ترتیب میانگین و انحراف معیار هستند.



۲۴۷. **گزینه ۲** در نمودار تست، بلندی مستطیل نشان‌دهنده میانگین و میله خطی آن به اندازه انحراف معیار روی مستطیل بالا می‌آید. از این نمودار زمانی استفاده می‌کنیم که داده‌های دور افتاده نداشته باشیم.

$$\bar{X} = \frac{16+17+15+16+14+17+15+16+16+17+15+18}{12}$$

$$\bar{X} = \frac{192}{12} = 16$$

$$\begin{aligned} &= (16-16)^2 + (17-16)^2 + (15-16)^2 \\ &+ (16-16)^2 + (14-16)^2 + (17-16)^2 + (15-16)^2 + (16-16)^2 \\ &+ (16-16)^2 + (17-16)^2 + (15-16)^2 + (18-16)^2 \\ &\Rightarrow 1+1+4+1+1+1+1+4=14 \end{aligned}$$

$$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\frac{14}{12}} = 1.08$$

نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:



۲۴۸. **گزینه ۴** ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

داده‌ها: ۱, ۵, ۷, ۸, ۹

$$R = b - a \Rightarrow R = 9 - 1 = 8$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{1+5+7+8+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(1-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2}{5} \\ &= \frac{25+1+1+4+9}{5} = \frac{40}{5} = 8 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

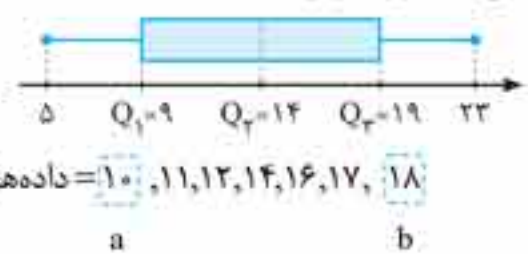
همان‌طور که می‌بینید، دامنه تغییرات و واریانس با هم برابرند.

۲۴۲. **گزینه ۱** داده‌های داده شده را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

سپس دامنه تغییرات داده‌های داخل جعبه را به دست می‌آوریم:

$$= \underbrace{5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14}_{\substack{\text{داده ۷} \\ \text{میانۀ } (Q_1) = 9}} \quad \underbrace{16, 17, 18, 19, 20, 21, 23}_{\substack{\text{داده ۷} \\ \text{میانۀ } (Q_3) = 19}}$$

نمودار جعبه‌ای آن به صورت زیر است:



$$\text{داده‌های داخل جعبه} = 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18$$

$$\Rightarrow R = b - a = 18 - 10 = 8$$

تذکره: چارک اول (Q_1) و چارک سوم (Q_3) داخل جعبه قرار ندارند.

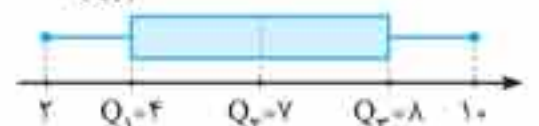
۲۴۳. **گزینه ۴** ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم و

سپس نمودار جعبه‌ای آن‌ها را رسم می‌کنیم:

داده‌های مرتب شده: $\underbrace{2, 3, 5, 6, 7}_{\text{داده ۴}} \quad \underbrace{7, 8, 8, 10}_{\text{داده ۴}}$

$$Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$Q_3 = \frac{8+8}{2} = 8$$



داده‌های داخل جعبه = ۵, ۶, ۷, ۷, ۸

چارک دوم (Q_2) = ۷

میانگین داده‌های داخل جعبه را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{5+6+7+7+8}{5} = 6.6$$

میانگین داده‌های داخل جعبه به اندازه 0.4 ($7 - 6.6 = 0.4$)، از چارک دوم (Q_2) کمتر است.

هشدار: دقت کنید میانه داده‌های بعد از (Q_2) برابر ۸ شده است. میانه بین دو عدد ۸ قرار می‌گیرد چون خود میانه روی جعبه است ولی داخل آن نیست. پس عدد ۸ سمت چپ داخل جعبه و عدد ۸ سمت راست بیرون جعبه قرار می‌گیرد.

۲۴۴. **گزینه ۴**

راهبرد:

مجذور انحراف معیار، واریانس گفته می‌شود که آن را با σ^2 نمایش می‌دهند.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}} \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n} \end{aligned}$$

مطابق رابطه فوق، میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{12+7+10+11+9+10+12+9}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

تذکره: برای به دست آوردن واریانس نیازی به مرتب‌سازی داده‌ها نیست.

$$\bar{X} = \frac{215}{17} \approx 12/6$$

گزینه «۴»:

صورت کسر میانگین داده‌های جدید

$$+10+10+10+12+12+12+13+14$$

$$+15+16+18+20+20+22=214=\bar{X}=\frac{214}{17} \approx 12/5$$

با توجه به مقدار میانگین در دو گزینه «۳» و «۴»، مقدار میانگین در گزینه «۳» از مقدار میانگین در گزینه «۴» بیشتر است.

۲۵۲. گزینه ۳ داده‌های داده‌شده را به صورت صعودی، مرتب می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} 15 & - & 16 & & - & 17 & & - & 19 & - & 23 \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ Q_1 & & & & & & & & & & Q_3 \end{array}$$

$$Q_1 = \frac{15+16}{2} = 15/5 \quad Q_3 = \frac{19+23}{2} = 21$$

دو داده مورد نظر باید به صورت یکسان قبل و بعد از میانه پخش شوند. یعنی یک داده قبل از Q_2 و یک داده بعد از Q_2 قرار گیرد. پس گزینه «۲» که دو داده قبل از Q_2 و گزینه «۴» که دو داده بعد از Q_2 را دارد؛ حذف می‌شود. حال انحراف معیار داده‌های اصلی و همچنین گزینه‌های «۱» و «۳» را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم کدام یک از گزینه‌ها انحراف معیار بزرگ‌تری دارد.

