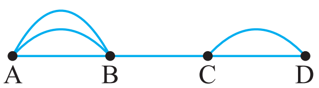
مثال یاسمن به چند طریق می‌تواند یک درس از بین سه درس اختصاصیِ ریاضی و آمار، فلسفه و جامعه‌شناسی و یک درس از بین دو درس عمومیِ دینی و زبان را مطالعه کند؟

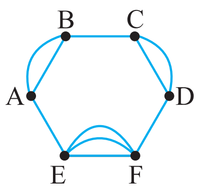
پاسخ کار شامل دو مرحله است (مرحلهٔ اول: مطالعهٔ یک درس اختصاصی، مرحلهٔ دوم: مطالعهٔ یک درس عمومی).
همچنین در نهایت هر دو مرحله انجام می‌شود (هم یک درس اختصاصی مطالعه می‌شود و هم یک درس عمومی). نوع انتخاب در مرحلهٔ اول تأثیری در تعداد حالات مرحلهٔ دوم ندارد، یعنی اگر در مرحلهٔ اول درس ریاضی و آمار انتخاب شود، در مرحلهٔ دوم ۲ انتخاب برای دروس عمومی وجود دارد. اگر درس فلسفه یا جامعه‌شناسی هم انتخاب شود، باز هم در مرحلهٔ دوم ۲ انتخاب وجود دارد، پس می‌توان از اصل ضرب استفاده کرد و تعداد حالات $۶ = ۲ \times ۳$ حالت می‌شود.

مثال در شکل مقابل به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟



پاسخ این کار شامل ۳ مرحله است (مرحلهٔ اول: از A به B که به ۳ حالت انجام می‌شود. مرحلهٔ دوم: از B به C که به ۱ حالت انجام می‌شود و مرحلهٔ سوم از C به D که به ۲ حالت انجام می‌شود). از آنجا که مراحل از یکدیگر مستقل هستند، طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با $۶ = ۲ \times ۱ \times ۳$ حالت.

مثال در شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟



پاسخ برای رفتن از A به D، «یا» از بالا می‌توان رفت «یا» از پایین، پس طبق اصل جمع، تعداد حالات بالا را با پایین جمع می‌کنیم (دقت شود که نمی‌توان هم‌زمان از بالا و پایین سفر کرد و فقط یکی از آن‌ها انجام می‌شود).
تعداد حالات بالا: این کار شامل ۳ مرحلهٔ مستقل است و همهٔ مراحل انجام می‌شود، پس طبق اصل ضرب به $۴ = ۲ \times ۱ \times ۲$ حالت انجام می‌شود.
تعداد حالات پایین: مانند تعداد حالات بالا طبق اصل ضرب به $۳ = ۱ \times ۳ \times ۱$ حالت انجام می‌شود.
بنابراین تعداد کل حالات برابر است با $۷ = ۳ + ۴$ حالت.

مثال فرض کنید کیان ۴ خودکار، ۳ مداد و ۲ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف داشته باشد.

الف) کیان به چند طریق می‌تواند یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را انتخاب کند؟

پاسخ
خودکار یا روان نویس یا مداد
$۴ + ۲ + ۳ \rightarrow ۳ + ۲ + ۴ = ۹$

ب) به چند طریق می‌توان یک خودکار و یک مداد و یک روان‌نویس را انتخاب کرد؟

پاسخ
خودکار و روان نویس و مداد
$۴ \times ۲ \times ۳ \rightarrow ۳ \times ۲ \times ۴ = ۲۴$

پ) به چند طریق می‌توان یک خودکار و یک روان‌نویس انتخاب کرد؟

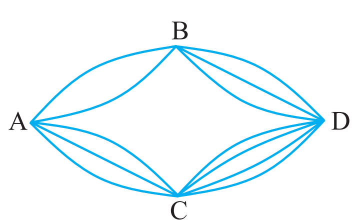
پاسخ
روان نویس و خودکار
$۲ \times ۴ \rightarrow ۴ \times ۲ = ۸$

پاتخته

یک کارخانهٔ خودروسازی، ۵ مدل خودرو در ۶ رنگ و ۲ حجم موتور مختلف تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

پاسخ مدل و رنگ و حجم موتور $= ۵ \times ۶ \times ۲ = ۶۰$

مثال در شکل مقابل، تعداد راه‌های موجود بین شهرها نمایش داده شده است.



الف) (اصل جمع) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B یا C سفر کرد؟

پاسخ از A به B یا از A به C $= ۲ + ۳ = ۵$

ب) (اصل ضرب) به چند طریق می‌توان از شهر A به D از طریق شهر B سفر کرد؟

پاسخ از A به B و از B به D $= ۲ \times ۳ = ۶$

پ) (ترکیبی اصل جمع و اصل ضرب) به چند طریق می‌توان از شهر A به D سفر کرد؟

پاسخ از A به B و از B به D یا از A به C و از C به D $= ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ = ۶ + ۱۲ = ۱۸$

مثال در یک آزمون، دانش‌آموزان باید به ۳۰ پرسش چهارگزینه‌ای پاسخ دهند، همچنین جواب ندادن به پرسش‌ها نیز مجاز است. پاسخنامهٔ این آزمون چند حالت می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ او می‌تواند گزینهٔ ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ را انتخاب کند یا هیچ گزینه‌ای را انتخاب نکند، پس ۵ حالت برای سؤال ۱ وجود دارد و به همین ترتیب برای سؤال‌های دیگر، پس:

سؤال ۱ و سؤال ۲ و ... و سؤال ۳۰ $= 5\times 5\times \cdots \times 5 = 5^{30}$

در این مثال اگر می‌گفت پاسخ دادن به تمام سؤالات الزامی است، تعداد حالت‌ها می‌شد 4^{30} تا.

سؤالات ساخت اعداد

در این سؤالات می‌خواهیم با تعدادی رقمِ داده‌شده، عددی چندرقمی بسازیم که گاهی شروطی دارد.

مثال با ارقام «۳,۲,۱» به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام ساخت؟

پاسخ این کار شامل سه مرحله است (قرار دادن صدگان، دهگان و یکان)، از آنجا که باید همهٔ مراحل انجام شود و مراحل مستقل از یکدیگرند، طبق اصل ضرب به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{3}{\text{صدگان}}\times\frac{2}{\text{دهگان}}\times\frac{1}{\text{یکان}}=6$$

(ابتدا صدگان را به ۳ حالت پر می‌کنیم. چون یک عدد در صدگان انتخاب شده، برای دهگان دو حالت وجود دارد. پس از انتخاب یک عدد در دهگان، تنها یک عدد برای یکان باقی می‌ماند.)

