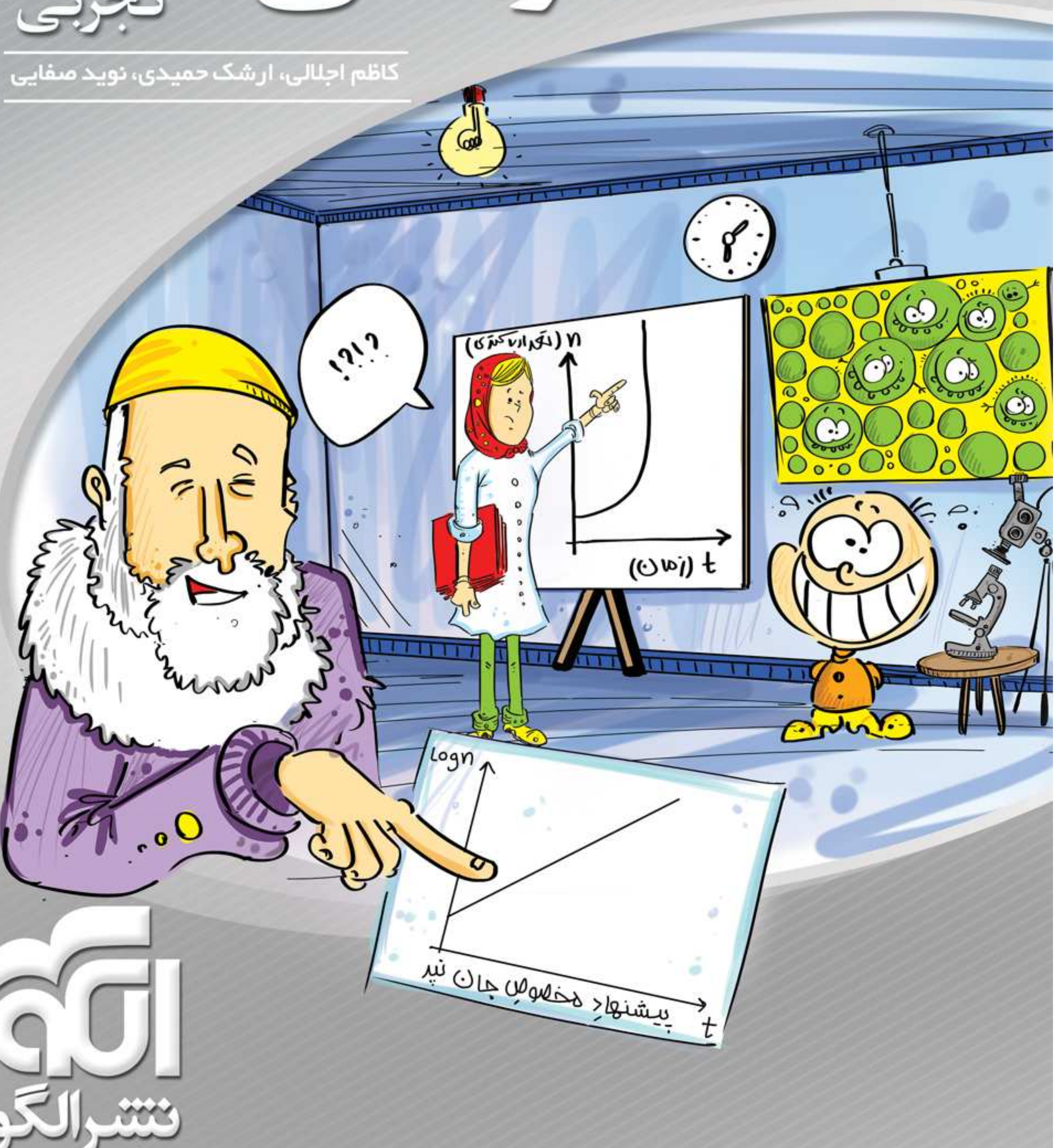
کتاب‌های سه‌بعدی

آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی ۲ (یازدهم) تجربی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



نشر الگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضی ۲ تجربی پایهٔ یازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همهٔ تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در دو فصل پایانی آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مریم موحدی‌مهر، مریم بیوک‌زاده و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، لیلا پرهیزکاری برای صفحه‌آرایی و سرکار خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصل دوم: هندسه

فصل سوم: تابع

فصل چهارم: مثلثات

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

فصل هشتم: راه‌حل تمرین‌ها

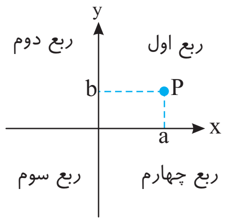
فصل نهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

هندسهٔ تحلیلی و جبر

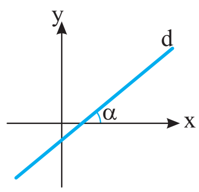
درس اول: هندسهٔ تحلیلی

یادآوری محورهـای مختصـات در صفحـه، دو محور با مبدأ مشتـرک هستـند که هـر یک بر دیگری عمود اسـت. محورهـای مختصـات، صفحه را بـه چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر یـک از آن‌ها را یـک **ربع** می‌نامند (شـکل را ببینید). نقطه‌های روی محورهای مختصات در هیچ ربعی نیسـتند. هر نقطه در صفحه مانند P متناظر با زوج مرتبی از عددهای حقیقی مانند (a, b) اسـت. a را **طول** نقطهٔ P می‌نامند و معمولاً آن را با x_P نشان می‌دهند. b را عرض نقطهٔ P می‌نامند و معمولاً آن را با y_P نشان می‌دهند. a و b را **مختصات** نقطهٔ P می‌نامند و گاهی این نقطه را به شکل $P(a, b)$ می‌نویسند، که یعنی P نقطهٔ (a, b) است.

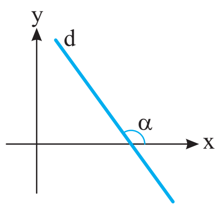


مطالب تکمیلی دربارهٔ معادلهٔ خط راست

از هر دو نقطه در صفحهٔ مختصات فقط یک خط راست می‌گذرد. فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و $x_A \neq x_B$ **شیب** خط راستی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد برابر است با $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



شیب خط $d = \tan\alpha$



شیب خط $d = \tan\alpha$

فرض کنید خط راسـت l از نقطه‌های $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد و $x_1 \neq x_2$. اگر $C(x, y)$ نقطه‌ای به‌جز این نقطه‌ها و روی این خط باشد، چون شیب خط راستی که از A و C می‌گذرد با شیب خط راستی که از A و B می‌گذرد برابر است، پس $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$. در نتیجه $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$. چون مختصات نقطه‌های A و B هم در این معادله صدق می‌کنند. پس مختصات هر نقطه روی خط l در این معادله صدق می‌کند.

نتیجه **معادلهٔ خط راستی که از نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد (که در اینجا $x_1 \neq x_2$)، به صورت $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ است.**

اگر دو طرف معادلهٔ خط راست $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ را در $x_1 - x_2$ ضرب کنیم به دست می‌آید

$$(x_1 - x_2)y - (x_1 - x_2)y_1 = (y_1 - y_2)x - (y_1 - y_2)x_1$$

اگر عبارت‌های سمت چپ را به سمت راست ببریم، معلوم می‌شود که معادلهٔ خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است.

نتیجه **معادلهٔ هر خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است. شیب این خط برابر با $-\dfrac{a}{b}$ است.**

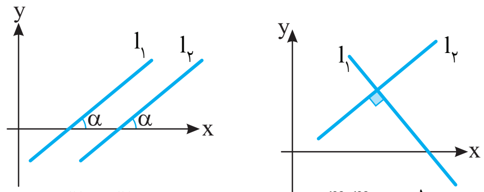
اگـر شیـب خط راسـتی را که از نقطه‌هـای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد $(x_1 \neq x_2)$، یعنی $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ را با m نشـان دهیم، معلوم می‌شود که معادلهٔ خط راست را می‌توان به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ نوشت. اگر این معادله را ساده کنیم معلوم می‌شود که می‌توان آن را به شکل $y = mx + b$ نوشت $(b = y_1 - mx_1)$. توجه کنید که نقطهٔ $(0, b)$ محل برخورد این خط با محور y است و b را **عرض از مبدأ** این خط می‌نامند. در ضمن، اگر نقطهٔ $(a, 0)$ محل برخورد خط با محور x باشد، a را **طول از مبدأ** خط می‌نامند.

نتیجه معادلهٔ خط راستی که شیب آن برابر m و عرض از مبدأ آن برابر b است به صورت $y=mx+b$ است.

خط‌های موازی و خط‌های عمود بر هم

یادآوری الف) فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو خط راست غیرموازی با محور y با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ باشند. در این صورت $l_۱$ و $l_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $m_۱=m_۲$.

ب) فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو خط راست غیرموازی با محورهای مختصات باشند، در این صورت $l_۱$ و $l_۲$ بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $m_۱m_۲=-۱$.



$m_۱=m_۲$ — $m_۱m_۲=-۱$

مسئله ۱ **معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $(۲,۱)$ بگذرد و بر خط $۲x-۴y+۷=۰$ عمود باشد.**

راه‌حل شیب خط $۲x-۴y+۷=۰$ برابر است با $-\frac{۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$. اگر شیب خط مورد نظر m باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}m=-۱$، پس $m=-۲$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن -۲ است و از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد به صورت $y-۱=-۲(x-۲)$، یعنی $y+۲x-۵=۰$ است.

تست ۱ **اگر خط راستی که از نقطه‌های $(۳,a)$ و $(۲,۷)$ می‌گذرد بر خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۴)$ و $(۱,۸)$ می‌گذرد عمود باشد، مقدار a چقدر است؟**

۱) ۷ ۲) $-\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) -۷

راه‌حل شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۳,a)$ و $(۲,۷)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-۷}{۳-۲}=a-۷$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۴)$ و $(۱,۸)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۴-۸}{-۱-۱}=۲$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، پس

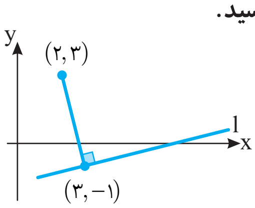
$$(a-۷)(۲)=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱۳}{۲}$$

مسئله ۲ **معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۳,۵)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(۲,۵)$ و $(-۳,۶)$ می‌گذرد عمود است.**

راه‌حل شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۲,۵)$ و $(-۳,۶)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۵-۶}{۲+۳}=-\frac{۱}{۵}$. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، چون بر این خط عمود است، پس $m(-\frac{۱}{۵})=-۱$، در نتیجه $m=۵$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن ۵ است و از نقطهٔ $(-۳,۵)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۵=۵(x+۳) \Rightarrow y-۵x-۲۰=۰$$

مسئله ۳ **پای عمود وارد از نقطهٔ $(۲,۳)$ بر خط راست l نقطهٔ $(۳,-۱)$ است. معادلهٔ این خط راست را بنویسید.**



راه‌حل خط مورد نظر بر خط راستی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,-۱)$ می‌گذرد عمود است (شکل را ببینید).

شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,-۱)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۳+۱}{۲-۳}=-۴$. اگر m شیب خط مورد نظر باشد، آن‌گاه $m(-۴)=-۱$، پس $m=\frac{۱}{۴}$. شیب خط مورد نظر $\frac{۱}{۴}$ است و از نقطهٔ $(۳,-۱)$ می‌گذرد، بنابراین معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y+۱=\frac{۱}{۴}(x-۳) \Rightarrow x-۴y-۷=۰$$

تست ۲ پای عمود وارد از نقطهٔ $(۳,۴)$ بر خط $۲x+y-۷=۰$ کدام نقطه است؟

۱) $(\frac{۹}{۵},\frac{۱۷}{۵})$ ۲) $(۱,۵)$

۳) $(۱,-۵)$ ۴) $(-۵,۱)$

راه‌حل شیب خط $۲x+y-۷=۰$ برابر است با $-\frac{۲}{۱}=-۲$. بنابراین اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، آن‌گاه $m(-۲)=-۱$، یعنی $m=\frac{۱}{۲}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $\frac{۱}{۲}$ است و از نقطهٔ $(۳,۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۳)\Rightarrow x-۲y+۵=۰$$

پای عمود مورد نظر محل برخورد خط‌های $۲x+y-۷=۰$ و $x-۲y+۵=۰$ است. اگر دستگاه معادله‌های $\begin{cases}۲x+y-۷=۰\\x-۲y+۵=۰\end{cases}$ را حل کنیم به دست می‌آید $x=\frac{۹}{۵}$ و $y=\frac{۱۷}{۵}$. بنابراین نقطهٔ مورد نظر $(\frac{۹}{۵},\frac{۱۷}{۵})$ است.

مسئله ۴ ثابت کنید نقطه‌های $A(۳,۴)$، $B(-۲,-۱)$ و $C(۴,۱)$ رأس‌های مثلثی قائم‌الزاویه هستند.

راه‌حل شیب خط‌های راستی که ضلع‌های مثلث ABC روی آن‌ها قرار دارند برابر است با $m_{AB}=\frac{۴+۱}{۳+۲}=۱$، $m_{BC}=\frac{-۱-۱}{-۲-۴}=\frac{۱}{۳}$ و $m_{AC}=\frac{۴-۱}{۳-۴}=-۳$. چون $m_{BC}\times m_{AC}=\frac{۱}{۳}\times(-۳)=-۱$، پس ضلع‌های BC و AC بر هم عمودند و مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

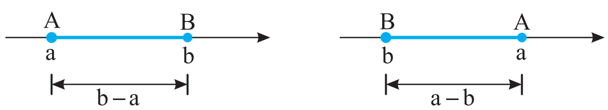
مسئله ۵ نقطه‌های $A(۱۰,۴)$، $B(-۴,۹)$ و $C(-۲,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادلهٔ خط راستی را که ارتفاع وارد از رأس A روی آن قرار دارد بنویسید.

راه‌حل ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC عمود است. شیب خط راستی که از نقطه‌های B و C می‌گذرد برابر است با $\frac{۹+۱}{-۴+۲}=-۵$. بنابراین اگر شیب خط راستی که ارتفاع روی آن قرار دارد برابر m باشد، آن‌گاه $m(-۵)=-۱$، پس $m=\frac{۱}{۵}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $\frac{۱}{۵}$ است و از نقطهٔ $A(۱۰,۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۴=\frac{۱}{۵}(x-۱۰)\Rightarrow x-۵y+۱۰=۰$$

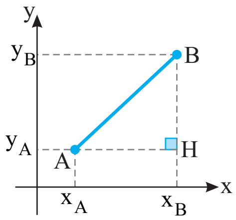
۵ فاصلهٔ بین دو نقطه

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند. در این صورت، **فاصلهٔ** بین A و B برابر با طول پاره‌خط AB است. اگر نقطه‌های A و B متناظر با عددهای a و b باشند، از روی شکل‌های زیر معلوم است که طول پاره‌خط AB (بر حسب اینکه $a>b$ یا $a<b$) برابر با $a-b$ یا $b-a$ است که با نمادگذاری قدرمطلقی می‌شود $|a-b|$.



اگر a و b را با x_A و x_B نشان دهیم، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

نتیجه اگر نقطه‌های A و B روی محور متناظر با عددهای x_A و x_B باشند، فاصلهٔ بین A و B برابر با $|x_A-x_B|$ است.



اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که $AH = |x_A - x_B|$ و $BH = |y_A - y_B|$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHB، $AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ = |x_A - x_B|^۲ + |y_A - y_B|^۲$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$. منظورمان از **فاصله** دو نقطهٔ A و B طول پاره‌خط AB است. بنابراین نتیجهٔ زیر به دست می‌آید.

نتیجه **فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ در صفحهٔ مختصات برابر است با** $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$.

مثال: فاصلهٔ نقطه‌های $(۱, -۲)$ و $(-۲, ۲)$ در صفحهٔ مختصات برابر است با $\sqrt{(۱-(-۲))^۲ + (-۲-۲)^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$.

تست ۳ **فاصلهٔ نقطهٔ $A(a, ۱)$ از نقطه‌های $B(-۱, ۱)$ و $C(۳, ۵)$ برابر است. مقدار a چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a+۱)^۲ + (۱-۱)^۲} = \sqrt{(a-۳)^۲ + (۱-۵)^۲} \Rightarrow \sqrt{a^۲ + ۲a + ۱ + ۰} = \sqrt{a^۲ - ۶a + ۹ + ۱۶}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم به دست می‌آید

$$a^۲ + ۲a + ۱ = a^۲ - ۶a + ۲۵ \Rightarrow ۸a = ۲۴ \Rightarrow a = ۳$$

مسئله ۶ **نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(۱, ۳)$ و $(۲, -۵)$ برابر باشد.**

راه‌حل فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(a, ۰)$ باشد. در این صورت فاصله‌اش تا نقطهٔ $(۱, ۳)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-۱)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{(a-۱)^۲ + ۹} = \sqrt{a^۲ - ۲a + ۱۰}$$

و فاصله‌اش از نقطهٔ $(۲, -۵)$ برابر است با $\sqrt{(a-۲)^۲ + (۰-(-۵))^۲} = \sqrt{(a-۲)^۲ + ۲۵} = \sqrt{a^۲ - ۴a + ۲۹}$.

در نتیجه باید $\sqrt{a^۲ - ۲a + ۱۰} = \sqrt{a^۲ - ۴a + ۲۹}$. اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲ - ۲a + ۱۰ = a^۲ - ۴a + ۲۹ \Rightarrow ۲a = ۱۹ \Rightarrow a = \frac{۱۹}{۲}$$

مسئله ۷ **ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $A(۰, ۶)$، $B(-۵, ۳)$ و $C(۳, ۱)$ هستند، متساوی‌الساقین است.**

راه‌حل توجه کنید که $AC = \sqrt{(۰-۳)^۲ + (۶-۱)^۲} = \sqrt{۹+۲۵} = \sqrt{۳۴}$ و $AB = \sqrt{(۰+۵)^۲ + (۶-۳)^۲} = \sqrt{۲۵+۹} = \sqrt{۳۴}$. بنابراین $AB = AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تست ۴ **نقطه‌های $B(۱, ۳)$ و $C(-۲, ۷)$ دو سر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند. رأس A کدام نقطه می‌تواند باشد؟**

۱) $(۱, ۶)$ ۲) $(-\frac{۱}{۳}, ۵)$ ۳) $(\frac{۵}{۶}, ۶)$ ۴) $(\frac{۱}{۶}, ۷)$

راه‌حل فرض کنید نقطهٔ A (a, b) باشد. در این صورت

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a-۱)^۲ + (b-۳)^۲} = \sqrt{(a+۲)^۲ + (b-۷)^۲} \Rightarrow (a-۱)^۲ + (b-۳)^۲ = (a+۲)^۲ + (b-۷)^۲$$

$$a^۲ - ۲a + ۱ + b^۲ - ۶b + ۹ = a^۲ + ۴a + ۴ + b^۲ - ۱۴b + ۴۹ \Rightarrow -۶a + ۸b = ۴۳$$

مختصات نقطهٔ $(\frac{۵}{۶}, ۶)$ در این تساوی صدق می‌کند و مختصات بقیهٔ نقطه‌ها صدق نمی‌کنند. بنابراین A می‌تواند نقطهٔ $(\frac{۵}{۶}, ۶)$ باشد.

مسئله ۸ **نقطه‌های $A(۰,۰)$، $B(۳,۰)$ و $C(a,b)$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند. a و b را پیدا کنید.**

راه‌حل توجه کنید که $AB=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۰-۰)^۲}=۳$. بنابراین

$$AC=۳\Rightarrow\sqrt{(۰-a)^۲+(۰-b)^۲}=۳\Rightarrow a^۲+b^۲=۹ \qquad (۱)$$

$$BC=۳\Rightarrow\sqrt{(۳-a)^۲+(۰-b)^۲}=۳\Rightarrow(۳-a)^۲+b^۲=۹\Rightarrow ۹-۶a+a^۲+b^۲=۹ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $۹-۶a=۰$، پس $a=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^۲=۹-a^۲=۹-\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۴}$.

بنابراین $b=\pm\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$.

مسئله ۹ **نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-۱,۰)$ و $(۲,۴)$ به ترتیب برابر با ۱ و ۴ باشد.**

راه‌حل نقطهٔ مورد نظر را (x,y) می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{cases}\sqrt{(x+۱)^۲+(y-۰)^۲}=۱\\ \sqrt{(x-۲)^۲+(y-۴)^۲}=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+۱)^۲+y^۲=۱\\ (x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۱۶\end{cases}$$

اگر این تساوی‌ها را ساده کنیم به دست می‌آید

$$x^۲+۲x+y^۲=۰ \quad (۱), \qquad x^۲-۴x+۴+y^۲-۸y=۰ \quad (۲)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می‌آید $y=\frac{-۳x+۲}{۴}$. اگر این مقدار y را در تساوی (۱) قرار دهیم و ساده کنیم به دست می‌آید $۲۵x^۲+۲۰x+۴=۰$ در نتیجه $(۵x+۲)^۲=۰$. بنابراین $x=-\frac{۲}{۵}$ و در نتیجه $y=\frac{-۳x+۲}{۴}=\frac{۴}{۵}$. بنابراین نقطهٔ مورد نظر $(-\frac{۲}{۵},\frac{۴}{۵})$ است.

مسئله ۱۰ **نقطهٔ P را طوری پیدا کنید که از نقطه‌های $A(۱,۳)$، $B(-۳,۵)$ و $C(۵,-۱)$ به یک فاصله باشد.**

راه‌حل فرض کنید نقطهٔ P نقطهٔ (a,b) باشد. در این صورت

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(a-۱)^۲+(b-۳)^۲}=\sqrt{(a+۳)^۲+(b-۵)^۲}\Rightarrow(a-۱)^۲+(b-۳)^۲=(a+۳)^۲+(b-۵)^۲$$

$$a^۲-۲a+۱+b^۲-۶b+۹=a^۲+۶a+۹+b^۲-۱۰b+۲۵\Rightarrow -۲a+b=۶ \qquad (۱)$$

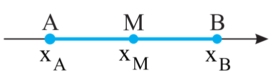
$$PA=PC\Rightarrow\sqrt{(a-۱)^۲+(b-۳)^۲}=\sqrt{(a-۵)^۲+(b+۱)^۲}\Rightarrow(a-۱)^۲+(b-۳)^۲=(a-۵)^۲+(b+۱)^۲$$

$$a^۲-۲a+۱+b^۲-۶b+۹=a^۲-۱۰a+۲۵+b^۲+۲b+۱\Rightarrow a-b=۲ \qquad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم به دست می‌آید $a=-۸$ و $b=-۱۰$. بنابراین نقطهٔ P نقطهٔ $(-۸,-۱۰)$ است.

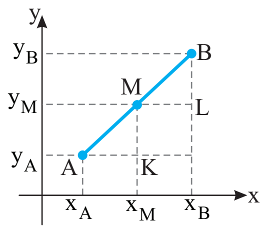
مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید). در این صورت



$$AM=BM\Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M\Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند و نقطهٔ $M(x_M, y_M)$ وسط پاره‌خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید). در این صورت از همنهشتی مثلث‌های AMK و MBL نتیجه می‌شود



$$AK = ML \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$.

