مقدمه ویرایش جدید

درسنامه و تست‌های دهم، یازدهم و دوازدهم رو همراه پاسخ‌های تشریحی اون‌ها توی یک کتاب آوردیم!
برای این‌که حجم کتاب خیلی بالا نره، شروع به دست‌چین کردن تست‌ها و پیرایش درسنامه‌ها کردیم. توی این کار چنان وسواسی به خرج دادیم که مثال‌زدنیه!
از مؤلفای باتجربهٔ خودمون، استادان وهاب تقی‌زاده و علیرضا نداف‌زاده (دبیر دبیرستان‌های ممتاز علامه) خواستیم تا همهٔ درسنامه‌ها و تست‌های کتاب رو دوباره بررسی کنن.
ولی به این‌جا بسنده نکردیم!
از یه گروه از بهترین دبیرا خواستیم تا (اون‌ها هم) کتاب رو بررسی و نقد کنن تا حتی ایرادهای کوچیک باقی‌مونده هم برطرف شه.
کاری کردیم که حداکثر استفادهٔ خرد جمعی رو به کار برده باشیم تا شما تو حداقل زمان به بهترین نتیجه برسین.
تست‌های کنکور امسال رو هم به کتاب اضافه کردیم.

روی بندبند جمله‌ها و تست‌های کتاب وقت گذاشتیم. شاید باورتون نشه ولی برای درک مفاهیم کتاب، کلی جلسه با مؤلفای محترم کتاب درسی داشتیم؛ خلاصه، قدر این کتاب رو بدونین.

خوبه بدونید ما توی درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.

هر فصل رو به **سه قسمت** تقسیم کردیم:

قسمت اول: درسنامه

- توی این قسمت، یه درسنامهٔ مفصل آوردیم که تمام مباحث رو موبه‌مو بهت یاد میده که پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست‌داشتنیه؛ خلاصه، این قسمت کُل کتابه.

توی حل تست‌های آموزشی **یه استراتژی حل** برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی!

مُهم یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات **مُهر مهم** زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

هر جا دیدیم که بیشتر بچه‌ها راه‌حل رو اشتباه میرن، برات **هشدار** گذاشتیم.

اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره، **یک‌گام فراتر** گذاشتیم، این بخش رو تو اولویت اول مطالعه‌ات نذار.

از همه مهم‌ترا یه راه‌حل‌هایی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم **فرمول ممنوع**، این دیگه آخرشه، بدون این‌که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی.

نکته، **دقت کنید** و **تذکر** هم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

■ تعدادی تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدوم از این مؤلف‌ها، یه وزنه‌ای هستن تو ریاضی!

راستی یه سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستن رو برات تو این قسمت آوردیم.
تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندیم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!
شمارهٔ بعضی از تست‌ها رو با رنگ آبی مشخص کردیم که سؤال‌های سخت و مهمی هستن.
یه سری تست‌هایی هم اومده به نام برای ۱۰۰، واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰ بزنن و برای همه لازم نیست. با توجه به کنکورهای ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲، بخش برای ۱۰۰٪ رو خیلی تقویت کردیم؛ به طوری که برخی تست‌ها واقعاً دشوار هستن. بچه‌های قوی، براتون خوراک عالی تستی آوردیم.
در آخر، آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجید.
برای اولین بار، تست‌ها رو دسته‌بندی کردیم؛ مثلاً تو بخش رفع ابهام $\frac{0}{0}$، تعیین کردیم کدوم‌ها مثلثاتی کمان غیرصفرند، کدوم‌ها مثلثاتی کمان صفرند و....

قسمت سوم: پاسخ‌نامهٔ تشریحی

■ خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به کار نرفتن.
به همهٔ همکارام توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن، چون همهٔ اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این‌طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه.
تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

قدردانی

توی تهیهٔ این کتاب خیلی‌ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

- آقای احمد اختیاری، مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.
- استاد محمدحسین انوشه، مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.
- خانم زهرا رسولی، مسئول ویراستاری، خانم میترا آقایی و آقایان مهدی مرادی، مهدی حصاری، امیرحسین عباسی، وحید جعفری و مهرشاد حسنی که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.
- گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات مهروماه به مدیریت آقای محسن فرهادی و تیم حرفه‌ایشون، خانم الهام اسلامی و آقای تایماز کاویانی که با طراحی‌های زیبا روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.
- از گروه تولید انتشارات مهروماه به مدیریت سرکار خانم مریم تاجداری، صفحه‌آراهای چیره‌دست خانم‌ها الهام عربی، فرشته سلطانی و رسام‌محترم خانم مریم صابری، کمال تشکر را دارم که در مراحل تولید و ویرایش جدید کتاب با صبر و پشتکار فراوان این امر را میسر نمودند.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز، صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. و نظرات خود را از طریق اینستاگرام به آی‌دی زیر ارسال نمایند.

@ashrafii.official

عباس اشرفی

فهرست

فصل ۱:
عبارت‌های جبری (اتحادها) ۷
- اتحادها
- تجزیه
- مخرج مشترک

فصل ۲:
توان‌های گویا (ریشه و رادیکال) ۱۷
- ریشه و توان
- توان‌های گویا
- گویا کردن مخرج کسرها

فصل ۳:
نامعادله و تعیین علامت ۲۷
- بازه‌ها
- تعیین علامت
- نامعادله

فصل ۴:
الگو و دنباله ۳۹
- الگو
- دنبالهٔ
- دنبالهٔ حسابی
- مجموع جملات دنبالهٔ حسابی
- دنبالهٔ هندسی
- ترکیب دنبالهٔ حسابی و هندسی (واسطه‌ها)
- مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

فصل ۵:
هندسهٔ تحلیلی (خط) ۵۷
- مختصات
- نقطه و خط

فصل ۶:
معادلات گویا و گنگ ۷۱
- معادلات شامل عبارت‌های گویا
- حل مسائل به کمک معادلات گویا
- معادلات شامل عبارت‌های گنگ

فصل ۷:
قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۸۱
- تعریف قدرمطلق
- رسم نمودار توابع قدرمطلقی
- معادلات قدرمطلقی
- نامعادلات قدرمطلقی

فصل ۸:
جزء صحیح و ویژگی‌های آن ۹۷
- مفهوم جزءصحیح و ویژگی‌های آن
- نمودار توابع شامل جزءصحیح

فصل ۹:
مثلثات (دهم و یازدهم) ۱۰۹
- درجه و رادیان
- نسبت‌های مثلثاتی
- مثلثات در حل مسائل کاربردی
- شیب خط و $\tan\alpha$
- دایرهٔ مثلثاتی
- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
- نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2}\pm\theta (k\in\mathbb{Z})$
- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی (کمان $\alpha\pm\beta$) و نتایج آن‌ها
- نمودار توابع مثلثاتی و ویژگی‌های آن‌ها

فصل ۱۰:
تابع (دهم و یازدهم) ۱۴۷
- مفهوم تابع و مدل‌سازی (نمایش جبری)
- بررسی تابع بودن یک رابطه
- معرفی توابع خاص
- دامنهٔ توابع
- برد توابع
- برابری توابع
- توابع یک‌به‌یک
- وارون تابع و تابع وارون
- اعمال جبری روی توابع
- ترکیب توابع
- ترکیب تابع مرکب و وارون تابع

فصل ۱۱:
معادله و تابع درجه ۲ ۱۸۳
- معادلهٔ درجهٔ دوم و مسائل کاربردی
- روابط مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها
- روابط بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم
- ساختن معادلهٔ درجهٔ دوم جدید
- معادلهٔ دومجذوری
- نمودار تابع $y=ax^2+bx+c (a\neq 0)$

فصل ۱۲:
توابع نمایی و لگاریتمی ۲۰۵

- توابع نمایی و نمودار آن‌ها
- معادلات و نامعادلات نمایی
- توابع لگاریتمی و نمودار آن‌ها
- دامنه و برد توابع لگاریتمی
- قوانین لگاریتم
- معادلات و نامعادلات لگاریتمی
- استفاده از لگاریتم در حل مسائل

فصل ۱۳:
حد و پیوستگی ۲۲۷

- همسایگی یک نقطه
- حد توابع و حدهای یک‌طرفه
- محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
- محاسبهٔ حد توابع کسری (هم‌ارزی‌ها)
- پیوستگی توابع در نقطه
- پیوستگی توابع روی بازه

فصل ۱۴:
تابع (دوازدهم) ۲۵۵

- انتقال نمودار توابع
- تبدیل نمودار توابع
- نمودار تابع $y=|f(x)|$
- نمودار تابع $y=f(|x|)$
- نمودار تابع درجه ۳
- یکنوایی توابع
- بخش‌پذیری و تقسیم
- اتحادهای $x^n \mp a^n$

فصل ۱۵:
مثلثات (دوازدهم) ۲۸۵

- تناوب
- نمودار توابع sin و cos
- توابع tan و cot و نمودار آن‌ها
- معادلات مثلثاتی

فصل ۱۶:
حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت ۳۱۵

- حدهای نامتناهی
- حد در بی‌نهایت
- مجانب قائم
- مجانب افقی
- مسائل ترکیبی از مجانب قائم و افقی

فصل ۱۷:
مشتق ۳۶۳

- تعبیر هندسی مشتق
- تعریف مشتق
- نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از تعریف مشتق)
- مشتق‌پذیری توابع در نقطه و نقاط مشتق‌ناپذیر مهم (استفاده از تعریف مشتق)
- تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری
- مشتق تابع مرکب
- خط مماس (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)
- نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)
- مشتق‌پذیری توابع در نقطه (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)
- مشتق‌پذیری توابع روی بازه
- مشتق مراتب بالاتر
- آهنگ تغییر
- قاعدهٔ هوپیتال (HOP)

فصل ۱۸:
کاربردهای مشتق ۴۱۵

- نقاط بحرانی توابع
- اکسترمم‌ها (نمودار)
- اکسترمم‌های مطلق
- بهینه‌سازی
- ارتباط مشتق و یکنوایی توابع
- اکسترمم‌های نسبی
- جهت تقعر نمودار توابع
- ترکیب یکنوایی و جهت تقعر نمودار توابع
- نقطهٔ عطف
- ترکیب نقطهٔ عطف، یکنوایی و اکسترمم‌های توابع
- ارتباط بین نمودار f، f' و f''
- توابع هموگرافیک
- معادله و تابع درجه ۳

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۶۹

پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۶۹۴

فصل ۳

نامعادله و تعیین علامت

در این فصل با حل نامعادلات چندجمله‌ای با درجهٔ بیش از یک، کسری و ... آشنا می‌شوید. این فصل پیش‌نیاز فصل‌های تابع، قدرمطلق و کاربرد مشتق است.

بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که شامل تمام **اعداد حقیقی** بین دو عدد مشخص‌اند، **بازه** نامیده می‌شوند.

برای نمونه: می‌توان مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\le x\le ۵\}$ را به‌صورت بازهٔ $[-۱,۵]$ نوشت.

اگر نقاط ابتدایی و انتهایی، **عضو** بازه باشند، آن را **بازهٔ بسته** و اگر این دو نقطه عضو بازه نباشند، آن را **بازهٔ باز** می‌نامیم.

برای نمونه:

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۱\}=[۰,۱]$ بازهٔ بسته

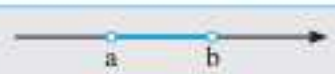
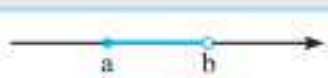
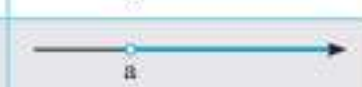
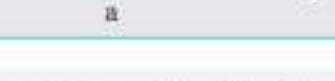
$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱<x<۵\}=(-۱,۵)$ بازهٔ باز

$C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\le x<۵\}=[-۱,۵)$ **برای نمونه:** اگر فقط یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی، عضو بازه باشد، آن را بازهٔ **نیم‌باز** می‌نامیم.

اگر تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک عدد یا تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر از یک عدد معین، موردنظر باشد، در بازه از نماد ∞ استفاده می‌شود. **برای نمونه:**

$D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge -۲\}=[-۲,+\infty)$

بازه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد. $(a<b)$

نمایش نموداری	بازه	نمایش مجموعه‌ای
	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,a\le x\le b\}$
	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,a<x<b\}$
	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,a\le x<b\}$
	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,a<x\le b\}$
	$[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,x\ge a\}$
	$(a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,x>a\}$
	$(-\infty,a]$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,x\le a\}$
	$(-\infty,a)$	$\{x\in\mathbb{R}\,\|\,x<a\}$

تست: **m باید عضو کدام بازه باشد تا اشتراک دو بازهٔ $[-۱,۳)$ و $[۱,۷,۲m+۱]$ برابر تهی شود؟**

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-\infty,۱]$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

اگر اشتراک این دو بازه تهی باشد، باید عدد انتهایی بازهٔ $[-۱,۳)$ یعنی ۳، از عدد ابتدایی بازهٔ $(۲m+۱,۷]$ یعنی $۲m+۱$، کوچک‌تر باشد، بنابراین:

$$۳<۲m+۱\Rightarrow ۲<۲m\Rightarrow ۱<m$$

از طرفی $۲m+۱<۷$، پس $m<۳$ است. اشتراک دو مجموعه‌جواب به دست آمده برابر بازهٔ $(۱,۳)$ می‌شود.

تعیین علامت

برای آن‌که بدانیم علامت عبارتی دلخواه، به ازای چه مقادیری از متغیرش مثبت، منفی یا صفر است، به فرآیندی نیاز داریم که آن را **تعیین علامت** می‌نامیم.