مثال با ارقام «۸,۵,۳,۲,۱» چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست)

پاسخ این سؤال مشروط است، یعنی شرط زوج بودن (زوج بودن یکان)، دارد. اگر از غیر از یکان شروع به پر کردن کنیم، مستقل بودن از بین می‌رود و نمی‌توان از اصل ضرب استفاده کرد؛ مثلاً اگر ابتدا سراغ صدگان برویم و بگوییم برای صدگان ۵ حالت وجود دارد و بعد سراغ یکان برویم، نوع انتخاب صدگان در تعداد حالات یکان تأثیر دارد (مثلاً اگر در صدگان رقم ۱ انتخاب شود، برای یکان ۲ حالت، یعنی ۲ رقم زوجِ ۲ و ۸ وجود دارد، اما اگر در صدگان رقم ۲ انتخاب شود برای یکان فقط یک حالت، یعنی یک رقم زوج ۸ وجود دارد)، پس این کار اشتباه است.

نکته در این سؤالات ابتدا جایگاهی را پر کنید که شرط دارد.

بنابراین ابتدا یکان را پر می‌کنیم، سپس می‌توان سراغ دهگان یا صدگان رفت (تفاوتی ندارد. ما صدگان را پس از یکان پر می‌کنیم).

$$4\times 3\times 2=24$$

بعضی از سؤالات ۲ خانهٔ مشروط دارند که آن‌ها را به ۳ دسته تقسیم‌بندی می‌کنیم:

(منظور از خانهٔ مشروط، جایگاهی است که هر رقمی را نمی‌پذیرد.)

الف) اعداد مجاز در هر خانه با یکدیگر اشتراک ندارند. ← روش حل: ابتدا یکی از خانه‌های مشروط را پر کرده و سپس دیگری را پر می‌کنیم.

مثال با ارقام «۸,۶,۳,۵,۰»چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که بزرگ‌تر از ۶۰۰ باشد؟

پاسخ دو خانهٔ مشروط داریم. یکان (۳ و ۵ می‌پذیرد) و صدگان (۶ و ۸ می‌پذیرد). ارقام مجاز این دو خانه اشتراک ندارد، بنابراین ابتدا یکی از این دو خانه را پر می‌کنیم (مثلاً یکان)، سپس سراغ دیگری می‌رویم:

$$\frac{2}{\text{۶ یا ۸}}\times\frac{3}{\text{یکی از ۳ رقم باقی‌مانده}}\times\frac{2}{\text{۳ یا ۵}}=12$$

ب) ارقام مجاز در خانه‌های مشروط با یکدیگر اشتراک دارند و ارقام مجاز یک خانهٔ مشروط، زیرمجموعهٔ ارقام مجاز خانهٔ دیگر است. ← روش حل: شروع از خانهٔ مشروطی که زیرمجموعهٔ دیگری است.

مثال با ارقام «۶,۵,۳,۲,۰» چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ دو خانهٔ مشروط داریم (یکان: ارقام «۳,۵» مجاز است - صدگان: ارقام «۶,۵,۳,۲» مجاز است). ارقام مجاز یکان، زیرمجموعهٔ ارقام مجاز صدگان است، بنابراین از یکان شروع می‌کنیم:

$$\frac{3}{\text{۳ یا ۵ یا ۲ یا ۶}}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{\text{۳ یا ۵}}=18$$

پ) ارقام مجاز در دو خانهٔ مشروط اشتراک دارند و هیچ‌کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیستند. روش حل: بر روی یکی از خانه‌های مشروط دسته‌بندی انجام می‌دهیم.

مثال با ارقام «۶,۵,۳,۲,۰» چند عدد سه‌رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ دو خانهٔ مشروط داریم (یکان: ارقام «۶,۲,۰» مجاز است. - صدگان: ارقام «۶,۵,۳,۲» مجاز است). از آنجا که هیچ‌کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیست، بر روی یکی از آن‌ها مثلاً یکان، دسته‌بندی می‌کنیم. دستهٔ اول شامل یکانِ «۰» است که در صدگان مجاز نیست و دستهٔ دوم شامل ۲ یا ۶ است که در صدگان مجاز است.

یکان صفر باشد: (شروع از یکان یا صدگان تفاوتی ندارد.)

$$\frac{4}{\text{۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶}}\times\frac{3}{}\times\frac{1}{0}=12$$

یکان ۲ یا ۶ باشد: (شروع باید از یکان باشد چون زیرمجموعه صدگان است.)

$$\frac{3}{\text{۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶}}\times\frac{3}{}\times\frac{2}{\text{۲ یا ۶}}=18$$

طبق اصل جمع، یا حالت اول (یکان صفر) رخ می‌دهد یا حالت دوم (یکان غیرصفر)، پس این دو حالت را با هم جمع می‌کنیم و کل حالت ۳۰ می‌شود.

اصل متمم

گاهی شمارش حالت نامطلوب ساده‌تر از شمارش حالت مطلوب است. در این صورت ابتدا تعداد کل حالات را به دست می‌آوریم و سپس تعداد حالات نامطلوب را از آن کم می‌کنیم:

مثلاً در مثال بالا، برای محاسبهٔ تعداد اعداد زوج، می‌توان تعداد کل اعداد سه‌رقمی را به دست آورد و تعداد اعداد فرد را (مثال‌های قبل) از آن کم کرد.

تعداد کل اعداد: (شروع از صدگان، چون تنها خانهٔ مشروط است.)

$\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۴۸$ $\qquad$ $۴۸-۱۸=۳۰$

مثال با ارقام «۵,۴,۳,۲,۰» چند عدد چهاررقمی زوج کوچک‌تر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست)

پاسخ ۲ خانهٔ مشروط داریم، یکان «۴,۲,۰» و هزارگان «۳,۲». طبق حالت «پ» داریم:

یکان ۲ باشد: $\underset{۳}{\underline{۱}}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underset{۲}{\underline{۱}}=۶$

یکان ۰ یا ۴ باشد: $\underset{۲\ \text{یا}\ ۳}{\underline{۲}}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underset{۰\ \text{یا}\ ۴}{\underline{۲}}=۲۴$

کل اعداد برابر است با: $۶+۲۴=۳۰$

نماد فاکتوریل

برای ضرب یک **عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱** در تمام اعداد **کوچک‌تر از خودش**، از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم؛ مثلاً $۴!$ یعنی $۴\times۳\times۲\times۱$ یا $۶!$ یعنی $۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶$، پس در حالت کلی داریم:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۲\times۱$$

قرارداد: $۱!=۱$ و $۰!=۱$.

هرجا خواستیم، می‌توانیم فاکتوریل را قطع کنیم؛ یعنی به‌جای $۷!=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ می‌توانیم بنویسیم $۷!=۷\times۶\times۵!$. این در مواقع ساده کردن خیلی به کارمان می‌آید.

