

فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است. در بین جملاتی که ما از آن‌ها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به ویژه صدق و کذب یا درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

جمله‌های غیرخبری مانند «چه هوای سردی» یا «شما چند سال دارید؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «علم بهتر از ثروت است». زیرا ممکن است به نظر بعضی‌ها ثروت بهتر از علم باشد.

**مثال:** کدامیک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید:

- الف) شما چند تا کتاب غیردرسی خوانده‌اید؟
- ب) عدد  $\sqrt{7}$  عددی گویا است.
- پ) عددی ۲۳ عددی اول است.
- ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.
- ث)  $4 + 2 \times 3 = 18$
- ج) عدد  $(-3)^{2n}$  همواره مثبت است. ( $n \in \mathbb{N}$ )
- چ) سیب از موز خوش‌مزه‌تر است.
- ح) لطفاً کتابت را به من قرض بده.

**حل:** الف) گزاره نیست. جمله‌های پرسشی گزاره نیستند.

ب) گزاره است. چون عدد ۷ جذر کامل ندارد، پس گزاره نادرست است.

پ) گزاره است. چون عدد ۲۳ عددی اول است (فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است)، پس گزاره درست است.

ت) گزاره درست است.

ث) گزاره است.  $4 + 2 \times 3 = 4 + 6 = 10$ ؛ بنابراین گزاره نادرست است.

ج) گزاره درست است.  $2n$  همواره زوج است. وقتی  $(-3)^{2n}$  به توان زوج می‌رسد، مثبت می‌شود.

چ) گزاره نیست. زیرا نمی‌توانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

ح) گزاره نیست. جمله‌های امری گزاره نیستند.

گاهی اوقات گزاره‌ای که بیان می‌کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است. در این صورت چگونه می‌توانیم درستی یا نادرستی این

گزاره‌ها را که به گزاره‌های ترکیبی معروف‌اند، مشخص کنیم؟ مثلاً:

«تهران پایتخت ایران است و  $\frac{2}{5}$  عددی گویا است»

«۱۲ عددی اول است یا  $\sqrt{9}$  عددی گنگ است»

برای تعیین درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب، لازم است از نمادها و قراردادهایی استفاده کنیم. به مجموعه این قراردادها و نمادگذاری‌های جبر گزاره‌ها یا حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند  $p$ ،  $q$ ،  $r$  و... نمایش می‌دهیم.

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$2^1 = 2$  = تعداد حالت‌های ارزشی یک گزاره

$2^2 = 4$  = تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره

$2^3 = 8$  = تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره

$2^n$  = تعداد حالت‌های ارزشی  $n$  گزاره

**مثال:** جدول ارزش درستی چهار گزاره را نمایش دهید:

$$2^4 = 16$$

**حل:** تعداد حالت‌های ارزشی ۴ گزاره برابر است با:

<b>p</b>	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن
<b>q</b>	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د	د
<b>r</b>	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	ن	ن
<b>t</b>	د	د	د	د	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن

**نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره  $p$  را با نماد  $(\sim p)$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض  $p$ » یا «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم.

از آن‌جا که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است

فعل جمله را نفی کنیم؛ واضح است که با این کار اگر گزاره  $p$  درست باشد، گزاره  $\sim p$  نادرست و اگر  $p$

گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره  $\sim p$  درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزاره « $\sqrt{2}$  عددی حقیقی است» به صورت « $\sqrt{2}$  عدد حقیقی نیست» بیان

می‌شود. جدول ارزش درستی گزاره‌های  $p$  و  $\sim p$  به صورت روبه‌رو است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۱- جدول روبه‌رو را کامل کنید :

۱	گزاره	
	درست	نادرست
	✓	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و...