گزینه «۱»:

صورت کسر انحراف معیار

$$+(11-17)^2 + (15-17)^2 + (16-17)^2$$

$$+(17-17)^2 + (18-17)^2 + (19-17)^2 + (23-17)^2 =$$

$$(-6)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0 + (1)^2 + (2)^2 + (6)^2 =$$

$$36 + 4 + 1 + 1 + 4 + 36 = 82$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{82}{7}} = 3/42$$

گزینه «۲»:

صورت کسر انحراف معیار

$$+(15-19)^2 + (16-19)^2$$

$$+(16+19)^2 + (17-19)^2 + (19-19)^2 + (23-19)^2 + (27-19)^2$$

$$= (4)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 0 + (4)^2 + (8)^2$$

$$= 16 + 9 + 9 + 4 + 16 + 64 = 120$$

$$\sigma = \frac{120}{7} \approx 4/10$$

۲۵۳. گزینه ۲ گام پنجم (بحث و نتیجه‌گیری): پس از تحلیل داده‌ها، باید

بتوانیم با تفسیر پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام مطالعه‌ای در این زمینه داشتند؛ با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. ارائه پیشنهادها ما ممکن است به این افراد کمک کند. اگر به تمامی نکات نمونه‌گیری توجه و با روش‌های مناسبی داده‌ها را تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم. توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیست.

۲۵۴. گزینه ۴ هر چهار گزینه، درست هستند. گزینه‌ها را به خاطر بسپارید.

۲۴۹. گزینه ۴

نکته: اگر همه داده‌های آماری با هم برابر باشند، انحراف معیار،

واریانس و دامنه تغییرات برابر صفر بوده و با هم برابرند. همچنین میانگین و میانه نیز با یکدیگر برابرند.

با توجه به نکته بالا، واریانس و دامنه تغییرات با هم برابرند.

۲۵۰. گزینه ۱

روش اول ابتدا داده‌های داده‌شده را به صورت صعودی، مرتب می‌کنیم:

$$-22 \quad -20 \quad -20 \quad -18 \quad -16 \quad -14 \quad -13 \quad -12 \quad -12 \quad -10 \quad -10 \quad -6 \quad -4 \quad -4$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3$$

برای این که میانه، چارک اول و چارک سوم تغییر نکنند؛ باید این چهار عدد را به طور مساوی بین داده‌های بالا پخش کنیم. یعنی یک عدد را قبل از Q_1 ، یک عدد را بین Q_1 و Q_2 ، یک عدد را بین Q_2 و Q_3 و نهایتاً یک عدد را بعد از Q_3 قرار می‌دهیم. در گزینه «۳» چون دو عدد ۱۷ و ۱۵ هر دو بین Q_2 و Q_3 قرار می‌گیرند و بعد از Q_3 عددی قرار نمی‌گیرد، جایگاه Q_3 تغییر می‌کند. در گزینه «۴» نیز چون دو عدد ۱۷ و ۱۸ هر دو بین Q_2 و Q_3 قرار می‌گیرند و بعد از Q_3 عددی قرار نمی‌گیرد. مجدداً جایگاه Q_3 تغییر می‌کند.

پس گزینه‌های «۳» و «۴» حذف می‌شوند. اما در گزینه «۱» و «۲» پخش اعداد به درستی صورت گرفته است؛ پس کافی است میانگین داده‌های جدید را در این دو گزینه به دست آوریم تا ببینیم کدام یک میانگین بزرگ‌تری دارند:

گزینه «۱»: صورت کسر میانگین

$$+0+4+6+9+10+12+12$$

$$+12+13+14+16+17+18+20+20+21+22=268$$

$$\bar{X} = \frac{268}{19} \approx 14/1$$

گزینه «۲»: صورت کسر میانگین

$$+12+12+13+14+15+16+18+19+20+20+22=239$$

$$\bar{X} = \frac{239}{19} \approx 12/57$$

روش دوم

فرمول ممنوع: البته با توجه به این که اعداد در گزینه «۱»

از اعداد نظیر خودشان در گزینه «۲» بزرگ‌تر هستند؛ می‌توانستیم بفهمیم میانگین در گزینه «۱» بزرگ‌تر از گزینه «۲» است.

۲۵۱. گزینه ۳ داده‌های تست قبل را دوباره می‌نویسیم:

$$-22 \quad -20 \quad -20 \quad -18 \quad -16 \quad -14 \quad -13 \quad -12 \quad -12 \quad -10 \quad -10 \quad -6 \quad -4 \quad -4$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3$$

برای آن که میانه یا چارک دوم (Q_2) ثابت بماند؛ باید یک داده قبل از Q_2 و یک داده بعد از Q_2 قرار دهیم؛ در نتیجه گزینه‌های «۱» و «۲» حذف می‌شوند. چون اعداد ۵ و ۱۱ هر دو قبل از Q_2 و داده‌های ۲۱ و ۱۳ هر دو بعد از Q_2 قرار دارند. حال میانگین داده‌های جدید در گزینه‌های «۳» و «۴» را با میانگین داده‌های اصلی مقایسه می‌کنیم تا ببینیم با کدام گزینه برابر می‌شود.