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۵!\times۳=۵\times۴\times۳\times۲\times۱\times۳=۱۲۰\times۳=۳۶۰$

ب) $\dfrac{۹!}{۶!}=\dfrac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}}=۹\times۸\times۷=۵۰۴$

پ) $\dfrac{۳!\times۵!\times۰!}{۲!\times۱!\times۴!}=\dfrac{۳\times\cancel{۲!}\times۵\times\cancel{۴!}\times۱}{\cancel{۲!}\times۱\times\cancel{۴!}}=۱۵$

جلوتر از نماد فاکتوریل بسیار استفاده می‌کنیم.

جایگشت

فرض کنید ۴ کتاب ریاضی، عربی، فارسی و دینی را می‌خواهیم در قفسه‌ای کنار هم قرار دهیم. می‌خواهیم تمام حالت‌های ممکن را بشماریم.

۱) ریاضی عربی دینی فارسی
۲) ریاضی عربی فارسی دینی
۳) ریاضی دینی عربی فارسی
۴) ریاضی فارسی عربی دینی
۵) ریاضی دینی فارسی عربی
۶) ریاضی فارسی دینی عربی
۷) عربی ریاضی دینی فارسی
۸) عربی ریاضی فارسی دینی
۹) دینی ریاضی عربی فارسی
۱۰) فارسی ریاضی عربی دینی
۱۱) دینی ریاضی فارسی عربی
۱۲) فارسی ریاضی دینی عربی
۱۳) عربی دینی ریاضی فارسی
۱۴) عربی فارسی ریاضی دینی
۱۵) دینی عربی ریاضی فارسی
۱۶) فارسی عربی ریاضی دینی
۱۷) دینی فارسی ریاضی عربی
۱۸) فارسی دینی ریاضی عربی
۱۹) عربی دینی فارسی ریاضی
۲۰) عربی فارسی دینی ریاضی
۲۱) دینی عربی فارسی ریاضی
۲۲) فارسی عربی دینی ریاضی
۲۳) دینی فارسی عربی ریاضی
۲۴) فارسی دینی عربی ریاضی

تک‌تک این حالت‌ها را شمردن هم کار سختی است هم امکان دارد یکی از حالت‌ها را فراموش کنیم یا تکراری بنویسیم، پس می‌رویم سراغ ابزار شمردن «جایگشت». به هر کدام از این حالت‌ها می‌گوییم یک جایگشت ۴تایی از ۴ شیء. ما تعداد این حالت‌ها یا در واقع تعداد این جایگشت‌های ۴تایی از ۴ شیء را شمردیم و دیدیم ۲۴ تا است؛ ولی ابزار جایگشت به ما می‌گوید تعداد جایگشت‌های ۴تایی از ۴ شیء برابر $۴!$ است. $(۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴)$ پس اصلاً نیازی به شمردن نبود.

در حالت کلی هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک **جایگشت nتایی از آن n شیء** می‌نامیم که تعداد آن برابر است با $n!$، پس اگر به ما گفتند تعداد جایگشت‌های چند شیء برابر ۷۲۰ است؟ ما می‌گوییم: $n!=۷۲۰$، پس $n=۶$ چون:

$$\underbrace{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}_{۶!}=۷۲۰$$

مثال اگر افراد A، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

پاسخ **روش اول:** این است که تک‌تک بشماریم: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

روش دوم: استفاده از ابزارهای شمارش است. چون در اینجا حرف از ترتیب و کنار هم قرار گرفتن است، پس سراغ ابزار شمارش جایگشت می‌رویم. تعداد حالت‌ها یا در واقع تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از سه شیء را می‌خواهیم که برابر است با $۳!$؛ یعنی ۶ حالت وجود دارد.

گفتیم تعداد جایگشت‌های nتایی از n شیء برابر $n!$ است. این فرمول جایگشت از کجا آمده است؟ n شیء و n جایگاه داریم، پس اول n تا جایگاه را مشخص می‌کنیم و بعد جایگاه‌ها را از سمت چپ به راست با شیءهایی که داریم پر می‌کنیم:

$$\boxed{n\text{شیء}}\times\boxed{(n-1)\text{شیء}}\times\boxed{(n-2)\text{شیء}}\times\boxed{\cdots}\times\boxed{2\text{شیء}}\times\boxed{1\text{شیء}}=n(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times2\times1=n!$$

برای این مثال داریم:

$$\underset{\text{A یا B یا C}}{\boxed{3}}\times\underset{\text{یکی از ۲ نفر باقی‌مانده}}{\boxed{2}}\times\underset{\text{۱ نفر باقی‌مانده}}{\boxed{1}}=6$$

پس شما از این به بعد $n!$ را فراموش کنید و سؤال‌ها را با همین پر کردن جایگاه‌ها حل کنید؛ چون برخی از سؤالات شرایطی دارند که دیگر نمی‌توان از $n!$ استفاده کرد و باید هنگام پر کردن جایگاه‌ها آن شرایط را رعایت کنیم.

یادتان بماند اول جایگاه‌ها را قرار می‌دهیم سپس شیءها را از سمت چپ پر می‌کنیم مگر در برخی از سؤالات که باید از سمت راست پر شود؛ مثل زوج و فرد بودن یا مضرب ۵ بودن.

مثال با اعداد ۱، ۲ و ۳ چند عدد سه‌رقمی با تکرار و بدون تکرار می‌توان نوشت؟

بدون تکرار: $\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}=6$

۶ عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت: $\{(123),(132),(213),(231),(312),(321)\}$

با تکرار: $\boxed{3}\times\boxed{3}\times\boxed{3}=27$

در حالت بدون تکرار، در خانهٔ سمت چپ هر کدام از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ می‌توانند قرار بگیرند پس ۳ حالت وجود دارد. در خانهٔ بعدی چون تکرار نداریم پس فقط ۲ عدد را می‌توانیم قرار دهیم و در خانهٔ آخر فقط یک عدد باقی می‌ماند؛ ولی در حالت با تکرار، در هر خانه هر کدام از اعداد می‌توانند قرار بگیرند پس برای هر خانه، ۳ حالت وجود دارد.

دقت در جایگشت در واقع داریم از اصل ضرب استفاده می‌کنیم، به همین دلیل ما سؤالات مربوط به ساخت اعداد را در تیتر اصل ضرب آوردیم.

محاسبهٔ جایگشت وقتی می‌گوید چند شیء خاص کنار هم باشند

مثال با ارقام ۶، ۵، ۲، ۳ و ۷ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت که در آن اعداد ۶ و ۵ کنار هم قرار بگیرند؟ (بدون تکرار ارقام)

پاسخ در این مدل سؤال‌ها که می‌گوید دو عدد کنار هم باشند، آن‌ها را درون یک بسته قرار می‌دهیم و به چشم یک شیء می‌بینیم، جایگشت را حساب می‌کنیم، سپس جایگشت اعداد موجود در بسته را در آن ضرب می‌کنیم، پس ارقام به‌صورت $\boxed{5,6},2,3,7$ هستند، چون عدد ۵رقمی می‌خواهد، پس ۵ جایگاه داریم و ۴ شیء که باید در جایگاه‌ها قرار دهیم: $\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}\times\boxed{\ }=24$

چرا یکی از جایگاه‌ها خالی می‌مونه؟ اشکال ندارد چون دو تا عدد را یکی در نظر گرفتیم این‌طوری شد.