نتیجه **فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد. در این صورت، مختصات نقطهٔ M برابرند با $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$.**

مثال: مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $A(-۱, ۴)$ و $B(۳, ۶)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۴+۶}{۲} = ۵$$

مثال: مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(a-۱, ۳-۲b)$ و $(۳-a, ۲b+۵)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{a-۱+۳-a}{۲} = ۱$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳-۲b+۲b+۵}{۲} = ۴$$

مسئله ۱۱ **نقطه‌های $A(۱۰, ۴)$، $B(-۴, ۹)$ و $C(-۲, -۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول میانه‌ای را که از رأس A می‌گذرد حساب کنید.**

راه‌حل نقطهٔ M وسط ضلع BC، به صورت $(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}) = (\frac{-۴-۲}{۲}, \frac{۹-۱}{۲}) = (-۳, ۴)$ به دست می‌آید. بنابراین

$$AM = \sqrt{(۱۰+۳)^۲ + (۴-۴)^۲} = \sqrt{۱۳^۲} = ۱۳$$

مسئله ۱۲ **اگر نقطهٔ $(۱, ۱)$ رأسی از یک مثلث باشد و $(-۲, ۳)$ و $(۵, ۲)$ نقطه‌های وسط ضلع‌هایی که از این رأس می‌گذرند باشند، مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.**

راه‌حل فرض کنید نقطهٔ $(۱, ۱)$ رأس A، نقطهٔ $(-۲, ۳)$ وسط ضلع AB و نقطهٔ $(۵, ۲)$ وسط ضلع AC باشند. توجه کنید که

$$\text{وسط ضلع } AB = (\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}) = (\frac{۱+x_B}{۲}, \frac{۱+y_B}{۲})$$

پس $\frac{۱+y_B}{۲} = ۳$ در نتیجه $y_B = ۵$ و $\frac{۱+x_B}{۲} = -۲$ بنابراین $x_B = -۵$. بنابراین مختصات رأس B نقطهٔ $(-۵, ۵)$ است. به همین ترتیب، $\text{وسط ضلع } AC = (\frac{x_A + x_C}{۲}, \frac{y_A + y_C}{۲}) = (\frac{۱+x_C}{۲}, \frac{۱+y_C}{۲})$، پس

$$۵ = \frac{۱+x_C}{۲} \Rightarrow x_C = ۹, \quad ۲ = \frac{۱+y_C}{۲} \Rightarrow y_C = ۳$$

بنابراین مختصات رأس C نقطهٔ $(۹, ۳)$ است.

تست ۵ وسط پاره‌خطی که دو سر آن نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات هستند، نقطهٔ $(۵,۲)$ است. معادلهٔ خط l کدام است؟

۱) $۵x+۲y=۲۹$ ۲) $۲x+۵y=۲۰$ ۳) $۳x-۲y=۱۱$ ۴) $۲x+۳y=۱۶$

راه‌حل فرض کنید خط l محورهای مختصات را در نقطه‌های $(a,۰)$ و $(۰,b)$ قطع می‌کند. در این صورت وسط پاره‌خطی که دو سرش این دو نقطه هستند، نقطهٔ $(\frac{a+۰}{۲},\frac{۰+b}{۲})$ یعنی $(\frac{a}{۲},\frac{b}{۲})$ است. بنابراین

$$(\frac{a}{۲},\frac{b}{۲})=(۵,۲)\Rightarrow\frac{a}{۲}=۵\ ,\ \ \frac{b}{۲}=۲\Rightarrow a=۱۰\ ,\ b=۴$$

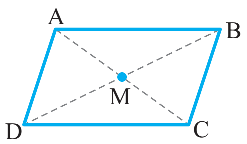
معادلهٔ خط راستی که از نقطه‌های $(۱۰,۰)$ و $(۰,۴)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-۴}{۱۰-۰}(x-۱۰)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۵}(x-۱۰)\Rightarrow ۵y+۲x=۲۰$$

مسئله ۱۳ معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(۳,۴)$ و $(-۱,۲)$ را بنویسید.

راه‌حل وسط پاره‌خط مورد نظر نقطهٔ $(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۴+۲}{۲})$، یعنی $(۱,۳)$ است. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۳,۴)$ و $(-۱,۲)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۴-۲}{۳+۱}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین اگر شیب عمودمنصف مورد نظر برابر m باشد، آن‌گاه $m\times\frac{۱}{۲}=-۱$، پس $m=-۲$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن -۲ است و از نقطهٔ $(۱,۳)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۳=-۲(x-۱)\Rightarrow ۲x+y-۵=۰$$



فرض کنید نقطه‌های $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$، $C(x_C,y_C)$ و $D(x_D,y_D)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و نقطهٔ $M(x_M,y_M)$ محل برخورد قطرهای این متوازی‌الاضلاع باشند. چون در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس نقطهٔ M هم وسط پاره‌خط AC است و هم وسط پاره‌خط BD. در نتیجه $x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}$ و $x_M=\frac{x_B+x_D}{۲}$. بنابراین $x_A+x_C=x_B+x_D$. به همین ترتیب $y_M=\frac{y_B+y_D}{۲}$ و $y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}$. بنابراین $y_A+y_C=y_B+y_D$.

نتیجه اگر $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$، $C(x_C,y_C)$ و $D(x_D,y_D)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، آن‌گاه

$$x_A+x_C=x_B+x_D,\quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

تست ۶ اگر نقطه‌های $A(۲,-۲)$، $B(۸,۴)$، $C(۵,۷)$ و $D(a,b)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، نقطهٔ D کدام است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,-۱)$

راه‌حل توجه کنید که

$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۲+۵=۸+a\Rightarrow a=-۱$$

همین‌طور

$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow -۲+۷=۴+b\Rightarrow b=۱$$

بنابراین D نقطهٔ $(-۱,۱)$ است.

تست ۷ نقطه‌های $A(۲, a)$ ، $B(۱, ۴)$ ، $C(b, ۳)$ و $D(۳, ۲)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که

$$x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow ۲+b=۱+۳ \Rightarrow b=۲$$

همین‌طور

$$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow a+۳=۴+۲ \Rightarrow a=۳$$

بنابراین $a-b=۱$.

مسئله ۱۴ ثابت کنید نقطه‌های $(-۱, -۶)$، $(۲, -۵)$، $(۷, ۲)$ و $(۴, ۱)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

راه‌حل اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۱, -۶)$ و نقطهٔ $(۷, ۲)$ نقطهٔ $(۳, -۲)=(\frac{-۱+۷}{۲}, \frac{-۶+۲}{۲})$ است. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۲, -۵)$ و $(۴, ۱)$ نقطهٔ $(۳, -۲)=(\frac{۲+۴}{۲}, \frac{-۵+۱}{۲})$ است. چون دو نقطهٔ به‌دست آمده یکی هستند، نتیجه می‌گیریم چهار نقطهٔ داده شده رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

فاصلهٔ نقطه از خط راست

یادآوری فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$.

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, -۴)$ از خط $۳x-۴y+۶=۰$ برابر است با $\frac{|۳\times۱-۴(-۴)+۶|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$.

مثال: برای اینکه فاصلهٔ نقطهٔ $(۲, ۳)$ از خط $y=۲x-۶$ را پیدا کنیم، ابتدا خط را به صورت $۲x-y-۶=۰$ می‌نویسیم، سپس از دستور فاصلهٔ نقطه از خط استفاده می‌کنیم. در این صورت به‌دست می‌آید $\frac{|۲\times۲-۳-۶|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$.

مسئله ۱۵ فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, ۱)$ از خط $۱۲(x+۴)=۵(y-۲)$ چقدر است؟

راه‌حل ابتدا معادلهٔ خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱۲(x+۴)=۵(y-۲) \Rightarrow ۱۲x+۴۸=۵y-۱۰ \Rightarrow ۱۲x-۵y+۵۸=۰$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, ۱)$ از این خط برابر است با $\frac{|۱۲\times۱-۵\times۱+۵۸|}{\sqrt{۱۲^۲+(-۵)^۲}}=\frac{۶۵}{۱۳}=۵$.

تست ۸ طول عمود وارد از نقطهٔ $(۳, ۱)$ بر خط $۴x+۳y+۲۰=۰$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل طول عمود وارد از نقطهٔ $(۳, ۱)$ بر خط $۴x+۳y+۲۰=۰$ در حقیقت فاصلهٔ این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|۴\times۳+۳\times۱+۲۰|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۳۵}{۵}=۷$$

مسئله ۱۶ **فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,۱)$ از خط $۲x-۳y+c=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. مقدار c را پیدا کنید.**

راه‌حل فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,۱)$ از خط $۲x-۳y+c=۰$ برابر است با

$$\frac{|۲\times۴-۳\times۱+c|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow\frac{|c+۵|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow|c+۵|=۱۳\Rightarrow c+۵=\pm۱۳\Rightarrow c=۸\ ,\ c=-۱۸$$

مسئله ۱۷ **معادلهٔ خط‌های راستی را بنویسید که شیب آن‌ها برابر -۱ و فاصلهٔ مبدأ از آن‌ها برابر ۵ است.**

راه‌حل فرض کنید خط $ax+by+c=۰$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -۱ است، پس $-\frac{a}{b}=-۱$، در نتیجه $a=b$.

از طرف دیگر، چون فاصلهٔ مبدأ از این خط برابر با ۵ است، پس

$$\frac{|a\times۰+a\times۰+c|}{\sqrt{a^۲+a^۲}}=۵\Rightarrow\frac{|c|}{\sqrt{۲}\,|a|}=۵\Rightarrow|c|=۵\sqrt{۲}\,|a|\Rightarrow c=\pm۵\sqrt{۲}\,a$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $ax+ay+۵\sqrt{۲}\,a=۰$ و $ax+ay-۵\sqrt{۲}\,a=۰$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x+y+۵\sqrt{۲}=۰$ و $x+y-۵\sqrt{۲}=۰$ نوشت.

مسئله ۱۸ **نقطه‌های روی خط $y=x$ را که فاصلهٔ آن‌ها از خط $۴x+۳y-۱=۰$ برابر ۵ است پیدا کنید.**

راه‌حل هر نقطه روی خط $y=x$ به صورت (a,a) است. اگر فاصلهٔ این نقطه تا خط $۴x+۳y-۱=۰$ برابر ۵ باشد، آن‌گاه

$$\frac{|۴a+۳a-۱|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=۵\Rightarrow\frac{|۷a-۱|}{۵}=۵\Rightarrow|۷a-۱|=۲۵\Rightarrow ۷a-۱=\pm۲۵\Rightarrow a=-\frac{۲۴}{۷},\quad a=\frac{۲۶}{۷}$$

بنابراین نقطه‌های مورد نظر $(-\frac{۲۴}{۷},-\frac{۲۴}{۷})$ و $(\frac{۲۶}{۷},\frac{۲۶}{۷})$ هستند.

مسئله ۱۹ **معادلهٔ خط‌های راستی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۲,۳)$ می‌گذرند و فاصلهٔ نقطه‌های $(۵,-۱)$ و $(۳,۷)$ از آن‌ها برابر است.**

راه‌حل معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ $(-۲,۳)$ می‌گذرد به صورت $y-۳=m(x+۲)$ یعنی $mx-y+۲m+۳=۰$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $(۵,-۱)$ از این خط برابر است با $\frac{|m\times۵-(-۱)+۲m+۳|}{\sqrt{m^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|۷m+۴|}{\sqrt{m^۲+۱}}$. فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,۷)$ از خط مورد نظر برابر است با $\frac{|m\times۳-۷+۲m+۳|}{\sqrt{m^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|۵m-۴|}{\sqrt{m^۲+۱}}$. اگر این دو فاصله برابر باشند، آن‌گاه

$$|۷m+۴|=|۵m-۴|\Rightarrow ۷m+۴=\pm(۵m-۴)\Rightarrow m=۰,\quad m=-۴$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $y-۳=۰$ و $y-۳=-۴(x+۲)$ یعنی $۴x+y+۵=۰$ هستند.