صورت کسر میانگین داده‌های اصلی

$$+12+12+13+14+16+18+20+20+22=189$$

$$\bar{X} = \frac{189}{15} = 12/6$$

گزینه «۳»:

صورت کسر میانگین داده‌های جدید

$$+12+12+12+13+14+14+16+18+20+20+22=215$$

کتابخانه عضو می‌شوند نسبت‌های هر کدام از دانش‌آموزان و سایر افراد عضو شده به صورت زیر است:

$$\frac{3}{8} \text{ دانش‌آموزان}$$

$$\frac{5}{8} \text{ سایر اعضا}$$



دایره به ۸ قسمت تقسیم شده است و ۳ قسمت را دانش‌آموزان و ۵ قسمت را سایر اعضا پر کرده‌اند.

همچنین در دو سال بعد تعداد دانش‌آموزان از ۳۰ به ۲۰ کاهش و تعداد سایر اعضا از ۵۰ به ۶۰ نفر افزایش می‌یابد در نتیجه نسبت تعداد دانش‌آموزان به سایر افراد برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد دانش‌آموزان}}{\text{تعداد سایر اعضا}} = \frac{20}{60} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۶۱. گزینه ۳ میانه کلاس C (Q_۲) بالاتر از بقیه است. (حداقل ۵۰٪ بالای ۱۷ هستند). پس این کلاس از بقیه کلاس‌ها بهتر است.

۲۶۲. گزینه ۱ کلاس A داده دورافتاده کم‌تری دارد (برخلاف B). همچنین طول جعبه (دامنه میان چارکی در A کم‌تر از بقیه است. پس حداقل ۵۰٪ دانش‌آموزان از نظر درسی خیلی به هم نزدیک‌اند.

۲۶۳. گزینه ۴

نکته:

- اگر همه داده‌های آماری در عدد k ضرب شوند، واریانس در k^۲ و انحراف معیار در |k| ضرب می‌شود.
- جمع و تفریق عدد k با همه داده‌های آماری هیچ تغییری در واریانس و انحراف معیار به وجود نمی‌آورد.

ابتدا میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{1+5+7+8+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

حال مقدار انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(1-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2}{5}$$

$$= \frac{25+1+1+4+9}{5} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8}$$

در حالت دوم چون همه اعداد در (-۱۹) ضرب شده‌اند، پس انحراف معیار در قدرمطلق آن یعنی در ۱۹ ضرب می‌شود:

$$\sigma = 19\sqrt{8} \Rightarrow \sigma \text{ ثانویه} = \sqrt{8}$$

نسبت انحراف معیار حالت دوم به واریانس حالت اول برابر است با:

$$\frac{\sigma \text{ ثانویه}}{\sigma^2 \text{ اولیه}} = \frac{19\sqrt{8}}{8} = 2/375\sqrt{7}$$

۲۶۴. گزینه ۴

نکته: هرگاه واریانس داده‌های آماری صفر شود، آن‌گاه همه داده‌ها با هم برابرند.

چون واریانس ۱۱ داده برابر صفر شده است؛ پس همه داده‌ها با هم برابرند. اگر سه داده ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به ۱۱ داده قبل اضافه شود، میانگین تغییری نمی‌کند. میانگین ۱۱ داده را با میانگین ۱۴ داده، برابر هم قرار می‌دهیم:

۲۵۵. گزینه ۴ از جمع‌های با اندازه N به $\binom{N}{n}$ طریق می‌توان نمونه‌هایی با اندازه n داشت.

یادآوری:

۱ طبق رابطه ترکیب داریم: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

۲ روش سریع محاسبه $\binom{n}{3}$ برابر است با:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\Rightarrow \binom{100}{3} = \frac{100(100-1)(100-2)}{6}$$

$$= \frac{100 \times 99 \times 98}{6} = 161700$$

۲۵۶. گزینه ۳

راهبرد: در نمودار دایره‌ای زاویه متناظر با دسته، طبق فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{\text{تعداد آن دسته}}{\text{تعداد کل}} \times 360^\circ$$

مطابق راهبرد فوق داریم:

$$60^\circ = \frac{\text{تعداد افراد}}{60000} \times 360^\circ \Rightarrow 6(\text{تعداد افراد}) = 60000$$

$$\Rightarrow \text{تعداد افراد} = \frac{60000}{6} = 10000$$

۲۵۷. گزینه ۳ زاویه مربوط به کارکنان ارشد طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \frac{\text{تعداد کارکنان ارشد}}{\text{تعداد کل کارکنان}} \times 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{120}{30+90+180+120+30} \times 360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{120}{450} \times 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 96^\circ$$

۲۵۸. گزینه ۳ مجموع زوایا در دایره ۳۶۰° است. ۲۱۶° از ۳۶۰° به افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال اختصاص یافته است. داریم:

$$\text{نسبت افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال} = \frac{216}{360} = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = 0/6$$

برای به دست آوردن درصد افراد بازدیدکننده که بین ۴۰ تا ۶۰ سال قرار دارند، نسبت به دست‌آمده را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$0/6 \times 100 = 60\% \text{ : درصد افراد بین ۴۰ تا ۶۰ سال}$$

۲۵۹. گزینه ۴ مجموع زوایا در دایره، ۳۶۰° است. مقدار α را به دست می‌آوریم:

$$\alpha = 360^\circ - (70^\circ + 10^\circ + 80^\circ + 65^\circ) = 360^\circ - (225^\circ) = 135^\circ$$