حال باید جایگشت اعداد داخل بسته را حساب کنیم و در ۲۴ ضرب کنیم. جایگشت دو عدد داخل بسته $2!$ است.

تعداد اعداد پنج‌رقمی که ۵ و ۶ کنار هم باشند. $\rightarrow 24\times2!=48$

چرا باید جایگشت اعداد داخل بسته رو هم حساب کنیم؟ برای اینکه ۵ و ۶ کنار هم باشند، هر دوی ۵۶ و ۶۵ قابل قبول هستند، پس ما در جایگشت ضرب می‌کنیم که هر دو در نظر گرفته شوند.

یادتان بماند در آخر حتماً جایگشت اعداد داخل بسته را هم حساب کنید.

مثال تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ MAHAN را حساب کنید به‌طوری که دو حرف A کنار هم باشند.

پاسخ دو حرف A را درون بسته قرار می‌دهیم و جایگشت را محاسبه می‌کنیم: $M,H,N,\boxed{AA}\xrightarrow{\text{جایگشت}}4!$

حال باید جایگشت داخل بسته را حساب کنیم و در $4!$ ضرب کنیم. چون داخل بسته هر دو یکسان هستند پس فرقی ندارد اول کدام باشد، AA و AA هر دو یکی هستند، پس کلاً یک حالت دارد. $4!\times1=4!$

پاتخته

با حروف کلمهٔ «ندامت»، بدون تکرار و بدون توجه به معنی:

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۳حرفی می‌توان نوشت که به «م» ختم شوند؟

پ) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با «ن» شروع و به «د» ختم شوند؟

پاسخ الف) $\boxed{5}\times\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}=120$

ب) چون ۳حرفی می‌خواهیم پس ۳ جایگاه داریم. در خانهٔ آخر فقط «م» قرار می‌گیرد که یک حالت دارد.

$$\underset{\text{همه به‌جز «م»}}{\boxed{4}}\times\boxed{3}\times\underset{\text{م}}{\boxed{1}}=12$$

پ) ابتدا در خانهٔ اول و آخر «ن» و «د» را قرار می‌دهیم که هر کدام یک حالت دارند سپس خانهٔ دوم از سمت چپ را پر می‌کنیم که می‌شود تمام حروف به‌جز «ن» و «د».

$$\underset{\text{ن}}{\boxed{1}}\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}\times\underset{\text{د}}{\boxed{1}}=6$$

مثال تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی یک مجموعهٔ ۵عضوی چند تا است؟

پاسخ از مجموعهٔ ۵عضوی می‌خواهیم ۳ عضو را به‌عنوان زیرمجموعه انتخاب کنیم:

$$C_{۳}^{۵}=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲}=۱۰$$

مثال به چند طریق می‌توان از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دهم، ۱۰ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۸ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، یک دانش‌آموز را انتخاب کرد؟

پاسخ **روش اول:** (ترکیب) در مجموع ۲۳ دانش‌آموز داریم که می‌خواهیم یک نفر را انتخاب کنیم:

$$\binom{۲۳}{۱}=۲۳$$

روش دوم: (اصل جمع)

دوازدهم یا یازدهم یا دهم

$$۸+۱۰+۵ \rightarrow ۵+۱۰+۸=۲۳$$

مثال از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی شامل ۴ می‌توان نوشت؟

پاسخ یکی از عضوها را خودش انتخاب کرده است پس ما باید ۲ عضو را از ۴ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم:

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

یادتان بماند از اعضای مجموعه نیز باید عدد ۴ را حذف کنیم چون ۴ قبلاً انتخاب شده است (در مجموعه، عضو تکراری قرار نمی‌دهیم هیچ‌وقت).

پاتخته

۱- بر روی یک دایره، ۹ نقطه وجود دارد، با این نقاط:

الف) چند مثلث می‌توان ساخت؟ **ب) چند وتر می‌توان ساخت؟**

پاسخ الف) برای ساخت یک مثلث، ۳ نقطه نیاز داریم (چون نقاط روی دایره هستند، پس مشکل اینکه نقاط هر سه روی یک خط قرار داشته باشند را نداریم.):

$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!(۹-۳)!}=\frac{۹!}{۳!۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{۶\times\cancel{۶!}}=\frac{\cancel{۳}\times۳\times۴\times\cancel{۲}\times۷}{\cancel{۳}\times\cancel{۲}}=۳\times۴\times۷=۸۴$$

ب) برای ساخت وتر، ۲ نقطه نیاز داریم:

$$\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲}=\frac{۷۲}{۲}=۳۶$$

۲- (ترکیبی از اصل جمع، اصل ضرب و ترکیب) از بین ۳ دانش‌آموز پایهٔ دهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم می‌خواهیم یک تیم ۴نفره برای المپیاد تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه:

الف) حداقل ۳ نفر از پایهٔ یازدهم باشند.

ب) حداکثر ۲ نفر از پایهٔ دهم باشند و حتماً از هر دو پایه در آن حضور داشته باشند.

پاسخ الف) حداقل ۳ نفر، یعنی ۳ نفر یا ۴ نفر.

۰ نفر دهم و ۴ نفر یازدهم یا ۱ نفر دهم و ۳ نفر یازدهم

$$\binom{۳}{۰}\times\binom{۴}{۴}+\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۳}\rightarrow ۴\times۳+۱\times۱=۱۲+۱=۱۳$$

ب) حداکثر ۲ نفر، یعنی ۲ نفر یا ۱ نفر (۰ نفر را در نظر نمی‌گیریم چون صورت سؤال گفته است حتماً از دو پایه حضور داشته باشند).

۳ نفر یازدهم و ۱ نفر دهم یا ۲ نفر یازدهم و ۲ نفر دهم

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۲}\rightarrow ۳\times\frac{۴\times۳}{۲}+۳\times۴=۳\times۶+۱۲=۱۸+۱۲=۳۰$$

کنکورشناسی

- تیپ ۱ ساخت اعداد با تکرار ارقام (مشابه سؤال ۱ آزمونک)
- تیپ ۲ ساخت اعداد بدون تکرار ارقام (مشابه سؤال ۲ آزمونک)
- تیپ ۳ حالت خاص ساخت اعداد که عدد صفر در ارقام وجود دارد و مضرب ۵ بودن را می‌خواهد (مشابه سؤال ۳ آزمونک)
- تیپ ۴ جایگشت (مشابه سؤال ۴ آزمونک)
- تیپ ۵ اصل ضرب و ترکیب (مشابه سؤال ۵ آزمونک)
- تیپ ۶ جایگشت و ترکیب (مشابه سؤال ۶ آزمونک)