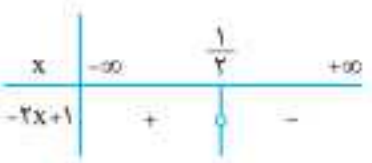
تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ اول

برای تعیین‌علامت چندجمله‌ای‌های درجهٔ اول $ax+b$، ابتدا جواب معادلهٔ $ax+b=۰$ (یعنی $x=-\frac{b}{a}$) را می‌یابیم. این عبارت به ازای xهای قبل از $x=-\frac{b}{a}$ علامتی **مخالف علامت** a و به ازای xهای بعد از $x=-\frac{b}{a}$ علامتی **موافق علامت** a دارد.

به زبان ریاضی جدول روبه‌رو را رسم می‌کنیم:

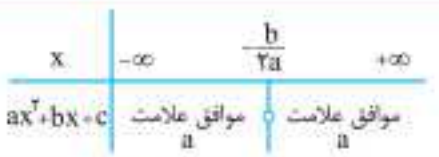
برای نمونه: چندجمله‌ای $-۲x+۱$ را تعیین‌علامت می‌کنیم:

$$-۲x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$



تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ دوم

تعیین علامت چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم، بسته به علامت دلتا به سه حالت زیر تقسیم می‌شوند:

اگر $\Delta > 0$ باشد، عبارت دو ریشهٔ x_1 و x_2 دارد. علامت چندجمله‌ای ax^2+bx+c بین دو ریشهٔ x_1 و x_2 **مخالف علامت a** و در بازه‌های طرفین دو ریشه، **موافق علامت a** است. $(x_1 < x_2)$	
اگر $\Delta = 0$ باشد، عبارت دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ است و علامت چندجمله‌ای ax^2+bx+c به جز در ریشهٔ مضاعف (که برابر صفر است) همواره **موافق علامت a** است.	
اگر $\Delta < 0$ باشد، عبارت ریشهٔ حقیقی ندارد و علامت چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره **موافق علامت a** است.	

نکته: با توجه به مطالب گفته‌شده، می‌توان نتیجه گرفت که علامت عبارت ax^2+bx+c زمانی:

الف) همواره **مثبت** است که $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد.

ب) همواره **منفی** است که $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد.

پ) همواره **نامنفی** است که $\Delta \le 0$ و $a > 0$ باشد.

$$ax^2+bx+c \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

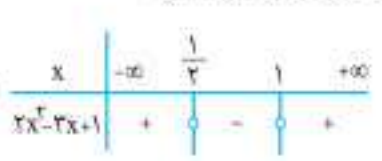
ت) همواره **نامثبت** است که $\Delta \le 0$ و $a < 0$ باشد.

$$ax^2+bx+c \le 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

مثال: عبارت $P = 2x^2 - 3x + 1$ را تعیین‌علامت کنید.

پاسخ: ریشه‌های عبارت را می‌یابیم و جدول تعیین‌علامت را رسم می‌کنیم:

$$2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x-2)(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$



علامت عبارت فوق در بازه‌های $(1,+\infty)$ و $(-\infty,\frac{1}{2})$ مثبت، در بازهٔ $(\frac{1}{2},1)$ منفی و در نقاط $x=1,\frac{1}{2}$ صفر است.

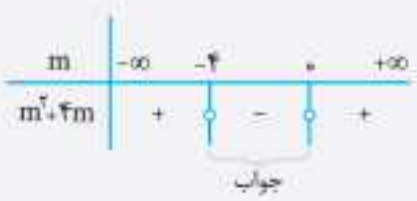
تست: حدود m کدام باشد تا علامت عبارت درجهٔ دوم mx^2-mx-1 همواره منفی باشد؟

۱) $-2 \le m \le 0$ ۲) $-4 \le m \le 0$ ۳) $-2 < m < 0$ ۴) $-4 < m < 0$

پاسخ: گزینهٔ «۴»

برای این‌که علامت عبارت درجهٔ دوم mx^2-mx-1 همواره منفی باشد، باید:

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow m < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow m^2+4m < 0 \Rightarrow \end{cases}$$



$$\Rightarrow -4 < m < 0$$

مجموعه‌جواب، اشتراک دو مجموعهٔ $m < 0$ و $-4 < m < 0$ است:

مجموعه‌جواب: $-4 < m < 0$

تعیین علامت عباراتی به‌صورت حاصل‌ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

برای تعیین‌علامت این عبارات به روش کلی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ریشه‌های عوامل ضرب یا تقسیم را می‌یابیم و ریشه‌ها را به‌صورت **صعودی** در سطر اول می‌نویسیم.

۲) هر یک از عوامل ضرب یا تقسیم را در یک طبقه از جدول قرار می‌دهیم و جداگانه تعیین علامت می‌کنیم.

۳) علامت طبقهٔ آخر از ضرب علامت‌های هر ستون به دست می‌آید.

۴) در جدول تعیین علامت، در ستون ریشه‌های صورت، صفر قرار می‌دهیم و در ستون ریشه‌های مخرج، تعریف‌نشده قرار می‌دهیم.

نکته: علامت عبارت $(P(x))^{2n+1}$ با علامت $P(x)$ یکسان و علامت عبارت $(Q(x))^{2m}$ همواره **نامنفی** است. $(n \in \mathbb{N})$

مثال: **عبارت $A=\frac{(-3x+3)^5}{5x^2-12x+4}$ را تعیین‌علامت کنید.**

پاسخ: جواب‌های معادله‌های $(-3x+3)^5=0$ و $5x^2-12x+4=0$ را می‌یابیم و جدول تعیین‌علامت را رسم می‌کنیم (دقت کنید توان ۵ در تعیین علامت صورت کسر تأثیری ندارد):

$$\begin{cases}(-3x+3)^5=0\Rightarrow -3x+3=0\Rightarrow x=1\\ 5x^2-12x+4=0\Rightarrow \frac{1}{5}(5x-2)(5x-10)=0\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ x=2\end{cases}\end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	1	2	$+\infty$
$(-3x+3)^5$	+	+	0	−	−
$5x^2-12x+4$	+	0	−	−	0 +
A	+	∄	−	0	+ ∄ −

تست: **علامت عبارت $A=\frac{(x^2+3x-4)^7}{(x-2)^{20}(x-3)^5}$ در بازهٔ $(a,1)$ مثبت است. کمترین مقدار a کدام است؟**

۱) -1 ۲) وجود ندارد. ۳) صفر ۴) -4

پاسخ: گزینهٔ «۴»

ریشه‌های عوامل کسر را می‌یابیم:

$$(x^2+3x-4)^7=0\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=-4\end{cases}$$

$$(x-2)^{20}=0\Rightarrow x=2\ ,\ (x-3)^5=0\Rightarrow x=3$$

با توجه به این‌که توان‌های ۷ و ۵ به‌ترتیب در تعیین‌علامت x^2+3x-4 و $x-3$ تأثیری ندارند و علامت عبارت $(x-2)^{20}$ همواره نامنفی است، جدول تعیین‌علامت آن را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-4	1	2	3	$+\infty$
$(x^2+3x-4)^7$	+	0	−	+	+	+
$(x-2)^{20}$	+	+	+	0	+	+
$(x-3)^5$	−	−	−	−	0	+
A	−	0	+	0	∄ −	+

علامت عبارت A در بازه‌های $(-4,1)$ و $(3,+\infty)$ و زیرمجموعه‌های آن‌ها مثبت است؛ پس کمترین مقدار a برابر -4 است.

یک گام فراتر: تعیین‌علامت تستی

در روش تستی، عبارت‌هایی به‌صورت $(x-x_0)^{\text{زوج}}$ و $|x-x_0|$ را عبارات **بی‌تأثیر** و سایر عبارت‌های جبری را عبارات **اثرگذار** می‌نامیم.

برای استفاده از تعیین علامت تستی، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) عبارات را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و ریشهٔ عبارات موجود را می‌یابیم.

۲) ریشه‌ها را به‌صورت صعودی در جدول تعیین‌علامت یک‌سطری می‌نویسیم.

۳) علامت جملات پرتوان عبارت‌های اثرگذار را تعیین می‌کنیم.

۴) علامت پیداشده را در اولین ستون از سمت راست جدول تعیین‌علامت می‌گذاریم.

۵) از سمت راست به چپ می‌رویم در عبور از هر ستون، اگر ریشه، مربوط به عبارت‌های بی‌تأثیر باشد، علامت **عوض نمی‌شود** و اگر ریشه، مربوط به عبارت‌های اثرگذار باشد، علامت **عوض می‌شود**.

مثال: **عبارت $A=\frac{(x^2+x-2)^4(x^2-9)^7}{(x-1)^8(x+5)^3|x-4|}$ را به روش تستی تعیین‌علامت کنید.**

پاسخ: ۱) عبارت را ساده و ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$A=\frac{(x+2)^4(x-1)^4(x-3)^7(x+3)^7}{(x-1)^8(x+5)^3|x-4|}=\frac{(x+2)^4(x-3)^7(x+3)^7}{(x-1)^4(x+5)^3|x-4|}$$

عبارت‌های $(x+2)^4$، $(x-1)^4$ و $|x-4|$ بی‌تأثیر و عبارت‌های $(x+3)^7$، $(x-3)^7$ و $(x+5)^3$ تأثیرگذارند.

۲) ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم. برای ریشه‌های صورت، صفر و برای ریشه‌های مخرج، تعریف‌نشده (ت‌ن) می‌گذاریم:

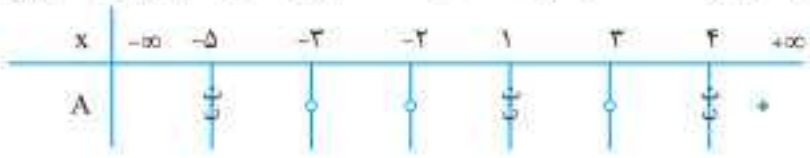
x	$-\infty$	-5	-3	-2	1	3	4	$+\infty$
A		∄	0	0	∄	0	∄	

۳) علامت جمله‌های پرتوان عبارت‌های اثرگذار را تعیین می‌کنیم:

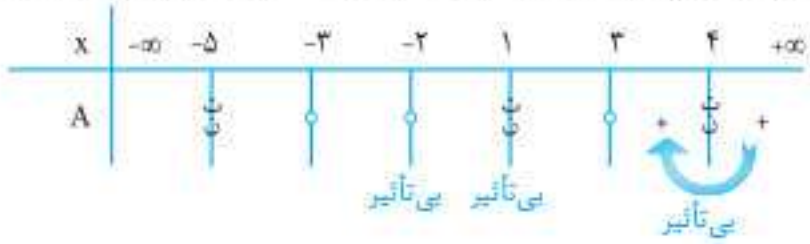
جملهٔ پرتوان عبارت اثرگذار $=\frac{x^7\times x^7}{x^3}=+x^{11}$

علامت این جمله، مثبت است.

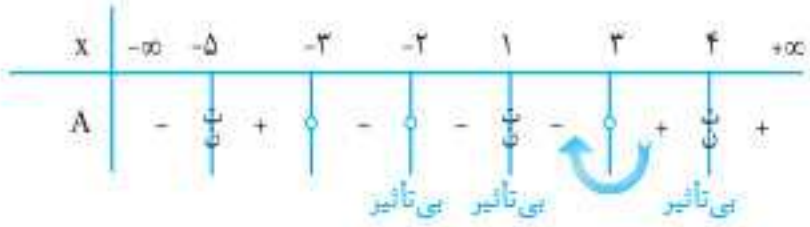
۴ جدول تعیین علامت تستی را رسم می‌کنیم و علامت مثبت را (که در قسمت قبل یافتیم) در اولین ستون از سمت راست جدول می‌گذاریم:



۵ از سمت راست به چپ برمی‌گردیم. در عبور از ریشه‌های $x=4$، $x=1$ و $x=-2$ که مربوط به عبارات بی‌تأثیرند، علامت تغییر نمی‌کند و در عبور از سایر ریشه‌ها، علامت تغییر می‌کند.



به همین ترتیب مرحله به مرحله از راست به چپ می‌رویم.



تست: علامت عبارت $A=\frac{(x^4-81)^3|x+1|}{(x^2-4)^5}$ در بزرگ‌ترین مجموعهٔ ممکن به‌صورت $(a,b)-[c,d]$، منفی است. حاصل $ab-cd$ کدام است؟

۱) -5 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۱»

عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{(x^2+9)^3(x-3)^3(x+3)^3|x+1|}{(x-2)^5(x+2)^5}$$

عبارت $|x+1|$ بی‌تأثیر و سایر عبارت‌ها می‌توانند تأثیرگذار باشند.