یعنی گروه سنی α ، ۱۳۵° را به خود اختصاص داده است.

$$\text{نسبت گروه سنی } \alpha \text{ : } \frac{135}{360} = \frac{3}{8} = 0/375$$

چون درصد گروه سنی α در جامعه را باید به دست بیاوریم، پس نسبت فوق را در عدد ۱۰۰ ضرب می‌کنیم: $0/375 \times 100 = 37/5\%$ درصد گروه سنی α

۲۶۰. گزینه ۱ همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، تعداد دانش‌آموزان مدرسه هر ساله، ۱۰ نفر کاهش می‌یابد. اما تعداد سایر اعضا هر ساله ۱۰ نفر اضافه می‌شود. پس سال بعد تعداد سایر اعضا به ۵۰ نفر افزایش و تعداد دانش‌آموزان به ۳۰ نفر کاهش می‌یابد. در کل ۸۰ نفر از افراد در



$$f(2) = (2(2) - 1)^2 = (3)^2$$

$$f(20) = (2(20) - 1)^2 = (39)^2$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2(20) - 1)^2 = \frac{(20)((2 \times 20) - 1)((2 \times 20) + 1)}{3}$$

$$= \frac{20 \times 39 \times 41}{3} = 20 \times 13 \times 41$$

میانگین این ۲۰ جمله از تقسیم مجموع این ۲۰ جمله بر عدد ۲۰ به

$$\bar{X} = \frac{20 \times 13 \times 41}{20} = 533$$

دست می‌آید:

۲۶۷. **گزینه ۴** چون داده‌ها در $-\frac{1}{3}$ ضرب و به علاوه عدد ۳ شده‌اند،

در نتیجه میانگین نیز در عدد $-\frac{1}{3}$ ضرب و به علاوه عدد ۳ می‌شود:

$$\bar{X}_{\text{جدید}} = -\frac{1}{3}(\bar{X}_{\text{قدیم}}) + 3$$

$$\Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = -\frac{1}{3}(25) + 3 = -\frac{25}{3} + 3 = \frac{-25 + 9}{3} = \frac{-16}{3}$$

$$= -9/5$$

۲۶۸. **گزینه ۱** واریانس A و B را با استفاده از رابطه زیر به دست

می‌آوریم تا ببینیم کدام یک بزرگ‌تر است:

$$\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}$$

$$A: \bar{X} = \frac{15 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$= (15-16)^2 + (14-16)^2$$

$$+ (15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2 + (19-16)^2$$

$$= 1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 9 = 16$$

$$\sigma^2 = \frac{16}{6} = \frac{4}{3}$$

$$B: \bar{X} = \frac{16 + 14 + 17 + 14 + 17 + 18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$= (16-16)^2 + (14-16)^2 + (17-16)^2$$

$$+ (14-16)^2 + (17-16)^2 + (18-16)^2$$

$$= 0 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4 = 14$$

$$\sigma^2 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

واریانس A و B به ترتیب برابر $\frac{4}{3}$ و $\frac{7}{3}$ هستند. پس واریانس A از

واریانس B بزرگ‌تر است.

۲۶۹. **گزینه ۲** واریانس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} - (\text{میانگین داده‌ها})^2$$

$$\bar{X} = \frac{100}{40} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{340}{40} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{17}{2} - \frac{25}{4} = \frac{34 - 25}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

۲۷۰. **گزینه ۱** واریانس از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} - (\text{میانگین داده‌ها})^2$$

$$\text{میانگین ۱۱ داده: } \frac{11x}{11} = \frac{11x}{11} = x$$

$$\text{میانگین ۱۴ داده: } \frac{11x}{14} = \frac{11x + 66}{14}$$

میانگین به دست آمده در هر دو حالت را برابر هم قرار می‌دهیم تا مقدار x به دست آید:

$$\frac{11x + 66}{14} = x \Rightarrow 11x + 66 = 14x \Rightarrow 3x = 66 \Rightarrow x = 22$$

مقدار $x = 22$ ، مقدار میانگین داده آماری را به ما نشان می‌دهد. با داشتن کلیه داده‌ها و میانگین طبق رابطه زیر، انحراف معیار به دست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}}$$

۱۱ بار تکرار می‌شود

$$\text{صورت کسر انحراف معیار} = (22-22)^2 + (22-22)^2 + \dots + (22-22)^2$$

$$+ (26-22)^2 + (16-22)^2 + (24-22)^2$$

$$16 + 36 + 4 = 56$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{56}{14}} = \sqrt{4} = 2$$

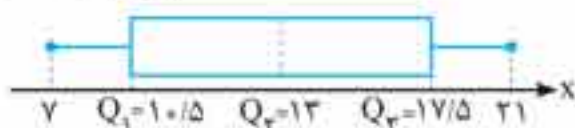
۲۶۵. **گزینه ۴** داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$7, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 13, 16, 17, 17, 18, 20, 21$$

نیمه اول داده‌ها (Q₁)
چارک دوم (Q₂)
نیمه دوم داده‌ها (Q₃)

$$Q_1 = \frac{10 + 11}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$$

$$Q_3 = \frac{17 + 18}{2} = 17.5$$



داده‌های داخل جعبه: 11, 12, 12, 13, 16, 17, 17

واریانس از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = (\sigma)^2 = (\text{انحراف معیار})^2$$