آزمونک

۱- چند عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۰ و متشکل از رقم‌های زوج وجود دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲- با ارقام موجود در مجموعهٔ {۱,۲,۴,۶,۷,۸} چند عدد ۵رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ *(خارج از کشور ۹۸)*

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۳- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵، چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۴- از ۱۰ نفر دانش‌آموز مدرسه با چند راه می‌توان چهار نفر را جهت مشارکت در چهار مورد متمایز در امور مدرسه انتخاب کرد؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۶۳۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۲۱۰

۵- به چند طریق می‌توان ۶ کارمند جدید را در اتاق‌های ۳نفره، ۲نفره و ۱نفره جای داد؟ *(خارج از کشور ۹۳)*

۱) ۴۵ ۲) ۵۴ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۶- با حروف کلمهٔ DANESH چند رمز عبور چهارحرفی می‌توان ساخت، به‌طوری که حرف S در هر رمز باشد؟ *(سراسری ۹۷)*

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۷۰

پاسخ آزمونک

۱- رقم‌های زوج، ۰,۲,۴,۶,۸ هستند. عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر باشد. در سؤالاتی که با رقم یکان سروکار داریم، ابتدا رقم یکان را پر می‌کنیم سپس برمی‌گردیم از خانهٔ سمت چپ پر می‌کنیم. چون عدد سه‌رقمی گفته است، پس ۳ جایگاه داریم.

$$\overset{\text{۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸}}{\boxed{۴}} \times \overset{\text{همهٔ اعداد}}{\boxed{۵}} \times \overset{\text{صفر}}{\boxed{۱}} = ۲۰$$

گزینهٔ «۳» صحیح است.

۲- چون گفته است پنج‌رقمی، پس ۵ جایگاه داریم و چون فرد می‌خواهد، پس ابتدا یکان را پر می‌کنیم.

$$\overset{\text{همه به‌جز یکان}}{\boxed{۵}} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \overset{\text{۱ یا ۷}}{\boxed{۲}} = ۲۴۰$$

گزینهٔ «۳» صحیح است.

۳- حالت اول: یکان صفر باشد.

$$\overset{\text{همه به‌جز صفر}}{\boxed{۵}} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \overset{\text{صفر}}{\boxed{۱}} = ۶۰$$

حالت دوم: یکان ۵ باشد.

$$\overset{\text{همه به‌جز ۵ و صفر}}{\boxed{۴}} \times \overset{\text{همه به‌جز ۵ و سمت چپ}}{\boxed{۴}} \times \boxed{۳} \times \overset{۵}{\boxed{۱}} = ۴۸$$

گزینهٔ «۳» صحیح است.

$$\text{حالت اول یا حالت دوم} = ۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸$$

۴- انتخاب ۴ نفر از ۱۰ نفر است و چون گفته است برای کارهای **متمایز** پس **ترتیب اهمیت دارد**. چون ترتیب مهم است پس باید از فرمول تبدیل (جایگشت) استفاده کنیم.

$$P(۱۰,۴) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!} = \frac{۱۰!}{۶!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}} = ۱۰\times۹\times۸\times۷ = ۵۰۴۰$$

گزینهٔ «۱» صحیح است.

۵-

$$\underset{\text{انتخاب ۳ کارمند از ۶ کارمند برای اتاق سه نفره}}{\binom{۶}{۳}} \times \underset{\text{انتخاب ۲ کارمند از ۳ کارمند باقی مانده برای اتاق دو نفره}}{\binom{۳}{۲}} \times \underset{\text{انتخاب ۱ کارمند از ۱ کارمند باقی مانده برای اتاق یک نفره}}{\binom{۱}{۱}} \to \frac{۶!}{۳!\times۳!}\times۳\times۱ = ۶۰$$

و و

فرق نمی‌کند اول کدام اتاق پر شود؛ مثلاً فرض کنید ابتدا اتاق ۲نفره را پر کنیم:

$$\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۳}\times\binom{۱}{۱} = \frac{۶\times۵}{۲}\times۴\times۱ = ۱۵\times۴\times۱ = ۶۰$$

گزینهٔ «۳» صحیح است.

۶- **روش اول:** یکی از چهار حرف قرار است S باشد، پس ما در واقع به‌دنبال ۳ حرف از ۵ حرف هستیم. ابتدا ۳ حرف را از ۵ حرف انتخاب می‌کنیم، سپس جایگشت این ۴ حرف (!۴) را در آن ضرب می‌کنیم.

$$\binom{۵}{۳}\times۴! = \frac{۵!}{۳!۲!}\times۴! = \frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲}\times۴! = \frac{۵\times۴}{\cancel{۲}}\times۴\times۳\times\cancel{۲}\times۱ = ۲۴۰$$

روش دوم: چون چهارحرفی می‌خواهد، پس ۴ جایگاه داریم $\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}$ می‌خواهیم حرف S در هر رمزی باشد، پس حرف S می‌تواند در خانهٔ اول یا دوم یا سوم یا چهارم قرار بگیرد، پس ۴ حالت برای آن وجود دارد، حال یکی از جایگاه‌ها با S پر شده است و ۳ جایگاه می‌ماند.

$$\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳} = ۶۰ \xrightarrow{\times\ (\text{تعداد حالت های S})} ۶۰\times۴ = ۲۴۰$$

چرا بدون تکرار گرفتیم؟ چون اگر با تکرار حساب می‌کردیم عدد خیلی بزرگی می‌شد که در گزینه‌ها موجود نیست.

گزینهٔ «۱» صحیح است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول - درس ۱

۱. رمز یک دستگاه، یک حرف فارسی یا یک عدد حسابی یک‌رقمی می‌پذیرد. این دستگاه چند رمز مختلف دارد؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۲ ۳) ۲۸۸ ۴) ۳۲۰

۲. رمز یک دستگاه از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول یک حرف انگلیسی و قسمت دوم یک عدد اول یک‌رقمی است. این دستگاه چند رمز مختلف دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۳۰

۳. یک تاس آبی و یک تاس قرمز را با هم می‌اندازیم. چند حالت ممکن است رخ دهد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۴. یک تاس آبی و یک تاس قرمز را با هم می‌اندازیم. در چند حالت تاس قرمز عددی اول و تاس آبی عددی زوج می‌آید؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵. یک آزمون شامل ۳ سؤال ۴گزینه‌ای و ۲ سؤال صحیح - غلط است. به چند طریق می‌توان به این آزمون پاسخ داد؟ (می‌توان به برخی سؤالات جواب نداد.)