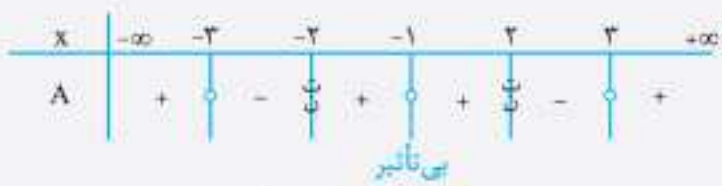
ریشه‌های عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x=3\ ,\ x=-3\ ,\ x=-1\ ,\ x=2\ ,\ x=-2$$

علامت جملهٔ پرتوان عبارت‌های اثرگذار را می‌یابیم:

$$\text{جملهٔ پرتوان عبارات اثرگذار } A=\frac{(x^2)^3x^3\times x^3}{x^5\times x^5}=+x^2$$

جدول تعیین‌علامت تستی را رسم می‌کنیم:



بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که در آن علامت عبارت، منفی است، به‌صورت $(-3,3)-[-2,2]$ است، پس:

$$\begin{cases}a=-3\\b=3\\c=-2\\d=2\end{cases}\Rightarrow ab-cd=-9-(-4)=-5$$

نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، **نامعادله‌هایی** که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به‌صورت مقابل هستند: $A\geq B\ ,\ A>B\ ,\ A\leq B\ ,\ A<B$

خواص نامساوی‌ها

۱	$A\leq B\xrightarrow{+C}A+C\leq B+C$	طرفین نامساوی‌ها را همواره می‌توان با هر عبارت دلخواهی جمع کرد.
۲	$A\geq B\xrightarrow{C>0}AC\geq BC$	طرفین یک نامساوی را همواره می‌توان در یک عدد مثبت C ضرب یا تقسیم کرد.
۳	$A\leq B\xrightarrow{C>0}\frac{A}{C}\leq\frac{B}{C}$	
۴	$A\geq B\xrightarrow{C<0}AC\leq BC$	طرفین یک نامساوی را می‌توان در عددی منفی ضرب یا تقسیم کرد، اما جهت نامساوی عوض می‌شود.
۵	$A\leq B\xrightarrow{C<0}\frac{A}{C}\geq\frac{B}{C}$	

۶	$A>B \xrightarrow{AB>0} \frac{1}{A}<\frac{1}{B}$	اگر طرفین نامساوی هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی)، می‌توان دو طرف نامساوی را معکوس کرد، اما جهت نامساوی عوض می‌شود. $(A,B\neq 0)$
۷	$A\leq B \xrightarrow{(\ )^{2n+1}} A^{2n+1}\leq B^{2n+1}$	طرفین نامساوی را همواره می‌توان بدون هیچ مشکلی به توان فرد رساند یا از طرفین نامساوی، رادیکال با فرجهٔ فرد گرفت.
۸	$A\leq B \xrightarrow{\sqrt[2n+1]{}} \sqrt[2n+1]{A}<\sqrt[2n+1]{B}$	
۹	$0\leq A\leq B \xrightarrow{(\ )^{2n}} A^{2n}\leq B^{2n}$	اگر هر دو عدد یا عبارت نامثبت باشند، جهت نامساوی عوض می‌شود و اگر علامت طرفین نامساوی متفاوت بود، جواب یا $\mathbb{R}$ است یا $\varnothing$.
۱۰	$A\leq B\leq 0 \xrightarrow{(\ )^{2n}} A^{2n}\geq B^{2n}$	
۱۱	$A^{2n}\leq B^{2n} \xrightarrow{\sqrt[2n]{}} \lvert A\rvert\leq\lvert B\rvert$	اگر از دو طرف نامساوی فرجهٔ زوج گرفتید، برای اعداد حاصل، قدرمطلق قرار دهید، ولی اگر هر دو عدد نامنفی باشند، بدون هیچ مشکلی می‌توان از طرفین نامساوی رادیکال با فرجهٔ زوج گرفت.
۱۲	$0\leq A\leq B \xrightarrow{\sqrt[2n]{}} \sqrt[2n]{A}\leq\sqrt[2n]{B}$	

حل نامعادله‌های درجهٔ اول

برای حل **نامعادلهٔ** درجهٔ اول، مانند حل **معادلهٔ** درجهٔ اول رفتار می‌کنیم، با این تفاوت که در هنگام ضرب یا تقسیم بر عددی منفی، جهت نامساوی تغییر می‌کند. **برای نمونه:**

$$2x-1>5\Rightarrow 2x>6\Rightarrow x>3$$

روند حل نامعادلات دوگانه را در مثال زیر می‌بینید:

مثال: نامعادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$\frac{x-1}{6}<\frac{3x-1}{2}<\frac{x}{3}$$

پاسخ: طرفین نامعادله را در ک.م.م مخرج‌ها یعنی ۶ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{6}<\frac{3x-1}{2}<\frac{x}{3} \xrightarrow{\times 6} x-1<9x-3<2x$$

دو نامعادلهٔ زیر را حل می‌کنیم و از جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x-1<9x-3\Rightarrow 8x>2\Rightarrow x>\frac{1}{4} \\ 9x-3<2x\Rightarrow 7x<3\Rightarrow x<\frac{3}{7} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \frac{1}{4}<x<\frac{3}{7}$$

تست: مجموعه‌جواب مشترک دو نامعادلهٔ $\frac{x}{2}-\frac{x-1}{3}>1$ و $\frac{3}{2}x+2>2x-3$، کدام است؟

۱) $2<x<5$ ۲) $2<x<10$ ۳) $4<x<10$ ۴) $4<x<7$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

طرفین نامعادلهٔ $\frac{x}{2}-\frac{x-1}{3}>1$ را در ۶ ضرب می‌کنیم: $3x-2(x-1)>6\Rightarrow 3x-2x+2>6\Rightarrow x>4$

طرفین نامعادلهٔ $\frac{3}{2}x+2>2x-3$ را در ۲ ضرب می‌کنیم: $\frac{3}{2}x+2>2x-3\Rightarrow \frac{3}{2}x>2x-5\Rightarrow 3x>4x-10\Rightarrow x<10$

اشتراک $x<10$ با $x>4$ برابر $4<x<10$ است.

حل نامعادله‌های درجهٔ دوم

در نامعادلات درجهٔ دوم، همهٔ جملات را به یک طرف نامعادله (ترجیحاً سمتی که ضریب بزرگ‌ترین جملهٔ درجهٔ دوم **مثبت** شود) می‌بریم. ریشه‌ها را در صورت وجود می‌یابیم، جدول تعیین علامت را رسم کرده و قسمت‌های خواسته‌شده را انتخاب می‌کنیم.

تست: مقادیر $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ در بازهٔ (a,b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ «۴»

روش اول نامعادله را تشکیل می‌دهیم:

$$-\frac{1}{2}x^2+2x+6>\frac{7}{2} \xrightarrow{\times(-2)} x^2-4x-12<-7\Rightarrow x^2-4x-5<0$$

ریشه‌های عبارت، $x=-1$ و $x=5$ هستند.

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
x^2-4x-5		$+$	$-$	$+$	

جواب

بزرگ‌ترین مجموعه‌جواب نامعادله، بازهٔ $(-1,5)$ است، بنابراین $b-a=5-(-1)=6$.

روش دوم

استراتژی حل: اگر در نامعادلهٔ $x^2-4x-5<0$ ریشه‌ها a و b باشند، عبارت در بازهٔ (a,b) منفی است و مطلوب تست، مقدار $b-a$ یعنی تفاضل ریشه‌هاست.

$$|\text{تفاضل ریشه‌ها}|=|b-a|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{36}}{|1|}=6$$

حل نامعادله‌های گویا

در نامعادلات گویا، باید همهٔ عبارت‌ها را به **یک طرف نامعادله** انتقال دهیم و به کمک رسم جدول تعیین‌علامت، آن را حل کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: نامعادلهٔ $\frac{2x-1}{x+1}<1$ را حل کنید.

پاسخ: عدد ۱ را به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا یک طرف نامعادله برابر صفر شود:

$$\frac{2x-1}{x+1}-1<0\Rightarrow\frac{(2x-1)-(x+1)}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x-2}{x+1}<0$$

جدول تعیین‌علامت عبارت $\frac{x-2}{x+1}$ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x+1}$		$+$	ت‌ع	$-$	0	$+$	

جواب

$$\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\ x+1=0\Rightarrow x=-1\end{cases}\Rightarrow -1<x<2$$

هشدار: علامت عبارت $x+1$ برای ما نامشخص است، بنابراین اجازه نداریم که طرفین نامعادله را در $x+1$ ضرب یا به اصطلاح آن را طرفین وسطین کنیم.

تست: مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{3x+1}{x-3}<-1$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x<\frac{1}{2}$ ۲) $x<3$ ۳) $-\frac{1}{2}<x<3$ ۴) $\frac{1}{2}<x<3$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

روش اول نامعادله را به دو نامعادلهٔ زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{cases}-1<\frac{3x+1}{x-3}\Rightarrow\frac{3x+1}{x-3}+1>0\Rightarrow\frac{4x-2}{x-3}>0\\ \frac{3x+1}{x-3}<3\Rightarrow\frac{3x+1}{x-3}-3<0\Rightarrow\frac{10}{x-3}<0\Rightarrow x<3\end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$4x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x-2}{x-3}$		$+$	0	$-$	ت‌ع	$+$	

جواب جواب

$$\Rightarrow x<\frac{1}{2}\text{ یا }x>3$$

مجموعه‌جواب، اشتراک مجموعه‌های به دست آمده، یعنی $x<\frac{1}{2}$ است.

روش دوم

فرمول ممنوع: عددی مانند $x=2$ را انتخاب می‌کنیم که در گزینهٔ «۱» نیست و در سه گزینهٔ بعدی قرار دارد.

$x=2$ را در نامعادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-1<\frac{3x+1}{x-3}<3\xrightarrow{x=2}-1<\frac{7}{-1}<3\Rightarrow\underbrace{-1<-7}_{\text{نادرست}}<3$$

$x=2$ در نامعادله صادق نیست، پس گزینه‌هایی که $x=2$ عضو آن‌هاست نادرست هستند؛ بنابراین گزینهٔ «۱» درست است.

تست: مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{3x^2-1}{x^2+x+1}\le x-1$ به‌صورت $[a,+\infty)\cup\{b\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۳»

علامت دلتای چندجمله‌ای درجهٔ دوم x^2+x+1 منفی و ضریب x^2 آن مثبت می‌باشد، پس علامت این عبارت همواره مثبت است و عبارت را در طرفین نامعادله ضرب می‌کنیم:

$$3x^2-1\le\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{اتحاد چاق‌ولاغر}}\Rightarrow 3x^2-1\le x^3-1\Rightarrow x^3-3x^2\ge 0\Rightarrow x^2(x-3)\ge 0$$

۳ معادلاتی که به کمک مجهول معاون حل می‌شوند: در برخی از معادلات می‌توان یک عبارت مشترک را در معادله، A فرض نمود و معادله را برحسب مجهول معاون A حل کرد. با پیداشدن مقدار A می‌توانیم به‌راحتی مجهول اصلی (x یا ...) را بیابیم.

تست: معادلهٔ $\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2+4x\sqrt{x}+4x}=6$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»

عبارت $\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}$ را A فرض می‌کنیم، دقت کنید که اگر A به توان ۲ برسد، به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}} \Rightarrow A^2=\sqrt[3]{(x+2\sqrt{x})^2}=\sqrt[3]{x^2+4x\sqrt{x}+4x}$$

بنابراین معادله را می‌توان این‌گونه نوشت:

$$A^2+A=6 \Rightarrow A^2+A-6=0 \Rightarrow (A+3)(A-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}=2 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x+2\sqrt{x}=8 \Rightarrow x+2\sqrt{x}+1=9 \Rightarrow (\sqrt{x}+1)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=-3 \Rightarrow \sqrt{x}=-4 & \times \\ \sqrt{x}+1=3 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 & \checkmark \end{cases} \\ \sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}=-3 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x+2\sqrt{x}=-27 \Rightarrow x+2\sqrt{x}+1=-26 \Rightarrow (\sqrt{x}+1)^2=-26 & \times \end{cases}$$

در نتیجه معادله فقط یک جواب دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

معادلات شامل عبارت‌های گویا

حل معادله‌های گویا

۳۴۲. جواب معادلهٔ $\frac{x+2}{x-1}=1-\frac{3}{x+5}$ چه عددی است؟

۱) صفر ۲) -5 ۳) ۱ ۴) -2

۳۴۳. تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+x}=x-1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۴. منحنی $y=\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}$ و خط $y=2x+1$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۵. معادلهٔ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۶. جواب معادلهٔ گویای $ax^{-1}=\frac{x}{a-x}-\frac{a-x}{x}$ کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $\frac{1}{3}a$ ۲) $\frac{2}{3}a$ ۳) $\frac{1}{2}a$ ۴) $\frac{3}{2}a$

۳۴۷. جواب معادلهٔ $\frac{x^2-3x}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x-2}=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۳۴۸. معادلهٔ $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7(x+1)}{9(x-1)}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۹. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{160}{9}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۱ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۲۵

۳۵۰. معادلهٔ $\frac{۲x}{x^۲-۱}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{x}}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

حالت‌های خاص

۳۵۱. اگر $x=-\frac{۱۰}{۳}$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $۹x^۲=\frac{۷۰a}{x}+\frac{x-۵}{x+۵}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) $\frac{۹۵}{۲۱}$ ۴) $-\frac{۹۵}{۲۱}$

۳۵۲. اگر $x=۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{x}{x^۲+۳x-۴}=\frac{m-۳}{x(x+۴)}+\frac{۵-m}{۲x}$ باشد، آن‌گاه جواب دیگر کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) -۵

۳۵۳. معادلهٔ $\frac{۶x}{x^۲-۲x+۴}=\frac{۱}{x+۲}-\frac{x^۲-۹x-۲}{x^۳+۸}$ دارای چند جواب مثبت است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۵۴. حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱۰}{۲x^۲-x+۷}=\frac{۳}{۲x^۲-x+۳}+\frac{۱}{۲x^۲-x+۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۳۵۵. جواب‌های معادلهٔ $۳=\frac{۲x^۲+۶x+۴}{x^۲}+\frac{x^۲}{x^۲+۳x+۲}$ چگونه‌اند؟