میانگین داده‌های داخل جعبه را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{11 + 12 + 12 + 13 + 16 + 17 + 17}{7} = \frac{98}{7} = 14$$

$$\text{صورت کسر انحراف معیار: } (11-14)^2 + (12-14)^2 + (12-14)^2$$

$$+ (13-14)^2 + (16-14)^2 + (17-14)^2 + (17-14)^2$$

$$= 9 + 4 + 4 + 1 + 4 + 9 + 9 = 40$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{40}{7}} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{40}{7} \approx 5.71$$

۲۶۶. **گزینه ۴**

راهنمایی: به عبارت زیر توجه کنید:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

با توجه به داشتن $f(x)$ ، مقادیر $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(20)$ و $f(1)$ را می‌توان به دست

$$f(1) = (2(1) - 1)^2 = (1)^2$$

آورد:



۲۷۲. گزینه ۳ هر اتفاقی که برای همه داده‌ها می‌افتد، برای میانگین هم باید اعمال شود. داریم:

$$\bar{X} \text{ جدید} = (\bar{X} \text{ قدیم} - ۱۲) \times ۳ \Rightarrow \bar{X} \text{ جدید} = (۵۷ - ۱۲) \times ۳$$

$$\Rightarrow \bar{X} \text{ جدید} = ۱۳۵$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{۲۹} - (۱۷)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{۲۹} = \Delta + (۱۷)^2 = \Delta + ۲۸۹ = ۲۹۴$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مجذورات داده‌ها} = ۲۹ \times ۲۹۴ = ۸۵۲۶$$

چون ۴ داده از بین آن‌ها کم شده است؛ پس از مجموع این اعداد، مجموع مجذورات هم باید کم شوند اما باید به توان ۲ برسند و سپس کم شوند.

$$\text{مجموع مجذورات جدید} = ۸۵۲۶ - ((۱۲)^2 + (۱۳)^2 + (۲۱)^2 + (۲۲)^2) \\ = ۸۵۲۶ - (۱۴۴ + ۱۶۹ + ۴۴۱ + ۴۸۴) = ۸۵۲۶ - ۱۲۳۸ = ۷۲۸۸$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{میانگین از رابطه مقابل به دست می‌آید:}$$

$$۱۷ = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۹}}{۲۹} \Rightarrow x_1 + \dots + x_{۲۹} = ۲۹ \times ۱۷ = ۴۹۳$$

داده‌های ۱۲، ۱۳، ۲۱ و ۲۲ را از مجموع این ۲۹ جمله کم می‌کنیم؛ پس ۲۵ جمله باقی می‌ماند.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۵} = ۴۹۳ - (۱۲ + ۱۳ + ۲۱ + ۲۲) = ۴۲۵$$

میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{X} \text{ جدید} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۵}}{۲۵} = \frac{۴۲۵}{۲۵} = ۱۷$$

حال با داشتن مجموع مجذورات جدید، میانگین جدید و تعداد داده‌های جدید، واریانس جدید را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{۷۲۸۸}{۲۵} - (۱۷)^2 = ۲۹۱/۵۲ - ۲۸۹ = ۲/۵۲$$

۲۷۱. گزینه ۴ واریانس از رابطه زیر، محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} - (\text{میانگین داده‌ها})^2$$

واریانس همان مجذور انحراف معیار است. داریم:

$$\sigma^2 = (۲)^2 = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{۲۲} - (۱۶)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع مجذورات داده‌ها}}{۲۲} = ۴ + (۱۶)^2 = ۴ + ۲۵۶ = ۲۶۰$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مجذورات داده‌ها} = ۲۲ \times ۲۶۰ = ۵۷۲۰$$

داده‌های ۱۷، ۲۰ و ۱۱ به داده‌های موجود اضافه شده‌اند؛ پس مجذور آن‌ها نیز به مجموع مجذورات قبلی اضافه می‌شود:

$$\text{مجموع مجذورات جدید} = ۵۷۲۰ + ((۱۷)^2 + (۲۰)^2 + (۱۱)^2) \\ = ۵۷۲۰ + (۲۸۹ + ۴۰۰ + ۱۲۱) = ۶۵۳۰$$

مجموع ۲۲ داده را از رابطه میانگین به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۲}}{۲۲} \Rightarrow ۱۶ = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۲}}{۲۲}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۲} = ۲۲ \times ۱۶ = ۳۵۲$$