مسئله ۲۰ **مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(۲,۳)$، $(۴,-۱)$ و $(۱,۲)$ هستند چقدر است؟**

راه‌حل معادلهٔ خط راستی که رأس‌های $(۲,۳)$ و $(۱,۲)$ روی آن قرار دارند به‌صورت زیر است:

$$y-۳=\frac{۳-۲}{۲-۱}(x-۲)\Rightarrow x-y+۱=۰$$

فاصلهٔ رأس $(۴,-۱)$ تا این خط که برابر طول ارتفاع وارد از این رأس است، برابر است با $\frac{|۴-(-۱)+۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$. فاصلهٔ رأس‌های $(۲,۳)$ و $(۱,۲)$ هم برابر است با $\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲}$. بنابراین مساحت مثلث برابر است با $\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲}=۳$.

تست ۹ قرینهٔ نقطهٔ $(۳,۸)$ نسبت به خط $x+۳y-۷=۰$ کدام نقطه است؟

۱) $(-۱,-۴)$ ۲) $(-۳,-۸)$ ۳) $(۱,-۴)$ ۴) $(۳,۸)$

راه‌حل فرض کنید A نقطهٔ $(۳,۸)$ باشد و نقطهٔ $A'(a,b)$ قرینهٔ A نسبت به خط $x+۳y-۷=۰$ باشد. وسط پاره‌خط AA' نقطهٔ $(\frac{۳+a}{۲},\frac{۸+b}{۲})$ است که چون روی خط $x+۳y-۷=۰$ قرار دارد، پس

$$\frac{۳+a}{۲}+۳\frac{۸+b}{۲}-۷=۰\Rightarrow a+۳b=-۱۳ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، خط $x+۳y-۷=۰$ بر خط راستی که از A و A' می‌گذرد عمود است، در نتیجه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است. بنابراین

$$\frac{۸-b}{۳-a}\times(-\frac{۱}{۳})=-۱\Rightarrow ۸-b=۳(۳-a)\Rightarrow ۳a-b=۱ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $a=-۱$ و $b=-۴$. بنابراین A' نقطهٔ $(-۱,-۴)$ است.

فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو خط موازی با معادله‌های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ باشند. فاصلهٔ دو خط موازی همه جا یکسان است، پس فاصلهٔ این دو خط برابر با فاصلهٔ نقطه‌ای مانند $(x_۰,y_۰)$ روی خط $l_۱$ تا خط $l_۲$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت که فاصلهٔ $l_۱$ و $l_۲$ برابر است با $\frac{|ax_۰+by_۰+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$. از طرف دیگر، چون $(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ای روی خط $ax+by+c=۰$ است، پس مختصات آن در این معادله صدق می‌کند. بنابراین $ax_۰+by_۰+c=۰$، یعنی $ax_۰+by_۰=-c$. به این ترتیب،

$$\text{فاصلهٔ } l_۱ \text{ و } l_۲=\frac{|ax_۰+by_۰+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نتیجه **فاصلهٔ خط‌های موازی** $ax+by+c=۰$ **و** $ax+by+c'=۰$ **برابر است با** $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$.

مسئله ۲۱ **فاصلهٔ خط‌های** $۳x+۴y=۹$ **و** $۶x+۸y=۱۵$ **چقدر است؟**

راه‌حل ابتدا دو طرف معادلهٔ خط $۳x+۴y=۹$ را در ۲ ضرب می‌کنیم تا به صورت $۶x+۸y=۱۸$ دربیاید. اکنون معادلهٔ خط‌ها را به صورت $۶x+۸y-۱۸=۰$ و $۶x+۸y-۱۵=۰$ می‌نویسیم. در این صورت، فاصلهٔ خط‌ها برابر است با

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۱۸-(-۱۵)|}{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}=\frac{|-۳|}{\sqrt{۱۰۰}}=\frac{۳}{۱۰}$$

مسئله ۲۲ **دو ضلع مربعی روی خط‌های** $۵x-۱۲y-۶۵=۰$ **و** $۵x-۱۲y+۲۶=۰$ **هستند. مساحت این مربع چقدر است؟**

راه‌حل طول ضلع مربع مورد نظر فاصلهٔ خط‌های $۵x-۱۲y-۶۵=۰$ و $۵x-۱۲y+۲۶=۰$ است. فاصلهٔ این دو خط برابر است با

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۶۵-۲۶|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۹۱}{۱۳}=۷$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $۷^۲=۴۹$.

مسئله ۲۳ **معادلهٔ خط راستی را بنویسید که با خط‌های** $۹x+۶y-۷=۰$ **و** $۳x+۲y+۴=۰$ **موازی است و فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است.**

راه‌حل ابتدا خط‌های داده شده را به صورت $d_۱:۹x+۶y-۷=۰$ و $d_۲:۹x+۶y+۱۲=۰$ می‌نویسیم. فرض کنید معادلهٔ خط مورد نظر به صورت $۹x+۶y+c=۰$ باشد. چون فاصلهٔ این خط از $d_۱$ و $d_۲$ برابر است، پس

$$\frac{|c-(-۷)|}{\sqrt{۹^۲+۶^۲}}=\frac{|c-۱۲|}{\sqrt{۹^۲+۶^۲}}\Rightarrow|c+۷|=|c-۱۲|\Rightarrow c+۷=\pm(c-۱۲)\Rightarrow c=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ خط مورد نظر $۹x+۶y+\frac{۵}{۲}=۰$ یا $۱۸x+۱۲y+۵=۰$ است.

مسئله ۲۴ **معادلهٔ خط‌های راستی را بنویسید که با خط $4x-3y-15=0$ موازی هستند و فاصلهٔ آن‌ها از این خط برابر ۳ است.**

راه‌حل: چون خط مورد نظر با خط $4x-3y-15=0$ موازی است، معادلهٔ آن به صورت $4x-3y+c=0$ است. چون فاصلهٔ این خط‌ها برابر با ۳ است، پس

$$\frac{|c-(-15)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3\Rightarrow\frac{|c+15|}{5}=3\Rightarrow|c+15|=15\Rightarrow c+15=\pm15\Rightarrow c=0,\quad c=-30$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $4x-3y=0$ و $4x-3y-30=0$ هستند.

تمرین

۱- **نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(7,6)$ و $(-3,4)$ برابر باشد.**

۲- **نقطه‌ای روی محور y پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-5,-2)$ و $(3,2)$ برابر باشد.**

۳- **نقطهٔ $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ پاره‌خط میان نقطه‌های $(-5,3)$ و $(-7,9)$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟**

۴- **محیط مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(0,0)$، $(4,3)$ و $(0,3)$ هستند، چقدر است؟**

۵- **نوع مثلثی را که رأس‌هایش نقطه‌های $(\sqrt{3},1)$، $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ و $(1,\sqrt{3})$ هستند، مشخص کنید.**

۶- **ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(15,5)$، $(5,5)$ و $(10,15)$ هستند، متساوی‌الساقین است.**

۷- **مقدارهای a را طوری پیدا کنید که فاصلهٔ نقطه‌های $(3,8)$ و $(a,2)$ برابر با ۸ باشد.**

۸- **مقدارهای a را طوری تعیین کنید که اگر A، B و C به ترتیب نقطه‌های $(6,-1)$، $(1,3)$ و $(a,8)$ باشند، طول پاره‌خط‌های AB و BC برابر باشد.**

۹- **روی خط $x-2y-4=0$ نقطه‌ای را پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(5,-1)$ و $(2,-4)$ برابر باشد.**

۱۰- **ثابت کنید نقطه‌های $A(a,a)$، $B(-a,-a)$ و $C(-a\sqrt{3},a\sqrt{3})$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند.**

۱۱- **نقطه‌های $A(3,3)$ و $B(-1,1)$ دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند. رأس C را معین کنید.**

۱۲- **مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(-2,5)$ است. مختصات سر دیگر قطری را که از نقطهٔ $(2,3)$ روی این دایره می‌گذرد پیدا کنید.**

۱۳- **نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است. اگر وسط پاره‌خط میان نقطه‌های C و $(4,3)$ نقطهٔ $(1,1)$ باشد و A نقطهٔ $(3,-1)$ باشد، مختصات نقطهٔ B را پیدا کنید.**

۱۴- **در مثلث ABC که رأس‌هایش نقطه‌های $A(-1,3)$، $B(1,-1)$ و $C(5,1)$ هستند، طول میانهٔ وارد از رأس A چقدر است؟**

۱۵- **ضلع‌های مثلث ABC روی خط‌هایی به معادله‌های $AB: y=x+1$، $AC: y=-x+1$ و $BC: y=2x-3$ قرار دارند. طول میانهٔ CM چقدر است؟**

۱۶- **نقطه‌های $(3,5)$ و $(-3,-3)$ وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند. طول ضلع BC چقدر است؟**

۱۷- **نقطه‌های $A(1,3)$، $B(2,0)$ و $C(5,1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس D را پیدا کنید.**

۱۸- **اگر نقطه‌های $(3,2)$ و $(-1,0)$ دو رأس متوازی‌الاضلاعی باشند که قطرهایش در نقطهٔ $(2,-5)$ متقاطع‌اند، رأس‌های دیگر این متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.**

۱۹- **شیب خط راستی که از مبدأ و وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(0,-4)$ و $(8,0)$ می‌گذرد چقدر است؟**

۲۰- **اگر $(a+1,2)$، $(1,a+2)$ و $(\frac{1}{a+1},\frac{2}{a+1})$ سه نقطهٔ متمایز باشند که روی یک خط راست قرار دارند، مقدار a چقدر است؟**

۲۱- وسط پاره‌خطی که نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات را به هم وصل می‌کند، نقطهٔ $(۳,۲)$ است. معادلهٔ خط l را بنویسید.

۲۲- معادلهٔ خط راستی را بنویسید که پاره‌خط میان نقطه‌های $(۵,۴)$ و $(-۷,۰)$ و نیز پاره‌خط میان نقطه‌های $(۵,-۶)$ و $(۰,-۳)$ را نصف می‌کند.

۲۳- محور x پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۴,-۳)$ و $(۱,-۲)$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۲۴- نقطه‌های $A(۲,۱)$، $B(-۲,۳)$ و $C(۴,۵)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادلهٔ خط راستی که میانهٔ نظیر رأس C روی آن قرار دارد و طول این میانه را پیدا کنید.

۲۵- معادلهٔ خط راستی را که از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرد و بر خط $۳x+۴y+۵=۰$ عمود است بنویسید.

۲۶- معادلهٔ خط راستی را بنویسید که بر خط $۴x-y+۸=۰$ عمود باشد و از وسط پاره‌خط میان دو نقطهٔ $(۱,۵)$ و $(۳,۱۱)$ بگذرد.

۲۷- معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۲,-۱۹)$ و $(۶,۱)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۳)$ و $(۵,-۱)$ می‌گذرد عمود است.

۲۸- معادلهٔ خط راستی را بنویسید که بر خط $x-۷y+۵=۰$ عمود است و طول از مبدأ آن ۳ است.

۲۹- نقطهٔ $(-۴,۵)$ یکی از رأس‌های مربعی است که یکی از قطرهایش روی خط راست $۷x-y+۸=۰$ قرار دارد. معادلهٔ خط راستی را که قطر دیگر روی آن است بنویسید.

۳۰- نقطه‌های $A(-۱,۵)$، $B(۰,۰)$ و $C(۲,۲)$ رأس‌های مثلث ABC هستند و D وسط ضلع BC است. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از B می‌گذرد و بر AD عمود است.

۳۱- معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(۱,۱)$ و $(۵,۷)$ را بنویسید.

۳۲- پای عمود وارد از مبدأ بر خط راست l نقطهٔ $(-۲,۹)$ است. معادلهٔ خط l را بنویسید.