۱) سه جواب منفی ۲) دو جواب منفی و یک جواب مثبت

۳) دو جواب مثبت ۴) دو جواب منفی و دو جواب مثبت

حل مسائل به کمک معادلات گویا

۳۵۶. حوضی دارای دو فواره اســـت، هرکدام به تنهایی حوضی را در ۱۲ ساعت و ۸ ساعت پر می‌کنند. اگر هر دو فواره با هم باز شوند، این حوض در مدت ۴ ساعت و چند دقیقه پر می‌شود؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۳۵۷. بهزاد و علی با هم یک اتاق را در ۳ ساعت و علی به تنهایی همان اتاق را در ۴ ساعت رنگ می‌کند. درصورتی‌که بهزاد خسته باشد و سرعت رنگ‌زدن او نصف شده باشد، اتاق را به تنهایی در چند ساعت رنگ می‌زند؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۳۵۸. بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۳۵۹. یک آشپز به همراه شاگردش غذایی را در ۷۲ دقیقه آماده می‌کند. اگر شاگرد بخواهد به تنهایی آن غذا را آماده کند، یک ساعت بیشتر از مدت زمانی طول می‌کشد که آشپز بخواهد آن را به تنهایی آماده کند. آشپز آن غذا را به تنهایی در چند ساعت آماده می‌کند؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

۳۶۰. مریم و سارا برای درست کردن کیک تولد با هم به ۴ ساعت زمان نیاز دارند و اگر مریم تنها باشد می‌تواند آن را در ۶ ساعت درست کند. اگر تصمیم بگیرند با هم کیک را درست کنند و پس از یک ساعت برای مریم کاری پیش آید و سارا به تنهایی ادامه دهد، سارا چند ساعت پس از رفتن مریم برای درست کردن کیک زمان نیاز دارد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۸

۳۶۱. علی به همراه دوستانش به یک موزه رفتند و پول بلیتشان روی هم ۲۰۰۰۰ تومان شد، اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند ۱۰۰۰ تومان اضافه پول بدهند تا علی پول خود را ندهد. تعداد همراهان علی چند نفر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۶۲. سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۳۶۳. پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

۳۶۴. خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه امام متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری این مسیر را از شمال به جنوب با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت قطار $10\,km/h$ کم شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت می‌شود، سرعت برگشت قطار کدام است؟

۱) $40\,km/h$ ۲) $30\,km/h$ ۳) $20\,km/h$ ۴) $10\,km/h$

۳۶۵. علی و حسین برای برنامه‌نویسی یک بازی رایانه‌ای به ۱/۲ روز زمان نیاز دارند. اگر هر دو به تنهایی این برنامه را بنویسند حسین ۱ روز دیرتر تمام می‌کند. درصورتی که فرهاد دو برابر سریع‌تر از علی کار کند، فرهاد و حسین با هم به چند روز زمان نیاز دارند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

معادلات شامل عبارت‌های گنگ

حل معادله‌های گنگ

۳۶۶. مجموعه‌جواب معادلهٔ $x+\sqrt{2x-1}=5$ کدام است؟

۱) $\{6+\sqrt{10},6-\sqrt{10}\}$ ۲) $\{6+\sqrt{10}\}$ ۳) $\{6-\sqrt{10}\}$ ۴) $\{\}$

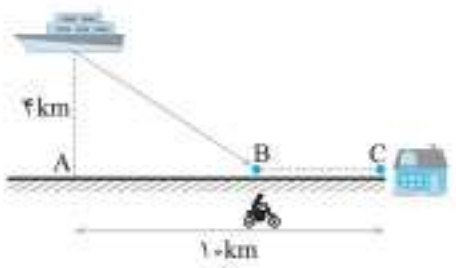
۳۶۷. تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x-3|-\sqrt{x-1}=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۶۸. مجموع طول و عرض مختصات نقطه‌ای روی خط $y=3x-1$ که از دو نقطهٔ $A(1,1)$ و $B(3,-1)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) -2 ۴) ۲

۳۶۹. مطابق شکل، فاصلهٔ یک قایق تفریحی تا ساحل (نقطهٔ A) ۴ کیلومتر است. افراد داخل قایق می‌خواهند کلاً با مصرف ۳۴ لیتر سوخت در نقطه‌ای مانند B در خط ساحلی پیاده شوند و از آن‌جا ادامهٔ مسیر تا C را با موتور طی کنند. اگر قایق برای هر کیلومتر ۴ لیتر و موتور برای هر کیلومتر ۲ لیتر سوخت مصرف کند و فاصلهٔ AC برابر ۱۰ کیلومتر باشد، آن‌ها در کدام فاصله از نقطهٔ A، می‌توانند سوار موتور شوند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۷۰. اگر $\sqrt{3a+16}+2a=1$ باشد، مقدار $4a+9$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۳۷۱. اگر $3a+\sqrt{2a^2+4a}=2$ باشد، مقدار $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۳۷۲. معادلهٔ $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3}-\frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟ (تجربی تیر ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷۳. معادلهٔ $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟ (تجربی خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷۴. برای چند مقدار صحیح و یک‌رقمی a، جواب معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$، عددی صحیح است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

حالت‌های خاص

۳۷۵. معادلهٔ $(2x+3\sqrt{x}-2)^2+\sqrt{4x^3+7x^2+2x-1}=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷۶. معادلهٔ $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{2-x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۷۷. معادلهٔ $5\sqrt{9-x^2}+3\sqrt{x^3+x-30}=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷۸. معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x^۲-۱}}=\sqrt{۲x+۲}-\sqrt{x-\sqrt{x^۲-۱}}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۷۹. تعداد جواب‌های معادلهٔ $x+۲=\sqrt{-x^۲+۶x-۸}+\sqrt{x^۲+\sqrt{-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۸۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x+۱)^۲=۲\sqrt{x^۲+۲x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۳۸۱. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x-۳}+\frac{۷}{\sqrt{x-۳}+۱}=۷$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۸ ۳) ۳۹ ۴) ۱۹

۳۸۲. معادلهٔ $\frac{x-۱}{۴\sqrt{x-۱}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۲}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

برای ۱۰۰٪

۳۸۳. معادلهٔ $\sqrt{۲(x+۳)}=\sqrt{۱-x}+\sqrt{۲x+۴}$ ، چند جواب عضو اعداد صحیح دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۸۴. جواب معادلهٔ $x=۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}$ از جواب معادلهٔ $\sqrt[۲n]{x-a}+\sqrt[۲n]{a-x}=۰ (n\in\mathbb{N})$ ، یک واحد کمتر است. مقدار a کدام ست؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۱

۳۸۵. اگر داشته باشیم $\sqrt{\frac{۲۰}{a}}-a=۷$ ، آن‌گاه $a-\sqrt{۵a}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۳۸۶. اگر حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x}{x-۲}+\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{a}{x^۲-۴}$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد، قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۳۸۷. اگر جواب معادلهٔ $\sqrt{۳x+۴}=\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۵x+۷}$ طول نقطهٔ رأس سهمی $f(x)=x^۲+۲ax+۳$ باشد، حاصل $f(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱۹}{۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳}$

۳۸۸. اگر معادلهٔ $\frac{a}{x}+\frac{۲x-۲}{x+۱}=۱$ جواب حقیقی نداشته باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $(۹,+\infty)$ ۲) $(۱,۹)$ ۳) $(-۱,۹)$ ۴) $\varnothing$

۳۸۹. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt[۳]{۳-x}+\sqrt{x-۲}=۱$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۶ ۳) ۱۹ ۴) ۱۷

۳۹۰. به ازای چند مقدار a، معادلهٔ $\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}=\frac{۱}{x}+\frac{a}{۲x+۲}$ ، فقط دارای یک جواب است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۱. اگر مجموعه‌جواب معادلهٔ $\frac{m+۱}{۳x}=\frac{۵-x}{۴x-x^۲}$ تهی باشد، مجموع مقادیر موجود برای m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴}$

۳۹۲. اگر دو دستگاه با هم کار کنند می‌توانند کاری را در شش ساعت انجام دهند. اگر دستگاه اول به تنهایی به مدت ۴ ساعت و سپس دستگاه دوم نیز به تنهایی به مدت ۶ ساعت کار کند، آن‌ها ۸۰ درصد تمام کار را انجام می‌دهند. اگر هریک از آن‌ها بخواهند به تنهایی کل کار را انجام دهند، دستگاه سریع‌تر چند ساعت زودتر از دستگاه دیگر کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

آزمون فصل

۳۹۳. مجموع مربعات جواب‌های معادلهٔ $x^۲+\frac{۲۵x^۲}{(x+۵)^۲}=۱$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۳۳ ۴) ۴۷

۳۹۴. معادلهٔ $\frac{x^۲+x-۱}{x^۲+x-۲}=۱+\frac{۱}{x^۲+۲x-۳}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۵. معادلهٔ $\frac{۲x-۵}{۲x+۲}=\frac{۲x+۵}{۲x-۲}-\frac{۷}{x^۲-۱}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۶. قطاری ایستگاه A را با سرعت ثابت به مقصد B ترک می‌کند. بعد از طی ۴۵۰ کیلومتر که ۷۵ درصد مسافت بین A و B را تشکیل می‌دهد متوقف می‌شود و بعد از نیم ساعت شروع به حرکت می‌کند. راننده سرعت قطار را ۱۵ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌دهد تا به موقع به مقصد B برسد. سرعت ثابت قطار چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

۳۹۷. پرنده‌ای فاصله ۴۰ کیلومتر را در خلاف جهت باد پرواز کرده و همان فاصله را برمی‌گردد. مدت‌زمان رفت و برگشت ۲/۵ ساعت و سرعت باد ۳۰ کیلومتر در ساعت است. سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۳۹۸. معادلهٔ $x\sqrt{x^۲+۱۵}-۲=\sqrt{x}\sqrt[۴]{x^۲+۱۵}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۹. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۲-۲\sqrt{۱-x^۲}}=-۱+\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱+x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۰۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+۳}+\sqrt{۴-x}+\sqrt{(x+۳)(۴-x)}=۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۱

۴۰۱. معادلهٔ $ax-\sqrt{x-۲}=۲a$ دو جواب دارد. حدود a کدام است؟

۱) $۰<a<۱$ ۲) $a\neq ۰$ ۳) $a>۰$ ۴) $a>۱$

۴۰۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۲=\sqrt{۱۴+۴x-x^۲}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) -۸

برای دریافت پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌های برای ۱۰۰٪ و آزمون‌های فصل، رمزینهٔ مقابل را اسکن کنید.

ترکیب توابع

تابع مرکب

۷۶۹. توابع $f=\{(-۱,۳),(-۲,۰),(۱,۴),(۵,۶)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۰,۳),(۶,۲),(۴,-۱)\}$ مفروض‌اند. تابع gof چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷۰. توابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $(۴,۵)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۷)$

۷۷۱. اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,-۱),(۴,۷)\}$ باشد، آن‌گاه $(f+g)of$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

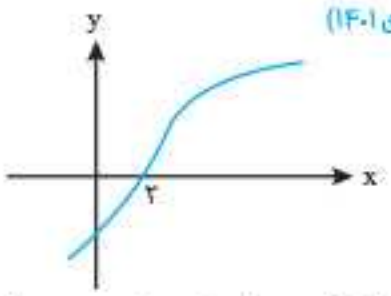
۷۷۲. اگر $f(x)=\begin{cases}۱ & ; \ x\in\mathbb{Q}\\ ۰ & ; \ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ و $g(x)=[x]+[-x]$ باشد، حاصل $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ به‌ترتیب کدام هستند؟

۱) صفر و ۱ ۲) ۱ و صفر ۳) صفر و ۱- ۴) ۱ و ۱-

۷۷۳. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $f=\{(۲,۳),(۵,۴),(۶,۵),(۱,۲)\}$ و $g(f(a))=۵$ باشد، آن‌گاه عدد a کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۹ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷۴. اگر $f(x)=|\frac{۱}{۲}x-۱|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+۲)))=۰$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۷۵. تابع g با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار f، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۴ و $\frac{۱}{۹}$ ۲) ۹ و $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

۷۷۶. فرض کنید $f(x)=[x]+[۱-x]$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ باشد. اگر تساوی $(gof)(x)=۳$ همواره برقرار باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۴-

۷۷۷. اگر $(fog)(x)=x^۲+۴x-۵$ و $f(x)=x^۲-۶x+۱$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $g(x)=\sqrt{x^۲-۴x-۳}-۳$ ۲) $g(x)=\sqrt{x^۲-۴x-۳}+۳$

۳) $g(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۳}-۳$ ۴) $g(x)=\sqrt{x^۲+۴x+۳}+۳$

۷۷۸. اگر $f(x)=\frac{۲x}{x+۳}$ و $(fog)(x)=\frac{x-۱}{x+۳}$ باشد، آن‌گاه $g(۲)$ کدام است؟

۱) ۹- ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۹}{۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۷۷۹. اگر $(gof)(x)=۵x^۲+۱۱$ و $f(x)=۲x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-۷)$ چه‌قدر است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۷۸۰. اگر $g(x)=۲x-۱$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x-۳}$ باشد، مقدار $f(۳)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۷۸۱. اگر $f(x-\frac{۱}{x})=x^۳-\frac{۱}{x^۳}$ باشد، آن‌گاه $f(\frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱) $x^۳-۳x$ ۲) $x^۳+۳x$ ۳) $\frac{۱}{x^۳}-\frac{۳}{x}$ ۴) $\frac{۱}{x^۳}+\frac{۳}{x}$

۷۸۲. اگر $f(\frac{x+۴}{x-۳})=(\frac{۳x+۱}{x-۲})$ باشد، آن‌گاه $f(\frac{۴-x}{۲x+۱})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۸x+۳}{۲۱x+۶}$ ۲) $\frac{-۲۸x+۱۳}{۲۱x+۶}$ ۳) $\frac{۲۱x+۶}{-۲۸x+۱۳}$ ۴) $\frac{۲۱x-۶}{۲۸x-۱۳}$