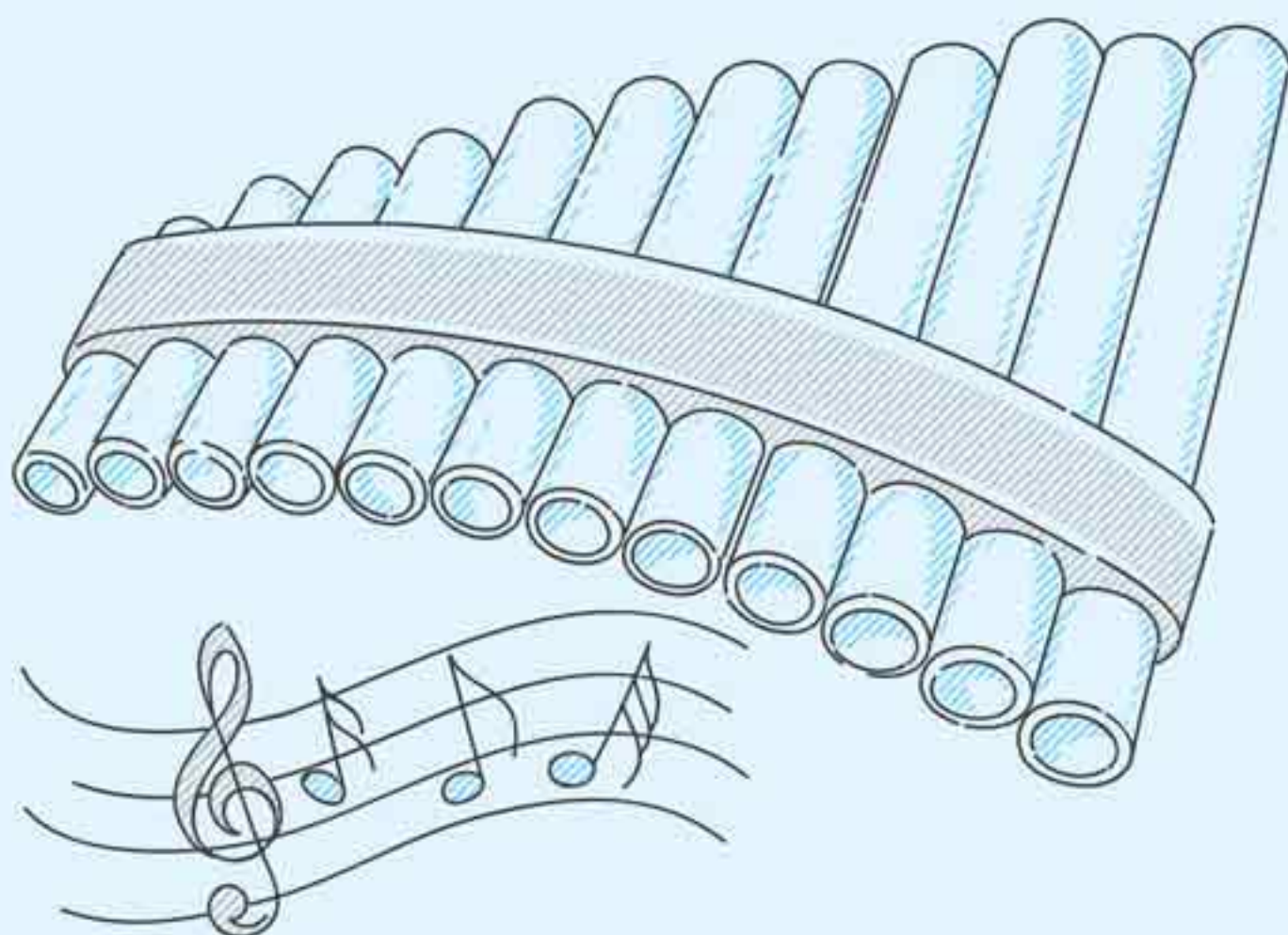
سه داده ۱۷، ۲۰ و ۱۱ نیز به این مجموع ۲۲ جمله اضافه می‌شوند و ۲۵ داده را به وجود می‌آورند:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۵} = ۳۵۲ + ۱۷ + ۲۰ + ۱۱ = ۴۰۰$$

$$\Rightarrow \bar{X} \text{ جدید} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{۲۵}}{۲۵} = \frac{۴۰۰}{۲۵} = ۱۶$$

با داشتن میانگین جدید، مجموع مجذورات جدید و داده‌های جدید، واریانس جدید را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{۶۵۳۰}{۲۵} - (۱۶)^2 = ۲۶۱/۲ - ۲۵۶ = ۵/۲$$



الگوهای خطی

این فصل با مدل‌سازی و تعریف دنباله شروع می‌شود و به بررسی نوع خاصی از دنباله به نام دنباله حسابی می‌پردازد.

رویکرد مؤلفان کتاب درسی: بخش مدل‌سازی و دنباله جدید مطرح شده و درس دوم همانند کتاب‌های گذشته است.

برآورد ما: در کنکورهای نظام قدیم یک یا دو تست از این مبحث طرح می‌شد ولی انتظار داریم حداقل ۲ تست از این فصل طرح شود.

درس اول: مدل سازی و دنباله

مدل سازی

در سال یازدهم با مدل سازی برخی از توابع آشنا شدیم. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال: یک چراغ راهنمایی در ۲۵ ثانیه اول شروع به کار سبز، در ۵ ثانیه بعدی زرد و در ۲۰ ثانیه قرمز است.

با توجه به فرض مثال، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

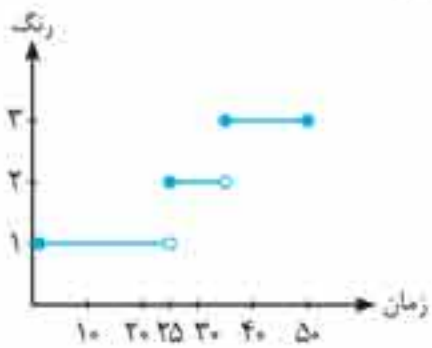
الف) ضابطه تابع بالا را در ۵۰ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی بنویسید.

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

پ) دامنه و برد آن را بیابید.