۳۳- کدام‌یک از خطهای $x-y+۳=۰$ و $x-۴y-۷=۰$ از مبدأ دورتر است؟

۳۴- فاصلهٔ نقطهٔ $(۴,۲)$ از خط راستی که از نقطه‌های $(۴,۱)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد چقدر است؟

۳۵- معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد و فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۲)$ از آن برابر با ۱ است.

۳۶- معادلهٔ خطهای راستی را بنویسید که بر خط $۲x+y=۰$ عمودند و فاصلهٔ مبدأ از آن‌ها برابر $\sqrt{۵}$ است.

۳۷- در مثلث ABC با رأس‌های $A(۳,۱)$، $B(-۱,۴)$ و $C(۲,-۳)$، طول ارتفاع وارد بر BC چقدر است؟

۳۸- دو ضلع از مستطیلی روی خطهای $۳x-۲y-۵=۰$ و $۲x+۳y+۶=۰$ هستند و نقطهٔ $(-۲,۱)$ یک رأس از این مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟

۳۹- نقطه‌های روی خط $x+y+۳=۰$ را که فاصلهٔ آن‌ها از خط $x+۲y+۲=۰$ برابر $\sqrt{۵}$ است پیدا کنید.

۴۰- مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(۲,۷)$، $(۳,-۱)$ و $(-۵,۶)$ هستند چقدر است؟

۴۱- اگر نقطهٔ $(-۲,۶)$ قرینهٔ نقطهٔ $(۴,۲)$ نسبت به خط راست l باشد، معادلهٔ خط l را بنویسید.

۴۲- قرینهٔ نقطهٔ $(۴,-۱۳)$ را نسبت به خط $۵x+y+۶=۰$ پیدا کنید.

۴۳- فاصلهٔ خطهای $۳x-۴y=۸$ و $۶x-۸y+۵=۰$ چقدر است؟

۴۴- ثابت کنید فاصلهٔ خط $۵x-۲y-۱=۰$ تا خطهای $۵x-۲y-۹=۰$ و $۵x-۲y+۷=۰$ برابر است.

۴۵- معادلهٔ خطهای راستی را بنویسید که با خط $۵x-۱۲y+۲۶=۰$ موازی هستند و فاصلهٔ آن‌ها از این خط برابر ۴ است.

فصل اول

درس اول: هندسهٔ تحلیلی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر A و B و C نقاطی روی محور طول‌ها باشند و $x_A=m-۱$، $x_B=۲m$، $x_C=۳m+۱$ و $۲AB-BC=۳$، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۲- نقطهٔ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۲,۳)$ و $(-۴,۵)$ کدام است؟

۱) $(۳,-۴)$ ۲) $(-۳,۴)$ ۳) $(-۱,۴)$ ۴) $(-۱,۱)$

۳- نقطهٔ $M(۴,-۳)$ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $A(m+۱,۲)$ و $B(۳,m+n)$ است. مقدار mn کدام است؟

۱) -۳۲ ۲) -۳۶ ۳) -۴۸ ۴) -۵۲

۴- نقاط $A(۲,۳)$، $B(۳,۴)$ و $C(۴,۲)$ و D رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مختصات رأس D کدام است؟

۱) $(۳,۱)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۳,-۱)$

۵- نقطه‌های $(۲,a)$، $(۱,۴)$، $(b,۳)$ و $(۳,۲)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند. مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- نقطه‌های $A(-۱,۲)$، $B(۲,۱)$ و $C(۰,۴)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادلهٔ میانه‌ای که از رأس B می‌گذرد کدام است؟

۱) $۵y+۴x=۱۳$ ۲) $۵y-۴x=۱۳$ ۳) $۵y+۴x=-۱۳$ ۴) $۵y-۴x=-۱۳$

۷- اگر A و B نقطه‌های $(۲,۱)$ و $(۴,-۳)$ باشند، فاصلهٔ وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) $\sqrt{۲۰}$

۸- طول میانه‌ای که از رأس A در مثلث ABC با رأس‌های $A(۴,۷)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۳,۴)$ می‌گذرد چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹- اگر فاصلهٔ نقطهٔ $(a,a\sqrt{۳})$ از مبدأ مختصات برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ±۲ ۲) ±۳ ۳) ±۱ ۴) ±۵

۱۰- فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(-۲m,m)$ و $B(۳m,-m)$ برابر $\sqrt{۵۸}$ است. m کدام است؟

۱) ±۲ ۲) $\pm\sqrt{۲}$ ۳) $\pm\sqrt{۸}$ ۴) ±۴

۱۱- نقطه‌های $A(\frac{۱}{۲},-۳)$ و $B(a,۲a)$ مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط AB برابر با $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ باشد، مجموع مقدارهای ممکن a چقدر است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۹}{۵}$

۱۲- نقاط $A(۱,۴)$، $B(k,۵)$ و $C(۴,۱)$ در صفحهٔ مختصات مفروض هستند. اگر $AB=BC$، مقدار k کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۳- اگر A و B نقطه‌های $(a,۲)$ و $(۱,a)$ باشند و فاصلهٔ نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB، از مبدأ مختصات برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴- نقاط $A(-۳,۶)$، $B(-۷,-۳)$ و $C(۲,۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین

۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۱۵- عرض نقطه‌ای روی محور y که از نقطه‌های $(-۴,۰)$ و $(۹,۵)$ به یک فاصله است، چقدر است؟

۱) $\frac{۲۴}{۱۳}$ ۲) $-\frac{۴۵}{۱۳}$ ۳) ۹ ۴) -۱۲

۱۶- فاصلهٔ کدام نقطه روی خط $y=x$ از دو نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۲,۵)$ برابر است؟

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۷}{۲})$ ۲) $(۳,۳)$ ۳) $(۴,۴)$ ۴) $(\frac{۹}{۲},\frac{۹}{۲})$

۱۷- طول نقطه‌ای که روی خط $y=-۲x+۵$ است و فاصله‌اش تا نقطه‌های $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ برابر است چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۸- خطوط $۲x-ay=۱$ و $a^۲x-۴y=۳$ برهم عمودند. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۹- اگر خط‌های $۳x-ky+۶=۰$ و $(k-۵)x+۲y-۴=۰$ بر هم عمود باشند، مقدار k چقدر است؟

۱) -۱۲ ۲) ۱۲ ۳) -۱۵ ۴) ۱۵

۲۰- اگر در مثلث ABC با رأس‌های $A(۳,-۵)$، $B(۲,۱)$ و $C(m,۲)$ زاویهٔ B قائمه باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) -۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) -۸

۲۱- معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ $(-۲,-۱)$ می‌گذرد و بر خط $۳x+۸y=۱۲$ عمود است کدام است؟

۱) $۸x-۳y+۲=۰$ ۲) $۸x-۳y-۲=۰$ ۳) $۳x-۸y+۲=۰$ ۴) $۳x-۸y-۲=۰$

۲۲- معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ $(-۵,۰)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۶)$ و $(-۲,-۳)$ می‌گذرد عمود است کدام است؟

۱) $x+۹y+۴۵=۰$ ۲) $x+۹y-۴۵=۰$ ۳) $-x+۹y+۴۵=۰$ ۴) $x-۹y+۴۵=۰$

۲۳- خط‌های $ax+۲y-۴=۰$ و $۲x+by+۶=۰$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور y قطع می‌کنند. مقدار ab چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) -۹ ۴) -۸

۲۴- اگر خط‌های $۳x+y=۴$، $x-ay=۷$ و $bx+۲y=-۵$ سه ضلع متوالی یک مستطیل باشند، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۲۵- معادلهٔ ارتفاع وارد از رأس A در مثلث ABC با رأس‌های $A(-۲,۴)$، $B(۲,۱)$ و $C(-۱,-۳)$ کدام است؟

۱) $۳x+۴y-۱۰=۰$ ۲) $۳x+۴y+۱۰=۰$ ۳) $۴x+۳y-۱۰=۰$ ۴) $۴x+۳y+۱۰=۰$

۲۶- نقطهٔ $(m,m-۴)$ روی عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ است. مقدار m چقدر است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۴) ۲

۲۷- معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۵,۲)$ و $(-۷,-۴)$ کدام است؟

۱) $x+۳y-۹=۰$ ۲) $۳x+y-۹=۰$ ۳) $x+۳y+۹=۰$ ۴) $۳x+y+۹=۰$

۲۸- نقطه‌های $(۴,۴)$ و $(۲,-۲)$ نسبت به خط $x+ky-۶=۰$ قرینهٔ یکدیگرند. مقدار k چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $\frac{x}{۹}+\frac{y}{۱۲}=۱$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳۶}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۵}$

۳۰- اگر $A(۱,۲)$، $B(-۲,۱)$ و $C(۰,۲)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$

۳۱- فاصلهٔ نقطهٔ $A(k,۲)$ از خط $x+۲y-۱=۰$ برابر $۲\sqrt{۵}$ است. مقدارهای k کدام هستند؟

۱) ۱۳ یا -۷ ۲) ۴ یا -۱۴ ۳) ۷ یا -۱۳ ۴) ۶ یا -۱۴

-۳۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2}, k)$ از خط $12x+9y=1$ برابر ۲ است. مجموع مقدارهای مختلف k چقدر است؟

۱) $\frac{10}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $-\frac{5}{9}$ ۴) $-\frac{10}{9}$

-۳۳ فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط راستی که بر خط به معادلهٔ $2y+x=1$ عمود است و از نقطهٔ $(-1, 2)$ می‌گذرد، چقدر است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{17}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{17}}$

-۳۴ شیب خط راستی که از نقطهٔ $A(-2,1)$ می‌گذرد و فاصله‌اش از نقطهٔ $B(3,1)$ برابر ۴ است کدام است؟

۱) $\pm\frac{4}{3}$ ۲) $\pm\frac{2}{3}$ ۳) $\pm\frac{4}{5}$ ۴) $\pm\frac{3}{5}$

-۳۵ فاصلهٔ نقطهٔ $A(k,-1)$، از خط $y=2x+k$ دو برابر فاصلهٔ A از خط $2y=x-1$ است. مقدار k کدام است؟

۱) ۱ یا $\frac{3}{5}$ ۲) ۱- یا $-\frac{3}{5}$ ۳) ۱ یا $-\frac{3}{5}$ ۴) ۱- یا $\frac{3}{5}$

-۳۶ خط $6x+8y+1=0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1,-1)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{20}$ ۲) $\frac{\pi}{40}$ ۳) $\frac{\pi}{50}$ ۴) $\frac{\pi}{100}$

-۳۷ ضلع BC از مربع ABCD روی خط $3x-4y+2=0$ است و نقطهٔ A $(2,-3)$ است. مساحت این مربع چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۹

-۳۸ معادلهٔ یک قطر مربعی $x+y-4=0$ و مختصات یک رأس آن $(3,2)$ است. محیط مربع کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{2}$

-۳۹ فاصلهٔ خط‌های $x-2y+5=0$ و $3x-6y+9=0$ چقدر است؟

۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{5}$

-۴۰ مساحت مربعی که دو ضلع آن روی خطوط $y=\frac{1}{2}x+1$ و $x-2y+4=0$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $\frac{16}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) ۵

-۴۱ فاصلهٔ دو خط موازی $x-4y+c=0$ و $3x-12y+9=0$ برابر $\sqrt{17}$ است. کوچک‌ترین مقدار c کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴- ۳) ۱۴- ۴) ۲۰-

-۴۲ فاصلهٔ خط‌های موازی $3x+4y=6$ و $4x-ky+4=0$ برابر m است. مقدار $k+m$ چقدر است؟

۱) $\frac{9}{15}$ ۲) $-\frac{27}{5}$ ۳) $-\frac{53}{15}$ ۴) $\frac{44}{15}$

-۴۳ فاصلهٔ کدام خط از خط $3x+4y+10=0$ برابر ۴ است؟

۱) $3x+4y=10$ ۲) $3x+4y=30$ ۳) $3x+4y=20$ ۴) $3x+4y=15$

فصل هشتم

راه‌حل تمرین‌ها

۱ اگر این نقطه را $(a,0)$ فرض کنیم، آن‌گاه

$$\sqrt{(a-7)^2+(0-6)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(0-4)^2}$$

$$(a-7)^2+36=(a+3)^2+16$$

$$a^2-14a+49+36=a^2+6a+9+16\Rightarrow 20a=60\Rightarrow a=3$$

پس نقطهٔ مورد نظر $(3,0)$ است.