۷۸۳. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & ; \quad x<-1\\ x & ; \quad -1\le x\le 1\\ 1 & ; \quad x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

محاسبهٔ دامنهٔ تابع مرکب

۷۸۴. اگر $f=\{(1,2),(3,5),(-1,0),(-2,4)\}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ باشد، آن‌گاه مجموع اعضای غیرتکراری دامنهٔ fog کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۷۸۵. اگر $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ باشد، دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۷۸۶. اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشد، D_{fog} کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $[0,1)$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

۷۸۷. اگر $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-(-1,1)$

محاسبهٔ برد تابع مرکب

۷۸۸. اگر $\begin{cases}f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ f(x)=3x-1\end{cases}$ و $g=\{(3,-1),(2,1),(1,5),(4,-3)\}$ باشد، برد تابع fog چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۷۸۹. اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{1-2x}{x+1}$ باشد، برد تابع gof کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $[-1,1)$ ۲) $(-1,1]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1]$

۷۹۰. اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\frac{3-x}{x+2}$ باشد، برد تابع gof کدام است؟

۱) $(-\infty,-\frac{3}{2}]$ ۲) $(-1,\frac{2}{3}]$ ۳) $(-1,\frac{3}{2}]$ ۴) $(-\infty,-\frac{2}{3}]$

ترکیب تابع مرکب و وارون تابع

۷۹۱. دو تابع $f=\{(1,-1),(2,0),(3,2),(4,1)\}$ و $g=\{(0,1),(-1,2),(2,3),(3,4)\}$ مفروض‌اند. تابع $fog^{-1}+f^{-1}og$ کدام است؟

۱) $\{(3,4),(4,5)\}$ ۲) $\{(3,2),(0,4)\}$ ۳) $\{(3,2),(4,5)\}$ ۴) $\varnothing$

۷۹۲. اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

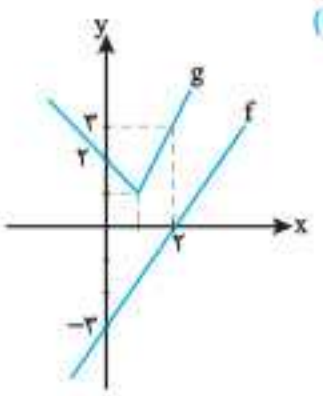
۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$

۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

۷۹۳. اگر $f(x)=\frac{5x-1}{2x-6}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $(g^{-1}(f(5))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۹

۷۹۴. با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $(gof^{-1})(-2)\times(gog)(0)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)



۱) ۶

۲) ۴

۳) -4

۴) -6

۷۹۵. اگر $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}$ و $(fog^{-1})(x)=x-3$ تابعی یک‌به‌یک باشد، $f^{-1}(5)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۷۹۶. با فرض $x\geq 2 ; f(x)=x^2-4x+9$ و $g(x)=\frac{3-x}{2}$، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-9)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۹۷. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$ باشد، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۷۹۸. دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. حاصل $(f^{-1}(f^{-1}(g(\frac{7}{6}))))$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۴

۷۹۹. دو تابع $f=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ و $g(x)=\sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۰۰. دو تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$ و $g=\{(-3,-4),(-2,3),(4,-1),(-1,2)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a))=3$ باشد، مقدار a چه‌قدر است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۴- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۴

۸۰۱. اگر $f=\{(-3,\frac{1}{4}),(-1,\frac{1}{9}),(1,\frac{1}{3}),(3,-\frac{1}{4})\}$، $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ و $(fog^{-1})(a)=-3$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۸۰۲. اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1}of)-f$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$

۸۰۳. توابع $f(x)=\log(2x-5)$ و $g(x)=x+\sqrt{2x-4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y=(g^{-1}of^{-1})(x)$ محور y ها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟ (ریاضی دی ۱۴۰۱)

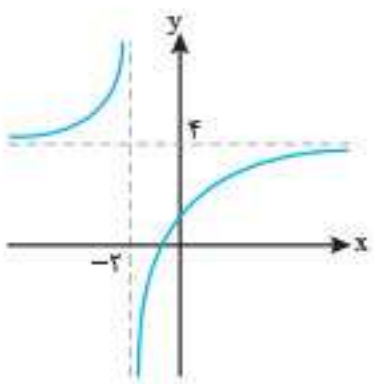
۱) $4-\sqrt{2}$ ۲) $4-\sqrt{3}$ ۳) $4+\sqrt{2}$ ۴) $4+\sqrt{3}$

برای ۱۰۰٪

۸۰۴. به ازای چند عدد صحیح m، رابطهٔ $\{(5,6),(m-3,4),(2,m+5),(m^2+1,3)\}$ تابع نیست؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) صفر

۸۰۵. نمودار تابع هموگرافیک h با ضابطهٔ $h(x)=((\frac{f}{g})og)(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر $f(x)=4x-2$ باشد، حاصل $g(2)$ کدام است؟



۱) ۱-
۲) ۱
۳) ۳
۴) صفر

۸۰۶. اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{2\}$ باشد، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۲-

۸۰۷. دو تابع $f(x)=\sqrt{ax}\sqrt{x+4}$ و $g(x)=\sqrt{(a^2-2)x^2+bx}$ با هم برابرند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲-

۸۰۸. اگر $f(x)=|x-3|-4$ و $D_g=(-2,4)$ باشد، دامنهٔ تابع $(g^2o(5f))(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰۹. اگر $f(\frac{-2x+4}{x+3})=\sqrt{3x-12}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱۰. اگر $f(x)=\sqrt{x-9}$ و $g(x)=\sqrt{16-x^2}$ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برد تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۱۱. اگر $f(x)=x+n[x]$ و $g(x)=x-n[x]$ باشد، به ازای چند عدد صحیح n دو تابع fog و gof با هم برابر هستند؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

۸۱۲. اگر $f(x)=(-1)^{[x]}\sqrt{1-x^2}$ با دامنهٔ $(-1,1)-\{0\}$ باشد، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $f(\frac{1}{x})$ ۲) $-f(-x)$ ۳) $-f(x)$ ۴) $-f(-\frac{1}{x})$

۸۱۳. اگر $f(x)=2g^{-1}(3x-1)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۸۱۴. اگر $f(x+2)=\frac{3g(x-1)+1}{g(x-1)-2}$ و $f^{-1}(3x-\frac{1}{2})=8x^3+2x-1$ باشد، حاصل $g^{-1}(0)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) -4 ۴) -2

۸۱۵. اگر داشته باشیم $f(x)=x^3+2x$، جواب معادلهٔ $2f^{-1}(x)=f^{-1}(2x+6)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

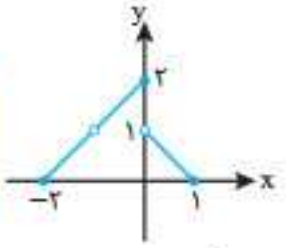
۸۱۶. برد تابع $f(x)=|x+\frac{1}{2}|$ با دامنهٔ A به‌صورت $\{1,2,3\}$ است. چند مجموعهٔ متمایز برای A وجود دارد؟

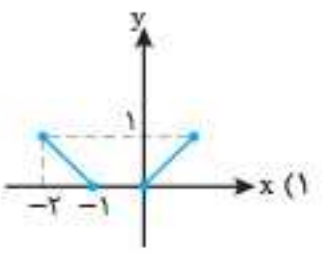
۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

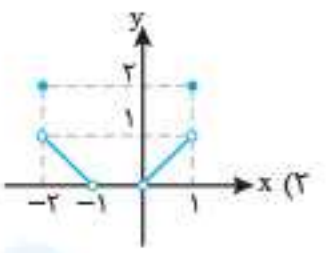
۸۱۷. برد تابع $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+x+1}$ کدام است؟

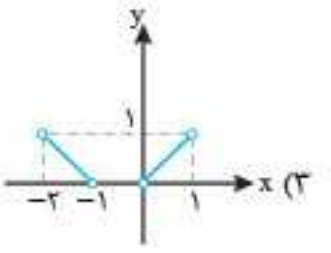
۱) $[-\frac{2}{\sqrt{3}},1]$ ۲) $[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[-1,\frac{2}{\sqrt{3}}]$

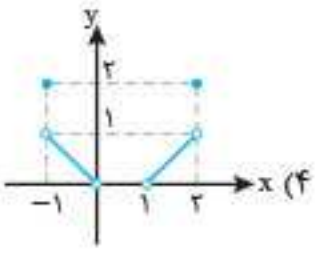
۸۱۸. اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=(fof)(x)$ کدام است؟



۱)


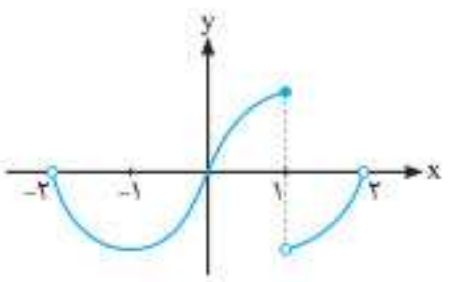
۲)


۳)


۴)


آزمون فصل

۸۱۹. نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(x^2-1)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-1,1]$

۲) $[-1,0]$

۳) $[-1,0]\cup\{1\}$

۴) $(-2,0]\cup[1,2)$

۸۲۰. اگر دو تابع $f(x)=\frac{ax^3+b}{2x^3-c}$ و $\begin{cases} g:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ g(x)=2 \end{cases}$ با هم مساوی باشند، $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸۲۱. وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-1}$ در دامنهٔ محدود، خط $12=10x-5y$ را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{4}{m})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{15}$ ۴) $2\sqrt{15}$

۸۲۲. اگر $f(x)=\sqrt{۲-\sqrt{x-۱}}$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵$
۲) $f^{-۱}(x)=x^۴-۴x^۲+۵$
۳) $f^{-۱}(x)=x^۴+۴x^۲-۵$
۴) $f^{-۱}(x)=x^۴-۴x^۲-۵$

۸۲۳. اگر $D_f=(-۳,۵)$ و $D_g=[۰,۹]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=-۳f(\frac{۳x-۱}{۵})+۴g(۲x-۱)$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۱۴}{۳},۵)$
۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{۲۶}{۳}]$
۳) $[\frac{۱}{۲},۵]$
۴) $(-\frac{۱۴}{۳},\frac{۲۶}{۳})$

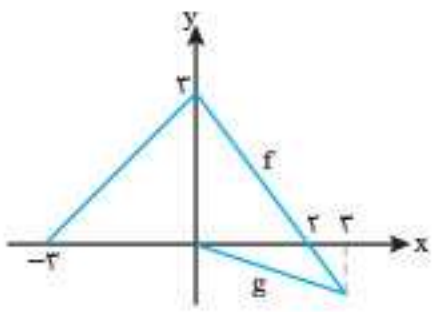
۸۲۴. حداقل چند عضو از مجموعهٔ $\{\frac{۳۰}{۱+|y|}=x, x,y\in\mathbb{Z}\mid (x,y)\}=f$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۸۲۵. فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+۳}-۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۲\sqrt{۲}$

۸۲۶. نمودار دو تابع f و g به شکل‌های زیر هستند. معادلهٔ $f(g(x))=k$ دارای یک جواب است. حدود k کدام است؟



۱) $[۰,۳)$
۲) $[۰,۳]$
۳) $[-\frac{۳}{۲},۰]$
۴) $[\frac{۳}{۲},۳]$

۸۲۷. اگر $f(x+۱)=x^۲-۳x+۴$ باشد، آن‌گاه $f(x-۴)$ کدام است؟

۱) $x^۲-۸x-۲۲$
۲) $x^۲+۸x-۲۲$
۳) $x^۲-۸x+۲۲$
۴) $x^۲-۱۳x+۴۴$

۸۲۸. اگر $f(x)=\frac{x-۳}{x+۳}$، $g(x)=\frac{x+۳}{x-۳}$ و $D_{fog}=\mathbb{R}-\{a,b\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$
۲) ۶
۳) $\frac{۷}{۲}$
۴) صفر

۸۲۹. اگر $f(x)=|x-۱|+۱$ و $g(x)=x^۲-۴x+۶$ باشد، با فرض $x\in[\frac{۱}{۲},۳]$ چند عدد صحیح عضو برد تابع gof است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۸۳۰. اگر $f(x)=\frac{x-۲}{۳}$ و $(fog)^{-۱}(x)=۲-(۴-x)^۳$ باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $۱۴+۳\sqrt[۳]{x-۲}$
۲) $۱۴+۳\sqrt[۳]{x-۴}$
۳) $۱۴-۳\sqrt[۳]{x-۲}$
۴) $۱۲-۳\sqrt[۳]{x-۴}$

۸۳۱. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-x-۶}$ و $g(x)=\sqrt{|x|-۲}$ باشد، چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع fog قرار ندارد؟

۱) ۲۰
۲) ۱۹
۳) ۲۱
۴) بی‌شمار

۸۳۲. تابع $f(x)=۴-\sqrt{x+۲}$ مفروض است. برد تابع $y=۲(f^{-۱}of)(x)+f^{-۱}(x)$ کدام است؟

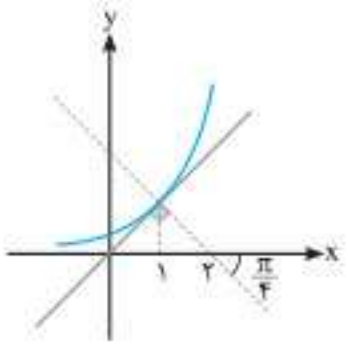
۱) $[۵,۳۰]$
۲) $(۵,+\infty)$
۳) $[۵,۶]$
۴) $[۱,۳۰]$

۸۳۳. طول نقطهٔ برخورد وارون تابع $f(x)=۲x+\sqrt{x}$ و خط $y=۲-x$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱۷}{۳}$
۴) $\frac{۱۴}{۹}$

برای دریافت پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌های برای ۱۰۰٪ و آزمون‌های فصل، رمزینهٔ مقابل را اسکن کنید.