پاسخ: الف) اگر چراغ روشن رنگ سبز را با عدد ۱ و رنگ زرد را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۳ نشان دهیم، تابع سه ضابطه ای زیر حاصل می شود:

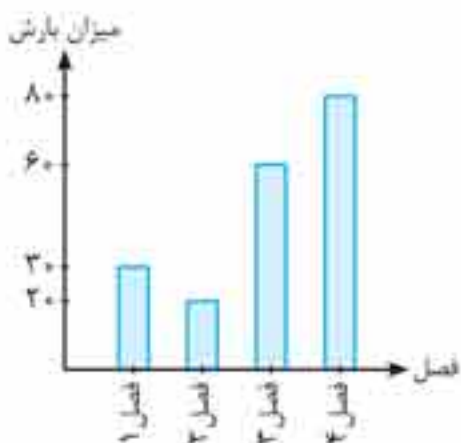
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t \leq 50 \end{cases}$$



ب) نمودار آن به صورت مقابل است:

$$D_f = \{0 \leq t \leq 50\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$

پ) دامنه و برد این تابع به صورت مقابل است:



مثال: نمودار میله ای زیر، میزان بارش باران در ۴ فصل سال گذشته را نشان می دهد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

n	۱	۲	۳	۴
f(n)				

ب) تابع مدل سازی شده آن را بنویسید.

پ) دامنه و برد آن را به دست آورید.

پاسخ: الف) در جدول، شماره فصل ها با n و میزان بارش در فصول مختلف سال را با f(n) نشان

داده ایم. با توجه به نمودار می توان فهمید که در فصل های اول، دوم، سوم و چهارم میزان بارش برابر است با: ۳۰، ۶۰، ۶۰ و ۸۰.

ب) در فصل های اول و دوم، میزان بارش از فرمول $40 - 10n$ و در فصل های سوم و چهارم از فرمول $20n$ به دست می آید.

$$f(n) = \begin{cases} 40 - 10n & 1 \leq n \leq 2 \\ 20n & 3 \leq n \leq 4 \end{cases}$$

تابع متناظر با آن به صورت مقابل است:

$$R_f = \{20, 30, 60, 80\} \quad D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

پ) دامنه و برد به صورت مقابل است:

یکی از تفاوت های مثال های اول و دوم، در دامنه آن ها است. در مثال اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ۵۰ ثانیه است.

در این مثال، دامنه در تمام این زمان قابل تعریف است. پس می توان گفت دامنه این تابع بخشی از مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) می باشد. در مثال دوم،

دامنه تابع بیانگر چهار فصل مختلف سال است، پس دامنه تابع، بخشی از مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) است.

۱ در مدل سازی هایی که دامنه توابع، وابسته به بررسی مسئله در مرحله اول یا قدم اول، دوم و ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) استفاده می کنیم.



۲ در مدل سازی هایی که مثلاً مساحت دایره ای به شعاع r داده می شود، دامنه آن، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (\mathbb{R}^+) است.

مثال: در مدل سازی های زیر، دامنه را مشخص کنید.

ب) مصرف برق ماهیانه یک خانه از اول سال

الف) دمای خانه در هر لحظه از شبانه روز

ت) مساحت دایره ای به شعاع r

پ) تعداد داوطلبان سالیانه کنکور سراسری رشته انسانی

ج) تعداد بردهای تیم والیبال کشورمان در مسابقات آسیایی

ث) سرعت لحظه ای یک شناگر در مسابقات

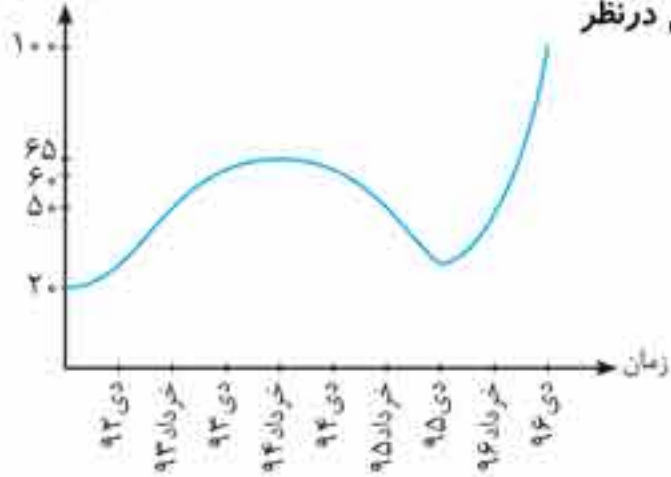
پاسخ:

- الف) دمای خانه در هر لحظه از شبانه‌روز، هر مقداری می‌تواند باشد. پس دامنه آن بخشی از مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است.
- ب) مصرف برق ماهیانه یک خانه، به صورت بخشی از مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) است.
- پ) تعداد نفرات شرکت کننده در کنکور سراسری رشته انسانی، بخشی از مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) است.
- ت) شعاع دایره هر مقداری از مجموعه اعداد حقیقی را می‌تواند داشته باشد. پس مساحت دایره نیز مقداری از مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است.
- ث) سرعت لحظه‌ای هر شناگر می‌تواند مقادیر دلخواهی از مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) باشد.
- ج) تعداد بردهای تیم والیبال بخشی از اعداد طبیعی (\mathbb{N}) است.

کاربرد از مجموعه اعداد طبیعی

در برخی از مسائل، امکان بررسی در هر لحظه وجود ندارد. پس ما با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی)، به بررسی تقریبی تابع می‌پردازیم. مثلاً پزشک دمای بدن بیمار را در هر ۴ ساعت یکبار بررسی می‌کند.

شاخص کل (هزار تومان)



مثال: نمودار زیر، به طور تقریبی شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۹۲ تا دی ماه ۹۶ نشان می‌دهد. به ترتیب دی ماه ۹۲ را اولین، خرداد ۹۲ را دومین و ... و دی ماه ۹۶ را نهمین تاریخ مورد بررسی در نظر می‌گیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان می‌دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

n آمین تاریخ بررسی	۱	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$f(n)$ مقدار شاخص کل								

ب) دامنه و برد آن را بنویسید.