۱) ۱۶ ۲) ۹۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۱۱۲۵

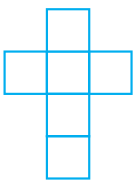
۶. می‌خواهیم با استفاده از کلماتی nحرفی شامل حروف A، B، C و D صندلی‌های یک سالن ورزشی را نام‌گذاری کنیم. اگر این سالن ۱۰۰۰ صندلی داشته باشد، حداقل مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۷. از مجموعهٔ $A = \{1,2,6\}$ به مجموعهٔ $B = \{1,6,8\}$ چند تابع می‌توان تعریف کرد؟

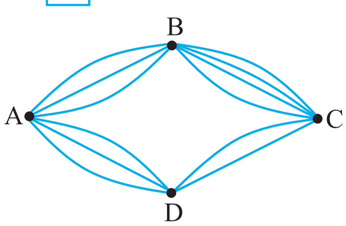
۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) ۶

۸. به چند طریق می‌توان مربع‌های شکل زیر را با سه رنگ زرد، سبز و نارنجی رنگ کرد طوری که مربع‌های مجاور هم‌رنگ نباشد؟



۱) ۶۴
۲) ۷۲
۳) ۹۶
۴) ۴۸۶

۹. در شکل مقابل به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟



۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۷۲

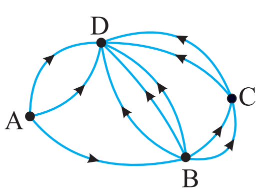
۱۰. در شکل سؤال قبل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و سپس به A برگشت؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۳۲۴

۱۱. در شکل سؤال ۹ به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و سپس به شهر A برگشت، طوری که از هر جاده حداکثر یک بار عبور کنیم؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۲۲۸ ۳) ۳۰۶ ۴) ۴۲۸

۱۲. در شکل زیر به چند حالت می‌توان از شهر A به D سفر کرد طوری که از شهر C عبور نکنیم؟

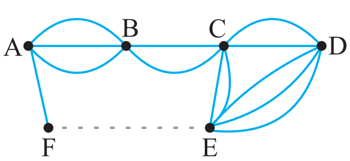


۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۹

۱۳. یک اتوبوس در ۴ ایستگاه توقف می‌کند. ۵ مسافر این اتوبوس به چند طریق می‌توانند از اتوبوس پیاده شوند؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۶۲۵ ۳) ۵۴۰ ۴) ۱۲۰

۱۴. تعداد مسیرها از F به E چندتا باشد که تعداد حالات رفتن از A به D برابر با ۸۳ باشد؟

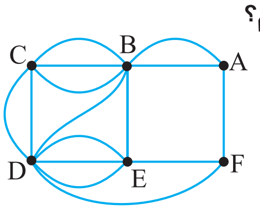


۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۱۵. سه توپ مختلف را به چند طریق می‌توان در ۴ جعبهٔ متفاوت قرار داد؟

۱) ۲۴ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۴۴

۱۶. در شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D و سپس به F رفت طوری که از هر شهر حداکثر یک بار بگذریم؟



۱) ۵۴
۲) ۵۶
۳) ۶۲
۴) ۶۶

۱. گزینهٔ ۲ تعداد حروف فارسی ۳۲ تا و تعداد اعداد حسابی یک‌رقمی ۱۰ تاست {۰,۱,۲,...,۹}. از آنجا که رمز دستگاه یک حرف فارسی «یا» یک عدد حسابی یک‌رقمی است، پس حرف فارسی و عدد حسابی هم‌زمان به کار نمی‌روند و تنها یکی از آن‌ها استفاده می‌شود. درنتیجه طبق اصل جمع برای این دستگاه ۴۲=۳۲+۱۰ رمز داریم.

۲. گزینهٔ ۳ تعداد حروف انگلیسی ۲۶ تاست. اعداد اول یک‌رقمی {۲,۳,۵,۷} است که شامل ۴ عدد است. رمز این دستگاه دوقسمتی است؛ یعنی این کار شامل چند مرحله است که تعداد انتخاب هر مرحله مستقل از نوع انتخاب مرحلهٔ دیگر است، پس طبق اصل ضرب ۱۰۴=۴×۲۶ رمز مختلف داریم.

۳. گزینهٔ ۳ تاس آبی ۶ حالت دارد {۱,۲,۳,۴,۵,۶} و همچنین تاس قرمز نیز ۶ حالت. هر دو تاس را می‌اندازیم. پس کار شامل ۲ مرحله است. عدد هر تاس نیز مستقل از عدد تاس دیگر است، پس طبق اصل ضرب ۳۶=۶×۶ حالت دارد.

۴. گزینهٔ ۳ تاس قرمز اعداد «۵,۳,۲» و تاس آبی اعداد «۶,۴,۲» می‌تواند داشته باشد. این کار شامل ۲ مرحلهٔ مستقل از هم است، پس طبق اصل ضرب تعداد حالات ۹=۳×۳ است.

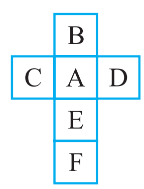
۵. گزینهٔ ۴ پاسخ به هر سؤال ۴ گزینه‌ای ۵ حالت دارد (انتخاب هر یک از گزینه‌ها، یا خالی گذاشتن تست) و پاسخ به هر سؤال صحیح - غلط سه حالت دارد (صحیح یا غلط یا پاسخ ندادن به سؤال). پاسخ هر سؤال مستقل از پاسخ سایر سؤالات است. طبق اصل ضرب تعداد کل حالات پاسخ به این آزمون برابر است با:

۵×۵×۵×۳×۳=۱۱۲۵

۶. گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم با کلمات n حرفی صندلی‌های سالن را نام‌گذاری می‌کنیم. در هر کدام از این جایگاه‌ها ۴ حالت انتخاب حرف داریم (A یا B یا C یا D)، پس تعداد کل این کلمات برابر است با ۴^n. از آنجا که این سالن ۱۰۰۰ صندلی دارد، باید $۴^n \geq ۱۰۰۰$ باشد. با بررسی nهای مختلف، n حداقل باید ۵ باشد.

۷. گزینهٔ ۱ از هر عضو مجموعهٔ A می‌توان به هر یک از اعضای مجموعهٔ B، پیکان وصل کرد. پس هر عضو مجموعهٔ A (دامنه) برای انتخاب برد، ۳ حالت دارد و از آنجا که برد هر عضو مستقل از برد عضو دیگر است، طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با ۲۷=۳×۳×۳.