۱۷۵۵. اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(1+2h)-f^2(1-h)}{h}$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۴

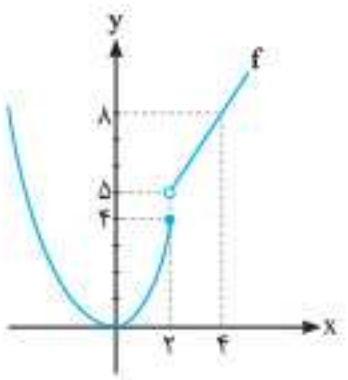
۱۷۵۶. مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x^2+x+1)^2}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) صفر ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) ۱

نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از تعریف مشتق)

شیب خط نیم‌مماس‌های چپ و راست

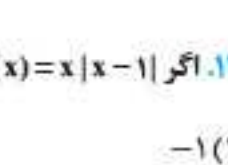
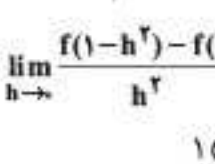
۱۷۵۷. اگر نمودار تابع f اجتماع یک تابع خطی و یک تابع درجهٔ دوم باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $f'(2)=4$
۲) $f'_-(2)=4$
۳) $f'_+(2)=\frac{3}{2}$
۴) نقطهٔ $x=2$ برای تابع f یک نقطهٔ گوشه‌ای است.

۱۷۵۸. با توجه به جدول مقابل، نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=2$ کدام می‌تواند باشد؟

x	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۰۰۰۰۱
$f(x)$	۰/۰۰۱	۰	۰/۲

۱) 
۲) 
۳)
۴)

۱۷۵۹. اگر $f(x)=x|x-1|$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h^2)-f(1)}{h^2}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

۱۷۶۰. مشتق راست تابع $f(x)=x[-x^2]$ در نقطه‌ای به طول $x=-1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۲

۱۷۶۱. مشتق راست تابع $f(x)=\sqrt{x^2-\sqrt{2x^2-1}}$ در $x=1$ کدام است؟

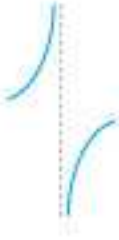
۱) $-\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) $\sqrt{2}$

خط مماس قائم

۱۷۶۲. اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ باشد، نمودار تابع $y=f(x)$ در نزدیکی نقطهٔ $x=a$ به کدام شکل است؟

۱)
۲)
۳)
۴)

۱۷۶۳. نمودار تابع مشتق $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ در اطراف $x=2$، به کدام صورت است؟

۱)
۲)
۳)
۴) 

۱۷۶۴. رفتار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-9x^3}$ در اطراف نقطهٔ $x_0=0$ چگونه است؟ (همهٔ مماس‌ها قائم هستند.)

۱)
۲)
۳)
۴)

مشتق‌پذیری توابع در نقطه و نقاط مشتق‌ناپذیر مهم (استفاده از تعریف مشتق)

مشتق‌پذیری توابع در نقطه

۱۷۶۵. اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر و $f'(x_0)=2$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ کدام است؟

۱) $2-f(x_0)$ ۲) $2+f(x_0)$ ۳) 2 ۴) -2

۱۷۶۶. اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $2-f(a)$ ۲) $2+f(a)$ ۳) 2 ۴) -2

۱۷۶۷. دامنهٔ تابع مشتق $f(x)=(x-1)|x^2-x^3|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۱۷۶۸. اگر $f(x)=x^3-[2x^2]$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۷۶۹. اگر $f(x)=\frac{x^2}{|1-x|}[x]$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

نقاط مشتق‌ناپذیر

۱۷۷۰. تابع $f(x)=[x^2]$ در بازهٔ $(-1,2)$ در چند نقطه فاقد مشتق است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۷۱. تابع $f(x)=ax+[ax]$ در بازهٔ $(0,4)$ دارای ۷ نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) -1 ۳) 1 ۴) -2

۱۷۷۲. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & ; \quad x<-1\\ x & ; \quad -1\le x\le 1\\ 1 & ; \quad x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. تعداد عناصر مجموعه‌نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

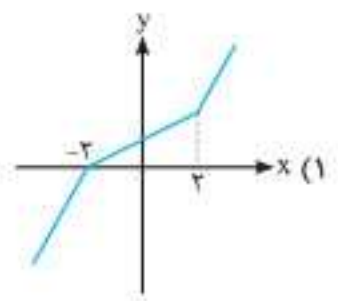
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

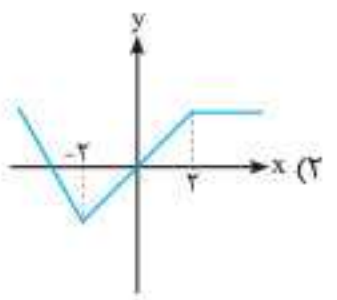
تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری

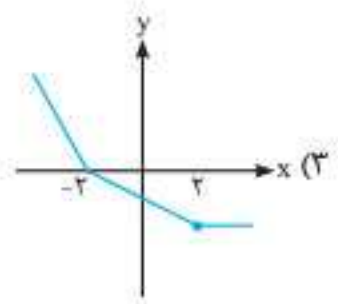
تابع مشتق

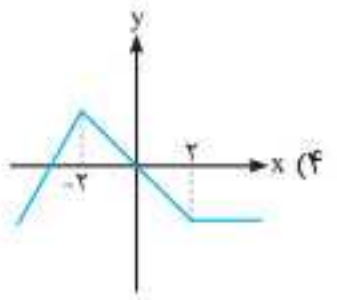
۱۷۷۳. کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار تابع پیوستهٔ f با ویژگی‌های مقابل در مورد تابع مشتق آن باشد؟

$$\begin{cases}f'(x)>0 & ; \quad x<-2\\ f'(x)<0 & ; \quad -2<x<2\\ f'(x)=0 & ; \quad x>2\end{cases}$$

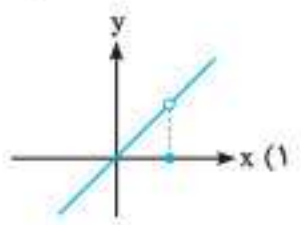
۱)


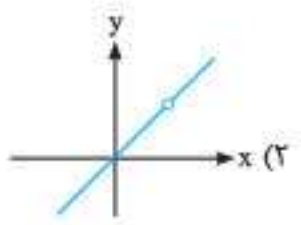
۲)


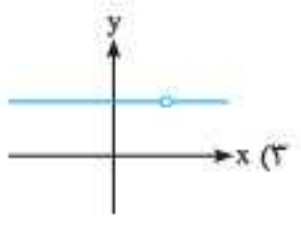
۳)


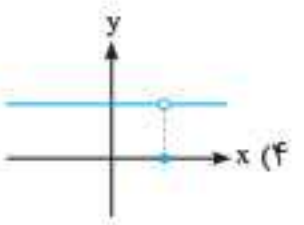
۴)


۱۷۷۴. اگر $f(x)=\begin{cases}5x & ; \quad x\neq 3\\ -1 & ; \quad x=3\end{cases}$ باشد، آن‌گاه نمودار $f'(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


مشتق تابع مرکب (مثلثاتی)

۱۸۱۲. مشتق تابع $f(x)=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

۱۸۱۳. اگر $f(x)=\sin x\cos ۳x$ و $g(x)=\cos x\sin ۳x$ باشد، مقدار $f'(\frac{\pi}{۱۲})-g'(\frac{\pi}{۱۲})$ برابر کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۸۱۴. مشتق تابع $y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸۱۵. مشتق تابع $y=\cos^۲\frac{\pi}{۳x}$ به ازای $x=۴$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۲}$

۱۸۱۶. مشتق تابع $y=۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۸۱۷. مشتق تابع $y=\sin^۳\sqrt{۲x}$، به ازای $x=\frac{\pi^۲}{۱۸}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۲۷}{۸\pi}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴\pi}$

۱۸۱۸. مشتق عبارت $\sqrt{۱+\tan^۲\frac{۱}{x}}$ به ازای $x=\frac{۳}{\pi}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{-۲\pi^۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{-۲\pi^۲}{۹}$ ۳) $\frac{۲\pi^۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲\pi^۲\sqrt{۳}}{۹}$

۱۸۱۹. اگر $g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}$ و $f(x)=\sin^۲\pi x$ باشد، مشتق تابع fog به ازای $x=۲$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۸}\pi$

۱۸۲۰. اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۴+x^۲}}$ باشد، مشتق تابع $f(۲\tan x)$ در نقطهٔ $x=\frac{۲\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۸۲۱. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\sqrt{۱+\tan^۲ x})$ و $g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۸۲۲. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$ و $g'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، مقدار $f'(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۸۲۳. اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۳}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ چه‌قدر است؟ (ریاضی خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

خط مماس (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)

۱۸۲۴. به ازای کدام مقدار b، منحنی $f(x)=ax^۲+۲x$ بر خط $g(x)=x+b$ در $x=۱$ مماس است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸۲۵. اگر $y=۲x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟ (تجربی خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

۱۸۲۶. خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x$ با بیشترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۱۸۲۷. نقطه‌ای روی منحنی $f(x)=x^2+x$ وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه، موازی خط قاطعی است که دو نقطه به طول‌های $x=1$ و $x=3$ واقع بر منحنی تابع را به هم وصل می‌کند. عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۸۲۸. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0,8]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) -1 ۴) $-0/5$

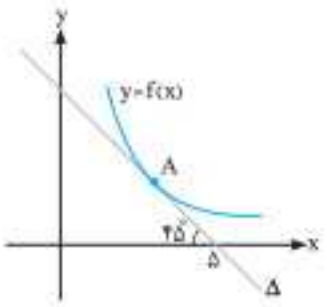
۱۸۲۹. معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^2+mx+1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $4y-3x=n$ است. مقدار $m+n$ چه‌قدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۳۰. خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=4$ واقع بر آن، محور xها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی ۹۹)

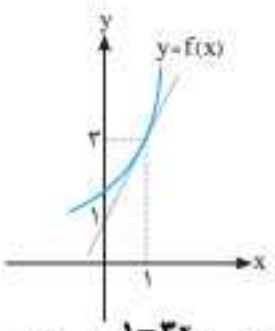
۱) -4 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۳۱. خط Δ بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=3$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول ۳ کدام است؟



۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{3}{8}$

۱۸۳۲. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، شیب خط قائم بر نمودار تابع $y=\frac{x}{f(x)}$ در نقطه‌ای به‌طول $x=1$ واقع بر نمودار کدام است؟



۱) ۹ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) -9 ۴) $-\frac{1}{9}$

۱۸۳۳. اگر معادلهٔ خط مماس بر تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_0=-1$ واقع بر تابع به‌صورت $y=3x+4$ باشد، معادلهٔ خط مماس بر تابع $g(x)=f(\frac{1-3x}{x+1})$ در نقطه‌ای به طول $x_0=1$ واقع بر تابع g کدام است؟

۱) $y=4-3x$ ۲) $y=-3x-2$ ۳) $y=x+3$ ۴) $y=x-2$

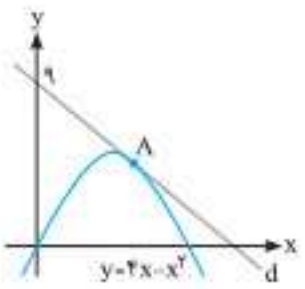
۱۸۳۴. خط d موازی محور xها، قرینهٔ سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۲/۷۵

۱۸۳۵. درنقطهٔ تلاقی منحنی‌های $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات، خط مماس بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

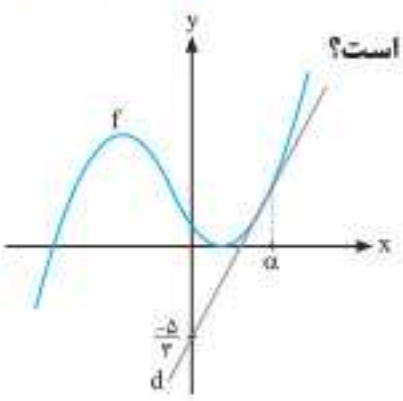
۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۸۳۶. در شکل مقابل، خط d بر منحنی تابع $y=f(x)$ مماس است. طول نقطهٔ A کدام است؟



۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{8}{3}$

۱۸۳۷. در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ $x=\alpha$ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$ مماس است. حاصل $f(\alpha)+f'(\alpha)$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{13}{3}$

۱۸۳۸. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰ با تغییر)

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۱۲

۱۸۳۹. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-\sqrt{x}}+\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

۱) $y=x-۸$ ۲) $y=۲x-۸$ ۳) $y=۲x-۱۰$ ۴) $y=۴x-۱۴$

۱۸۴۰. عرض‌ازمبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن کدام است؟ (تجربی ۹۲ با تغییر)

۱) $۱-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $۱+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۱-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۱+\frac{\pi}{۲}$

۱۸۴۱. عرض‌ازمبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^۲-۲x+۳}$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ واقع بر آن کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴ با تغییر)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱۷}{۹}$ ۳) $\frac{۹}{۱۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸۴۲. به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y=mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{۱+x^۲}$ است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $m>-۱$ ۲) $m<-۱$ ۳) $m>۱$ ۴) $m<۱$