۲ اگر این نقطه را $(0,a)$ فرض کنیم، آن‌گاه

$$\sqrt{(0+5)^2+(a+2)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(a-2)^2}$$

$$25+a^2+4a+4=9+a^2-4a+4\Rightarrow 8a=-16\Rightarrow a=-2$$

بنابراین $(0,-2)$ نقطهٔ مورد نظر است.

۳ ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ $A(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ از نقطه‌های $B(3,-5)$ و $C(-7,9)$ را حساب می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(3-\frac{1}{2})^2+(-5+\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$AC=\sqrt{(-7-\frac{1}{2})^2+(9+\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{225}{4}+\frac{441}{4}}=\frac{\sqrt{666}}{2}$$

بنابراین $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{666}}{\sqrt{74}}=\sqrt{9}=3$.

پس پاره‌خط BC توسط نقطهٔ A به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است.

۴ فاصلهٔ نقطه‌های $O(0,0)$، $A(4,3)$ و $B(0,3)$ راحساب می‌کنیم.

$$OA=\sqrt{4^2+3^2}=5,\quad OB=\sqrt{0+3^2}=3,\quad AB=\sqrt{4^2+0^2}=4$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با $5+3+4=12$.

۵ فاصلهٔ نقطه‌های $A(\sqrt{3},1)$، $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$ و $C(1,\sqrt{3})$ را حساب می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}$$

$$AC=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(1-\sqrt{3})^2}$$

$$BC=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}$$

بنابراین $AB=BC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۶ اگر $A(15,5)$، $B(5,5)$ و $C(10,15)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، اندازهٔ ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم

$$AB=\sqrt{(15-5)^2+(5-5)^2}=10$$

$$AC=\sqrt{(15-10)^2+(5-15)^2}=\sqrt{125}$$

$$BC=\sqrt{(5-10)^2+(5-15)^2}=\sqrt{125}$$

بنابراین $BC=AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۷ فاصلهٔ دو نقطه برابر است با $\sqrt{(a-3)^2+(2-8)^2}$. بنابراین

$$\sqrt{(a-3)^2+(-6)^2}=8\Rightarrow (a-3)^2+36=64$$

$$(a-3)^2=28\Rightarrow a-3=\pm\sqrt{28}\Rightarrow a=3\pm\sqrt{28}$$

۸ ابتدا طول پاره‌خط‌های AB و BC را حساب می‌کنیم

$$AB=\sqrt{(1-6)^2+(3+1)^2}=\sqrt{41}$$

$$BC=\sqrt{(a-1)^2+(8-3)^2}=\sqrt{(a-1)^2+25}$$

بنابراین

$$AB=BC\Rightarrow (a-1)^2+25=41\Rightarrow (a-1)^2=16$$

$$\begin{cases}a-1=4\\ a-1=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ a=-3\end{cases}$$

۹ اگر این نقطه $A(a,b)$ باشد، فاصله‌اش را از نقطه‌های $B(5,-1)$ و $C(2,-4)$ حساب می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(a-5)^2+(b+1)^2},\quad AC=\sqrt{(a-2)^2+(b+4)^2}$$

بنابراین

$$AB=AC\Rightarrow (a-5)^2+(b+1)^2=(a-2)^2+(b+4)^2$$

$$a^2-10a+25+b^2+2b+1=a^2-4a+4+b^2+8b+16$$

$$6a+6b=6\Rightarrow a=1-b$$

اکنون توجه کنید که $A(a,b)$ روی خط $x-2y-4=0$ است، پس

$$a-2b-4=0\Rightarrow 1-b-2b-4=0\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=2$$

بنابراین $A(2,-1)$ نقطهٔ مورد نظر است.

۱۰ طول ضلع‌های مثلث ABC را حساب می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(-a-a)^2+(-a-a)^2}=\sqrt{8a^2}$$

$$AC=\sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2+(a\sqrt{3}-a)^2}=\sqrt{8a^2}$$

$$BC=\sqrt{(-a\sqrt{3}+a)^2+(a\sqrt{3}+a)^2}=\sqrt{8a^2}$$

بنابراین $AB=AC=BC$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۱ فرض می‌کنیم $C(a,b)$ رأس سوم مثلث باشد، در این صورت می‌توان نوشت

$$AB=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20},\quad AC=\sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2}$$

$$BC=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}$$

پس

$$AC=BC\Rightarrow (a-3)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$$

$$a^2-6a+9+b^2-6b+9=a^2+2a+1+b^2-2b+1$$

$$2a+b=4\Rightarrow b=4-2a$$

از طرف دیگر،

$$AC=AB \Rightarrow (a-۳)^۲+(b-۳)^۲=۲۰$$

$$(a-۳)^۲+(۴-۲a-۳)^۲=۲۰$$

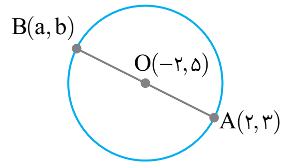
$$a^۲-۶a+۹+۴a^۲-۴a+۱=۲۰ \Rightarrow ۵a^۲-۱۰a-۱۰=۰$$

$$a^۲-۲a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱+\sqrt{۳} \Rightarrow b=۲-۲\sqrt{۳} \\ a=۱-\sqrt{۳} \Rightarrow b=۲+۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

۱۲ چون O وسط AB است، پس

$$-۲=\frac{۲+a}{۲} \Rightarrow a=-۶ \,, \quad ۵=\frac{۳+b}{۲} \Rightarrow b=۷$$

پس $B(-۶,۷)$ سر دیگر قطر است.



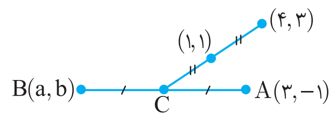
۱۳ با توجه به شکل زیر

$$۱=\frac{x_C+۴}{۲} \Rightarrow x_C=-۲ \,, \quad ۱=\frac{y_C+۳}{۲} \Rightarrow y_C=-۱$$

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲} \Rightarrow -۲=\frac{۳+a}{۲} \Rightarrow a=-۷$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{۲} \Rightarrow -۱=\frac{-۱+b}{۲} \Rightarrow b=-۱$$

پس $B(-۷,-۱)$ نقطهٔ مطلوب است.



۱۴ ابتدا نقطهٔ M وسط ضلع BC را معین می‌کنیم.

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۱+۵}{۲}=۳ \,, \quad y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{-۱+۱}{۲}=۰$$

اکنون طول میانهٔ AM را حساب می‌کنیم.

$$AM=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۰-۳)^۲}=۵$$

۱۵ ابتدا مختصات سه رأس مثلث را حساب می‌کنیم. کافی است توجه کنیم که خط‌های داده شده در چه نقطه‌هایی یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$\begin{cases} AB: y=x+۱ \\ AC: y=-x+۱ \end{cases} \Rightarrow x+۱=-x+۱ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow y=۱$$

یعنی مختصات رأس A به صورت $(۰,۱)$ است. به همین ترتیب

$$\begin{cases} AB: y=x+۱ \\ BC: y=۲x-۳ \end{cases} \Rightarrow x+۱=۲x-۳ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow B(۴,۵)$$

$$\begin{cases} AC: y=-x+۱ \\ BC: y=۲x-۳ \end{cases} \Rightarrow -x+۱=۲x-۳ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

$$y=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow C\left(\frac{۴}{۳},-\frac{۱}{۳}\right)$$

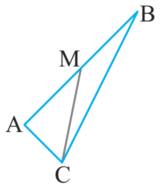
اکنون مختصات M وسط AB را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۰+۴}{۲}=۲ \,, \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱+۵}{۲}=۳$$

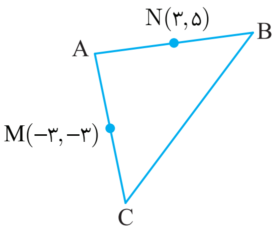
فاصلهٔ نقطه‌های C و M برابر طول میانهٔ CM است.

$$CM=\sqrt{\left(۲-\frac{۴}{۳}\right)^۲+\left(۳+\frac{۱}{۳}\right)^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۱۰۴}{۹}}=\frac{۲}{۳}\sqrt{۲۶}$$



۱۶ طول ضلع BC دو برابر طول پاره‌خط MN است. پس



$$BC=۲MN$$

$$=۲\sqrt{(۳+۳)^۲+(۵+۳)^۲}$$

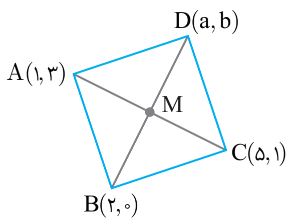
$$=۲۰$$

۱۷ چون M وسط قطرهای AC و BD است، پس

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲} \Rightarrow ۱+۵=۲+x_D \Rightarrow x_D=۴$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲} \Rightarrow ۳+۱=۰+y_D \Rightarrow y_D=۴$$

پس $D(۴,۴)$ رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است.



۱۸ ابتدا توجه کنید که چون $(۲,-۵)$ وسط پاره‌خطی که نقطه‌های $(۳,۲)$ و $(-۱,۰)$ را به هم وصل می‌کند، نیست پس این نقطه‌ها دو رأس مقابل متوازی‌الاضلاع نیستند و دو رأس مجاور هستند. مطابق شکل،

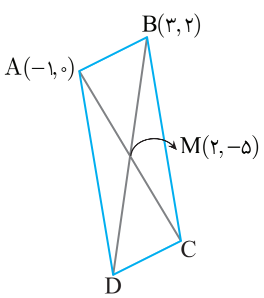
$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{-۱+x_C}{۲} \Rightarrow x_C=۵$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{۲} \Rightarrow -۵=\frac{۰+y_C}{۲} \Rightarrow y_C=-۱۰$$

$$x_M=\frac{x_B+x_D}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{۳+x_D}{۲} \Rightarrow x_D=۱$$

$$y_M=\frac{y_B+y_D}{۲} \Rightarrow -۵=\frac{۲+y_D}{۲} \Rightarrow y_D=-۱۲$$

پس نقطه‌های $C(۵,-۱۰)$ و $D(۱,-۱۲)$ رأس‌های دیگر متوازی‌الاضلاع هستند.



۱۹ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۸,۰)$ و $(۰,-۴)$ نقطهٔ $(\frac{۰+۸}{۲},\frac{-۴+۰}{۲})$ یعنی $(۴,-۲)$ است. شیب خطی که از مبدأ، یعنی نقطهٔ $(۰,۰)$ و نقطهٔ $(۴,-۲)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{-۲-۰}{۴-۰}=-\frac{۱}{۲}$.

۲۰ اگر نقطه‌های A، B و C روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از A و B می‌گذرد، با شیب خطی که از B و C می‌گذرد برابر است. شیب خطی که از نقطه‌های $(a+۱,۲)$ و $(۱,a+۲)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a+۲-۲}{۱-(a+۱)}=\frac{a}{-a}=-۱$.

(توجه کنید که چون نقطه‌ها متمایزند، پس $a\neq۰$، زیرا اگر $a=۰$، آن‌وقت نقطه‌های $(a+۱,۲)$ و $(۱,a+۲)$ یکسان می‌شوند.) شیب خطی که از نقطه‌های $(۱,a+۲)$ و $(\frac{۱}{a+۱},\frac{۲}{a+۱})$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{\frac{۲}{a+۱}-(a+۲)}{\frac{۱}{a+۱}-۱}=\frac{۲-(a+۱)(a+۲)}{۱-(a+۱)}=\frac{۲-(a^۲+۳a+۲)}{-a}=a+۳$$

در نتیجه باید $a+۳=-۱$، بنابراین $a=-۴$.