۲- اگر  $p$  گزاره‌ای درست ،  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

۳- درستی هم‌ارزی روبه‌رو را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید :

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

۴- نمودار تابع چندضابطه‌ای روبه‌رو را رسم کنید :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

۵- حاصل عبارت‌های روبه‌رو را به دست آورید :

الف)  $[3/99]$       ب)  $[-2] =$

۶- نمودار توابع روبه‌رو را رسم کنید :

الف)  $y = -|x|$       ب)  $y = 2|x| + 1$

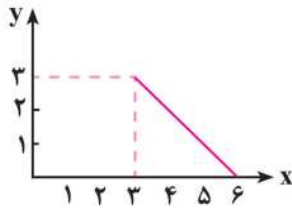
۷- یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه  $A$  و  $B$  است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید  $x$  تن کاشی در کارخانه  $A$  به ترتیب  $16x^2 + 16x - 2x^2 + 6$  و  $8x + 6$  و در کارخانه  $B$  به ترتیب  $12x - x^2 + 9$  و  $2x + 9$  واحد باشد :

الف) تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

ب) این شرکت با چه میزان تولید کاشی به سود پیشینه خود می‌رسد؟

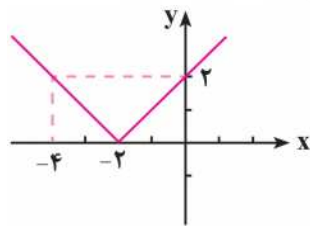
۸- توابع  $f(x) = x$  و  $g(x) = -x$  مفروض‌اند. ضابطه تابع  $(f + 3g)(x)$  را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۹- ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید :



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 3 \\ \dots & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

۱۰- با استفاده از قدرمطلق، ضابطه تابع روبه‌رو را بنویسید.



۱۱- در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیش‌تر شاغل‌اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیش‌تر جویای کار می‌باشند :

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر ۵ درصد باشد؟

۱۲- تعداد گل‌های زده‌شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است :

۲۸	۲۶	۲۴	۲۲	۲۰	هفته
۳۵	۳۵	۳۲	۲۷	۳۰	تعداد گل‌ها

الف) سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید.

ب) تعداد گل‌های هفته ۳۰ ام را برون‌یابی کنید.

۱- ترکیب عطفی دو گزاره در صورتی درست است که هر دو گزاره درست باشد. بنابراین باید یک گزاره درست مثال بزنیم. ( $5 > 2$ )

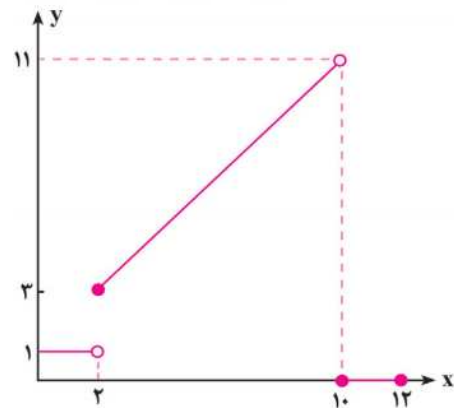
۲- درست.  $d \Rightarrow d \Rightarrow d \Rightarrow r$

۳-

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

$y = x + 1$

x	۲	۱۰
y	۳	۱۱



۴-

ب)  $[-2] = -2$

الف)  $3 < 3/99 < 4 \Rightarrow [3/99] = 3$

۵-

$y = 2|x| + 1$

ب)

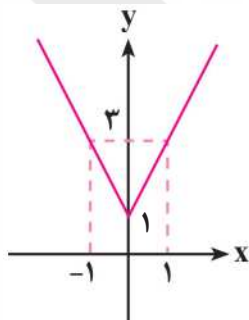
$y = -|x|$

۶- الف)

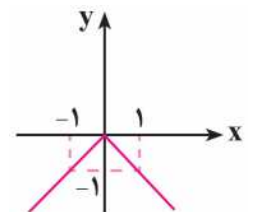
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(-x) = x & x < 0 \\ -(x) = -x & x \geq 0 \end{cases}$$

x	-1	0	1
y	3	1	3



x	-1	0	1
y	-1	0	-1



۷- الف)  $p(x) = ((-2x^2 + 16x) + (-x^2 + 12x)) - (8x + 6 + 2x + 9) = -3x^2 + 18x - 15$   $\Rightarrow$  هزینه - درآمد = سود