۱۸۴۳. امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۳}$ با نیمساز ربع سوم، زاویهٔ α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

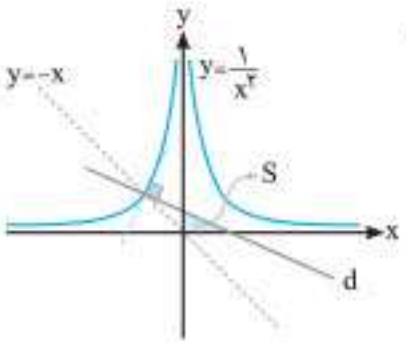
۱۸۴۴. از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}+۲$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(۲\alpha)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲۲۵}{۲۸۹}$ ۴) $\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$

۱۸۴۵. در نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط محور xها را درنقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی تیر ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\pi}{۴}-۱$ ۲) $\frac{\pi}{۴}-۳$ ۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۸}$

۱۸۴۶. از نقطهٔ برخورد $y=\frac{۱}{x^۲}$ با نیمساز ربع دوم، قائمی بر منحنی رسم می‌کنیم تا با محورهای مختصات در ربع اول مثلثی بسازد. مساحت مثلث کدام است؟

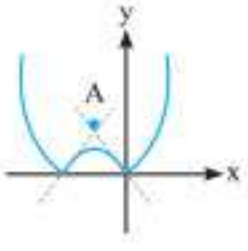


۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

نیم‌مماس‌ها و مشتق‌های چپ و راست (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)

شیب خط نیم‌مماس‌های چپ و راست (جبری)

۱۸۴۷. نیم‌مماس‌های رسم‌شده در تابع $f(x)=|x^۲+۴x|$، یکدیگر را در نقطهٔ A قطع نموده‌اند. عرض نقطهٔ A کدام است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۱۸۴۸. اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x)=|x|(x+a)$ در نقطهٔ گوشهٔ آن عمود بر هم باشند، مجموعه‌مقادیر a کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{-۱,۱\}$ ۴) $\varnothing$

۱۸۴۹. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x}+|x-۱|$، مقدار $f'_+(۱)+۳f'(۱)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸۵۰. مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x=-۳$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۸۵۱. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۸۵۲. اگر θ زاویهٔ بین مماس چپ و راست نمودار تابع $f(x)=[x+\frac{۱}{۲}]x+x^۲$ در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۸۵۳. معادلهٔ خط نیم‌مماس راست بر تابع $f(x)=|x^۲-۴||۲x^۲]+x^۳+۲$ در نقطه‌ای به طول $x=-۲$ واقع بر تابع کدام است؟ ([ ] نماد تابع جزء صحیح است.)

۱) $y=۴۰x+۷۴$ ۲) $y=۴۰x+۷۶$

۳) $y=۴۴x+۸۲$ ۴) تابع در این نقطه خط نیم‌مماس راست ندارد.

شیب خط نیم‌مماس‌های چپ و راست (مثلثاتی)

۱۸۵۴. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{۱+\cos x} & ; x>۰\\ \sin ۲x & ; x\le ۰\end{cases}$، مقدار $f'_+(۰)-f'_-(۰)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۸۵۵. با فرض $f(x)=\begin{cases}۲\sin \pi x-۳x & ; x\le ۱\\ [\frac{x}{۲}]\cos \pi x+۳ & ; x>۱\end{cases}$، حاصل $f'(\frac{۹}{۲})+f'_-(۱)$ کدام است؟ ([ ] نماد تابع جزء صحیح است.)

۱) $-۴\pi-۳$ ۲) $۲\pi-۱$ ۳) $۲\pi+۱$ ۴) $-۳\pi+۲$

۱۸۵۶. اگر θ زاویهٔ بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[۲+\cos\frac{x}{۲}]\sin ۲x$ در نقطهٔ $x=\pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۸۵۷. خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x)=|\sin(۲x)|+۱$ را در نقطه‌ای به طول $x=۰$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به‌ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره‌خط AB کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

مشتق‌پذیری توابع در نقطه (استفاده از قواعد مشتق‌گیری)

۱۸۵۸. اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx+۴ & ; x\ge -۲\\ x^۳-x & ; x<-۲\end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(۱)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) -۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸۵۹. به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a، تابع $f(x)=\begin{cases}bx+c & ; x<a\\ \frac{۱}{x} & ; x\ge a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟ (ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۸۶۰. فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$. اگر $f(x)=\begin{cases}g(x) & ; x\le ۲\\ g'(x) & ; x>۲\end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۱۸۶۱. اگر تابع $f(x)$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۲+|x-۱| & ; x\ge ۱\\ [x]-b & ; x<۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})$

۱۸۶۲. در تابع $f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & ; x\ge ۱\\ x^۲+ax+b & ; x<۱\end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

۱۸۶۳. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۸}{ax+b} & ; x>۲\\ -x^۳+۶x & ; x\le ۲\end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی را می‌نویسیم و به جای a_1، $-27d$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}(2(-27d)+(n-1)d)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(-54d+(n-1)d)=0\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}-54d+(n-1)d=0$$

$$\xrightarrow{d\neq 0}54=n-1\Rightarrow n=55$$

۲۱۴. (گزینه ۲) مجموع چهار جملهٔ اول ۱۵ و مجموع پنج جملهٔ بعدی ۳۰ است. اکنون برای محاسبهٔ جملهٔ یازدهم دنباله به a_1 و d نیاز داریم. با توجه به اطلاعات مسئله، مجموع نه جملهٔ اول (مجموع چهار جملهٔ اول (۱۵) به اضافهٔ مجموع پنج جملهٔ بعد (۳۰)) برابر ۴۵ است؛ در نتیجه:

$$\begin{cases}S_4=15\Rightarrow \frac{4}{2}(2a_1+3d)=15\\ S_9=45\Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1+8d)=45\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+3d=7/5\\ 2a_1+8d=10\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}}5d=2/5\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$

مقدار d را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم: $2a_1+3(\frac{1}{2})=7/5\Rightarrow 2a_1=6\Rightarrow a_1=3$

حال جملهٔ یازدهم را محاسبه می‌کنیم: $a_{11}=a_1+10d=3+10(\frac{1}{2})=8$

۲۱۵. (گزینه ۳) تعداد جملات دسته‌ها به‌صورت مقابل است: $1,2,3,\ldots,40$

حال باید ببینیم جملهٔ آخر دستهٔ چهلم، چندمین عدد است؛ پس مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰ را می‌یابیم.

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\xrightarrow{n=40}S_{40}=20(1+40)=820$$

جملهٔ ۸۲۰اُم اعداد طبیعی فرد را طبق الگوی زیر به دست می‌آوریم:

$$t_n=2n-1\Rightarrow t_{820}=2(820)-1=1639$$

۲۱۶. (گزینه ۳) $\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\ldots$

$$\text{شمارهٔ آخرین جملهٔ واقع در دستهٔ بیستم}=1+2+3+\cdots+20=\frac{20\times 21}{2}=210$$

در نتیجه شمارهٔ اولین جملهٔ واقع در دستهٔ بیستم برابر است با: $210-19=191$

پس مجموع این بیست جمله برابر است با:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(a_{191}+a_{210})=10(191+210)=10\times 401=4010$$

۲۱۷. (گزینه ۳) جملات b_n را می‌سازیم:

$$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\Rightarrow\begin{cases}b_1=\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{1+5}{2}=3\\ b_2=\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{5+9}{2}=7\\ b_3=\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{9+13}{2}=11\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۴ و جملهٔ اول ۳ داریم:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2(3)+(20-1)\times 4)=820$$

۲۱۸. (گزینه ۳) **روش اول** مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ به دست می‌آید، با داشتن جملهٔ nاُم $(a_n=4n+k)$، می‌توانیم مقدار هر جمله دلخواه از جملهٔ a_1 را بیابیم؛ بنابراین:

$$a_n=4n+k\Rightarrow a_1=4(1)+k\Rightarrow a_1=4+k$$

حاصل a_1 و a_n را در فرمول S_n جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(4+k+4n+k)=\frac{n}{2}(4n+2k+4)$$

$$=\frac{4n^2}{2}+\frac{2kn}{2}+\frac{4n}{2}=2n^2+kn+2n=2n^2+(2+k)n$$

حاصل S_n را با عبارت داده‌شده در صورت سؤال برابر قرار می‌دهیم:

$$2n^2+(2+k)n=bn^2+7n$$

از برابری دو مقدار فوق نتیجه می‌شود که باید ضرایب n^2 با هم و ضرایب n نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}2=b\\ 2+k=7\Rightarrow k=5\end{cases}\Rightarrow k+b=7$$

روش دوم

در فرمول S_n، قدرنسبت دو برابر ضریب n^2 است و همچنین در فرمول a_n ضریب n برابر قدرنسبت است، بنابراین:

$$\begin{cases}a_n=4n+k\Rightarrow d=4\\ S_n=bn^2+7n\Rightarrow d=2b\end{cases}\Rightarrow b=2$$

چون $S_1=a_1$ است، پس اگر $n=1$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2(1)^2+7(1)=4(1)+k\Rightarrow k=5\xrightarrow{}k+b=7$$

۲۱۹. (گزینه ۴) مجموع جملات با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم، یعنی: $a_7+a_8+\cdots+a_{18}$

جملهٔ عمومی مجموع جملات را داریم که به‌صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است.

دقت کنید که مجموع خواسته‌شده، مجموع جملات هفتم تا هجدهم است، پس S_6 (مجموع ۶ جملهٔ اول) را از S_{18} (مجموع ۱۸ جملهٔ اول) کم می‌کنیم. چرا؟

$$\begin{cases}S_{18}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{18}\\ S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\end{cases}$$

تفاضل: $S_{18}-S_6=a_7+a_8+\cdots+a_{18}$

این همان عبارتی است که حاصل آن را می‌خواهیم؛ پس با توجه به رابطهٔ S_n داریم:

$$\frac{18(18-15)}{6}-\frac{6(6-15)}{6}=a_7+a_8+\cdots+a_{18}$$

$$\Rightarrow a_7+a_8+\cdots+a_{18}=9-(-9)=18$$

پس خوب دقت کنید که سؤال، مجموع را با شروع از چه جمله‌ای می‌خواهد، اگر این‌جا $S_{18}-S_7$ را محاسبه می‌کردیم، جملهٔ هفتم حذف می‌شد.

۲۲۰. (گزینه ۱)

روش اول

راهبرد: اگر در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول دنباله با مجموع m جملهٔ اول دنباله برابر باشند، آن‌گاه مجموع $m+n$ جملهٔ اول دنباله برابر صفر می‌شود. $(m\neq n)$ $S_m=S_n\Rightarrow S_{m+n}=0$

به کمک راهبرد فوق، از $S_5=S_{10}$ به‌سادگی نتیجه می‌گیریم $S_{5+10}=S_{15}=0$ است.

روش دوم فرض کنید راهبرد را به خاطر ندارید و می‌خواهید سؤال را به‌صورت تشریحی حل کنید. برای این منظور فرمول‌های S_5 و S_{10} را باز می‌کنیم:

$$S_5=S_{10}\Rightarrow\frac{5}{2}(2a_1+4d)=\frac{10}{2}(2a_1+9d)$$

$$\Rightarrow 2a_1+4d=4a_1+18d\Rightarrow 2a_1+14d=0$$

حال مجموع ۱۵ جملهٔ اول را می‌یابیم:

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+(15-1)d)=\frac{15}{2}(2a_1+14d)=\frac{15}{2}(0)=0$$

۲۲۱. گزینه ۲

راهبرد: در هر دنبالهٔ حسابی می‌توان مجموع تعداد فردی از جملات دنباله را از رابطهٔ (جملهٔ وسط) × تعداد = S_n به دست آورد.

$$۲۵۵=(۲n+۱)\times ۱۷\Rightarrow ۱۵=۲n+۱\Rightarrow n=۷$$

توجه کنید که $۲n+۱$ فرد است.

۲۲۲. گزینه ۲ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی را (با جملهٔ اول a و جملهٔ آخر b) بدون در نظر گرفتن a و b، از فرمول $S_n=\frac{n(a+b)}{۲}$ به دست می‌آوریم.

مجموع واسطه‌های حسابی بین ۴ و ۶: $S_n=\frac{n(۴+۶)}{۲}$

از آن‌جایی که مجموع همهٔ جملات باید بیش از ۵۰ شود، می‌توان نوشت:

$$۴+۶+\frac{n(۴+۶)}{۲}>۵۰\Rightarrow \frac{۱۰n}{۲}>۴۰\Rightarrow n>۸$$

حداقل مقدار n برابر ۹ می‌شود.

۲۲۳. گزینه ۱ روش اول

راهبرد: اگر در یک دنبالهٔ حسابی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^۲}{n^۲}$ باشد، آن‌گاه:

(۱) $d=۲a_۱$ (۲) $\frac{a_m}{a_n}=\frac{۲m-۱}{۲n-۱}$

با توجه به راهبرد فوق، از آن‌جایی که $\frac{S_۵}{S_۳}=\frac{۵^۲}{۳^۲}$، می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{a_۵}{a_۳}=\frac{۲(۵)-۱}{۲(۳)-۱}$ است، یعنی $\frac{a_۵}{a_۳}=\frac{۹}{۵}$ است.