۲۱ فرض کنید نقطه‌های برخورد خط l با محورهای مختصات نقطه‌های $(a,۰)$ و $(۰,b)$ باشند. در این صورت وسط پاره‌خط میان این نقطه‌ها، نقطهٔ $(\frac{a}{۲},\frac{b}{۲})$ است. به این ترتیب

$$(\frac{a}{۲},\frac{b}{۲})=(۳,۲)\Rightarrow a=۶,\quad b=۴$$

معادلهٔ خطی که از نقطه‌های $(۶,۰)$ و $(۰,۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-۴}{۶-۰}(x-۶)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}(x-۶)\Rightarrow ۲x+۳y-۱۲=۰$$

۲۲ خط مورد نظر از وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۵,۴)$ و $(-۷,۰)$ و نیز وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۶,-۵)$ و $(۰,-۳)$ می‌گذرد. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۵,۴)$ و $(-۷,۰)$ نقطهٔ $(-۱,۲)$ است. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۶,-۵)$ و $(۰,-۳)$ نقطهٔ $(۳,-۴)$ است. معادلهٔ خطی که از نقطه‌های $(-۱,۲)$ و $(۳,-۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۲=\frac{۲-(-۴)}{-۱-۳}\big(x-(-۱)\big)\Rightarrow y-۲=-\frac{۳}{۲}(x+۱)\Rightarrow ۳x+۲y-۱=۰$$

۲۳ معادلهٔ خطی که از نقطه‌های $(-۳,-۴)$ و $(۱,-۲)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-(-۴)=\frac{-۴-(-۲)}{-۳-۱}\big(x-(-۳)\big)\Rightarrow x-۲y-۵=۰$$

محل برخورد این خط با محور x نقطهٔ $(۵,۰)$ است. فاصلهٔ این نقطه را تا دو سر پاره‌خط حساب می‌کنیم:

فاصله تا $(-۳,-۴)$ $=\sqrt{(۵+۳)^۲+(۰+۴)^۲}=\sqrt{۸۰}$

فاصله تا $(۱,-۲)$ $=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۰+۲)^۲}=\sqrt{۲۰}$

نسبت این فاصله‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{۸۰}}{\sqrt{۲۰}}=۲$.
یعنی محور x پاره‌خط مدنظر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.

۲۴ میانهٔ نظیر رأس C از وسط ضلع AB می‌گذرد. وسط ضلع AB، وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۲,۱)$ و $(-۲,۳)$ است که می‌شود نقطهٔ $(\frac{۲-۲}{۲},\frac{۱+۳}{۲})$، یعنی نقطهٔ $(۰,۲)$. معادلهٔ خطی که از نقطه‌های $(۰,۲)$ و $C(۴,۵)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۲=\frac{۲-۵}{۰-۴}(x-۰)\Rightarrow ۳x-۴y+۸=۰$$

طول میانهٔ نظیر رأس C برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $C(۴,۵)$ از نقطهٔ $(۰,۲)$ است، که برابر است با $\sqrt{(۴-۰)^۲+(۵-۲)^۲}=۵$.

۲۵ شیب خط $۳x+۴y+۵=۰$ برابر با $-\frac{۳}{۴}$ است. در نتیجه، اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، باید $-\frac{۳}{۴}\times m=-۱$، در نتیجه $m=\frac{۴}{۳}$. معادلهٔ خطی که شیب آن $\frac{۴}{۳}$ است و از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۲=\frac{۴}{۳}(x-۱)\Rightarrow ۴x-۳y+۲=۰$$

۲۶ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۱,۵)$ و $(۳,۱۱)$ نقطهٔ $(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۱۱+۵}{۲})$ یعنی $(۲,۸)$ است. شیب خط $۴x-y+۸=۰$ برابر با ۴ است. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، باید $۴m=-۱$، در نتیجه $m=-\frac{۱}{۴}$. معادلهٔ خطی که شیب آن $-\frac{۱}{۴}$ است و از نقطهٔ $(۲,۸)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۸=-\frac{۱}{۴}(x-۲)\Rightarrow x+۴y-۳۴=۰$$

۲۷ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(۲,-۱۹)$ و $(۶,۱)$ نقطهٔ $(\frac{۲+۶}{۲},\frac{-۱۹+۱}{۲})$، یعنی $(۴,-۹)$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(-۱,۳)$ و $(۵,-۱)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۳-(-۱)}{-۱-۵}=-\frac{۲}{۳}$. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، باید $(-\frac{۲}{۳})m=-۱$، در نتیجه $m=\frac{۳}{۲}$. معادلهٔ خطی که شیب آن $\frac{۳}{۲}$ است و از نقطهٔ $(۴,-۹)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-(-۹)=\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow ۳x-۲y-۳۰=۰$$

۲۸ شیب خط $x-۷y+۵=۰$ برابر با $\frac{۱}{۷}$ است. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، باید $\frac{۱}{۷}\times m=-۱$، در نتیجه $m=-۷$. چون طول از مبدأ خط مورد نظر ۳ است، پس این خط از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد.

معادلهٔ خطی که شیب آن برابر -۷ است و از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۰=-۷(x-۳)\Rightarrow ۷x+y-۲۱=۰$$

فصل نهم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB=|x_B-x_A|=|۲m-(m-۱)|=|m+۱|$$

$$BC=|x_C-x_B|=|۳m+۱-۲m|=|m+۱|$$

بنابراین

$$۲|m+۱|-|m+۱|=۳\Rightarrow |m+۱|=۳\Rightarrow \begin{cases} m+۱=۳\Rightarrow m=۲\\ m+۱=-۳\Rightarrow m=-۴\end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با ۲- .

۲- گزینهٔ ۲ نقطهٔ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ نقطهٔ $(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$ است. بنابراین، نقطهٔ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۲,۳)$ و $(-۴,۵)$ نقطهٔ $(\frac{-۲-۴}{۲},\frac{۳+۵}{۲})$ یعنی نقطهٔ $(-۳,۴)$ است.

۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مختصات وسط AB را پیدا می‌کنیم

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{m+۱+۳}{۲}=\frac{m+۴}{۲}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۲+m+n}{۲}$$

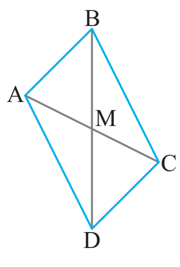
بنابراین

$$\frac{m+۴}{۲}=۴\Rightarrow m+۴=۸\Rightarrow m=۴$$

$$\frac{۲+m+n}{۲}=-۳\Rightarrow ۲+۴+n=-۶\Rightarrow n=-۱۲$$

در نتیجه $mn=-۴۸$.

۴- گزینهٔ ۱ چون قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، مطابق شکل، M وسط AC و BD است. یعنی



$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}$$

$$\frac{۲+۴}{۲}=\frac{۳+x_D}{۲}\Rightarrow x_D=۳$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}$$

$$\frac{۳+۲}{۲}=\frac{۴+y_D}{۲}\Rightarrow y_D=۱$$

پس مختصات D به‌صورت $(۳,۱)$ است.

۵- گزینهٔ ۱ رأس‌های $(۱,۴)$ و $(۳,۲)$ در متوازی‌الاضلاع یا مجاورند یا رأس‌های مقابل هستند بنابراین باید مقدار a و b را از دو رابطه زیر به‌دست آوریم:

$$(\frac{۲+۳}{۲},\frac{a+۲}{۲})=(\frac{b+۱}{۲},\frac{۳+۴}{۲})\Rightarrow\begin{cases}\frac{b+۱}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow b=۴\\ \frac{a+۲}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow a=۵\end{cases}\Rightarrow a-b=۱$$

$$(\frac{۲+b}{۲},\frac{a+۳}{۲})=(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۲+۴}{۲})\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲+b}{۲}=۲\Rightarrow b=۲\\ \frac{a+۳}{۲}=۳\Rightarrow a=۳\end{cases}\Rightarrow a-b=۱$$

توجه شود که در حالت اخیر $(۲,a)=(b,۳)=(۲,۳)$ که تشکیل متوازی‌الاضلاع نمی‌دهد.

۶- گزینهٔ ۱ وسط ضلع AC نقطهٔ $(\frac{-۱+۰}{۲},\frac{۲+۴}{۲})$ یعنی $(-\frac{۱}{۲},۳)$ است. معادلهٔ خطی که از نقطه‌های $(۲,۱)$ و $(-\frac{۱}{۲},۳)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-۱=\frac{۱-۳}{۲+\frac{۱}{۲}}(x-۲)\Rightarrow ۵y+۴x=۱۳$$

۷- گزینهٔ ۲ ابتدا مختصات وسط AB را حساب می‌کنیم

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۴}{۲}=۳\ ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱-۳}{۲}=-۱$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۳,-۱)$ از $O(۰,۰)$ را باید حساب کنیم

$$OM=\sqrt{(۳-۰)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

۸- گزینهٔ ۱ وسط ضلع BC نقطهٔ $(\frac{-۱+۳}{۲},\frac{۲+۴}{۲})$ یعنی $(۱,۳)$ است. طول میانهٔ وارد از رأس A برابر فاصلهٔ نقطهٔ A و این نقطه است که می‌شود $\sqrt{(۴-۱)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$.

۹- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(a,a\sqrt{۳})$ از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{a^۲+(a\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{a^۲+۳a^۲}=\sqrt{۴a^۲}=۲|a|=۶$. بنابراین $a=\pm۳$.

۱۰- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ A تا B برابر است با

$$AB=\sqrt{(۳m+۲m)^۲+(-m-m)^۲}=\sqrt{۲۹m^۲}=\sqrt{۲۹}|m|$$

بنابراین

$$\sqrt{۲۹}|m|=\sqrt{۵۸}\Rightarrow|m|=\sqrt{۲}\Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲=\frac{۱۳}{۴}$$

$$a^۲-a+\frac{۱}{۴}+۴a^۲+۱۲a+۹=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow ۵a^۲+۱۱a+۶=۰$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله، یعنی $-\frac{۱۱}{۵}$.

۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(k-۱)^۲+(۵-۴)^۲}=\sqrt{۱+(k-۱)^۲}$$

$$BC=\sqrt{(k-۴)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+(k-۴)^۲}$$

طبق فرض مسئله، باید $\sqrt{۱+(k-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+(k-۴)^۲}$. در نتیجه

$$k^۲-۸k+۳۲=k^۲-۲k+۲\Rightarrow -۸k+۳۲=-۲k+۲$$

$$-۶k=-۳۰\Rightarrow k=۵$$

۱۳- گزینهٔ ۱ ابتدا مختصات M را حساب می‌کنیم

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{a+۱}{۲}\quad ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۲+a}{۲}$$

بنابراین

$$OM=\sqrt{(\frac{a+۱}{۲}-۰)^{۲}+(\frac{a+۲}{۲}-۰)^{۲}}=۲\Rightarrow\sqrt{\frac{a^{۲}+۲a+۱+a^{۲}+۴a+۴}{۴}}=۲$$

$$\frac{۲a^{۲}+۶a+۵}{۴}=۴\Rightarrow ۲a^{۲}+۶a-۱۱=۰$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با مجموع جواب‌های معادلهٔ اخیر یعنی $\frac{-۶}{۲}=-۳$.

۱۴- گزینهٔ ۲ طول اضلاع را حساب می‌کنیم

$$AB=\sqrt{(-۷+۳)^{۲}+(-۳-۶)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۸۱}=\sqrt{۹۷}$$

$$AC=\sqrt{(۲+۳)^{۲}+(۱-۶)^{۲}}=\sqrt{۲۵+۲۵}=\sqrt{۵۰}$$

$$BC=\sqrt{(۲+۷)^{۲}+(۱+۳)^{۲}}=\sqrt{۸۱+۱۶}=\sqrt{۹۷}$$

بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است. توجه کنید که طول اضلاع در رابطهٔ فیثاغورس صدق نمی‌کنند و مثلث قائم‌الزاویه نیست.