پاسخ: الف) با توجه به فرض مثال، $f(x)$ مقدار شاخص کل را به دست می‌آوریم:

n آمین تاریخ بررسی	۱	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$f(n)$ مقدار شاخص کل								

$R_f = \{25, 50, 60, 65, 100\}$ $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ب) دامنه و برد آن به صورت مقابل است:

تست: دامنه چه تعداد از توابع زیر، اعداد طبیعی یا بخشی از آن است؟

- الف) تعداد غایب‌های کلاس در هر روز هفته
 - ب) تعداد گل‌های تیم قهرمان لیگ فوتبال در هر دوره
 - ب) سرعت لحظه‌ای یک ماشین
 - ت) دمای اتاق در هر لحظه از یک روز
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:

- الف) دامنه به صورت $\{1, 2, \dots, 7\}$ و بخشی از اعداد طبیعی (\mathbb{N}) است.
 - ب) دامنه بخشی از اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است.
 - پ) دامنه بخشی از اعداد طبیعی (\mathbb{N}) است.
 - ت) دامنه بخشی از اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است.
- پس در دو مورد، دامنه بخشی از اعداد طبیعی (\mathbb{N}) می‌باشد.

مثلث خیام

به شکل زیر توجه کنید:



در هر سطر مثلث خیام، جملات ابتدایی و انتهایی برابر یک است و هر یک از اعداد پایینی از جمع دو عدد متوالی سطر بالایی که در دو سمت آن نوشته شده است، به دست می‌آید.

اگر n شماره سطر باشد، a_n مجموع جملات سطر n ام را نشان می‌دهد.

با توجه به شکل، الگوی آن به صورت زیر است:

شماره سطر n	۱	۲	۳	۴	۵
مجموع اعداد سطر a_n	۱	۲	۴	۸	۱۶

$$a_1 = 1 \text{ (سطر اول)}$$

$$a_2 = 1 + 1 = 2 \text{ (سطر دوم)}$$

$$a_3 = 1 + 2 + 1 = 4 \text{ (سطر سوم)}$$

$$a_4 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 \text{ (سطر چهارم)}$$

$$a_5 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 \text{ (سطر پنجم)}$$

به سؤالات زیر توجه کنید.

$$a_2 = a_1 + a_1 \Rightarrow a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = a_2 + a_2 \Rightarrow a_3 = 2a_2$$

$$a_4 = a_3 + a_3 \Rightarrow 2a_3 \Rightarrow a_4 = 2a_3$$

$$a_{n+1} = a_n + a_n \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n$$

۱) بین a_1 و a_2 چه رابطهای وجود دارد؟

۲) بین a_2 و a_3 چه رابطهای وجود دارد؟

۳) بین a_3 و a_4 چه رابطهای وجود دارد؟

۴) بین a_n و a_{n+1} چه رابطهای وجود دارد؟

به رابطهای که بیانگر ارتباط بین جملات یک الگو می باشد، رابطه بازگشتی می گویند.

در مثال قبل، رابطه $a_{n+1} = 2a_n$ ، یک رابطه بازگشتی برای مجموع اعداد سطرهای مثلث خیام است.

مثال: الگویی را در نظر بگیرید که به هر مربع به ضلع n ، مربع آن را نسبت می دهیم؛ پنج جمله اول الگو را در یک جدول بنویسید.

پاسخ:

n (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
a_n (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

$$a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = 1 + 3 \xrightarrow{a_1=1} a_1 + (2(1) + 1)$$

$$a_3 = 9 \Rightarrow a_3 = 4 + 5 \xrightarrow{a_2=4} a_2 + (2(2) + 1)$$

$$a_4 = 16 \Rightarrow a_4 = 9 + 7 \xrightarrow{a_3=9} a_3 + (2(3) + 1)$$

بین a_1 و a_2 ، a_2 و a_3 و a_3 و a_4 چه رابطهای وجود دارد؟

حال بین a_n و a_{n+1} چه رابطهای وجود دارد؟

$$a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$$

با استفاده از رابطه بازگشتی، رابطه مقابل به دست آمده است:

حال اگر بخواهیم تابعی را برای این الگو به دست آوریم، داریم:

n	۱	۲	۳	۴	...	n
a_n	۱	۴	۹	۱۶	...	n^2

پس الگوی این تابع به صورت $a_n = n^2$ است.

مثال: در الگوی $3, 5, 7, 9, \dots$ ، رابطه بازگشتی و تابع مربوط به آن را بنویسید.

$$a_2 = 5 \Rightarrow a_2 = 3 + 2 \longrightarrow a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = 7 \Rightarrow a_3 = 5 + 2 \longrightarrow a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = 9 \Rightarrow a_4 = 7 + 2 \longrightarrow a_4 = a_3 + 2$$

پاسخ: با توجه به $a_1 = 3$ داریم:

پس رابطه بازگشتی به صورت $a_{n+1} = a_n + 2$ ، است:

به جدول زیر دقت کنید:

n	۱	۲	۳	۴	...	n
a_n	$3 = 2(1) + 1$	$5 = 2(2) + 1$	$7 = 2(3) + 1$	$9 = 2(4) + 1$...	$2n + 1$

پس در این الگو، تابع برابر با $a_n = 2n + 1$ است.