روش دوم فرض کنید راهبرد را به خاطر ندارید و می‌خواهید سؤال را به‌صورت تشریحی حل کنید؛ برای این منظور فرمول‌های $S_۵$ و $S_۳$ را باز می‌کنیم:

$$\frac{S_۵}{S_۳}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow\frac{\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d)}{\frac{۳}{۲}(۲a_۱+۲d)}=\frac{\frac{۵}{۲۵}}{\frac{۹}{۳}}\Rightarrow\frac{۲a_۱+۴d}{۲a_۱+۲d}=\frac{۵}{۳}$$

$$۶a_۱+۱۲d=۱۰a_۱+۱۰d\Rightarrow ۲d=۴a_۱\Rightarrow d=۲a_۱$$

حالا به محاسبهٔ نسبت خواسته‌شده می‌پردازیم:

$$\frac{a_۵}{a_۳}=\frac{a_۱+۴d}{a_۱+۲d}=\frac{a_۱+۴(۲a_۱)}{a_۱+۲(۲a_۱)}=\frac{۹a_۱}{۵a_۱}=\frac{۹}{۵}$$

۲۲۴. گزینه ۱

راهبرد: اگر مجموع k جملهٔ اول ردیف فرد را از مجموع k جملهٔ اول ردیف زوج کم کنیم، حاصل برابر kd می‌شود:

$$\underbrace{(a_۲+a_۴+\cdots+a_{۲k})}_{\text{k جملهٔ اول ردیف زوج}}-\underbrace{(a_۱+a_۳+\cdots+a_{۲k-۱})}_{\text{k جملهٔ اول ردیف فرد}}=kd$$

مجموع ۱۵ جملهٔ فرد و ۱۵ جملهٔ زوج را داریم، مطابق راهبرد گفته‌شده داریم:

$$(a_۲+a_۴+\cdots+a_{۳۰})-(a_۱+a_۳+\cdots+a_{۲۹})=۱۵\times d$$

$$\Rightarrow ۱۰۵-۷۵=۱۵d\Rightarrow d=۲$$

جمله‌های ردیف فرد دنباله را کنار هم می‌نویسیم.

$$a_۱\ \overset{+۲d}{,}\ a_۳\ \overset{+۲d}{,}\ a_۵\ ,\ \cdots\ ,\ a_{۲۹}$$

این جمله‌ها، دنباله‌ای حسابی با ۱۵ جمله، جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $۲d$ هستند.

با استفاده از فرمول مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)۲d)\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴(۴))=۷۵\Rightarrow a_۱=-۲۳$$

به کمک جملهٔ عمومی دنباله، جملهٔ سوم را می‌یابیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_۳=-۲۳+۲(۲)=-۱۹$$

۲۲۵. گزینه ۳ در صورت کسر مجموع ۶ جملهٔ ردیف زوج با شروع از $a_۲$ و در مخرج کسر مجموع ۶ جملهٔ ردیف فرد با شروع از $a_۳$ را داریم؛ بنابراین ابتدا مخرج کسر را به کمک فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم: $a_۳+a_۵+\cdots+a_{۱۳}=a_۳+a_۵+\cdots+a_{۱۱}+(a_۱+۱۲d)$

$$=\underbrace{a_۱+a_۳+\cdots+a_{۱۱}}_{۷d}+۱۲d=۷d+۱۲d=۱۹d$$

با توجه به مطالب گفته‌شده داریم:

$$\Rightarrow a_۲+a_۴+\cdots+a_{۱۲}=a_۱+a_۳+\cdots+a_{۱۱}+۶d=۷d+۶d=۱۳d$$

اکنون مقدارهای به دست آمده را در عبارت خواسته‌شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{a_۲+a_۴+\cdots+a_{۱۲}}{a_۳+a_۵+\cdots+a_{۱۳}}=\frac{۱۳d}{۱۹d}=\frac{۱۳}{۱۹}$$

۲۲۶. گزینه ۱

راهبرد: اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند:

$$\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_n}=\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_۲}+\frac{۱}{a_۲}-\frac{۱}{a_۳}+\frac{۱}{a_۳}-\frac{۱}{a_۴}$$

$$+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}}-\frac{۱}{a_n})$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_n}=\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_n})$$

بنابراین با توجه به راهبرد بالا داریم:

$$\frac{۱}{۲\times۵}+\frac{۱}{۵\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times۲۰}=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱۰-۱}{۲۰})$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۹}{۲۰})=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۲۲۷. گزینه ۲ با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی، به ساده‌کردن رابطهٔ داده‌شده می‌پردازیم:

$$a_۲a_۴=۲a_۵\Rightarrow a_۱q\times a_۱q^۳=۲a_۱q^۴\Rightarrow a_۱^۲q^۴=۲a_۱q^۴$$

$$\xrightarrow{\div a_۱q^۴}a_۱=۲$$

۲۲۸. گزینه ۴ می‌دانیم فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n=a_۱q^{n-۱}$ است، بنابراین در تساوی داده‌شده به جای جملات می‌توان معادل آن‌ها را قرار داد، یعنی:

$$\frac{a_۱q^۲+a_۱q^۴}{a_۱q^۵+a_۱q^۷}=۱۶$$

حال از صورت و مخرج، ب.م.م عبارت را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{a_۱q^۲(۱+q^۲)}{a_۱q^۵(۱+q^۲)}=۱۶\Rightarrow\frac{۱}{q^۳}=۱۶\Rightarrow q^۳=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow q=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۶}}=\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۲}}$$

۲۲۹. گزینه ۴ ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را به دست می‌آوریم:

$$a_n=a_۱q^{n-۱}=(\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۸})^{n-۱}=(\frac{۱}{۲})^۲\times((\frac{۱}{۲})^۳)^{n-۱}$$

$$\Rightarrow a_n=(\frac{۱}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^{۳n-۳}=(\frac{۱}{۲})^{۳n-۱}$$

تعداد جملات دنبالهٔ هندسی داده‌شده برابر شمارهٔ جملهٔ $(\frac{۱}{۲})^{k-۱}$ است:

$$(\frac{۱}{۲})^{۳n-۱}=(\frac{۱}{۲})^{k-۱}\Rightarrow ۳n-۱=k-۱\Rightarrow n=\frac{k}{۳}$$

۲۲۰. (گزینه ۱) با توجه به فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1 q^7 = 8 \ , \ a_{10} \times a_{18} = 2^{18}$$

$$\Rightarrow a_1 q^9 \times a_1 q^{17} = 2^{18} \Rightarrow a_1^2 \times q^{26} = 2^{18} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \pm a_1 q^{13} = 2^9$$

$$\frac{\pm a_1 q^{13}}{a_1 q^7} = \frac{2^9}{2^3} = 2^6 \Rightarrow \pm q^6 = 2^6 \xrightarrow[\text{صعودی است}]{\text{دنباله}} q = 2$$

$$\Rightarrow a_1 \times 2^7 = 2^3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

جملهٔ سی‌ودوم این دنباله برابر است با:

$$a_{32} = a_1 q^{31} = \frac{1}{2^4} \times 2^{31} = 2^{27}$$

۲۲۱. (گزینه ۴) به کمک جملهٔ عمومی دنباله، جملات a_2 و a_6 را بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{a_6}{a_2^3} + \frac{a_2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{aq^5}{(aq)^3} + \frac{aq}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{aq^5}{a^3 q^3} + \frac{aq}{a^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{a^2} + \frac{q}{a} = 2 \Rightarrow (\frac{q}{a})^2 + (\frac{q}{a}) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{q}{a} + 2)(\frac{q}{a} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{q}{a} = -2 \\ \frac{q}{a} = 1 \end{cases}$$

عبارت خواسته‌شده نسبت a^2 به a_2 است؛ پس:

$$\frac{a^2}{a_2} = \frac{a^2}{aq} = \frac{a}{q} \longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{q} = -\frac{1}{2} \ \checkmark \\ \frac{a}{q} = 1 \ \checkmark \end{cases}$$

که $-\frac{1}{2}$ در بین گزینه‌ها وجود دارد.

۲۲۲. (گزینه ۴) ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را می‌نویسیم و $\{q \in \mathbb{N} \ ; \ q \geq 2\}$ را در نظر می‌گیریم:

$$a_1 q^{n-1} \leq 100 \Rightarrow a_1 (2)^{n-1} \leq 100$$

با توجه به این‌که تعداد جملات ۵ تا است، به جای n عدد ۵ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a_1 (2)^{5-1} \leq 100 \Rightarrow 16 a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 \leq \frac{100}{16} \Rightarrow a_1 \leq 6/25$$

بنابراین $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ می‌تواند باشد.

اگر q را ۳ در نظر بگیریم:

$$a_1 q^{n-1} \leq 100 \Rightarrow a_1 (3)^{n-1} \leq 100 \xrightarrow{n=5} a_1 (3)^{5-1} \leq 100$$

$$\Rightarrow a_1 (3^4) \leq 100 \Rightarrow 81 a_1 \leq 100 \Rightarrow a_1 \leq \frac{100}{81} \Rightarrow a_1 \leq 1/23$$

بنابراین $a_1 = 1$ می‌تواند باشد.

توجه کنید که به ازای $q \geq 4$ نیز نمی‌توان ۵ جمله با شرایط سؤال یافت. در مجموع، ۷ دنباله به‌صورت گفته‌شده به دست می‌آید.

دقت کنید: در این تست می‌توانیم به جای این‌که با تعیین قدرنسبت، جملهٔ اول را بیابیم، با تعیین جملهٔ اول، قدرنسبت‌ها را محاسبه کنیم؛ ولی این روش زمان بیشتری را می‌گیرد.

۲۲۳. (گزینه ۲) در این دنباله با توجه به اطلاعات داده‌شده داریم:

$$a_1 \ , a_2 \ , \cdots , a_{10} \ , a_{11}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 24$$

$$a_{11} \times a_{10} \times a_9 \times a_8 = 54$$

ضرب طرفین: $(a_1 \times a_{11}) \times (a_2 \times a_{10}) \times (a_3 \times a_9) \times (a_4 \times a_8) = 24 \times 54$

واسطهٔ هندسی جفت‌های داده‌شده، a_6 است:

$$a_6^2 \times a_6^2 \times a_6^2 \times a_6^2 = (2^3 \times 3) \times (3^3 \times 2) = 6^4 \Rightarrow a_6^8 = 6^4$$

$$\Rightarrow a_6 = \pm \sqrt{6} \xrightarrow{\text{جملات دنباله مثبت‌اند}} a_6 = \sqrt{6}$$

حاصل‌ضرب سه جملهٔ وسط را محاسبه می‌کنیم:

$$a_5 \times a_6 \times a_7 = (a_5 \times a_7) \times a_6 = a_6^2 \times a_6 = a_6^3 = (\sqrt{6})^3 = 6\sqrt{6}$$

۲۲۴. (گزینه ۴) ابتدا واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی این دو عدد را به دست می‌آوریم:

$$2 - \sqrt{3} \ , x \ , \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

واسطهٔ حسابی: $2x = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

$$\Rightarrow 2x = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 2$$

$$2 - \sqrt{3} \ , \ y \ , \ \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

واسطهٔ هندسی: $y^2 = (2 - \sqrt{3})(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}) = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

تفاضل واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی برابر است با:

$$\text{واسطهٔ هندسی} - \text{واسطهٔ حسابی} = y - x = \begin{cases} 1 - 2 = -1 \\ -1 - 2 = -3 \end{cases}$$

هشدار: توجه کنید تفاضل a از b برابر $a - b$ است.

۲۲۵. (گزینه ۲) با توجه به تعریف واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی، می‌توان مقادیر a و b را تعیین کرد.

$$a, 7, b \Rightarrow 7 = \frac{a + b}{2}$$

$$\Rightarrow a + b = 14 \quad (1)$$

$$a, b, 25 \Rightarrow b^2 = 25a \quad (2)$$

از رابطهٔ (1) می‌توان نوشت $a = 14 - b$. با جای‌گذاری آن در رابطهٔ (2) مقدار b را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$b^2 = 25(14 - b) \Rightarrow b^2 = 350 - 25b \Rightarrow b^2 + 25b - 350 = 0$$

$$\Rightarrow (b - 10)(b + 35) = 0 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} \begin{cases} b = 10 \ \checkmark \\ b = -35 \ \times \end{cases}$$

۲۲۶. (گزینه ۳) با توجه به صعودی‌بودن دنباله، آرایش اعداد به شکل مقابل است:

$$2 \ , a \ , b \ , c \ , d \ , 486$$

عدد ۴۸۶ ششمین جملهٔ دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۲ است:

$$486 = 2(q^{6-1}) \Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

حال دنباله را بازنویسی می‌کنیم:

$$2 \ , 6 \ , 18 \ , 54 \ , 162 \ , 486$$

واسطهٔ حسابی ۶ و ۱۸، میانگین آن‌ها یعنی ۱۲ است.

۲۲۷. (گزینه ۱) چهار عدد t_1، t_2، t_3، t_4 را بین a_4 و a_5 درج می‌کنیم:

$$a_3 \ , a_4 \ , t_1 \ , t_2 \ , t_3 \ , t_4 \ , a_5$$

با توجه به این‌که a_4 جملهٔ دوم و a_5 جملهٔ هفتم دنبالهٔ حسابی است، پس می‌توانیم به کمک این جمله‌ها قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را بیابیم.

$$d = \frac{a_5 - a_4}{7 - 2}$$

از طرفی اختلاف جمله‌های a_4 و a_3 نیز قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است.

$$d = a_4 - a_3$$

بنابراین:

$$\frac{a_5 - a_4}{7 - 2} = a_4 - a_3 \Rightarrow \frac{a_1 q^4 - a_1 q^3}{5} = a_1 q^3 - a_1 q^2$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q^3 (q - 1)}{5} = a_1 q^2 (q - 1) \Rightarrow q = 5$$