۱۵- گزینهٔ ۳ نقطهٔ مورد نظر را $(۰,a)$ بگیرید. در این صورت

$$\sqrt{(۰-(-۴))^{۲}+(a-۰)^{۲}}=\sqrt{(۰-۹)^{۲}+(a-۵)^{۲}}$$

$$\sqrt{۱۶+a^{۲}}=\sqrt{۸۱+(a-۵)^{۲}}\Rightarrow ۱۶+a^{۲}=۸۱+(a-۵)^{۲}$$

$$۱۶+a^{۲}=۸۱+a^{۲}-۱۰a+۲۵\Rightarrow ۱۰a=۹۰\Rightarrow a=۹$$

۱۶- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ مورد نظر روی خط $y=x$ است، پس به‌صورت (a,a) است. چون فاصلهٔ این نقطه از نقطه‌های $(۱,۲)$ و $(۲,۵)$ برابر است، پس

$$\sqrt{(a-۱)^{۲}+(a-۲)^{۲}}=\sqrt{(a-۲)^{۲}+(a-۵)^{۲}}$$

$$(a-۱)^{۲}+(a-۲)^{۲}=(a-۲)^{۲}+(a-۵)^{۲}$$

$$(a-۱)^{۲}=(a-۵)^{۲}\Rightarrow a^{۲}-۲a+۱=a^{۲}-۱۰a+۲۵$$

$$۸a=۲۴\Rightarrow a=۳$$

پس نقطهٔ مورد نظر $(۳,۳)$ است.

۱۷- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر نقطهٔ (a,b) باشد. چون این نقطه روی خط $y=-۲x+۵$ است، پس $b=-۲a+۵$. چون فاصلهٔ نقطهٔ (a,b) تا نقطه‌های $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ برابر است، پس

$$\sqrt{(a+۱)^{۲}+(b-۲)^{۲}}=\sqrt{(a-۱)^{۲}+(b-۴)^{۲}}$$

$$(a+۱)^{۲}+(b-۲)^{۲}=(a-۱)^{۲}+(b-۴)^{۲}$$

$$(a+۱)^{۲}+(-۲a+۵-۲)^{۲}=(a-۱)^{۲}+(-۲a+۵-۴)^{۲}$$

$$(a+۱)^{۲}+(-۲a+۳)^{۲}=(a-۱)^{۲}+(-۲a+۱)^{۲}$$

$$a^{۲}+۲a+۱+۴a^{۲}-۱۲a+۹=a^{۲}-۲a+۱+۴a^{۲}-۴a+۱\Rightarrow ۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

۱۸- گزینهٔ ۴ شیب خط $۲x-ay=۱$ برابر $\frac{۲}{a}$ است و شیب خط $a^{۲}x-۴y=۳$ برابر $\frac{a^{۲}}{۴}$ است. پس برای اینکه دو خط بر هم عمود باشند، باید $\frac{-a}{۲}=\frac{a^{۲}}{۴}$. در نتیجه

$$a^{۲}+۲a=۰\Rightarrow a(a+۲)=۰\Rightarrow a=-۲\ ,\quad a=۰$$

۱۹- گزینهٔ ۴ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱ است. در نتیجه

$$\frac{۳}{k}\times\frac{-(k-۵)}{۲}=-۱\Rightarrow ۳(k-۵)=۲k\Rightarrow k=۱۵$$

۲۰- گزینهٔ ۲ حاصل‌ضرب شیب خط‌های AB و BC برابر -۱ است. در نتیجه

$$\frac{-۵-۱}{۳-۲}\times\frac{۱-۲}{۲-m}=-۱\Rightarrow -۶\times\frac{-۱}{۲-m}=-۱$$

$$۲-m=-۶\Rightarrow m=۸$$

۲۱- گزینهٔ ۱ شیب خطی که بر خط $۳x+۸y=۱۲$ عمود است، قرینهٔ عکس شیب این خط است، یعنی برابر $\frac{۸}{۳}$ است. خطی که از نقطهٔ $(-۲,-۱)$ با شیب $\frac{۸}{۳}$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y+۲=\frac{۸}{۳}(x+۱)\Rightarrow ۸x-۳y+۲=۰$$

۲۲- گزینهٔ ۱ شیب خطی که از نقطه‌های $(-۱,۶)$ و $(-۲,-۳)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۶+۳}{-۱+۲}=۹$. بنابراین شیب خطی که بر این خط عمود است برابر است با $-\frac{۱}{۹}$. معادلهٔ خطی که شیب آن $-\frac{۱}{۹}$ است و از نقطهٔ $(۰,-۵)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-(-۵)=-\frac{۱}{۹}(x-۰)\Rightarrow x+۹y+۴۵=۰$$

۲۳- گزینهٔ ۳ خط $ax+۲y-۴=۰$ محور y را در نقطهٔ $(۰,۲)$ قطع می‌کند. این نقطه روی خط $۲x+by+۶=۰$ نیز هست، بنابراین

$$۲\times۰+b\times۲+۶=۰\Rightarrow b=-۳$$

چون دو خط برهم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها -۱ است:

$$(-\frac{a}{۲})\times(-\frac{۲}{b})=-۱\Rightarrow a=-b=۳$$

بنابراین $ab=-۹$.

۲۴- گزینهٔ ۲ خط $۳x+y=۴$ بر خط $x-ay=۷$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها -۱ است:

$$-۳\times\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

خط $x-۳y=۷$ بر خط $bx+۲y=-۵$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها -۱ است:

$$\frac{۱}{۳}\times(-\frac{b}{۲})=-۱\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $a+b=۹$.

۲۵- گزینهٔ ۱ شیب خط BC برابر است با $\frac{۱+۳}{۲+۱}=\frac{۴}{۳}$. حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود برهم برابر -۱ است، پس شیب ارتفاع وارد از رأس A برابر با $-\frac{۳}{۴}$ است. معادلهٔ ارتفاع مورد نظر، معادلهٔ خطی است که از نقطهٔ $A(-۲,۴)$ با شیب $-\frac{۳}{۴}$ می‌گذرد:

$$y-۴=-\frac{۳}{۴}(x+۲)\Rightarrow ۳x+۴y-۱۰=۰$$

۲۶- گزینهٔ ۱ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-3,10)$ و $(-9,-2)$ نقطهٔ $(\frac{-3-9}{2},\frac{10-2}{2})$ یعنی $(-6,4)$ است. چون نقطهٔ $(m,m-4)$ روی عمودمنصف مورد نظر است، پس حاصل‌ضرب شیب خطی که از نقطه‌های $(m,m-4)$ و $(-6,4)$ می‌گذرد و خطی که از نقطه‌های $(-3,10)$ و $(-9,-2)$ می‌گذرد برابر -1 است:

$$\frac{m-4-4}{m+6}\times\frac{10+2}{-3+9}=-1\Rightarrow\frac{m-8}{m+6}\times 2=-1\Rightarrow m=\frac{10}{3}$$

۲۷- گزینهٔ ۳ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-5,2)$ و $(-7,-4)$ نقطهٔ $(\frac{-5-7}{2},\frac{2-4}{2})$ یعنی $(-6,-1)$ است و شیب خط میان آن‌ها برابر است با $\frac{2+4}{-5+7}=3$. حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود برهم برابر -1 است. بنابراین شیب عمودمنصف مورد نظر $-\frac{1}{3}$ است و چون از نقطهٔ $(-6,-1)$ می‌گذرد معادلهٔ آن چنین است:

$$y+1=-\frac{1}{3}(x+6)\Rightarrow x+3y+9=0$$

۲۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** وسط پاره‌خطی که نقطه‌های $(4,4)$ و $(2,-2)$ را به هم وصل می‌کند نقطهٔ $(\frac{4+2}{2},\frac{4-2}{2})$ یعنی $(3,1)$ است. چون این نقطه روی خط $x+ky-6=0$ است، پس مختصات آن در معادلهٔ این خط صدق می‌کنند:

$$3+k\times1-6=0\Rightarrow k=3$$

راه‌حل دوم شیب خطی که از نقطه‌های $(4,4)$ و $(2,-2)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4+2}{4-2}=3$ و چون این خط بر خط $x+yk-6=0$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است:

$$(-\frac{1}{k})\times3=-1\Rightarrow k=3$$

۲۹- گزینهٔ ۲ معادلهٔ خط را به‌صورت زیر در می‌آوریم:

$$4x+3y-36=0$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط برابر است با $\frac{|0+0-36|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{36}{5}$.

۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا معادلهٔ خطی را که از نقاط B و C می‌گذرد، می‌نویسیم:

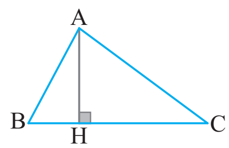
$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{1-2}{-2-0}=\frac{1}{2}$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2}(x+2)$$

پس معادلهٔ BC به‌صورت $x-2y+4=0$ است.

حالا فاصلهٔ نقطهٔ A از BC را حساب می‌کنیم که همان طول AH است:

$$AH=\frac{|1-4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}$$



۳۱- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $(k,2)$ از خط $x+2y-1=0$ برابر است با

$$\frac{|k+4-1|}{\sqrt5}=\frac{|k+3|}{\sqrt5}=2\sqrt5\Rightarrow|k+3|=10\Rightarrow k=7\ ,\ k=-13$$

۳۲- گزینهٔ ۴ اگر خط را به‌صورت $12x+9y-1=0$ بنویسیم، فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2},k)$ از آن برابر است با

$$\frac{|12\times\frac{1}{2}+9\times k-1|}{\sqrt{12^2+9^2}}=2\Rightarrow|9k+5|=2\sqrt{12^2+9^2}=30\Rightarrow 9k=\pm30-5$$

$$k=\frac{1}{9}(\pm30-5)\Rightarrow k=\frac{25}{9},\ k=-\frac{35}{9}$$

بنابراین مجموع مقدارهای مورد نظر k برابر با $-\frac{10}{9}$ است.

۳۳- گزینهٔ ۲ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادلهٔ خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطهٔ $(-1,2)$ بگذرد می‌نویسیم:

$$y-2=2(x+1)\Rightarrow y=2x+4\Rightarrow 2x-y+4=0$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط مطلوب مسئله است که برابر است با

$$OH=\frac{|0-0+4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt5}$$

۳۴- گزینهٔ ۱ معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $A(-2,1)$ با شیب m می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-1=m(x+2)\Rightarrow mx-y+2m+1=0$$

فاصلهٔ $B(3,1)$ از خط بالا برابر است با

$$\frac{|3m-1+2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{5|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

بنابراین

$$\frac{5|m|}{\sqrt{m^2+1}}=4\Rightarrow5|m|=4\sqrt{m^2+1}\Rightarrow25m^2=16m^2+16$$

$$9m^2=16\Rightarrow m^2=\frac{16}{9}\Rightarrow m=\pm\frac{4}{3}$$

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا خط‌ها را به‌صورت $2x-y+k=0$ و $x-2y-1=0$ می‌نویسیم. حالا اگر فاصلهٔ A از دو خط برابر AH و AH′ باشد، آن‌گاه $AH=\frac{|2k+1+k|}{\sqrt{4+1}}$ و $AH'=\frac{|k+2-1|}{\sqrt{1+4}}$.

$$AH=2AH'\Rightarrow|3k+1|=2|k+1|\Rightarrow\begin{cases}3k+1=2k+2\Rightarrow k=1\\3k+1=-2k-2\Rightarrow k=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

۳۶- گزینهٔ ۴ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $6x+8y+1=0$ است.

$$R=\frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}}=\frac{1}{10}$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با $S=\pi R^2=\frac{\pi}{100}$.