۸. گزینهٔ ۳ خانهٔ A را به ۳ طریق می‌توان رنگ کرد. با انتخاب هر رنگ برای این خانه، خانه‌های B، C، D و E هر کدام ۲ حالت دارند (رنگی غیر از رنگ خانهٔ A)، سپس خانهٔ F به دو حالت رنگ می‌شود (رنگی غیر از رنگ E)، پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با: ۹۶=۲×۲×۲×۲×۲×۳



۹. گزینهٔ ۲ برای حرکت از A به C، ۲ مسیر وجود دارد:
۱) ABC: که طبق اصل ضرب ۱۲=۳×۴ راه وجود دارد.
۲) ADC: که طبق اصل ضرب ۶=۳×۲ راه وجود دارد.
از آنجا که یکی از مسیرهای ABC «یا» ADC انتخاب می‌شود، طبق اصل جمع، مجموع کل راه‌ها برابر است با: ۱۸=۱۲+۶

۱۰. گزینهٔ ۴ می‌خواهیم از A به C برویم، سپس به A برگردیم. این کار شامل ۲ مرحله است: رفتن از A به C و برگشت از C به A. طبق راه‌حل سؤال قبل، به ۱۸ طریق می‌توان از A به C رفت. به روش مشابه، به ۱۸ طریق می‌توان از C به A برگشت. پس تعداد کل راه‌های رفت و برگشت برابر است با:

۳۲۴=۱۸×۱۸

۱۱. گزینهٔ ۲ رفتن از A به C و سپس برگشت به A، ۴ حالت دارد:

۱) ABCBA
برای مسیر رفت، ۴×۳ حالت ممکن است. در مسیر برگشت، یک راه از مسیر C به B کم می‌شود. همچنین یک راه از مسیر B به A کم می‌شود. پس تعداد حالات این مسیر برابر است با: ۷۲=۲×۳×۴×۳

۲) ۷۲=۳×۴×۲×۳ → ABCDA

۳) ۷۲=۳×۴×۲×۳ → ADCBA

۴) ADCDA
مانند حالت (۱)، در راه برگشت، از هر مسیر یک حالت کم می‌شود:
۱۲=۲×۱×۲×۳

کل حالات: ۲۲۸=۱۲+۷۲+۷۲+۷۲

۱۲. گزینهٔ ۲ برای رفتن از A به D، بدون عبور از C، چند حالت ممکن است:

A → D: ۲ حالت

A → B → D: ۳=۳×۱ حالت

مجموع حالات: ۵=۳+۲ حالت

۱۳. گزینهٔ ۱ مسافر اول برای پیاده شدن از اتوبوس ۴ انتخاب دارد (یا ایستگاه اول یا دوم یا سوم و یا چهارم). همچنین مسافر دوم و سایر مسافرها هر کدام ۴ حالت برای پیاده شدن دارند. از آنجا که نوع انتخاب هر مسافر مستقل از سایر مسافران است، طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با:

۱۰۲۴=۴×۴×۴×۴×۴

۱۴. گزینهٔ ۴ برای رفتن از A به D مسیرهای زیر ممکن است. فرض می‌کنیم تعداد مسیرها از F به E، n تا باشد.

۱) A → B → C → D: ۱۲=۲×۲×۳

۲) A → B → C → E → D: ۳۶=۳×۲×۲×۳

۳) A → F → E → D: ۳n=۳×n×۱

۴) A → F → E → C → D: ۴n=۲×۲×n×۱

تعداد کل مسیرها از A به D، ۸۳ تاست:

۱۲+۳۶+۳n+۴n=۸۳ ⇒ ۷n=۳۵ ⇒ n=۵

۱۵. گزینهٔ ۲ توپ اول ۴ حالت دارد (جعبهٔ ۱، جعبهٔ ۲ یا جعبهٔ ۳ یا جعبهٔ ۴). به همین ترتیب ۲ توپ دیگر نیز هر کدام ۴ حالت دارند. از آنجا که انتخاب هر توپ مستقل از سایر توپ‌هاست، طبق اصل ضرب این کار به ۶۴=۴×۴×۴ حالت امکان‌پذیر است.

۱۶. گزینهٔ ۳ برای رفتن از A به F با عبور از شهر D، مسیرهای زیر وجود دارد:

۱) A → B → D → F: ۲=۱×۱×۲

۲) A → B → D → E → F: ۶=۱×۳×۱×۲

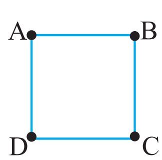
۳) A → B → E → D → F: ۶=۱×۳×۱×۲

۴) A → B → C → D → F: ۱۲=۱×۲×۳×۲

۵) A → B → C → D → E → F: ۳۶=۱×۳×۲×۳×۲

کل حالات: ۶۲=۳۶+۱۲+۶+۶+۲

۱۷. گزینهٔ ۳ برای رنگ رئوس B و D دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:



۱) B و D هم‌رنگ باشند: این کار به ۴ طریق امکان دارد. حال برای رأس A و C هرکدام ۳ رنگ را می‌توانیم استفاده کنیم (غیر از رنگ رئوس B و D)، پس طبق اصل ضرب: $۴\times۳\times۳=۳۶$

۲) رئوس B و D غیرهم‌رنگ باشند. ابتدا رأس B را به ۴ حالت و سپس رأس D را به ۳ حالت رنگ می‌کنیم. برای رأس‌های A و C، هر کدام ۲ انتخاب داریم (رنگی غیر از رنگ رأس‌های B و D)، پس طبق اصل ضرب داریم:

$۴\times۳\times۲\times۲=۴۸$

طبق اصل جمع، کل حالات برابر است با: $۳۶+۴۸=۸۴$

۱۸. گزینهٔ ۳ برای کفش دو حالت A یا C وجود دارد.

الف) اگر کفش با رنگ A بپوشد، برای پیراهن ۲ انتخاب دارد (A یا B) و برای شلوار ۳ انتخاب دارد. طبق اصل ضرب تعداد این حالت برابر است با: $۲\times۳=۶$

ب) اگر کفش با رنگ C بپوشد، برای پیراهن ۲ انتخاب دارد (B یا C) و برای شلوار نیز ۲ انتخاب دارد (E یا D) پس طبق اصل ضرب تعداد این حالت برابر است با: $۲\times۲=۴$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با: $۶+۴=۱۰$

۱۹. گزینهٔ ۲ این سؤال را از اصل متمم حل می‌کنیم.

برای روز تولد هر نفر ۷ حالت وجود دارد (شنبه یا یکشنبه یا ... یا جمعه)، پس تعداد کل حالات روز تولد ۴ نفر برابر است با: $۷^۴$.

متمم «حداقل یک نفر متولد جمعه باشد» این است که «حداکثر صفر نفر متولد جمعه باشد»، یعنی هیچ‌یک متولد جمعه نباشد، پس روز تولد هر نفر ۶ حالت دارد؛ یعنی حالات نامطلوب $۶^۴$ است، بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$۷^۴-۶^۴=۲۴۰۱-۱۲۹۶=۱۱۰۵$

۲۰. گزینهٔ ۳ برای انتخاب حرف پلاک ۲ حالت و برای انتخاب هر کدام از ۵ رقم سمت چپ آن، ۲ حالت (۷ یا ۹) وجود دارد. پس طبق اصل ضرب تعداد کل پلاک‌ها برابر است با: $۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۶=۶۴$

۲۱. گزینهٔ ۲ تعداد پلاک‌های ممکن با اطلاعات هر گزینه را به دست می‌آوریم. هر گزینه که تعداد پلاک‌های ممکن در آن عدد کمتری شود برای پلیس نشانی دقیق‌تری است. ۱) ۲ رقم سمت راست و حرف پلاک ۱ حالت دارد. ۵ رقم دیگر فرد است. یعنی هر کدام ۵ حالت دارد. پس تعداد پلاک‌های با این مشخصات برابر است با:

$۵^۵=۳۱۲۵$

۲) برای ۲ رقم اول از سمت چپ ۹ حالت وجود دارد. {۱۱ یا ۲۲ یا ... یا ۹۹} برای هر کدام از ۳ رقم بعدی نیز ۴ حالت {۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸} وجود دارد، پس تعداد پلاک‌های با این مشخصات برابر است با: $۹\times۴^۳=۵۷۶$

۳) برای ۳ رقم وسط پلاک هر یک از اعداد ۱ تا ۹ مجاز است. پس تعداد پلاک‌های با این مشخصات برابر است با: $۹^۳=۷۲۹$

۴) برای هر کدام از ۲ رقم سمت چپ ۴ حالت، برای حرف پلاک ۲ حالت و برای هر کدام از ۳ رقم وسط ۳ حالت {۸ یا ۹ یا ۷} وجود دارد.

پس تعداد پلاک‌های با این مشخصات برابر است با: $۴\times۴\times۲\times۳\times۳\times۳=۸۶۴$

بنابراین پلاک‌های با ویژگی‌های گزینهٔ «۲» تعداد کمتری دارند و برای پلیس، پیدا کردن متهم آسان‌تر است.

۲۲. گزینهٔ ۲ فرد A به ۳ حالت می‌تواند کیف بردارد. فرض می‌کنیم کیف فرد B را بردارد. فرد B نیز به ۳ حالت می‌تواند کیف بردارد. پس از آنکه فرد B کیفی را بردارد، ۲ نفر دیگر فقط به یک طریق می‌توانند کیف فرد دیگری را بردارند. پس تعداد کل حالات برابر است با: $۳\times۳=۹$

۲۳. گزینهٔ ۳ مقسوم‌علیه‌های عدد $۲^۲\times۷^۲\times۳^۳$ فقط شامل عوامل اول ۲ یا ۳ یا ۷ است. توان این عوامل حداکثر به اندازهٔ توان عامل در خود عدد است، یعنی توان عامل ۲، حداکثر ۲ است. پس می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. توان عامل ۷ حداکثر ۲ و توان عامل ۳ حداکثر ۳ است، پس طبق اصل ضرب تعداد کل مقسوم‌علیه‌های این عدد برابر است با: $۳\times۳\times۴=۳۶$

نکته اگر عددی پس از تجزیه به عوامل اول به‌صورت $...a^{\alpha}.b^{\beta}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های آن برابر است با: $(\alpha+۱)(\beta+۱)...$

۲۴. گزینهٔ ۱ در این بازی یاسمن می‌تواند ۰−۱ یا ۰−۲ یا ۰−۳ یا ۱−۲ برنده شود.

الف) برد ۰−۱: ابتدا به ۳ حالت، مرتبه‌ای که یاسمن برنده شده انتخاب می‌شود. سپس در این مرحله به ۳ حالت می‌تواند برنده باشد (سنگ بر قیچی یا قیچی بر کاغذ یا کاغذ بر سنگ). در دو حالت دیگر بازی مساوی شده. یعنی کسی برنده نشده. پس یاسمن و کیانا مثل هم بازی کرده‌اند که هر بازی ۳ حالت دارد.

تعداد این حالت: $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$

ب) برد ۰−۲: به ۳ حالت بازی مساوی شده و به ۳ حالت نوع مساوی انتخاب می‌شود. ۲ بازی دیگر را یاسمن برنده شده که در هر بازی ۳ حالت ممکن است.

تعداد این حالت: $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$

پ) برد ۰−۳: هر ۳ بازی را یاسمن برده است که هر بازی ۳ حالت دارد، پس تعداد این حالت برابر است با: $۳\times۳\times۳=۲۷$

ت) برد ۱−۲: کیانا یک بازی را برده است. به ۳ حالت این بازی و به ۳ حالت نوع برد کیانا را انتخاب می‌کنیم. ۲ بازی دیگر را یاسمن برده که هر بازی ۳ حالت دارد.

تعداد این حالت: $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$

مجموع کل حالات: $۸۱+۸۱+۲۷+۸۱=۲۷۰$

۲۵. گزینهٔ ۴ تکرار مجاز است: $\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۳}=۲۷$

۲۶. گزینهٔ ۳ تکرار مجاز نیست: $\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۲۴$

۲۷. گزینهٔ ۳ در این سؤال تکرار مجاز است. برای آنکه عدد فرد باشد باید یکان آن ۷ یا ۹ باشد. برای دهگان و صدگان ۵ انتخاب مجاز است:

$\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۲}=۵۰$

۲۸. گزینهٔ ۱ برای یکان فقط یک انتخاب وجود دارد (عدد ۴). با انتخاب عدد ۴ برای یکان، برای دهگان ۴ انتخاب ممکن است: $\underline{۴}\times\underline{۱}=۴$

۲۹. گزینهٔ ۲ در این تست با ۲ خانه مشروط مواجه هستیم: یکان و صدگان. ارقام مجاز برای یکان «۱،۳» و ارقام مجاز برای صدگان «۱،۲،۳،۶» است. از آنجا که ارقام مجاز یکان، زیرمجموعهٔ ارقام مجاز صدگان است، از یکان شروع می‌کنیم و سپس سراغ صدگان می‌رویم: $\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۱۸$

۳۰. گزینهٔ ۴ در این تست ۲ خانهٔ مشروط داریم: یکان و صدگان. ارقام مجاز یکان «۰،۶،۸» و ارقام مجاز صدگان «۱،۶،۵،۸» است. از آنجا که این ارقام اشتراک دارند و هیچ‌کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیست باید این سؤال را با دسته‌بندی حل کنیم. برای یکان ۲ حالت در نظر می‌گیریم:

الف) یکان «۰» باشد: $\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۱}=۱۲$

پس از انتخاب یکان، برای صدگان ۴ انتخاب داریم. از آنجا که از ۵ عدد داده‌شده یک عدد در یکان و یک عدد در صدگان استفاده شده، برای دهگان ۳ انتخاب داریم.

ب) یکان ۶ یا ۸ باشد.

پس از انتخاب یکان، برای انتخاب صدگان ۳ انتخاب داریم. سپس برای دهگان ۳ انتخاب خواهیم داشت: $\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۱۸$

تعداد کل اعداد برابر است با: $۱۲+۱۸=۳۰$

۳۱. گزینهٔ ۱ ۲ خانهٔ مشروط داریم: یکان و هزارگان. ارقام مجاز یکان {۲،۶} و ارقام مجاز هزارگان {۹،۷} است. (برای آنکه عدد از ۷۰۰۰ بزرگتر باشد باید هزارگان آن ۷ یا بیشتر باشد.) ارقام مجاز اشتراک ندارند. پس از یکی