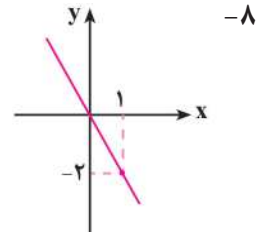
ب)  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} = 3$  تن

ب)

$$(f + 3g)(x) = f(x) + 3g(x) = x + (-3x) = -2x$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+3g} = \mathbb{R}$$

x	۰	۱
y	۰	-۲

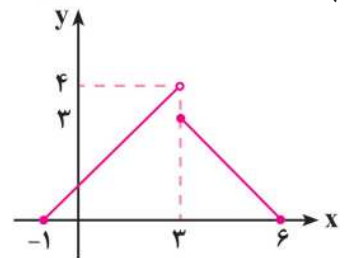


$$f(x) = x + 1 \quad -1 \leq x < 3$$

$$m = \frac{\text{تفریق عرض‌ها}}{\text{تفریق طول‌ها}} = \frac{۰ - ۳}{۶ - ۳} = -۱$$

x	-۱	۳
y	۰	۴

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - ۰ = -۱(x - ۶) \Rightarrow y = -x + ۶$$



۱۰- با توجه به نمودار  $x = -۲$  رأس زاویه است. بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = a|x + ۲| + b$  است.

$$\left. \begin{aligned} (-۲, ۰) \in f &\Rightarrow ۰ = a|-۲+۲| + b \Rightarrow b = ۰ \\ (۰, ۲) \in f &\Rightarrow ۲ = a|۰+۲| + ۰ \Rightarrow a = ۱ \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = |x + ۲|$$

$$\text{نرخ بی‌کاری} = \frac{\text{جمعیت بی‌کار}}{\text{جمعیت فعال}} = \frac{۲۰۰}{۱۲۰۰ + ۲۰۰} \approx ۰/۱۴۳ \quad (۱۱- الف)$$

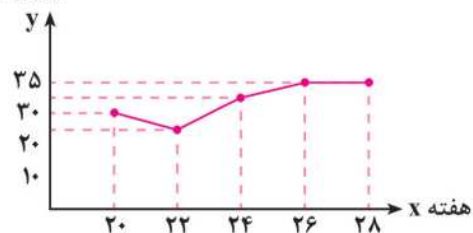
$$۰/۰۵ = \frac{۲۰۰ - x}{۱۴۰۰} \Rightarrow ۷۰ = ۲۰۰ - x \Rightarrow x = ۱۳۰. \text{ با ایجاد شغل جمعیت فعال ثابت ولی تعداد بی‌کارها کاهش می‌یابد.}$$

(ب) ابتدا نقطه میانگین‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{میانگین هفته‌ها} = \frac{۲۰ + ۲۲ + ۲۴ + ۲۶ + ۲۸}{۵} = ۲۴$$

$$\text{میانگین گل‌ها} = \frac{۳۰ + ۲۷ + ۳۲ + ۳۵ + ۳۵}{۵} = ۳۱/۸$$

تعداد گل‌ها



(۱۲- الف)

معادله خطی که نقطه میانگین هفته و گل را به نقطه پایانی وصل می‌کند، به دست می‌آوریم.

$$(۲۴, ۳۱/۸)$$

$$(۲۸, ۳۵)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - ۳۵ = ۰/۸(x - ۲۸)$$

$$y - ۳۵ = ۰/۸(۳۰ - ۲۸) \rightarrow y = ۳۶/۶ \text{ گل}$$

$$m = \frac{\text{تفریق عرض‌ها}}{\text{تفریق طول‌ها}} = \frac{۳۵ - ۳۱/۸}{۲۸ - ۲۴} = ۰/۸$$

کافی است مقدار  $x$  را ۳۰ قرار دهیم.